

# Analiza prirodnih frekvencija 2D mikropolarnog kontinuuma

---

Grbac, Laura; Jelenić, Gordan

*Source / Izvornik:* **Zajednički temelji 2023. - uniSTem : deseti skup mladih istraživača iz područja građevinarstva i srodnih tehničkih znanosti, Split, 14.-17. rujna, 2023. : zbornik radova, 2023, 114 - 119**

**Conference paper / Rad u zborniku**

*Publication status / Verzija rada:* **Published version / Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

<https://doi.org/10.31534/10.ZT.2023.14>

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:123:018715>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-02**



*Repository / Repozitorij:*

[FCEAG Repository - Repository of the Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy, University of Split](#)



UNIVERSITY OF SPLIT

dabar

DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI



UDRUGA  
HRVATSKIH  
GRAĐEVINSKIH  
FAKULTETA



<https://doi.org/10.31534/10.ZT.2023.14>

## ANALIZA PRIRODNIH FREKVENCIJA 2D MIKROPOLARNOG KONTINUUMA

Laura Grbac<sup>1</sup>, Gordan Jelenić<sup>1</sup>

(1) Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Hrvatska,

[laura.zikovic@uniri.hr](mailto:laura.zikovic@uniri.hr); [gordan.jelenic@uniri.hr](mailto:gordan.jelenic@uniri.hr)

### Sažetak

U ovome radu provedena je vibracijska analiza 2D mikropolarnog (Cosseratovog) kontinuuma na numeričkim primjerima konzolne te obostrano upete ravninske grede. Za diskretizaciju razmatranih sustava primjenjuju se novorazvijeni kvadratni izoparametarski 2D mikropolarni konačni elementi s četiri ili devet čvorova, pri čemu se za interpoliranje polja pomaka razmatraju dvije vrste interpolacijskih funkcija temeljene na konceptu nepomičnog pola (*fixed-pole* interpolacija): originalna i poboljšana (vezana interpolacija). Njihove konvergencijske krivulje za prve dvije prirodne frekvencije razmatranih numeričkih primjera uspoređuju se s rezultatima dobivenim primjenom standarde Lagrangeove interpolacije gdje poboljšana *fixed-pole* interpolacija uglavnom najbrže konvergira k točnom rješenju.

*Ključne riječi: Cosseratova elastičnost, mikropolarni kontinuum, MKE, fixed-pole koncept, vezana interpolacija*

## ANALYSIS OF NATURAL FREQUENCIES IN A 2D MICROPOLAR CONTINUUM

### Abstract

The vibrational analysis of a two-dimensional micropolar (Cosserats') continuum has been presented in this paper through numerical examples of a cantilever and a double-clamped planar beam. Newly developed quadrilateral 2D finite elements based on micropolar elasticity, with four or nine nodes, have been used to discretize the considered beams. Two types of *fixed-pole* interpolation have been applied to interpolate the displacement field: original and enhanced (linked interpolation). Their convergence curves for the first two natural frequencies of the analyzed numerical examples are compared with the results obtained using conventional Lagrangian interpolation, where the enhanced fixed-pole interpolation generally provides faster convergence.

*Keywords: Cosserat elasticity, micropolar continuum, FEM, fixed-pole concept, linked interpolation*

## 1. Uvod

Klasična (Cauchyjeva) teorija elastičnosti može vjerno opisati ponašanje homogenih materijala, no eksperimentalno je pokazano da to nije slučaj kod materijala s izraženijom mikrostrukturom [1] kao što je npr. pjena. Također, klasična teorija ne može obuhvatiti tzv. *size-effect* fenomen koji je uočen kod manjih uzoraka koji se ponašaju kruće od većih uzoraka istog materijala pri savijanju ili torziji [2]. Iz tog razloga su se razvile razne generalizirane teorije kontinuuma među koje spada i ovdje razmatrana **mikropolarna (Cosseratova) teorija**. U klasičnoj teoriji je statička interakcija između dvije čestice tijela opisana samo vektorom sila, dok u mikropolarnoj teoriji postoji i dodatni vektor sprega. Kao rezultat proizlazi da u mikropolarnoj teoriji postoje dva nesimetrična tenzora naprezanja, a s obzirom da postoje dodatna momentna naprezanja, također postoji i dodatna kutna deformacija (zakrivljenost) koja je definirana kao gradijent polja **mikrorotacije** [3]. Uvođenjem novog stupnja slobode mikrorotacije dajemo svakoj čestici orijentaciju. Bitno je napomenuti da je mikrorotacija potpuno neovisna o polju pomaka i makrorotaciji koja iz njega proizlazi. Kako bi se mogao u potpunosti opisati linearno-elastičan izotropan centrosimetričan mikropolarni materijal potrebno je poznavati ukupno **6 međusobno neovisnih materijalnih parametara** [4]: modul elastičnosti  $E$  i Poissonov koeficijent  $\nu$  (koji su već poznati iz klasične teorije), faktor povezanosti  $N$ , polarni omjer  $\psi$  te karakteristične duljine na savijanje  $l_b$  i torziju  $l_t$ . Glavna prepreka šire primjene teorije u praktične svrhe je nedostatak jedinstvenih i pouzdanih procedura za određivanje vrijednosti dodatnih mikropolarnih konstanti. Iz tog razloga je cilj ovog istraživanja razviti kvalitetne konačne elemente temeljene na mikropolarnoj teoriji koji će u konačnici služiti kao pouzdani simulacijski alat za određivanje mikropolarnih parametara putem inverzne numeričke analize.

## 2. Originalna i poboljšana *fixed-pole* interpolacija

Prilikom razvijanja novog konačnog elementa prema metodi pomaka za linearnu analizu mikropolarnog kontinuuma razmatramo primjenu tzv. *fixed-pole* interpolaciju koja je inspirirana konceptom nepomičnog pola (eng. *fixed-pole concept*). Koncept su prvi put predstavili Bottasso i Borri [5] gdje je primijenjen u dinamičkoj analizi geometrijskih nelinearnih 3D gređa što se pokazalo vrlo korisnim. Glavna značajka ovog koncepta je zamjena rezultante momentnog naprezanja i specifičnog momenta količine gibanja koji su u klasičnom pristupu definirani s obzirom na referentnu os gređe u poprečnom presjeku s novim rezultatama koje su definirane s obzirom na odabranu ishodišnu točku cijelog promatranog sustava (nepomičan pol). Također su uz pomoć konfiguracijskog tenzora  $C_{6D}$ , koji spada u posebnu grupu krutog gibanja  $SR(6)$  koja je ujedno i Liejeva grupa, uspjeli spojiti polje pomaka i rotacije. Na taj način je umjesto standardnog polja pomaka uvedeno novo nestandardno kinematičko polje  $\rho$ , koje objedinjuje polje pomaka  $\mathbf{u}$  i rotacije  $\phi$  s obzirom na nepomičan pol  $O$ . Implementacija koncepta pokazuje sposobnost istovremenog očuvanja energije i vektora količine gibanja te momenta količine gibanja, a može se primijeniti na elemente proizvoljnog reda.

Autori su u radu [6] predstavili primjenu *fixed-pole* interpolacije u linearnoj statičkoj analizi Timošenkove gređe (1D mikropolarni kontinuum) i 3D mikropolarnog kontinuuma [7]. Kod

greda je pokazano da se primjenom lineariziranog oblika *fixed-pole* interpolacije u konačnici dobije matrica krutosti koja je jednaka onoj koju bismo dobili uz primjenu Lagrangeove interpolacije, a za koju znamo da će nas dovesti do *shear-locking* problema ukoliko se ne primijeni reducirana numerička integracija. U svrhu poboljšanja provedena je opsežna analiza i usporedba s drugim srodnim interpolacijama te je u obogaćenom dijelu interpoliranog polja pomaka uveden koeficijent  $m$  koji predstavlja broj čvorova pojedinog konačnog elementa duž koordinatne osi, a koji je proizašao upravo iz usporedbe s vezanom interpolacijom za koju je poznato da daje točna rješenja Timošenkove grede za proizvoljno polinomno opterećenje sa dovoljnim brojem čvorova. Na taj način dobivamo poboljšanu *fixed-pole* interpolaciju za interpoliranje polja pomaka za proizvoljni broj čvorova [7]

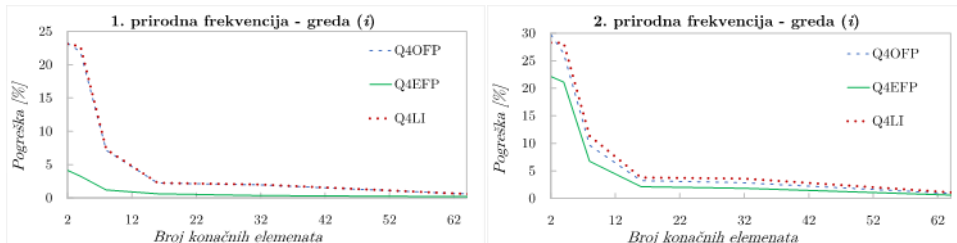
$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m N_i \left( \boldsymbol{\rho}_i - \frac{1}{m} \widehat{\mathbf{r}}_0 \boldsymbol{\phi} \right), \quad (1)$$

dok se polje mikrorotacije interpolira standardnom Lagrangeovom interpolacijom. U izrazu (1)  $N_i$  predstavlja Lagrangeove polinome  $m - 1$  reda,  $\mathbf{r}_0 = \sum_{i=1}^m N_i \mathbf{r}_{0,i}$  je početni vektor položaja referentne osi duž grede s obzirom na promatrano ishodište, dok „hat“ operator ( $\widehat{\cdot}$ ) predstavlja antisimetričnu matricu koja zamjenjuje vektorski produkt na način da vrijedi  $\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r}_0 = \widehat{\mathbf{r}}_0 \boldsymbol{\phi}$ . U statičkoj analizi ova formulacija uklanja *shear-locking* problem kod grede i generalno uvijek brže konvergira ka točnom rješenju u odnosu na Lagrangeove elemente. U vibracijskoj analizi Timošenkove grede pokazano je da i originalna *fixed-pole* interpolacija (kada je koeficijent  $m = 1$ ) ima povoljnih utjecaja kod formiranja matrice mase što dovodi do brže konvergencije prirodnih frekvencija, ali samo u slučaju dvočvornih konačnih grednih elemenata, dok kod elemenata s više čvorova to poboljšanje iščezava [6]. Motivirani dobrim svojstvima primjene poboljšane *fixed-pole* interpolacije u statičkoj analizi mikropolarnog kontinuuma [7]–[9], kao i njene originalne formulacije kod vibracijske analizi Timošenkove grede u dosadašnjem istraživanju, u nastavku se provodi analiza primjene obje vrste *fixed-pole* interpolacije kod ravninskog mikropolarnog kontinuuma.

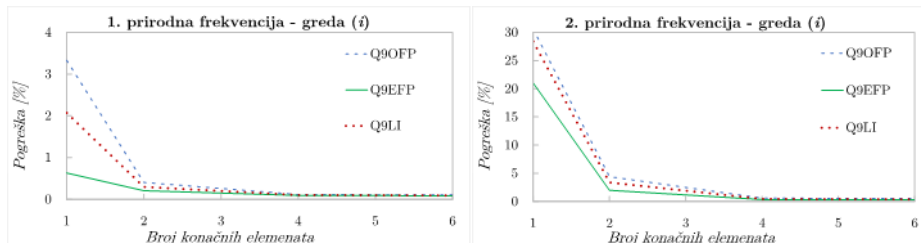
### 3. Numerički primjeri: vibracijska analiza mikropolarnog kontinuuma

Razmatra se ravninska mikropolarna greda  $L = 3.3$  mm i visine  $h = 0.165$  mm koja je u prvom slučaju jednostrano ukliještena (*i*), dok je u drugom primjeru ukliještena na oba svoja kraja (*ij*). Njene geometrijske i materijalne karakteristike definirane su kao u [10]: modul posmika  $G = 104$  MPa,  $n = 0.44$ ,  $N = 0.04$ ,  $l_b = 0.33$  mm,  $l_t = 0.62$  mm,  $\psi = 1.5$ , gustoća  $\rho = 2000$  kg/m<sup>3</sup> i materijalna mikroinerijska gustoća  $J = 10^{-1}$  kg/m. Greda je diskretizirana novorazvijenim kvadratnim mikropolarnim izoparametarskim konačnim elementima gdje su razmatrane obje vrste *fixed-pole* interpolacije za interpoliranje polja pomaka. Implementirani su u program *FEAP* (Finite Element Analysis Programme), pisan u programskom jeziku Fortran. Pojedini razvijeni elementi sadržavaju 4 (*Q4*) ili 9 (*Q9*) čvorova s po tri stupnja slobode po čvoru:  $\boldsymbol{\rho}_x$ ,  $\boldsymbol{\rho}_y$  i mikrorotacijom u ravnini  $\boldsymbol{\phi}_z$  gdje se nestandardni stupnjevi slobode  $\boldsymbol{\rho}$  mogu na vrlo jednostavan način prebaciti u standardne stupnjeve slobode  $\mathbf{u}$  poznajući izraz (1). Rezultati prvih dviju vlastitih frekvencija razmatranih numeričkih primjera ravninske grede dobiveni uz primjenu originalne *OFP* ( $m = 1$ ), poboljšane *EFP* ( $m = 2$  za *Q4* i  $m = 3$  za *Q9*) i standardne Lagrangeove interpolacije *L1* te su međusobno kritički uspoređeni, a njihove konvergencijske

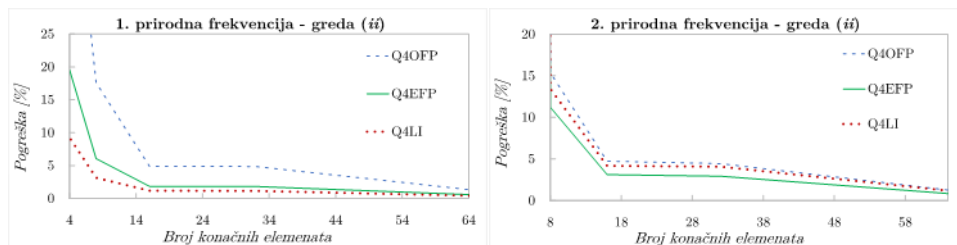
krivulje prikazane su na Slikama 1-4. Analitičko rješenje vlastitih frekvencija za razmatrane sustave nije izvedeno te je ovdje referentno rješenje dobiveno metodom konačnih elemenata na mreži od  $350 \times 25$   $L1$  elemenata, a koje za slučaj konzolne grede koincidira s numeričkim rješenjem iz literature [10].



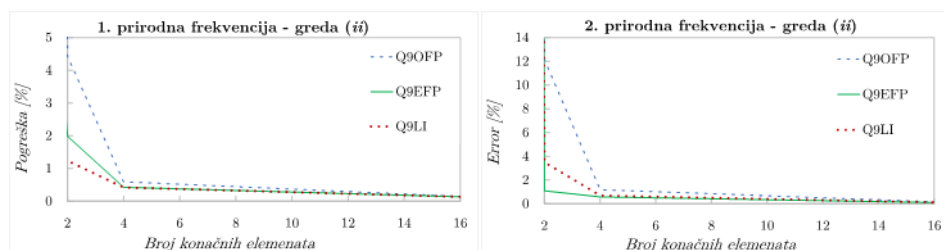
**Slika 1.** Konvergenzijska studija rezultata prvih dviju prirodnih frekvencija konzolne ravninske gređe ( $i$ ) diskretizirane Q4 elementima



**Slika 2.** Konvergenzijska studija rezultata prvih dviju prirodnih frekvencija konzolne ravninske gređe ( $i$ ) diskretizirane Q9 elementima



**Slika 3.** Konvergenzijska studija rezultata prvih dviju prirodnih frekvencija obostrano upete ravninske gređe ( $ii$ ) diskretizirane Q4 elementima



**Slika 4.** Konvergenzijska studija rezultata prvih dviju prirodnih frekvencija obostrano upete ravninske grede (ii) diskretizirane Q9 elementima

Za razliku od analize Timošenkovske grede, *OFP* interpolacija ovdje ne doprinosi poboljšanju rezultata. Štoviše, daje gore rezultate nego što to daje Lagrangeova interpolacija. S druge strane *EFP* interpolacija, ipak, uglavnom pruža najtočnije rezultate kod rijetkih mreža i pokazuje najbržu konvergenciju k referentnom rješenju. Izuzetak je prva vlastita frekvencija grede (ii) kod najrjeđih mreža.

## 4. Zaključak

U radu je primijenjena *fixed-pole* interpolacija u svom originalnom i poboljšanom obliku kod vibracijske analize 2D mikropolarnog kontinuuma. Na temelju rezultata provedenih numeričkih primjera konzolne i obostrano upete ravninske grede pokazano je da *EFP* interpolacija, uglavnom, ima najbržu konvergenciju k točnome rješenju. Više detalja o formulaciji *Q4EFP* i *Q4EFP* elemenata kao i dodatne numeričke primjere može se pronaći u [11].

## Zahvale

Prezentirano istraživanje je financirala Hrvatska zaklada za znanost u sklopu rada na projektu (HRZZ-IP-2018-1732 i HRZZ-DOK-2018-09-8806) te je dodatno materijalno podržano potporom Sveučilišta u Rijeci uniri-tehnic-18-248 1415.

## Literatura

- [1] Nowacki, W. K.: Theory of Asymmetric Elasticity. Warszawa: Pergamon Press, 1985.
- [2] Drugan, W. J., Lakes, R. S.: Torsion of a Cosserat elastic bar with square cross section: theory and experiment, *Zeitschrift fur Angew. Math. und Phys.*, 69(2), pp. 1 –14, 2018, doi: 10.1007/s00033-018-0913-1.
- [3] Eringen, A. C.: *Microcontinuum Field Theories: I. Foundations and Solids*, New York: Springer Verlag, 1999, doi: 10.1007/978-1-4612-0555-5.
- [4] Lakes, R.: Physical meaning of elastic constants in Cosserat, void, and microstretch elasticity, *J. Mech. Mater. Struct.*, 11(3), pp. 217 – 229, 2016, doi: 10.2140/jomms.2016.11.217.
- [5] Bottasso, C. L., Borri, M.: Integrating finite rotations, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 164(3–4), pp. 307 – 331, 1998, doi: 10.1016/S0045-7825(98)00031-0.
- [6] Žiković, L., Jelenić, G.: Primjena fixed - pole interpolacije u linearnoj dinamičkoj analizi

Timošenkove grede, *Zbornik radova 11. susreta HDM-a*, pp. 369 – 375, 2021.

- [7] Grbac, L., Jelenić, G., Ribarić, D.: Hexahedral finite elements with enhanced fixed-pole interpolation for linear static and vibration analysis of 3D micropolar continuum, *Submitted*, 2023.
- [8] Žiković, L., Jelenić, G.: Fixed-pole interpolacija u linearnoj analizi mikropolarnog kontinuuma, *Zbornik radova 10. susreta susreta HDM-a*, pp. 313 – 318, 2020.
- [9] Grbčić, S., Jelenić, G., Ribarić, D.: Quadrilateral 2D linked-interpolation finite elements for micropolar continuum, *Acta Mech. Sin. Xuebao*, 35(5), pp. 1001 – 1020, 2019, doi: 10.1007/s10409-019-00870-1.
- [10] Kohansal-Vajargah, M. i sur.: Vibration analysis of two-dimensional structures using micropolar elements, *Appl. Math. Mech. (English Ed.)*, 42(7), pp. 999 – 1012, 2021, doi: 10.1007/s10483-021-2746-8.
- [11] Grbac, L.: Finite Elements for Linear Analysis of Micropolar Continuum and Relationship between Linked Interpolation and Interpolations on Lie Groups in Linear Form, doktorska disertacija, Sveučilište u Rijeci, 2023.