

# Numerički model za nelinearnu analizu štapnih sustava

---

**Sikirić, Benjamin**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2018**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:*

**University of Split, Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy / Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:123:867004>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-04**



*Repository / Repozitorij:*

[FCEAG Repository - Repository of the Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy, University of Split](#)



UNIVERSITY OF SPLIT



**SVEUČILIŠTE U SPLITU  
FAKULTET GRAĐEVINARSTVA ARHITEKTURE I GEODEZIJE**

# **DIPLOMSKI RAD**

**Benjamin Sikirić**

**Split, 2018.**

**SVEUČILIŠTE U SPLITU  
FAKULTET GRAĐEVINARSTVA ARHITEKTURE I GEODEZIJE**

**Benjamin Sikirić**

**Numerički model za nelinearnu analizu  
štapnih sustava**

**Diplomski rad**

**Split, 2018.**

# **Numerički model za nelinearnu analizu štapnih sustava**

## ***Sažetak:***

U ovom diplomskom radu napravljen je numerički model s kojim se analiziraju različita djelovanja na štapne sustave, te se provodi kontrola svih dobivenih rezultata s analitičkim rješenjima i eksperimentalnim rezultatima.

## ***Ključne riječi:***

Numerički model, materijalna nelinearnost, geometrijska nelinearnost, štapni sustavi

# **Numerical model for nonlinear analysis of rod systems**

## ***Abstract:***

In this thesis, a numerical model was developed to analyze different effects on the beam structures, and control of all the results obtained with analytical solutions and experimental results, was performed.

## ***Keywords:***

Numerical model, material nonlinearity, geometry nonlinearity, beam structures

**SVEUČILIŠTE U SPLITU  
FAKULTET GRAĐEVINARSTVA, ARHITEKTURE I GEODEZIJE**

STUDIJ: **DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ GRAĐEVINARSTVA**  
KANDIDAT: Benjamin Sikirić  
BROJ INDEKSA: 619.  
KATEDRA: **Katedra za teoriju konstrukcija**  
PREDMET: Građevna statika II

**ZADATAK ZA DIPLOMSKI RAD**

Tema: Numerički model za nelinearnu analizu štapnih sustava

Opis zadatka:

Razviti numerički model za ravninsku analizu štapnih sustava koji uključuje materijalnu nelinearnost.

U Splitu, 15.02.2018.

Voditelj Diplomskog rada:

Doc. dr. sc. Hrvoje Smoljanović  
Doc. dr. sc. Nikolina Živaljić

Predsjednik Povjerenstva  
za završne i diplomske ispite:

Doc. dr. sc. Veljko Srzić

# SADRŽAJ:

<b>1. UVOD</b> .....	1
<b>1.1 OPĆENITO</b> .....	1
<b>1.2 NUMERIČKI MODELI U SVIJETU</b> .....	6
<b>1.3 CILJ RADA I OSNOVNE ZNAČAJKE MODELA</b> .....	6
<b>2. NUMERIČKI MODEL</b> .....	7
<b>2.1 Diskretizacija konstrukcije</b> .....	7
<b>2.2 Proračun čvornih sila uslijed savojnog i uzdužnog deformiranja</b> .....	7
<b>2.3 Integracija vremena jednadžbe pomaka</b> .....	10
<b>3. PRIMJERI ZADATAKA</b> .....	11
<b>3.1 Konzola izložena djelovanju momenta savijanja na slobodnom kraju</b> .....	11
<b>3.2 Prosta greda pod vlastitom težinom</b> .....	14
<b>3.3 Armiranobetonske grede izložene djelovanju sile (Bangash)</b> .....	16
<b>3.4 Štap velike zakrivljenosti</b> .....	20
<b>4. KOD</b> .....	25
<b>5. IZVORI</b> .....	32
<b>5.1 Slike</b> .....	32
<b>5.2 Literatura</b> .....	32

# 1. UVOD

## 1.1 OPĆENITO

Štapovima definiramo elemente čija je duljina znatno veća od njihove širine i visine. Štapovi i štapni elementi okružuju našu okolinu, jedan su od sastavnih elemenata većine konstrukcija koje nas okružuju, te su kao takvi neizostavan dio građevinske struke. Njihova primjena je vrlo poželjna prilikom izgradnje konstrukcije, omogućuje brzu izgradnju i smanjuje potrebu za većom količinom građevinskih materijala. Primjenjuju se u izgradnji stambenih objekata, gospodarskih objekata, mostova, hala, industrijskih postrojenja, kod pomorskih konstrukcija, rešetkastih nosača i sl. Svakodnevno se takvi sustavi usavršavaju, poznavanjem građevne mehanike i statike, mehanike materijala i samih svojstava materijala od kojih se izvode čime se danas došlo do nekih impozantnih konstrukcija.



*Slika 1.1.1. The Gherkin -London*

Kad govorimo o vrsti štapova jedna od glavnih podjela je na vrstu materijala izrade istih.

Poznajemo:

1. Metalne štapove – mogu biti od čelika ili aluminijskih legura. Nalaze primjenu u izradi mostova, zgrada, konstrukcija industrijskih postrojenja (kranovi, transporter i sl.).
2. Drvene štapove – mogu biti od bjelogoričnog ili crnogoričnog drveća. Nalaze primjenu u izradi privremenih cestovnih i željezničkih mostova, izradi dijelova objekata (krovišta, okvira i sl.), izrade privremenih gradilišnih pomoćnih konstrukcija (skele- nosive i nenosive).
3. Armirano betonskih štapova – sastavljeni su od čelične armature zadane debljine šipki i vrste čelika, te betona odgovarajuće klase za zadani štap. Primjenjuju se za izvedbu zgrada, mostova, za izradu pilota, konstrukcija industrijskih postrojenja, gotovo vezani uz svaku armirano betonsku konstrukciju.
4. Kompozitni štapovi – sastavljeni su od dva ili više materijala, koji zajedničkim djelovanjem daju najbolja mehanička svojstva štapu. Izrađuju se ciljano te se primjenjuju u skladu za potrebnu konstrukciju. Jedan od najpoznatijih i najrasprostranjenijih kompozita jest i sam armirani beton.



*Slika 1.1.2. Chaotianmen Yangtze River Bridge*



Sama izvedba štapnih konstrukcija omogućuje ne nužno samo monlitno građenje vezano uz gradilište, već i montažno građenje uz već predgotovljene štapne elemente. Montažno izvođenje konstrukcije omogućuje brzu izvedbu, smanjuje trošak gradilišta (manje vremena potrebno za izgradnju, manja količina radnika), manju potrošnju materijala, osigurava ugradnju elemenata koji su kontrolirani prilikom i nakon izrade. Kao i sve, montažne i polumontažne konstrukcije imaju svoje prednosti i nedostatke.

Glavne prednosti su:

1. Moguća potpuna tvornička izrada u kontroliranim uvjetima
2. Montaža gotovih dijelova
3. Laka prilagodba novoj funkciji
4. Mogućnost demontaže i ponovne ugradnje
5. Mogućnost kombiniranja različitih materijala

Glavni nedostaci:

1. Potrebno održavanje zaštite kod korozije (metalne konstr. i AB konstr.)
2. Posebni premazi za zaštitu od vlage (drvene konstr. i AB konstr. u posebnim uvjetima)
3. Protupožarni premazi (posebno se odnosi na metalne i drvene konst.)



*Slika 1.1.3. Montažna izvedba čelične hale*



*Slika 1.1.4. drveni rešetkasti nosači*

Jednostavnost ili složenost izvođenja konstrukcija sastavljenih od štapnih elemenata prvenstveno ovisi o namjeni objekta. Kao već navedeno oni imaju široku primjenu u građevinarstvu, te time se javlja potreba za kvalitetnim numeričkim modelom koji će opisati ponašanje štapnih elemenata pod utjecajem vanjskih i unutarnjih djelovanja. Iako su danas na tržištu prisutni brojni komercijalni računski paketi, za dokaz uporabljivosti i nosivosti konstrukcije, svi oni se oslanjaju na iste osnovne sustave diferencijalnih jednadžbi. Postoje takve tri jednadžbe:

- 1. Diferencijalna jednadžba ravnoteže** – opisuje vezu vanjskih djelovanja i unutarnjih sila
- 2. Diferencijalna jednadžba kompatibilnosti** – opisuje vezu pomaka i deformacija
- 3. Zakon ponašanja materijala** – uključuje vezu naprezanja i deformacija

Proračun konstrukcija može biti linearni i nelinearni, gdje pojam krutosti opisuje razliku između ove dvije analize. Krutost predstavlja otpornost na deformaciju prouzrokovanu vanjskim ili unutarnjim djelovanjem.

Na veličinu krutosti utječu i sljedeći faktori:

1. Materijal koji se koristi
2. Poprečni presijek
3. Rubni uvjeti

Utjecajem vanjskih djelovanja konstrukcija se deformira time i sama krutost se mijenja zbog jednog ili više navedenih faktora. Kada materijal dosegne granično stanje, njegova svojstva se mijenjaju, te se ovakav pristup koristiti prilikom proračuna primjenom nelinearne analize konstrukcija. Ukoliko je promjena krutosti dovoljno mala, pretpostavlja se da svojstva materijala i oblik konstruktivnog elementa ne mijenja tokom procesa deformacije. Ova pretpostavka predstavlja osnovni princip linearne analize.

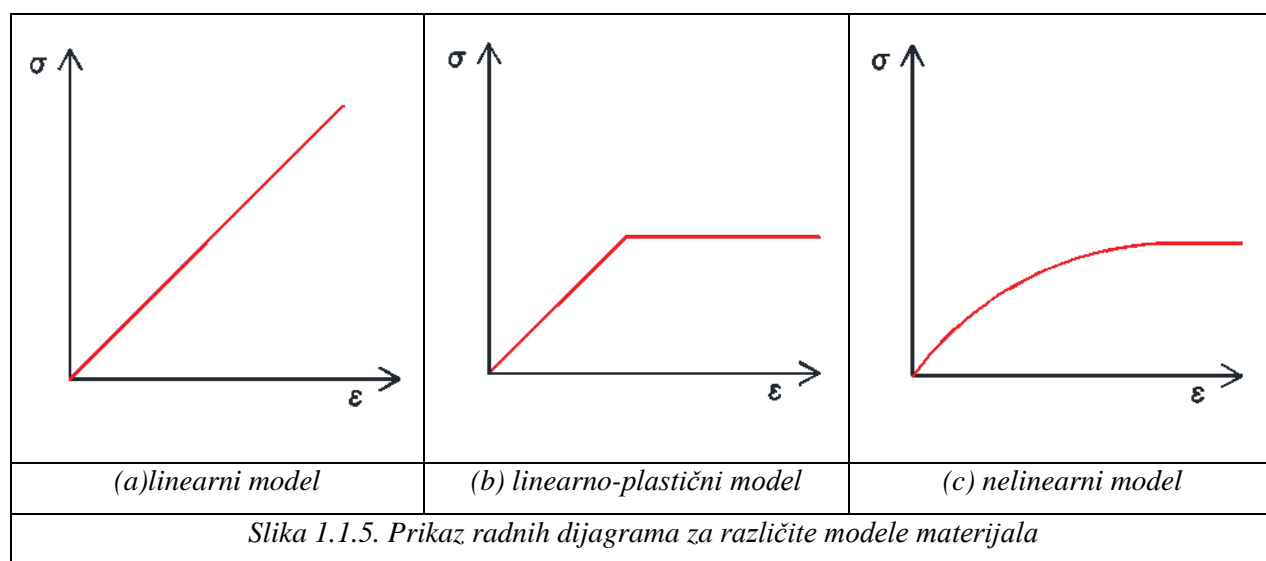
Odnos između djelujuće sile i deformacije je konstantan i ne mijenja se, deformacija se proporcionalno povećava s povećanjem sile koja je primjenjena na statički sustav. Statički sustavi kod linearne analize i linearnog proračuna zadržavaju početnu krutost bez obzira na veličinu djelovanja zadanog opterećenja, sile ili momenta i deformacije koja se javlja usred tih djelovanja. Matrična jednadžba opisuje ponašanje analize modela konačnih elemenata, ona ima vrlo velik broj linearnih algebarskih jednadžbi ovisno o veličini modela. Matrica krutosti  $\mathbf{K}$  ovisi o geometriji, svojstvima materijala i rubnim uvjetima, kod linearne analize je nepromijenjiva te se stoga jednadžbe rješavaju u jednom koraku.

Kod nelinearne analize vrijedi pretpostavka da se krutost konstantno mijenja, time i matrica krutosti, kako odnos između deformacija i pomaka nije konstantno linearan. Matrica krutosti u nelinearnoj analizi zahtijeva stalno nadopunjavanje, zato se koristi iterativni postupak rješavanja matrice jednačbe. Broj iteracija ovisi o vremenu potrebnom da se postignu ispravni rezultati i matematičkoj numeričkoj metodi proračuna pogreške. Neke od matematičkih metoda koje se koriste su : Newtonova metoda, Newton-Rapsonova metoda, metoda bisekcije i slično.

Kada govorimo o nelinearnosti razlikujemo :

**Geometrijska nelinearnost** – promjenom oblika dolazi do promjene krutosti, nelinearno ponašanje je definirano kao geometrijska nelinearnost. Uzima se u obzir kada je deformacija elementa veća od 1/20 veće dimenzije elementa.

**Materijalna nelinearnosti** – promjenom krutosti zbog promjene svojstava materijala pod djelovanjem opterećenja, nelinearno ponašanje uzimamo kao materijalnu nelinearnost. Postoje dvije vrste deformacija konstruktivnih elemenata : privremene (elastične) i trajne (plastične) deformacije.



Linearna analiza koristi linearni model koji predstavlja proporcionalnu vezu između napreznja i deformacija. Što znači da povećanjem napreznja vrijednost deformacije također raste, uklanjanjem napreznja deformacije više nema te se element vraća u svoj prvobitni oblik. Ovakav model ne vrijedi za nelinearnu analizu, jer kod nelinearne analize uzimamo u obzir određen stupanj trajnih deformacija konstruktivnog elementa. Model koji koristimo kod nelinearne analize nazivamo elastični idealno-plastični model materijala, jer se pri određenoj vrijednosti napreznja pojavljuju nepovratne ili plastične deformacije.

## 1.2 NUMERIČKI MODELI U SVIJETU

Štapne konstrukcije ili još poznate kao i linijske konstrukcije jedne su od prvih, kod kojih se razvilo numeričko modeliranje geometrijske i materijalne nelinearnosti. Numeričko modeliranje ostvaruje svoj brzi napredak na području građevinskih konstrukcija 70-tih i 80-tih godina prošlog stoljeća. Ostvarena su numerička modeliranja koja su uvažavala vezu nelinearnih naprezanja i deformacija u analizi armirano-betonskih elemenata, stupova i greda, pri djelovanju momenta savijanja i uzdužne sile [1.]. Nelinearne analitičke i numeričke metode su korištene u određivanju dijagrama nosivosti armirano-betonskih presjeka, u interakciji jednog momenta savijanja i uzdužne sile [2.]. Nelinearnim numeričkim modelima ostvaruje se znatni pomak 80-tih godina na području teorije malih pomaka [3.]. Razvojem računala ostvaruje se mogućnost brzog procesuiranja podatka te ubrzan razvoj i primjena metode konačnih elemenata (MKE) [6.].

Osnovna ideja MKE jest da promatrana domena, kao kontinuum s beskonačnim brojem stupnjeva slobode, se zamjenjuje diskretnim modelom međusobno povezanih konačnih elemenata, s konačnim brojem stupnjeva slobode. Numerička rješenja nalaze se u čvorovima tj. čvornim točkama rješavanjem sustava algebarskih jednažbi. Konačni element je definiran po principu minimuma energije gdje pri svakom zadanom virtualnom pomaku konačnog elementa, prirast rada vanjskih sila na zadanim pomacima čvorova jednak je prirastu rada unutarnjih sila na odgovarajućim deformacijama.

Zahvaljujući MKE razvijeni su različiti programski paketi, istina komercijalni, koji se danas koriste u svim granama inženjerstva pa tako i u građevini. Neki od najučestalijih paketa kao ABQUS- koji se koristi za nelinearnu analizu konačnih elemenata našao je svoju primjenu i u ovom diplomskom radu.

Pored metode konačnih elemenata, u novije vrijeme razvijeni su i numerički modeli za analizu štapnih konstrukcija koji se baziraju na kombiniranoj metodi konačnih i diskretnih elemenata. Jedan od njih je numerički model razvijen od Uzelac [4.] namijenjen za analizu linearno elastičnih konstrukcija, drugi je razvijen od Bangash [5.] koji se zasniva slično kao i metoda konačnih elemenata na rješavanju sustava jednažbi.

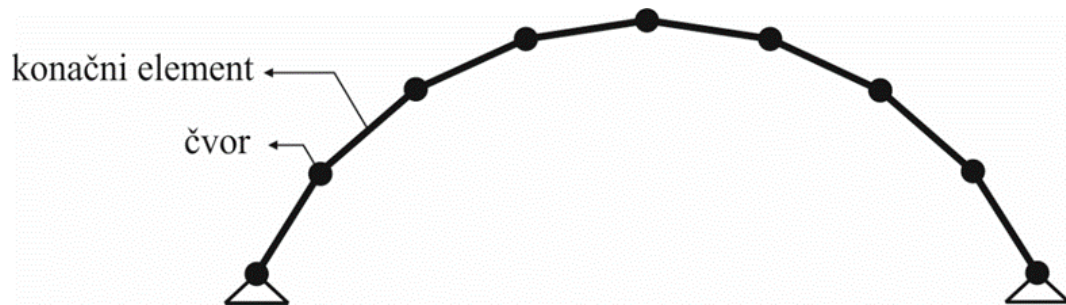
## 1.3 CILJ RADA I OSNOVNE ZNAČAJKE MODELA

Cilj ovog rada je razvoj novog numeričkog modela za analizu štapnih sustava koji između ostalog uzima u obzir materijalnu nelinearnost. Model se bazira na kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenat Munjiza [6.], odlikuje svojom jednostavnošću formulacija, a namijenjen je za statičku, dinamičku i analizu stabilnosti štapnih konstrukcija.

## 2. NUMERIČKI MODEL

### 2.1 Diskretizacija konstrukcije

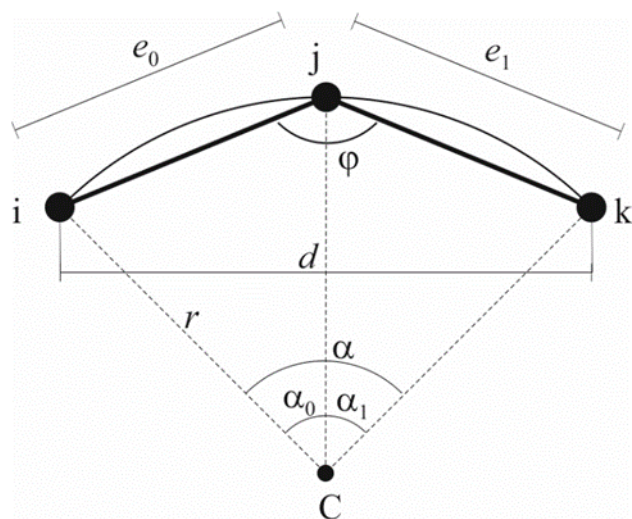
U sklopu ovog numeričkog modela, konstrukcija je modelirana sa dvočvornim linijskim konačnim elementima. Masa konstrukcije koncentrirana je u čvorove konačnih elemenata kao što je prikazano na slici (slika 2.1.1)



Slika 2.1.1 Diskretizacija konstrukcije

### 2.2 Proračun čvornih sila uslijed savojnog i uzdužnog deformiranja

Za potrebe proračuna uzdužnog i savojnog deformiranja i proračuna čvornih sila, čvor konačnog elementa se promatra zajedno sa svoja dva susjedna čvora kao što je prikazano na slici (slika 2.2.1)

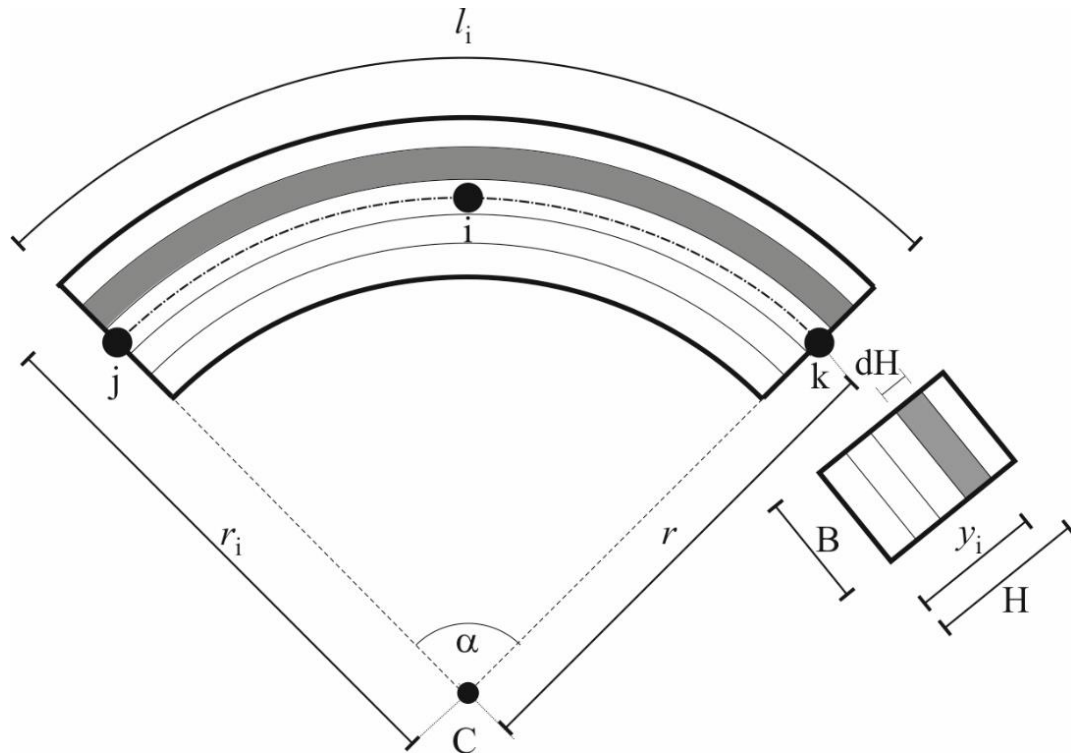


Slika 2.2.1 promatrani čvor sa susjednim čvorovima

Na temelju poznatih koordinata čvorova u bilo kojem vremenskom trenutku, moguće je izračunati radijus zakrivljenosti kružnice koja prolazi kroz čvorove  $i, j$  i  $k$  prema izrazu

$$r = \frac{d}{2 \sin \phi}$$

gdje su  $d$  i  $\phi$  redom duljina između susjednih čvorova i kut među konačnim elementima u čvoru  $i$



Slika 2.2.2 Uslojeni presjek

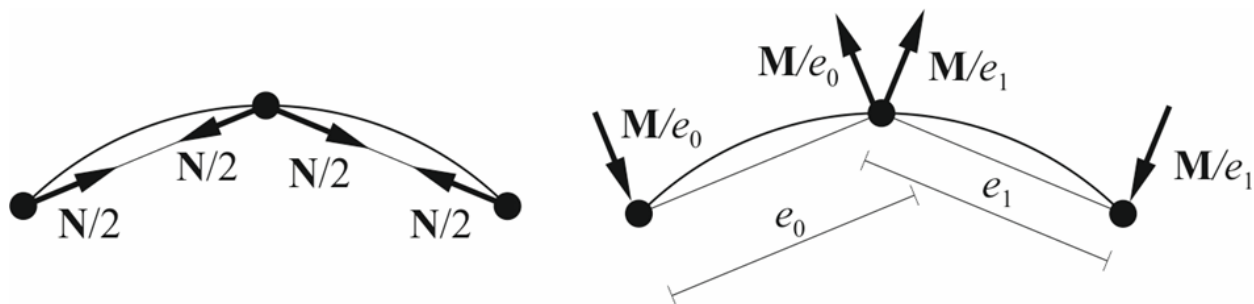
Iz poznatih radijusa zakrivljenosti kružnice i razmaka između susjednih čvorova, moguće je izračunati kutove  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  i  $\alpha$  u bilo kojem vremenskom trenutku prema izrazima

$$\alpha_0 = \arccos\left(\frac{1 - e_0^2}{2r^2}\right)$$

$$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{1 - e_1^2}{2r^2}\right)$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

U sklopu ovog numeričkog algoritma, poprečni presjek je uslojen kao što je to prikazano na slici (slika 2.2.3)



Slika 2.2.3 Diskretizacija luka

Za svaki sloj moguće je izračunati njegovu duljinu  $l_i$  u bilo kojem vremenskom trenutku sukladno izrazu

$$l_i = r_i \alpha$$

Iz razlika duljina sloja u trenutnoj konfiguraciji  $l_{i,t}$  i početnoj konfiguraciji  $l_{i,p}$ , moguće je izračunati deformaciju sloja

$$\varepsilon_i = \frac{l_{i,t} - l_{i,p}}{l_{i,p}}$$

iz koje, na temelju usvojenog zakona ponašanja materijala zadanog vezom između naprezanja i deformacija, slijedi naprezanje  $\sigma_i$  u težištu sloja.

Diferencijalna sila koja djeluje u težištu sloja može se dobiti sukladno izrazu

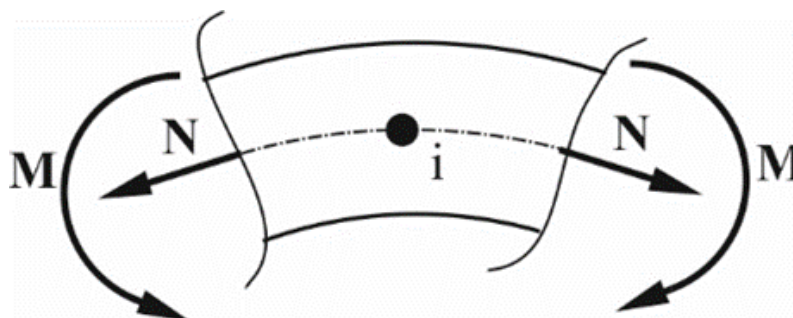
$$dN_i = B dH \sigma_i$$

Ukupna uzdužna sila koja djeluje u težištu presjeka u čvoru  $i$  slika (slika 2.2.4) može se dobiti sukladno izrazu

$$N = \sum_{i=1}^n dN_i$$

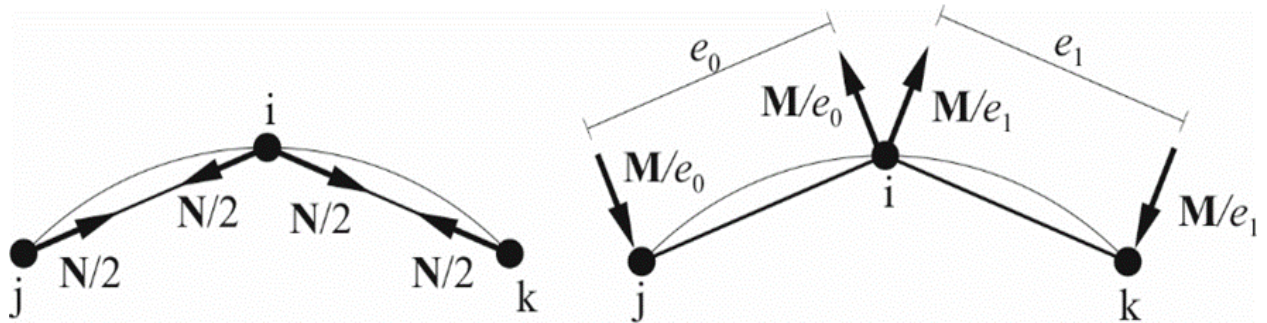
dok se ukupan moment na težište presjeka dobije iz izraza

$$M = \sum_{i=1}^n dN_i \left( y_i - \frac{H}{2} \right)$$



Slika 2.2.4 Moment i uzdužna sila u čvoru

Moment  $I$  uzdužna sila se u obliku ekvivalentnih čvornih sila prenose u čvorove konačnih elemenata na način kako je to prikazano na slici ( slika 2.2.5).



Slika 2.2.5 Ekvivalentne čvorne sile

Prethodni postupak se ponavlja za svaki čvor.

### 2.3 Integracija vremena jednadžbe pomaka

Oblik grede ili luka i njihovog položaja u prostoru u bilo kojem trenutku u vremenu dan je trenutnim koordinatama konačnog elementa čvora  $x_i$ , gdje  $i$  predstavlja broj stupnjeva slobode. Polje brzine i polje ubrzanja definirano je točkastim brzinama  $v_i$ , i točkastim ubrzanjima  $a_i$ .

U kontekstu metode diskretnih konačnih elemenata, shema vremenske integracije u eksplicitnom obliku primjenjena je na svaki čvor i svaki stupanj slobode. Sile u čvorovima od aksijalnog nosivog mehanizma, mehanizma savijanja, vanjskog opterećenja i sile prigušenja se zbrajaju i dobije se ukupna sila u čvoru  $f_i$  povezana s svakim stupnjem slobode. Stoga je dinamička ravnoteža svakog stupnja slobode dana izrazom

$$m_i a_i = f_i$$

gdje  $m_i$  predstavljaju povezanu sa svakim stupnjem slobode.

Za integraciju gore navedene jednadžbe, upotrijebljena je središnja shema integracije vremenskih razlika temeljena na eksplicitnoj integraciji upravljačke jednadžbe za svaki stupanj slobode. Shema se može formulirati na sljedeći način

$$v_{i,t+\Delta t/2} = v_{i,t-\Delta t/2} + \Delta t f_{i,t}/m_i$$

$$x_{i,t+\Delta t} = x_{i,t} + \Delta t v_{i,t+\Delta t/2}$$

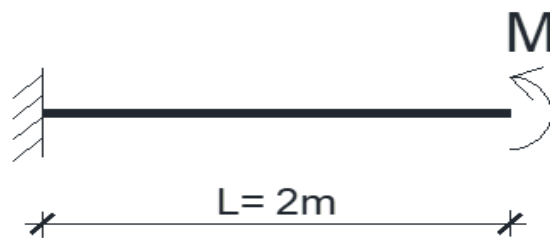
gdje je  $\Delta t$  vremenski korak.



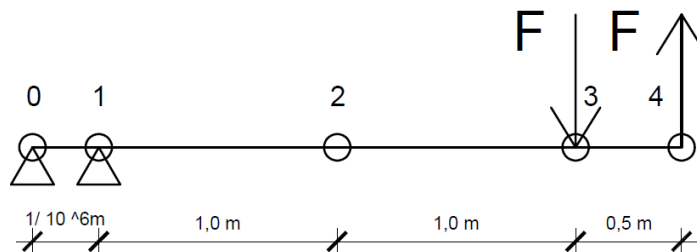
### 3. PRIMJERI ZADATAKA

#### 3.1 Konzola izložena djelovanju momenta savijanja na slobodnom kraju

Konzola izložena djelovanju momenta savijanja na slobodnom kraju, kako je prikazano na crtežu (slika 3.1.1), odabrana je u cilju analize veze između pogreške u analitičkom rješenju u odnosu na broj podjela po visini presjeka. Konzola ima dani modul elastičnosti od  $E=210$  GPa, širina poprečnog presjeka iznosi  $1.0$  m, visina poprečnog presjeka iznosi  $100$  mm.



Slika 3.1.1 Prikaz konzole (modela)



Slika 3.1.2 Prikaz simulacije upetog ležaja i sile momenta na modelu

Analitičko rješenje dano je izrazom:

$$K = \frac{M}{\frac{1}{R}} = EI = 17500 \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

Gdje je  $K$ -krutost,  $M$ -moment,  $R$ -radijus, a odnos  $1/R$  predstavlja zakrivljenost grede.

Moment je simuliran na gredi kao spreg sila  $F$ .

$$F = \frac{M}{0.005} [\text{N}]$$

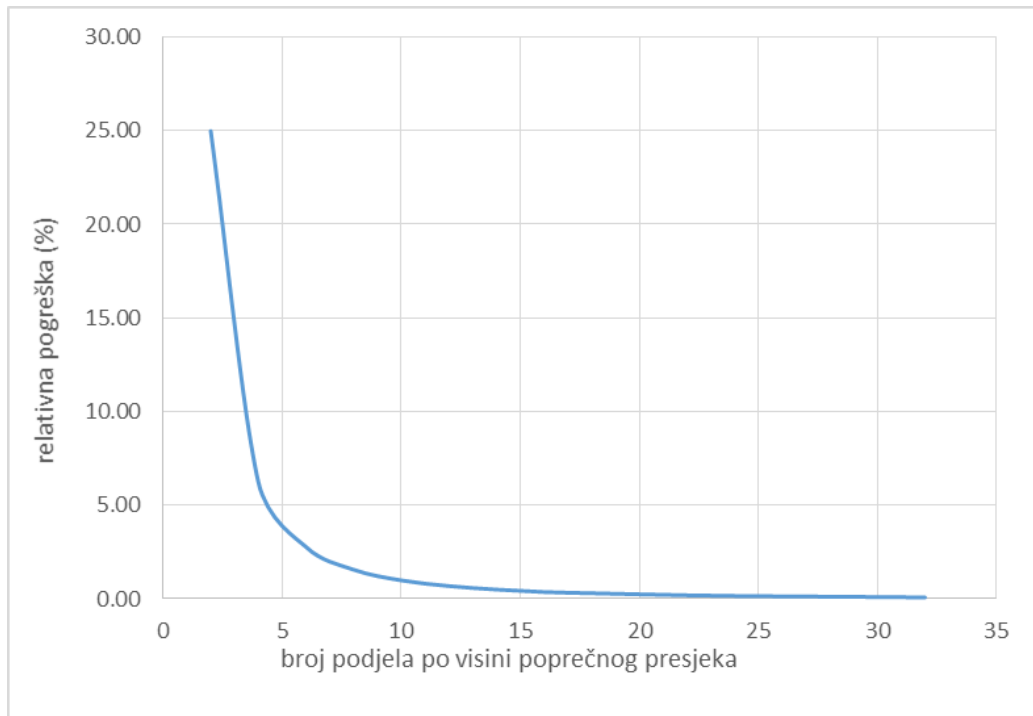
Diskretizacija konzole nije provedena po duljini iste, već samo po visini poprečnog presjeka. U ovisnosti o broju podjela po visini poprečnog presjeka proračunata je greška između analitičkog i numeričkog rješenja, u tablici (tablica 3.1.1) je prikazano smanjivanje pogreške s povećanjem broja podjela.

U ovisnosti o broju podjela po visini poprečnog presjeka proračunata je greška između analitičkog i numeričkog rješenja, u tablici (tablica 3.1.1) je prikazano smanjivanje pogreške s povećanjem broja podjela.

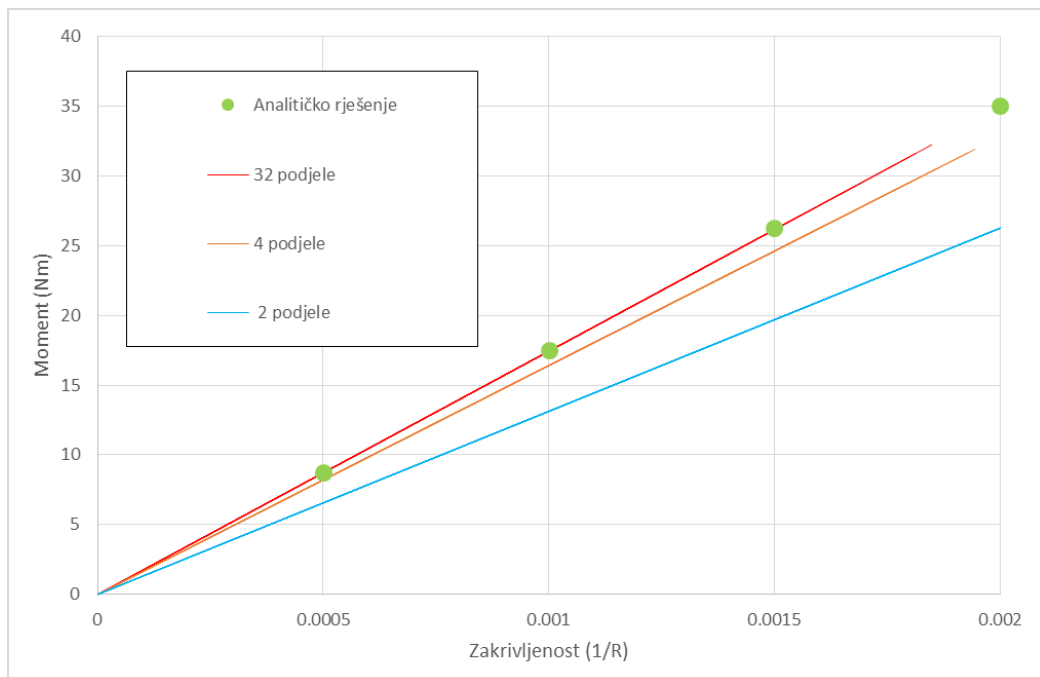
n-broj podjela po visini presjeka	K-krutost [N/m]	Relativna pogreška (%)
2	13128	24.98
4	16405	6.26
6	17013	2.78
8	17226	1.56
10	17326	0.99
12	17379	0.69
14	17412	0.50
16	17435	0.37
18	17447	0.30
20	17457	0.25
22	17466	0.19
24	17472	0.16
26	17476	0.14
28	17479	0.12
30	17482	0.10
32	17486	0.08

Tablica 3.1.1 Tablica diskretizacije, krutosti i pogreške za zadani model

Iz dobivenog proračuna te i priloženog dijagrama (slika 3.1.3 i slika 3.1.4) vidi se da su numerička rješenja prihvatljiva, odnosno kako je predloženi model sposoban pravilno proračunati krutost konstrukcije za zadana djelovanja.



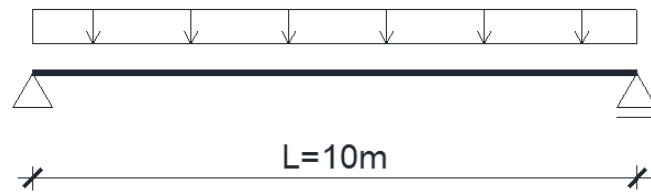
Slika 3.1.3 Dijagram ovisnosti broja podjele i greške za zadani model



Slika 3.1.4 Dijagram krivulje momenta i zakrivljenosti

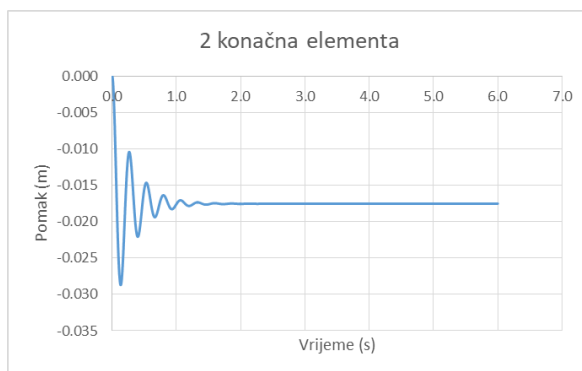
## 3.2 Prosta greda pod vlastitom težinom

Prosta greda pod opterećenjem od vlastite težine odabrana je u cilju analize veze između pogreške u analitičkom rješenju u odnosu na broj podjela po duljini grede (slika 3.2.1). Greda se nalazi u idealno ravnoj geometriji u početnom položaju i uslijed vlastite težine podliježe oscilacijama. Greda ima modul elastičnosti  $E=210$  GPa, gustoća je  $\rho=7850$  kg/m<sup>3</sup>, gravitacijska konstanta je usvojena kao  $g=10$  m/s<sup>2</sup>. Visina poprečnog presjeka je 200mm, dok mu je širina 1m.

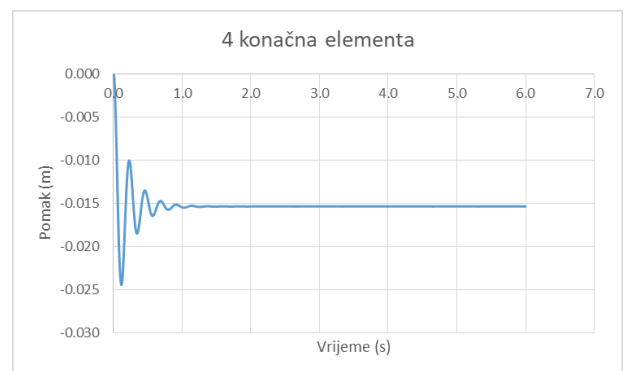


Slika 3.2.1 Prikaz proste grede (modela)

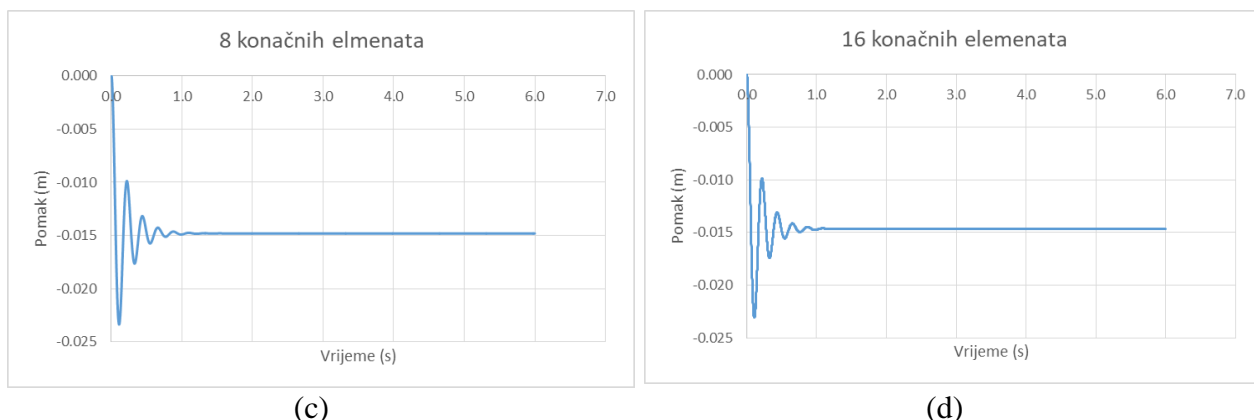
Diskretizacija grede je izvršena koristeći 2, 4, 8, i 16 konačna elementa, samim time i duljina konačnog elementa  $l$  je iznosila  $L/2$ ,  $L/4$ ,  $L/8$  i  $L/16$ . Ravnotežni položaj za pojedinu diskretizaciju moguće je dobiti uvođenjem koeficijenta prigušenja, uslijed čega osciliranjem grede u konačnici zauzima ravnotežni položaj (slika 3.2.2)



(a)



(b)



Slika 3.2.2 Dijagrami prigušenja za različite vrijednosti konačnih elmenata

Ravnotežni progib na sredini grede, dobiven predloženim numeričkim modelom uspoređen je sa numeričkim rješenjem dobivenim programskim paketom ABAQUS (S10), kako je prikazano u tablici (tablica 3.2.1). Numeričko rješenje iz ABAQUS-a dobiveno je upotrebom 100 tročvornih grednih elemenata.

Podjela po elmentima	Progib (mm)	Pogreška (%)
MKDE( $l=l/2$ )	17.520	19.99
MKDE( $l=l/4$ )	15.347	5.11
MKDE( $l=l/8$ )	14.799	1.35
MKDE( $l=l/16$ )	14.662	0.42
MKDE( $l=l/32$ )	14.628	0.18
ABAQUS nelinearno	14.601	0

Tablica 3.2.1 Tablica vrijednosti dobivenih progiba i pogreška

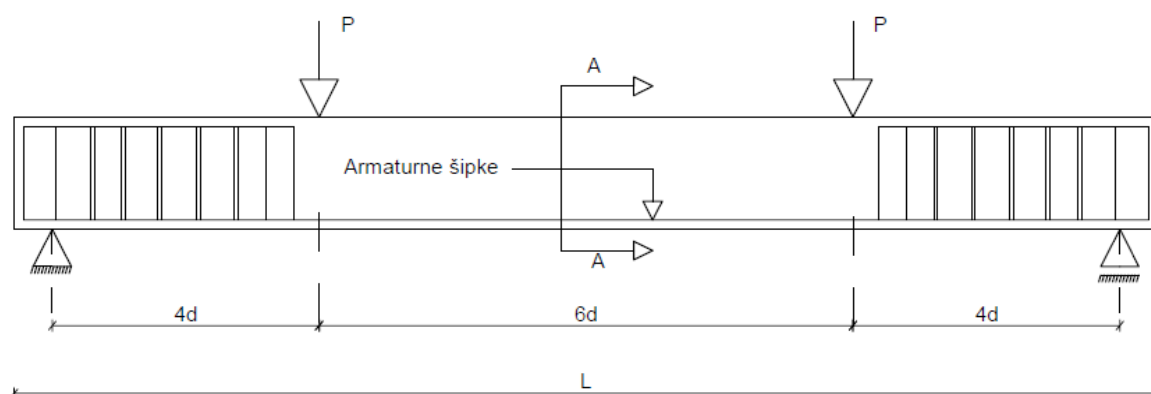
Relativna pogreška numeričkog rezultata dobivena predloženim MKDE modelom, u usporedbi sa geometrijskim nelinearnim rješenjem dobivenim ABAQUS-om, prikazana je u tablici (tablici 3.2.1). Vidljivo je kako povećanjem broja konačnih elmenata numeričko rješenje konvergira ka rješenju dobivenim ABAQUS-om, te da se pogreška smanjuje sa  $l^2$ . Također je vidljivo da je utjecaj debljine grede na pogreški zanemariv, što pokazuje kako numerički model ne pati od problema blokiranja.

### 3.3 Armiranobetonske grede izložene djelovanju sile (Bangash)

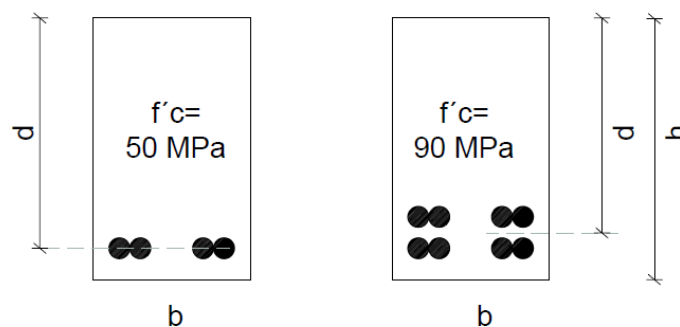
Na temelju eksperimenta predstavljenog od Alca [7.] koji uključuje 12 armiranobetonskih greda betona velike čvrstoće, izloženih djelovanju točkastog opterećenja na dvije lokacije na gredi (slika 3.3.1), provedena je analiza ovim kodom te je izvršena usporedba rezultata s analitičim rješenjima. Detalje ovog pokusa može se naći u članku Alca [7.], dok je suma ukupnih rezultata experimenta dana u nastavku ovog teksta.

Korištene su tri različite debljine greda, nazvane 230 (mala greda), 360 (srednja greda) i 515mm (velika greda). One su kombinirane s dvije klase betona: beton niže čvrstoće (čvrstoća cilindra od 50 MPa) i beton veće čvrstoće (čvrstoća cilindra of 90 MPa).

U ovom radu korištene su samo četiri grede, nazvane SL1, SH1, LL1 i LH1, a njihova svojstva dana su u (tablica 3.3.1).



Slika 3.3.1 Prikaz armiranobetonske grede (modela), s opterećenjem i armaturom



Slika 3.3.2 Poprečni presjeci grede

Greda	$\varnothing$ (mm)	b(mm)	d(mm)	h(mm)	L(mm)
SL1	16	150	230	282	3740
SH1	16	150	230	302	3740
LL1	35.7	335	515	630	8380
LH1	35.7	335	515	630	8380

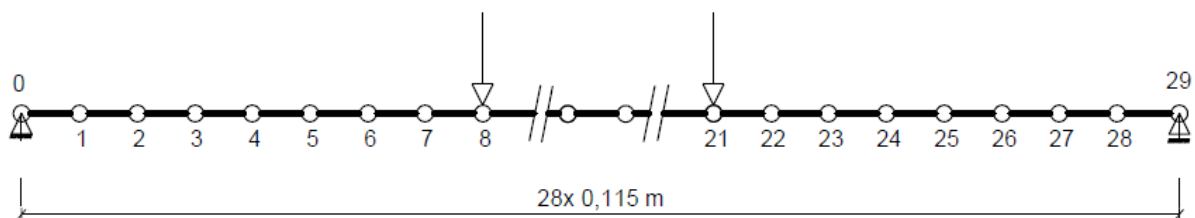
Tablica 3.3.1 Geometrija greda

Greda	f's(Mpa)	fy(Mpa)	$\rho$ (%)
SL1	51.1	410	2.32
SH1	54.2	409	2.32
LL1	90.1	410	4.64
LH1	90.3	406	4.64

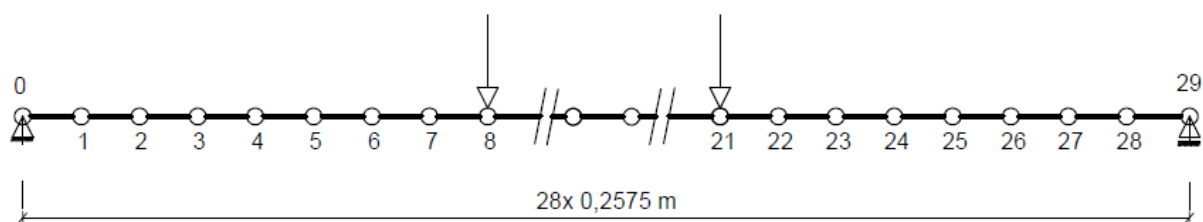
Tablica 3.3.2 Materijalna svojstva greda

Slova i broj određuju svaku gredu. Prvo slovo S ili L odnosi se na malu ili veliku gredu. Drugo slovo L ili H odnosi se na beton niske ili visoke čvrstoće. Alca [7.] je testirala dvije grede svakog tipa do otakazivanja istih (broj 1 ili 2). Svojstva materijala za prvi set greda dana su u (tablici 3.3.2).

Gore naveden grede su modelirane metodom konačnih/diskretnih elemenata. Grede, kao i u experimentu, opterećene su s dva koncentrirana opterećenja. modelirane od oslonca. Diskretizacija konačnim elementima za malene grede je prikazana (slika 3.3.3), dok je za velike grede prikazana (slika 3.3.4).



Slika 3.3.3 Diskretizacija konačnim elementima malih greda



Slika 3.3.4 Diskretizacija konačnim elementima velikih greda

Za sve grede usvojena je sljedeća aproksimacija za krivulju napreznja-deformacija betona

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon - \frac{E^2}{4f_s} \varepsilon^2 \varnothing$$

Gdje  $f_s$  predstavlja čvrstoću betona na savijanje.

Za grede niže čvrstoće betona,  $f_s$  je izračunat koristeći prosječnu čvrstoću cilindra :

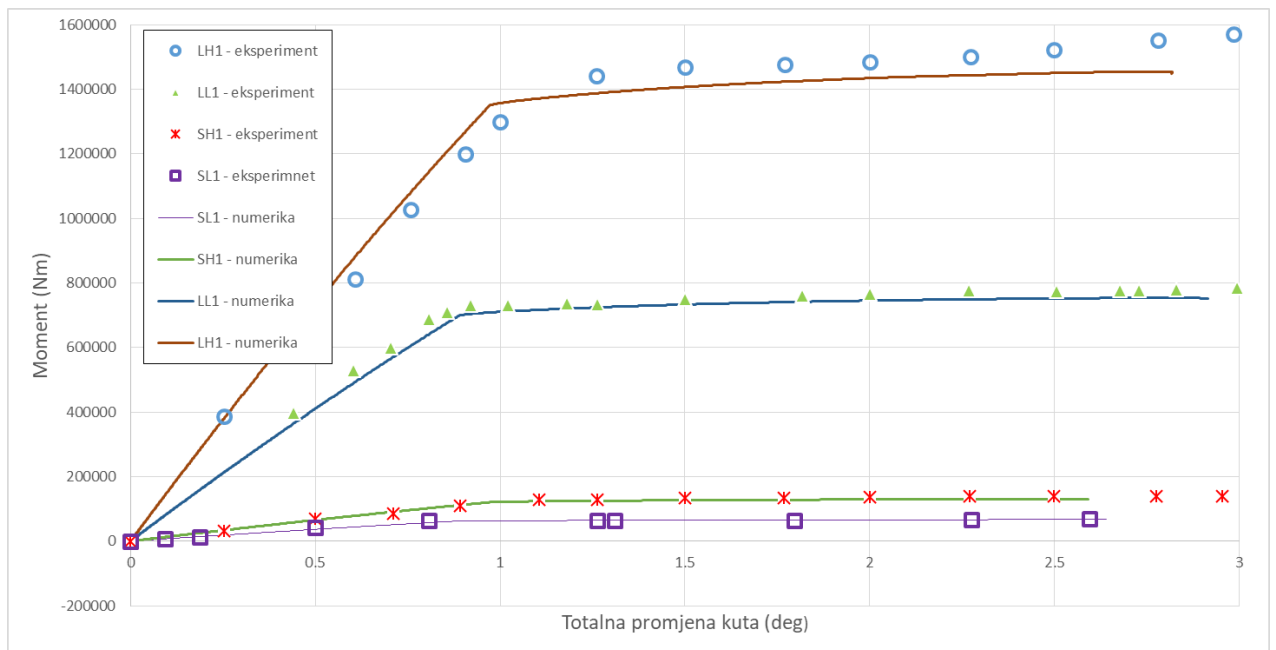
$$f_s = 0.85(51.1 + 54.2 + 52.7)/3 = 44.77 \text{ Mpa}$$

-faktor 0.85 omogućuje razliku između čvrstoće savijanja i čvrstoću otkazivanja cilindra.

Za grede veće čvrstoće betona,  $f_s$  je izračunat koristeći prosječnu čvrstoću cilindra :

$$f_s = 0.85(90.1+90.3 + 90.3)/3 = 76.70 \text{ Mpa}$$



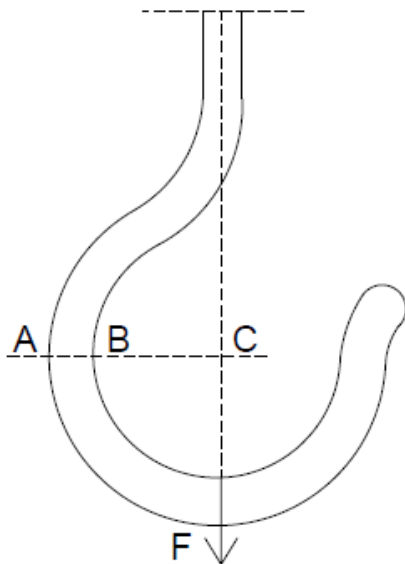


Slika 3.3.5 Usporedba eksperimentalne i numeričke krivulje moment-kut rotacije

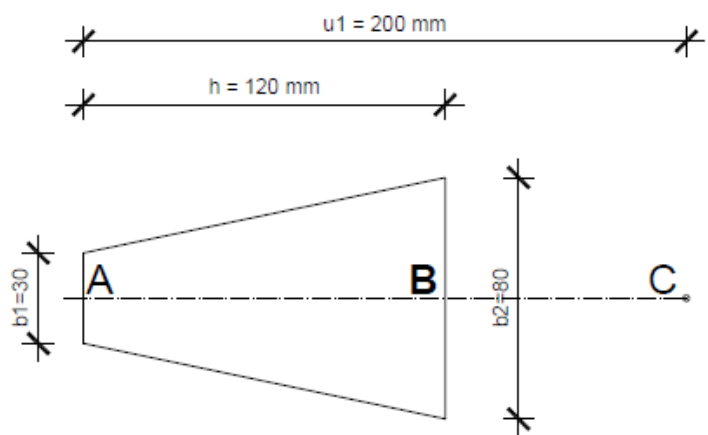
Usporedba rezultata eksperimentalnih-numeričkih krivulja momenata totalne promjene kuta prikazana je na (slika 3.3.5). Totalna promjena kuta mjerena je na duljini 3.7d. Dobiveni rezultati se dosta dobro preklapaju s eksperimentalnim rezultatima što pokazuje točnost izračuna, samim time i dobar odnos između dva seta rezultata. To vrijedi za moment savijanja i krajnje rotacije.

### 3.4 Štap velike zakrivljenosti

Zadana je kuka (slika 3.4.1) trapeznog poprečnog presjeka (slika 3.4.2) Šimić [9.]. Potrebno je odrediti naprezanja u opasnom presjeku kuke A-B. Kuka ima modul elastičnosti  $E = 210 \text{ GPa}$ , polumjer iste je  $R = 200 \text{ mm}$ , a sila koja djeluje na kuku iznosi  $F = 10 \text{ kN}$ . U nastavku je prikazano analitičko rješenje.



Slika 3.4.1 Kuka



Slika 3.4.2 Poprečni presjek kuke

Površina presjeka je:

$$A = \frac{8 + 3}{2} * 12 = 66 \text{ cm}^2$$

Udaljenost težišta trapeza od njegove osnovice:

$$e_0 = \frac{h}{3} * \frac{2b_1 + b_2}{b_1 + b_2} = \frac{12}{3} * \frac{2 * 3 + 8}{3 + 8} = 5,09 \text{ cm}$$

Polumjer zakrivljenosti osi štapa:

$$r = u_2 + e_0 = 8 + 5,09 = 13,09 \text{ cm}$$

$$\frac{r}{h} = \frac{13,09}{12} = 1,09 < 5$$

Štap je velike zakrivljenosti, stoga polumjer zakrivljenosti neutralnog sloja određujemo izrazom:

$$\rho = \frac{h(b_1 + b_2)}{2 \left[ \frac{b_2 * u_1 - b_1 * u_2}{h} * \ln \frac{u_1}{u_2} - (b_2 - b_1) \right]} = \frac{12(3 + 8)}{2 \left[ \frac{8 * 20 - 3 * 8}{12} * \ln \frac{20}{8} - (8 - 3) \right]}$$

$$= 12,26 \text{ cm}$$

Udaljenost neutralne osi od težišta presjeka:

$$\gamma = r - \rho = 13,09 - 12,26 = 0,83 \text{ cm}$$

Statički moment površine poprečnog presjeka s obzirom na neutralnu os:

$$S_y = A * \gamma = 66 * 0,83 = 54,78 \text{ cm}^2$$

Udaljenost krajnjih vlakana od neutralne osi:

$$h_1 = u_1 - \rho = 20 - 12,26 = 7,74 \text{ cm}$$

$$h_2 = -(\rho * u_2) = -(12,26 - 8) = -4,26 \text{ cm}$$

Presjek A-B opasni je presjek jer u tom presjeku moment savijanja M i uzdužna sila N dostižu najveću vrijednost.

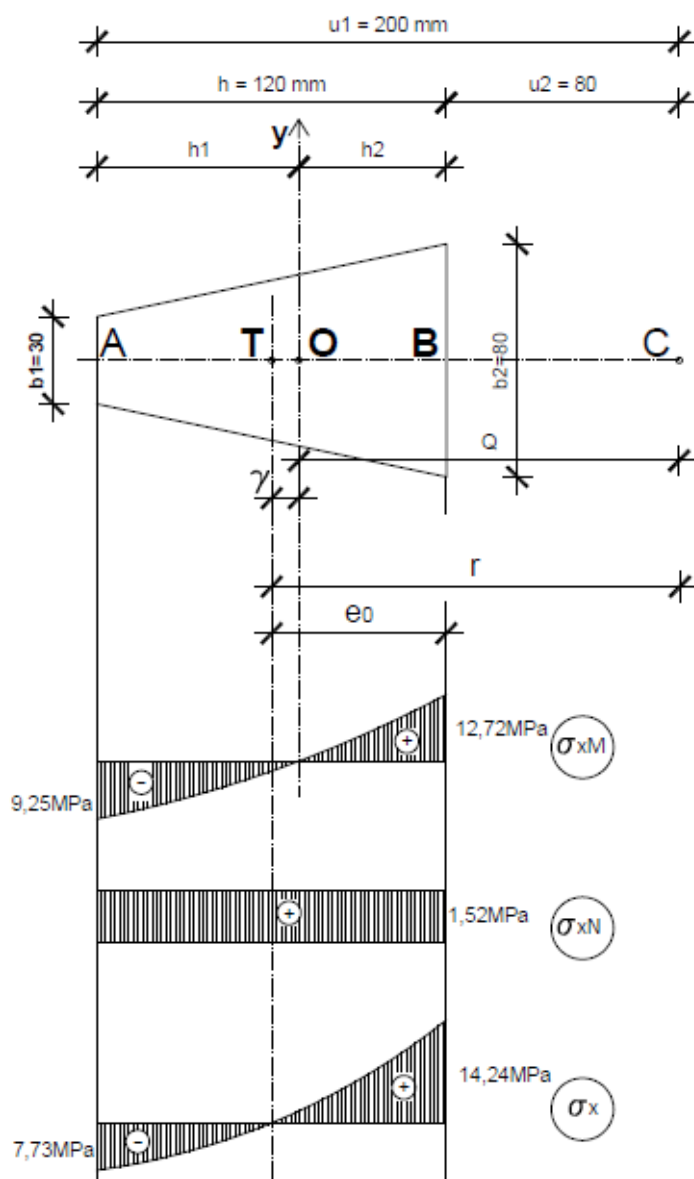
$$M = -F * r = -10 * 0,1309 = -1,309 \text{ kNm}$$

$$N = F = 100 \text{ kN}$$

Ekstremene vrijednosti naprezanja iznose :

$$\begin{aligned} \sigma_{xA} &= \frac{N}{A} + \frac{M}{S_y} * \frac{h_1}{u_1} = \frac{10^4}{66 * 10^{-4}} + \frac{-1,309 * 10^3 * 7,74 * 10^{-2}}{54,78 * 10^{-6} * 20 * 10^{-2}} = 1,52 - 9,25 \\ &= -7,73 \text{ MPa} \end{aligned}$$

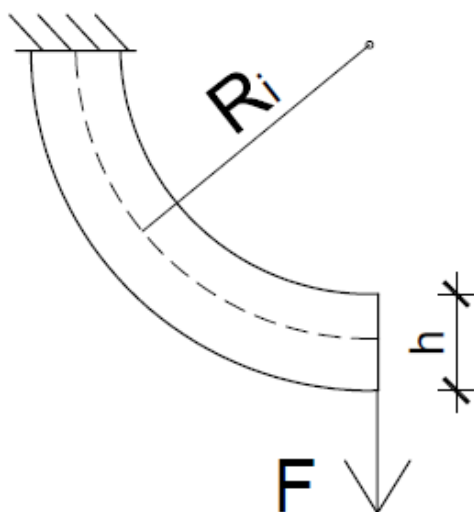
$$\begin{aligned} \sigma_{xB} &= \frac{N}{A} + \frac{M}{S_y} * \frac{h_2}{u_2} = \frac{10^4}{66 * 10^{-4}} + \frac{-1,309 * 10^3 * (-4,26) * 10^{-2}}{54,78 * 10^{-6} * 8 * 10^{-2}} = 1,52 + 12,72 \\ &= 14,24 \text{ MPa} \end{aligned}$$



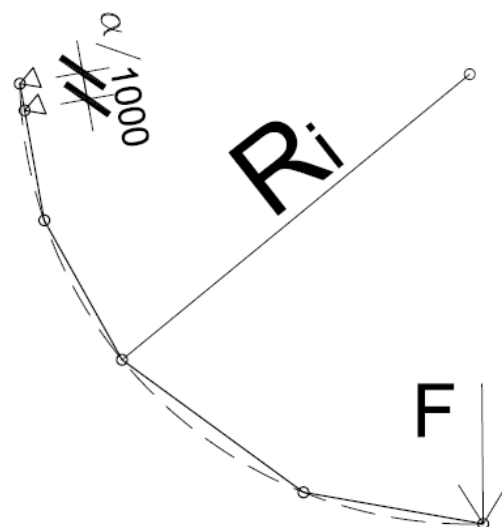
Slika 3.4.3 Dijagrami naprezanja

Dijagrami normalnih naprzanja  $\sigma_{xN}$ ,  $\sigma_{xM}$  i  $\sigma_x = \sigma_{xN} + \sigma_{xM}$  prikazani su na (slika 3.4.3). Budući da opterećenje djeluje u središtu zakrivljenosti, u dijagramu i  $\sigma_x = \sigma_{xN} + \sigma_{xM}$  neutralna os prolazi težištem poprečnog presjeka.

Za numeričko rješenje korišten je sljedeći model kuke ( slika 3.4.4) te je simuliran kao model prikazan (slika 3.4.5).



Slika 3.4.4 Numerički model



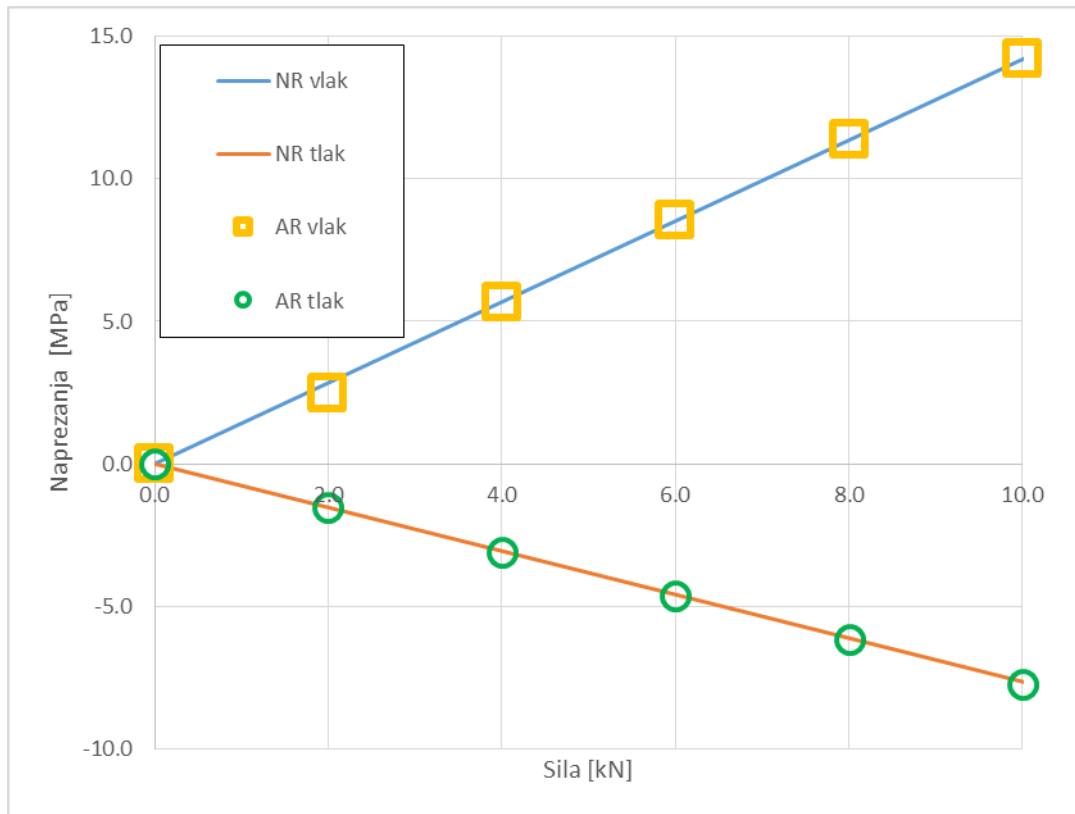
Slika 3.4.5 Diskretizacija sa 4 elementa

Diskretizacija je provedena po duljini kuke, te su dobiveni rezultati u krajnjim točkama opasnog presjeka A-B. U tablici (tablica 3.4.1) je napravljena usporedba rješenja u odnosu na broj diskretizacije te je izračunata relativna pogreška dobivenih rezultata u odnosu na analitičko rješenje.

Točka	Normalno naprezanje (Mpa)			Relativna pogreška (%)	
	4 elementa	32 elementa	Analitičko rješenje	4 elementa	32 elementa
<b>A</b>	-7.24	-7.65	7.73	6.34	1.03
<b>B</b>	14.33	14.21	14.24	0.63	0.21

Tablica 3.4.1 Usporedba dobivenih rezultata naprezanja za različite diskretizacije sustava

Iz dobivenog proračuna te i priloženog dijagrama (slika 3.4.) vidi se da su numerička rješenja prihvatljiva, odnosno kako je predloženi model sposoban pravilno proračunati naprezanja kuke za zadana djelovanja. Na dijagramu NR označava numeričko rješenje za 32 elementa, dok AR označava dobivena analitička rješenja.



Slika 3.4.6 Usporedba analitičkih i numeričkih rješenja s 32 elementa

## 4. KOD

```
/* File Yfd.c */
#include "Yproto.h"
/***** 3D *****/
static void Yfd3BEAM_NONL( /* bending in nonlinear beam element */
    nelem, iprop, dcstec,
    dpeks, dpela, dpemu, dpero,
    d1nccx, d1nccy, d1nccz,
    d1ncix, d1nciy, d1nciz,
    d1nfcx, d1nfcy, d1nfcz,
    d1nmct,
    d1nvcx, d1nvcy, d1nvcz,
    i1elpr, i2elto, area,
    i2nocon, d1ncuri, d2nalfai, d2nleni,
    nnopo, ncstep
)
    INT nelem; INT iprop; DBL dcstec;
    DBL dpeks; DBL dpela; DBL dpemu; DBL dpero;
    DBL *d1nccx; DBL *d1nccy; DBL *d1nccz;
    DBL *d1ncix; DBL *d1nciy; DBL *d1nciz;
    DBL *d1nfcx; DBL *d1nfcy; DBL *d1nfcz;
    DBL *d1nmct;
    DBL *d1nvcx; DBL *d1nvcy; DBL *d1nvcz;
    INT *i1elpr; INT **i2elto; DBL area;
    INT **i2nocon; DBL *d1ncuri; DBL **d2nalfai; DBL **d2nleni;
    INT nnopo; INT; INT ncstep;
{ INT inopo, i;
    DBL e0x, e0y, e0z, e1x, e1y, e1z;
    DBL e0, e1;
    DBL rc, ri;
    DBL calfa0c, calfa1c, alfa0c, alfa1c, alfac, alfa0i, alfa1i, alfai;
    DBL dNfor0, dNfor1, dNfor, Nfor0, Nfor1, Nfor, Mom;
    DBL epsi0, epsi1, epsi, sigmai0, sigmai1, sigmai;
    DBL yi, ric, rii, lic0, lic1, lic, lii0, lii1, lii, leni0, leni1, leni;
    DBL e0xi, e0yi, e0zi, e1xi, e1yi, e1zi;
    DBL nx, ny, nz, n0x, n0y, n0z, n1x, n1y, n1z;
    DBL rx, ry, rz, rxc, ryc, rzc, rxi, ryi, rzi;
    DBL s, drc, dri, x;
    DBL ve0, ve1, ve0x, ve0y, ve0z, ve1x, ve1y, ve1z, vne0x, vne0y, vne0z, vne1x, vne1y, vne1z;
    INT n0, n1;
    DBL f0, f1;
    DBL dist, c, ang, dcurec, dcuri;

    DBL dumpax=600000.0;
    DBL dumpnor=2000.0;

    DBL abar=0.00080425;
    DBL ybar=0.23;
    DBL dyoungbar=200000000000;
    DBL fs=44770000;
    DBL dyoung = 21000000000;

    DBL B = 0.15; //cross section width
    DBL H = 0.282; //cross section height
    INT n = 33; //division number by section height
    DBL dH = H / n; //division section height
```

```

static FILE *contrc=FILENULL; //brisi
if (contrc==FILENULL) //brisi
contrc=fopen("output_con.dat","w"); //brisi

for (inopo = 0; inopo<nnopo; inopo++)
{ n0 = i2nocon[0][inopo];
  n1 = i2nocon[1][inopo];
  if (n0 != (-1) && n1 != (-1))
  { e0x = d1nccx[n0] - d1nccx[inopo];
    e0y = d1nccy[n0] - d1nccy[inopo];
    e0z = d1nccz[n0] - d1nccz[inopo];

    e1x = d1nccx[n1] - d1nccx[inopo];
    e1y = d1nccy[n1] - d1nccy[inopo];
    e1z = d1nccz[n1] - d1nccz[inopo];

    /*Current curvature in beam nodes*/
    V3DLen(dist, e1x - e0x, e1y - e0y, e1z - e0z);
    V3DNor(e0, e0x, e0y, e0z);
    V3DNor(e1, e1x, e1y, e1z);

    V3DDot(c, e0x, e0y, e0z, e1x, e1y, e1z);
    if (c<-1.0)
    { c=-1.0;
      }
    if (c>1.0)
    { c=1.0;
      }
    ang = ACOS(c);

    dcurc = 2 * SIN(ang) / dist;           //current curvature
    dcure = d1ncure[inopo];               //initial curvature

    if (dcurc<EPSILON)
    { alfac=0.0;
      }
    else
    { rc = 1.0 / dcurc;
      calfa0c= 1-(e0*e0) / (2*(rc*rc));
      alfa0c = ACOS(calfa0c);
      calfa1c= 1-(e1*e1) / (2*(rc*rc));
      alfa1c= ACOS(calfa1c);
      alfac=alfa0c+alfa1c;
    }

    alfa0i=d2nalfai[0][inopo];
    alfa1i=d2nalfai[1][inopo];
    alfai=alfa0i+alfa1i;
    leni0=d2nleni[0][inopo];
    leni1=d2nleni[1][inopo];
    leni=leni0+leni1;

    /*Axial force and moment in node*/
    Nfor = 0.0;

```



```

Nfor0 = 0.0;
Nfor1 = 0.0;
Mom = 0.0;
for (i = 0; i < n; i++)
{ yi = 0.5*dH + i*dH;
  if (dcurc<EPSILON)
  { lic0=e0;
    lic1=e1;
    lic=e0+e1;
  }
  else
  { ric = rc -0.5*H+yi;
    lic0=ric*alfa0c;
    lic1=ric*alfa1c;
    lic =ric*alfac;
  }

  if (dcuri<EPSILON)
  { lii0=leni0;
    lii1=leni1;
    lii=leni;
  }
  else
  { ri = 1.0 / dcuri;
    rii = ri -0.5*H + yi;
    lii0 = rii*alfa0i;
    lii1 = rii*alfa1i;
    lii = rii*alfai;
  }
  epsi0 = (lic0 - lii0) / lii0;
  epsi1 = (lic1 - lii1) / lii1;
  epsi = (lic - lii) / lii;

  if (epsi<0.0)
  { sigmai = -(-dyoung*epsi-dyoung*dyoung/(4*fs)*epsi*epsi);
  }
  else
  { sigmai = 0.0;
  }

  if (epsi0<0.0)
  { sigmai0 = -(-dyoung*epsi0-dyoung*dyoung/(4*fs)*epsi0*epsi0);
  }
  else
  { sigmai0 = 0.0;
  }

  if (epsi1<0.0)
  { sigmai1 = -(-dyoung*epsi1-dyoung*dyoung/(4*fs)*epsi1*epsi1);
  }
  else
  { sigmai1 = 0.0;
  }

  dNfor0 = sigmai0*B*dH;
  dNfor1 = sigmai1*B*dH;
  dNfor = sigmai*B*dH;

```

```

Nfor0 = Nfor0 + dNfor0;
Nfor1 = Nfor1 + dNfor1;
Nfor = Nfor+dNfor;
Mom = Mom + dNfor*(0.5*H - yi);

if ((ncstep % 15000 == 0) && (inopo==11) && (i==16) ) //HS //brisi
{ DBLw(contrc,lic/ric*3.7*(lic/lii)*180/MYPI,13); CHRw(contrc,CHRSPACE);
DBLw(contrc,d1nfcy[8]*0.92,13); CHRw(contrc,CHRSPACE)
}

if ((ncstep % 15000 == 0) && (inopo==13) && (i==16) ) //HS //brisi
{ DBLw(contrc,lic/ric*3.7*(lic/lii)*180/MYPI,13); CHRw(contrc,CHRSPACE);
DBLw(contrc,d1nfcy[8]*0.92,13); CHRw(contrc,CHRSPACE)
}

if ((ncstep % 15000 == 0) && (inopo==15) && (i==16) ) //HS //brisi
{ DBLw(contrc,lic/ric*3.7*(lic/lii)*180/MYPI,13); CHRw(contrc,CHRSPACE);
DBLw(contrc,d1nfcy[8]*0.92,13); CHRw(contrc,CHRRETURN);
}

}

// ARMATURA
{ if (((e0x*e1y)-(e0y*e1x))<0.0)
yi = ybar;
else
yi=H-ybar;

if (dcurc<EPSILON)
{ lic0=e0;
lic1=e1;
lic=e0+e1;
}
else
{ ric = rc -0.5*H+yi;
lic0=ric*alfa0c;
lic1=ric*alfa1c;
lic =ric*alfac;
}

if (dcuri<EPSILON)
{ lii0=leni0;
lii1=leni1;
lii=leni;
}
else
{ ri = 1.0 / dcuri;
rii = ri -0.5*H + yi;
lii0 = rii*alfa0i;
lii1 = rii*alfa1i;
lii = rii*alfai;
}

epsi0 = (lic0 - lii0) / lii0;
epsi1 = (lic1 - lii1) / lii1;
epsi = (lic - lii) / lii;

```

```

        sigmai0 = dyoungbar*epsi0;
        if (sigmai0>410000000)
        { sigmai0=410000000;
        }
        sigmai1 = dyoungbar*epsi1;
        if (sigmai1>410000000)
        { sigmai1=410000000;
        }
    sigmai = dyoungbar*epsi;
    if (sigmai>410000000)
    { sigmai=410000000;
    }

    dNfor0 = sigmai0*abar;
    dNfor1 = sigmai1*abar;
    dNfor = sigmai*abar;
    Nfor0 = Nfor0 + dNfor0;
    Nfor1 = Nfor1 + dNfor1;
    Nfor = Nfor+dNfor;
    Mom = Mom + dNfor*(0.5*H - yi);
}

Mom=ABS(Mom);

/*if ((ncstep % 15000 == 0) && (inopo==13)) //HS //brisi
//{ DBLw(contrc,Mom,13); CHRw(contrc,CHRSPACE); DBLw(contrc,d1nfcy[8]*2.06,13);
CHRw(contrc,CHRRETURN); //HS //brisi
//}

/*Update nodal forces due to normal force and dumping*/
ve0=d1nvcx[inopo]*e0x+d1nvcy[inopo]*e0y+d1nvcz[inopo]*e0z;
ve1=d1nvcx[inopo]*e1x+d1nvcy[inopo]*e1y+d1nvcz[inopo]*e1z;

ve0x=ve0*e0x;
ve0y=ve0*e0y;
ve0z=ve0*e0z;

ve1x=ve1*e1x;
ve1y=ve1*e1y;
ve1z=ve1*e1z;

vne0x=d1nvcx[inopo]-ve0x;
vne0y=d1nvcy[inopo]-ve0y;
vne0z=d1nvcz[inopo]-ve0z;

vne1x=d1nvcx[inopo]-ve1x;
vne1y=d1nvcy[inopo]-ve1y;
vne1z=d1nvcz[inopo]-ve1z;

d1nfcx[inopo] = d1nfcx[inopo] + 0.5*Nfor*e0x - 0.5*e0*(dumpax*ve0x+dumpnor*vne0x);
d1nfcy[inopo] = d1nfcy[inopo] + 0.5*Nfor*e0y - 0.5*e0*(dumpax*ve0y+dumpnor*vne0y);
d1nfcz[inopo] = d1nfcz[inopo] + 0.5*Nfor*e0z - 0.5*e0*(dumpax*ve0z+dumpnor*vne0z);
d1nfcx[inopo] = d1nfcx[inopo] + 0.5*Nfor*e1x - 0.5*e1*(dumpax*ve1x+dumpnor*vne1x);
d1nfcy[inopo] = d1nfcy[inopo] + 0.5*Nfor*e1y - 0.5*e1*(dumpax*ve1y+dumpnor*vne1y);
d1nfcz[inopo] = d1nfcz[inopo] + 0.5*Nfor*e1z - 0.5*e1*(dumpax*ve1z+dumpnor*vne1z);

```

```

if (i2nocon[0][n0]==-1 || i2nocon[1][n0]==-1)
{ d1nfcx[n0] = d1nfcx[n0] - Nfor*e0x - 0.5*e0*(dumpax*ve0x+dumpnpr*vne0x);
  d1nfcy[n0] = d1nfcy[n0] - Nfor*e0y - 0.5*e0*(dumpax*ve0y+dumpnpr*vne0y);
  d1nfcz[n0] = d1nfcz[n0] - Nfor*e0z - 0.5*e0*(dumpax*ve0z+dumpnpr*vne0z);
  d1nfcx[inopo] = d1nfcx[inopo] + 0.5*Nfor*e0x;
  d1nfcy[inopo] = d1nfcy[inopo] + 0.5*Nfor*e0y;
  d1nfcz[inopo] = d1nfcz[inopo] + 0.5*Nfor*e0z;
}
else
{ d1nfcx[n0] = d1nfcx[n0] - 0.5*Nfor*e0x;
  d1nfcy[n0] = d1nfcy[n0] - 0.5*Nfor*e0y;
  d1nfcz[n0] = d1nfcz[n0] - 0.5*Nfor*e0z;
}
if (i2nocon[0][n1]==-1 || i2nocon[1][n1]==-1)
{ d1nfcx[n1] = d1nfcx[n1] - Nfor*e1x - 0.5*e1*(dumpax*ve1x+dumpnpr*vne1x);
  d1nfcy[n1] = d1nfcy[n1] - Nfor*e1y - 0.5*e1*(dumpax*ve1y+dumpnpr*vne1y);
  d1nfcz[n1] = d1nfcz[n1] - Nfor*e1z - 0.5*e1*(dumpax*ve1z+dumpnpr*vne1z);
  d1nfcx[inopo] = d1nfcx[inopo] + 0.5*Nfor*e1x;
  d1nfcy[inopo] = d1nfcy[inopo] + 0.5*Nfor*e1y;
  d1nfcz[inopo] = d1nfcz[inopo] + 0.5*Nfor*e1z;
}
else
{ d1nfcx[n1] = d1nfcx[n1] - 0.5*Nfor*e1x;
  d1nfcy[n1] = d1nfcy[n1] - 0.5*Nfor*e1y;
  d1nfcz[n1] = d1nfcz[n1] - 0.5*Nfor*e1z;
}

/*Direction of forces due tu moment in node*/
V3DCro(nx,ny,nz,e0x,e0y,e0z,e1x,e1y,e1z);
V3DNor(x,nx,ny,nz);

V3DCro(n0x,n0y,n0z,nx,ny,nz,e0x,e0y,e0z);
V3DNor(s,n0x,n0y,n0z);

V3DCro(n1x,n1y,n1z,nx,ny,nz,e1x,e1y,e1z);
V3DNor(s,n1x,n1y,n1z);

V3DAdd(rxc,ryc,rzc,e0x,e0y,e0z,e1x,e1y,e1z);
V3DNor(drc,rxc,ryc,rzc);

e0xi=d1ncix[n0]-d1ncix[inopo];
e0yi=d1nciy[n0]-d1nciy[inopo];
e0zi=d1nciz[n0]-d1nciz[inopo];

e1xi=d1ncix[n1]-d1ncix[inopo];
e1yi=d1nciy[n1]-d1nciy[inopo];
e1zi=d1nciz[n1]-d1nciz[inopo];

V3DNor(s,e0xi,e0yi,e0zi);
V3DNor(s,e1xi,e1yi,e1zi);
V3DAdd(rxi,ryi,rzi,e0xi,e0yi,e0zi,e1xi,e1yi,e1zi);
V3DLen(dri,rxi,ryi,rzi);

V3DAss(rx,ry,rz,rxc,ryc,rzc);
V3DSca(rx,ry,rz,(drc-dri));

V3DDot(s,rx,ry,rz,n0x,n0y,n0z);
if(s>R0)
{ n0x=-n0x; n0y=-n0y; n0z=-n0z;
}

```

```

else
{ n1x=-n1x; n1y=-n1y; n1z=-n1z;
}

/*Update nodal forces due to moment*/
f0 =Mom/e0;
f1 =Mom/e1;
d1nfcx[n0]=d1nfcx[n0]+f0*n0x;
d1nfcy[n0]=d1nfcy[n0]+f0*n0y;
d1nfcz[n0]=d1nfcz[n0]+f0*n0z;
d1nfcx[n1]=d1nfcx[n1]+f1*n1x;
d1nfcy[n1]=d1nfcy[n1]+f1*n1y;
d1nfcz[n1]=d1nfcz[n1]+f1*n1z;
d1nfcx[inopo]=d1nfcx[inopo]-f0*n0x-f1*n1x;
d1nfcy[inopo]=d1nfcy[inopo]-f0*n0y-f1*n1y;
d1nfcz[inopo]=d1nfcz[inopo]-f0*n0z-f1*n1z;

}
}
}

/*****PUBLIC*****/
void Yfd( ydc, yde, ydn, ydpe, ydpn /*** nodal forces ***/
)
YDC ydc; YDE yde; YDN ydn; YDPE ydpe; YDPN ydpn;
{ INT iprop,inopo;

/* zero nodal forces and mases */
for(inopo=0;inopo<ydn->nnopo;inopo++)
{ if(ydn->nnodim>0)
{ ydn->d2nft[0][inopo]=R0;
}
if(ydn->nnodim>1)
{ ydn->d2nft[1][inopo]=R0;
}
if(ydn->nnodim>2)
{ ydn->d2nft[2][inopo]=R0;
}
}

for(iprop=0;iprop<ydpe->nprop;iprop++)
{ Yfd3BEAM_NONL( /* bending in nonlinear beam */
yde->nelem, iprop, ydc->dcstec,
ydpe->d1peks[iprop], ydpe->d1pela[iprop], ydpe->d1pemu[iprop], ydpe->d1pero[iprop],
ydn->d2ncc[0], ydn->d2ncc[1], ydn->d2ncc[2],
ydn->d2nci[0], ydn->d2nci[1], ydn->d2nci[2],
ydn->d2nft[0], ydn->d2nft[1], ydn->d2nft[2],
ydn->d1nmct,
ydn->d2nvc[0], ydn->d2nvc[1], ydn->d2nvc[2],
yde->i1elpr, yde->i2elto, ydpe->d1pea[iprop],
ydn->i2nocon, ydn->d1ncuri, ydn->d2nalfai, ydn->d2nleni,
ydn->nnopo, ydc->ncstep
);
}
}
}

```

## 5. IZVORI

### 5.1 Slike

[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Chaotianmen\\_Yangtze\\_River\\_Bridge.JPG](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Chaotianmen_Yangtze_River_Bridge.JPG)

<https://www.commerciallistings.cbre.co.uk/en-GB/listings/property/details/GB-Plus-434311/the-gherkin-30-st-mary-axe-ec3a-8et?view=isLetting>

<http://www.buterin.hr/gredelj.html>

<http://www.mali-g.com/konstrukcije/>

<http://eur-lex.europa.eu/legal-content/HR/TXT/?uri=CELEX%3A42016X0218%2801%29>

### 5.2 Literatura

1. Ngo D. And Scordelis A.C., FINITE ELEMENT ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE BEAMS, Journal of American Concrete Institute, Vol. 64, No.3, pp 152-63, 1967.
2. Devivo L. and Rosati L., ULTIMATE STRENGTH ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE SECTIONS SUBJECT TO AXIAL FORCE AND BIAXIAL BENDING, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.166, No.3-4, pp 261-287, 1998.
3. Fafitis A., INTERACTION SURFACES OF REINFORCED CONCRETE SECTIONS IN BIAXIAL BENDING BY GREEN'S THEOREM, Computing in Civil and Building Engineering, Vol.1, pp. 90-97, 2000.
4. I. Uzelac, Metoda konačno-diskretnih elemenata u statičku i dinamičku analizu tankih lukova i ljusaka, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije Sveučilišta u Splitu, Split, 2015.
5. Munjiza A., T.Bangash, N.W.M John The combined finite-discrete element method for structural failure and collapse, Queen Mary and Westfield college, University of London, UK, 2002.
6. Munjiza A., THE COMBINED FINITE DISCRETE ELEMENT METHOD, Queen Mary, University of London, UK, Vol.1, 2004.
7. Alca N., Scott DBA, MacGregor JG. Effect of size on flexural behaviour of high strength concrete beams. ACI Struct J. 1997;59-67.
8. Munjiza A, Andrewa KRF, White JR: Discretized contact solution for combined finite-discrete method. In: 5th ACME Conference, London UK, 1997.p. 96-100.
9. V. Šimić, Otpornost materijala II, I. Izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1995.