Krivulje raspodjele u hidrologiji

Duhović, Paolo Marin

SVEUČILIŠTE U SPLITU

FAKULTET GRAĐEVINARSTVA, ARHITEKTURE I GEODEZIJE

ZAVRŠNI RAD

Paolo Marin Duhović

Split, rujan 2014.

SVEUČILIŠTE U SPLITU
FAKULTET GRAĐEVINARSTVA, ARHITEKTURE I GEODEZIJE

Paolo Marin Duhović

Krivulje raspodjele u hidrologiji

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Vesna Denić-Jukić

Split, rujan 2014.

Zahvala:

Prije svega zahvaljujem obitelji na potpori tijekom cijelog studija.

Isto tako zahvaljujem se i svim prijateljima koji su mi ovaj studij napravili još zanimljivijim, te mentorici prof. Vesni Denić-Jukić na potpori tijekom studija i pomoći pri izradi ovoga rada.

Na kraju zahvaljujem Bogu što mi je dao mogućnosti i snage da uspješno privedem kraju ovaj dio mog obrazovanja.

Krivulje raspodjele u hidrologiji

Sažetak:

U ovom radu opisane su krivulje raspodjele, normalna, log-normalna i Gumbelova, i to primarno za primjenu u hidrološkim istraživanjima, i njihova usporedba s empirijskim vrijednostima koristeći hikvadrat i K-S testove . Rad je koncipiran u dva dijela.
U prvom dijelu opisane su sve raspodjele sa svojim svojstvima, funkcijama gustoće i raspodjele te dobivanje i značenje osnovnih parametara svake raspodjele. Pojašnjena je i primjena svake raspodjele u hidrologiji i izvan nje.
U drugom dijelu rada, priložena su tri primjera zadataka sa ciljem prognoze protoka koristeći prethodno navedene raspodjele. U ovim primjerima dan je prikaz proračuna vjerojatnosti godišnjih protoka, proračun protoka za određeni povratni period, te prilagodba empirijskih podataka teorijskom raspodjelom. Korišteni podatci o protocima za rijeku Savu dani su u stručnom radu „Karakteristični protoci Save kod Zagreba“ autora Trninić D. i Bošnjak T. Proračun je proveden u aplikaciji „Microsoft Excel 2010“.

Ključne riječi:

krivulja raspodjele, normalna, log-normalna, Gumbelova, hidrologija, protoci, Sava

Distribution curves in hydrology

Abstract:

This study elaborates normal, log-normal and Gumbel distribution curves, primarily used hydrological studies, and their comparison with empirical values using χ^2 and K-S tests. The study is divided into two parts.
The first part defines all distributions with all their characteristics, applications, distribution and density functions for each one of them, as well as the basic parameters of each distribution.
The second part of the study provides three examples of tasks with the aim to estimate the long-term discharges of the river using the aforementioned distributions. These examples demonstrate probability calculation of annual discharges, calcualtions for a given return period and fitting of empirical data to theoretical distribution. All used river discharges data are taken from the proffesional paper „Characteristic discharges of the Sava river at Zagreb“ written by Trninić D. i Bošnjak T. Calculation was conducted using application „Microsoft Excel 2010“.

Keywords:

distribution curve, normal, log-normal, Gumbel, hydrology, discharges, Sava

UVOD

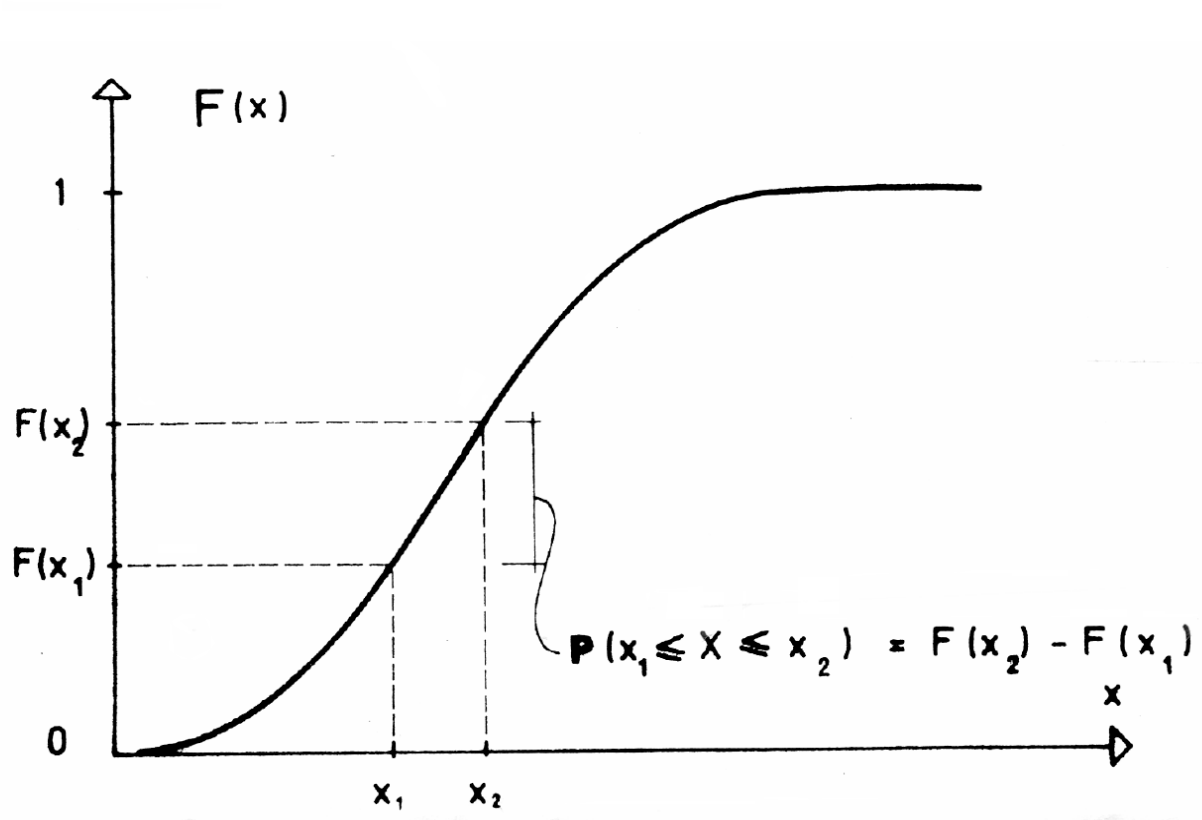
Krivulja raspodjele predstavlja granično stanje histograma za uzorak neograničen po opsegu. Radi se o potrebi i pokušaju procjene osnovnog skupa na osnovi uzorka. U praksi osnovni skup ne postoji, a uzorci su podložni stalnim promjenama. Postupkom izglađivanja, na osnovi empirijskih podataka pokušava se odrediti granična ili "teoretska" krivulja. Kao rezultat ovog postupka dobije se krivulja raspodjele kojom se eliminiraju različite nepravilnosti uzorka uzrokovane slučajnim pogreškama. Funkcijom gustoće raspodjele pokušava se opisati osnovni skup. Postupkom izglađivanja vrši se interpolacija. Funkcija gustoće raspodjele omogućava ekstrapolaciju vrijednosti. Krivuljom raspodjele dobiju se značajne informacije o analiziranom nizu podataka na osnovi samo nekoliko parametara (obično dva ili tri). Kako postoje brojne krivulje raspodjele postoji potreba za određivanje kvalitete prilagodbe "teoretskih" krivulja na empirijske podatke. Za tu se svrhu koriste: 1) χ^2 test; 2) test Kolmogorova; 3) L moment. Ako "teoretska" krivulja zadovolji kriterije odabranih testova smatra se da je ona prihvatljiva sa stajališta statistike što ne znači da je to dobro i sa stajališta fizike analiziranog procesa ili varijable. U protivnom, ako teroetska krivulja ne zadovolji kriterije testova, odbacujemo pretpostavljenu hipotezu.

Krivulje raspodjele predstavljaju zakon vjerojatnosti pojave neke hidrološke veličine. Za slučajnu varijablu X kažemo da je poznata ako znamo zakon njene raspodjele. Razlikujemo dvije vrste slučajnih varijabli: diskretnu i kontinuiranu. U ovom radu promatrat ćemo isključivo funkcije raspodjele za kontinuirane slučajne varijable i to normalnu, log-normalnu i Gumbelovu raspodjelu.

FUNKCIJA RASPODJELE ZA KONTINUIRANE SLUČAJNE VARIJABLE

$$P[x \leq X \leq (x + \Delta x)] = F(x + \Delta x) - F(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x) \ \rightarrow \ \text{gustoća raspodjele}$$



Slika 1. Funkcija raspodjele za kontinuirane slučajne varijable

GUSTOĆA RASPODJELE

Raspodjela slučajne varijable je poznata ukoliko je poznata ili funkcija gustoće ili funkcija raspodjele. Vjerojatnost predstavlja mogućnost ostvarivanja vrijednosti nekog intervala (x, x + Δx). Zakon raspodjele slučajne varijable X je zadan ukoliko je poznata tzv. funkcija gustoće vjerojatnosti f(x)

$$f(x): x \in R$$

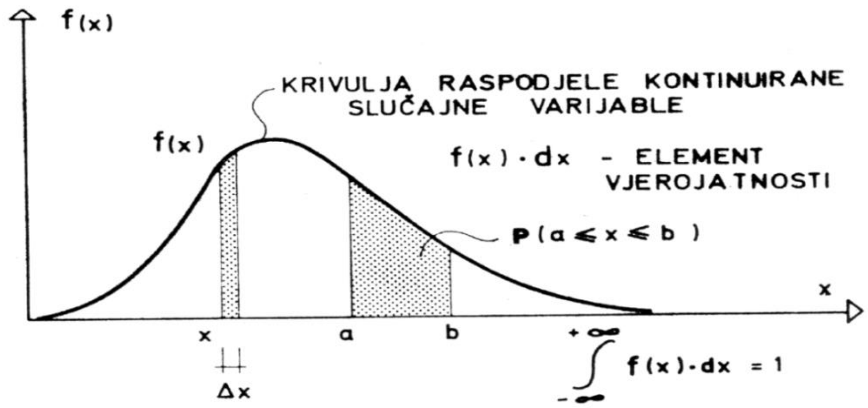
$$p(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x) \cdot dx$$

Funkcija gustoće je nenegativna funkcija, a vjerojatnost pojave sigurnog događaja je definirana putem slijedećeg integrala:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Funkcija distribucije ili funkcija raspodjele slučajne varijable X.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f\ (x)\ dx$$



Slika 2. Gustoća raspodjele

U hidrologiji se uglavnom koriste kontinuirane slučajne varijable, ali se povremeno javlja potreba za korištenjem diskretnih slučajnih varijabli i određivanja njihovih krivulja raspodjele. Najčešće se susrećemo s binomnom, Poissonovom, normalnom i log-normalnom raspodjelom. Krivuljom raspodjele se dobiju značajne informacije o empirijskom nizu na temelju samo nekoliko parametara. Normalna i log-normalna raspodjela su određene na temelju 2 statistička parametra, srednje vrijednosti i standardne devijacije. Da bi se odredila vjerojatnost pojave slučajne varijable X na temelju hidrološkog niza potrebno je izvršiti statističku analizu koja podrazumijeva: proračun osnovnih statističkih parametara uzorka i određivanje empirijske raspodjele, izbor teoretske funkcije raspodjele i ocjenu parametara, testiranje prilagodbe empirijske i teoretske raspodjele. Osnovni statistički parametri uzorka su:

Aritimetička sredina, $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} x_i$

Varijanca, $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$

Koeficijent varijacije, $c_v = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}{N\bar{x}^2}}$

Koeficijent asimetrije. $c_s = \frac{\sum_{l=1}^{N}(x_i-\bar{x})^3}{N\sigma}$

Podatke opažanja je potrebno najprije poredati u rastući niz: $x_i \leq x_{i+1}$ Funkcija raspodjele se definira kao vjerojatnost pojave da slučajna varijabla poprimi određenu promatranu vrijednost ili vrijednost manju od promatrane:

$$F(X) = P(X \leq x)$$

Empirijska raspodjela se aproksimira izrazom:

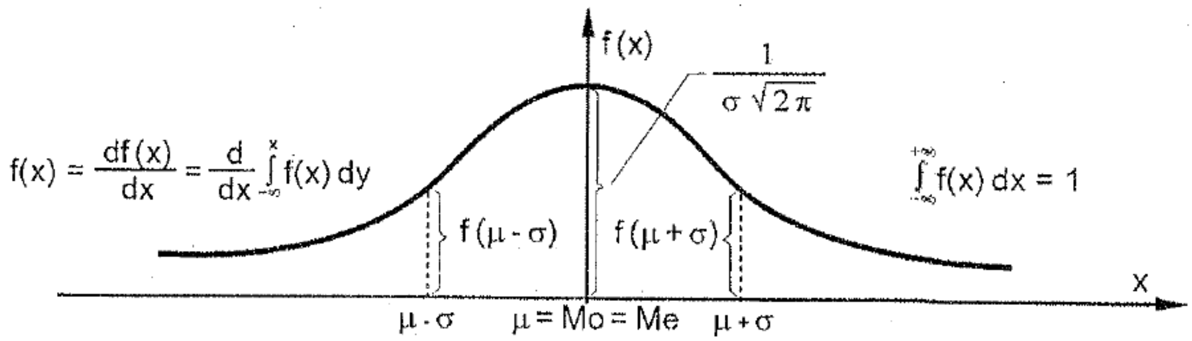
$$P(X \leq x_m) = \frac{m - 0{,}5}{N}$$

GAUSOVA ILI NORMALNA FUNKCIJA RASPODJELE VJEROJATNOSTI

Normalna ili Gausova funkcija raspodjele vjerojatnosti, naročito standardna normalna, zauzima jedinstveno mjesto među funkcijama raspodjele u teoriji vjerojatnosti, matematičkoj statistici i stohastičkim procesima. Ona često služi kao standardna raspodjela za uspoređivanje sa drugim funkcijama raspodjele. Gausova (normalna) funkcija gustoće raspodjele vjerojatnosti je vjerojatno najuobičajenija funkcija raspodjele.

Normalna funkcija raspodjele gustoće vjerojatnosti je korisna u hidrologiji u pet određenih slučajeva : (1) za prilagođavanje na simetrične empirijske raspodjele učestalosti hidroloških slučajnih varijabli, (2) kao funkcija gustoće vjerojatnosti u analizama slučajnih pogriješaka, (3) kao reperna raspodjela za uspoređivanje sa drugim raspodjelama, (4) kako mnogi hidrološki statistički parametri mogu biti ili točno ili približno normalno raspodjeljeni, normalna funkcija gustoće vjerojatnosti se upotrebljava za razne vrste statističkih zaključivanja, (5) za generiranje uzoraka, sa simuliranjem prvo normalno nezavisnih ili zavisnih slučajnih brojeva prije nego što se oni transformiraju u druge tipove raspodjela.

Gausova funkcija gustoće raspodjele vjerojatnosti je prikazana na slici 3. Ona je karakteristično zvonolika, simetrična i definirana u rasponu od $-\infty$ do $+\infty$.



Slika 3. Karakretistični izgled normalne (Gausove) funkcije raspodjele gustoće vjerojatnosti

Obzirom da su prirodni procesi, kao naprimjer protok u rijekama, vrlo rijetko negativni, Gausova funkcija gustoće raspodjele vjerojatnosti je očigledno ograničena za njenu primjenu u hidrologiji. Usprkos tome ona je vrlo upotrebljiva. Glavna teorijska poteškoća pri prilagođavanju normalnih raspodjela empirijskim raspodjelama raznih hidroloških varijabli je osobina da normalne varijable imaju svaku vrijednost od $-\infty$ do $+\infty$, dok većina hidroloških varijabli ima samo pozitivne vrijednosti, obično sa donjom vrijednosti nula, a ponekad također sa pozitivnom ili čak negativnom donjom granicom. Krivulja prikazana na slici 3. se može opisati pomoću dvoparametarske funkcije:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < +\infty$$

Ta dva parametra su očekivana ili srednja vrijednost μ oko koje su centrirane vrijednosti slučajne varijable i standardna devijacija σ, koja pokazuje koliko su disperzirana (rasuta) pojavljivanja slučajne varijable oko njene srednje vrijednosti. Ti parametri se procjenjuju iz raspoživog uzorka.

Prethodni izraz predstavlja tzv. uopćeni oblik normalne funkcije raspodjele sa srednjom (očekivanom) vrijednosti ($\mu = \bar{x}$) i standardnom devijacijom ($\sigma_x = \sigma$) što se piše simboličkl $N(\bar{x}, \sigma^2)$.

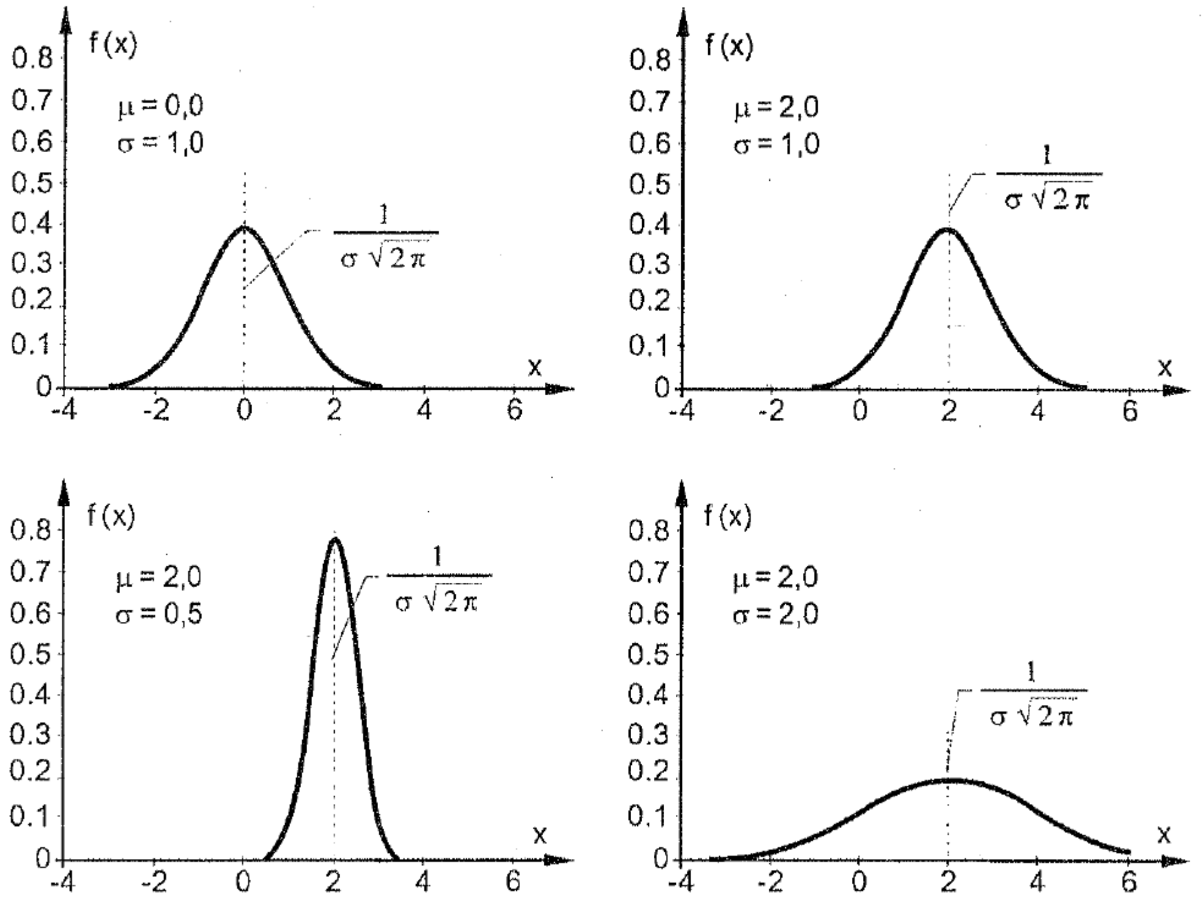
Dijagram uopćenog oblika normalne raspodjele je simetričan u odnosu na pravi $x = \bar{x}$ sa maksimumom u točki $\overline{(\bar{x}\,; 1/\sigma\sqrt{2\pi})}$ i točkama infleksije $x_{1,2} = \bar{x} \pm \sigma$ kao na slici 3.

Normalna funkcija iz gornje jednadžbe je definirana za svaku realnu vrijednost x.

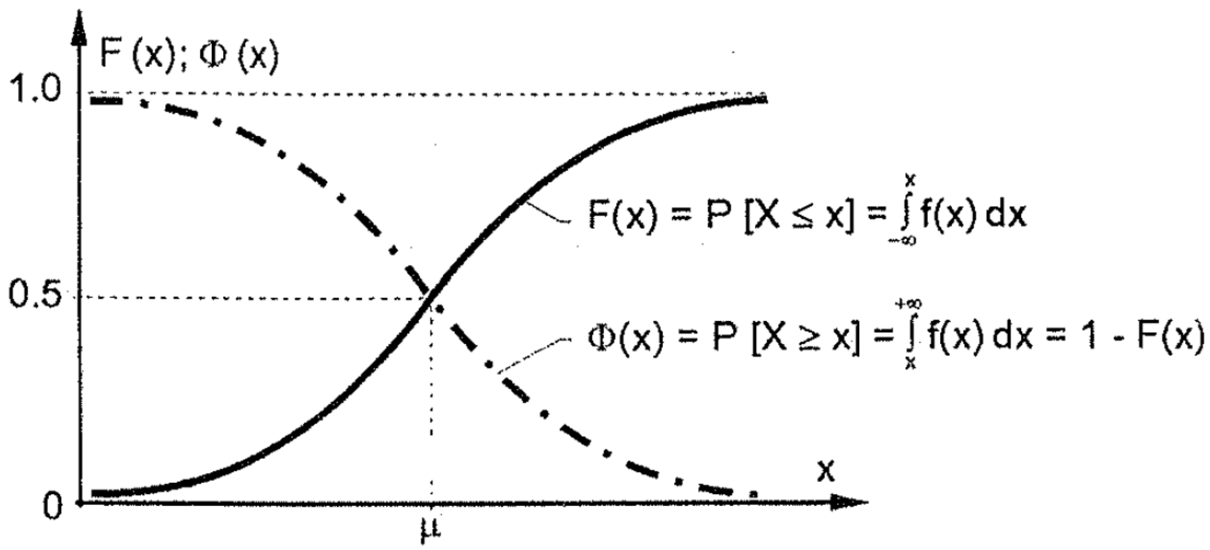
Os x je asimptota. a površina pod krivuljom je jedinica. Srednja vrijednost, medijan Me i modus Mo su identični, odnosno:

$$\mu = Me = Mo$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$



Slika 4. Gausova funkcija gustoće raspodjele vjerojatnosti za razne vrijednosti μ i σ



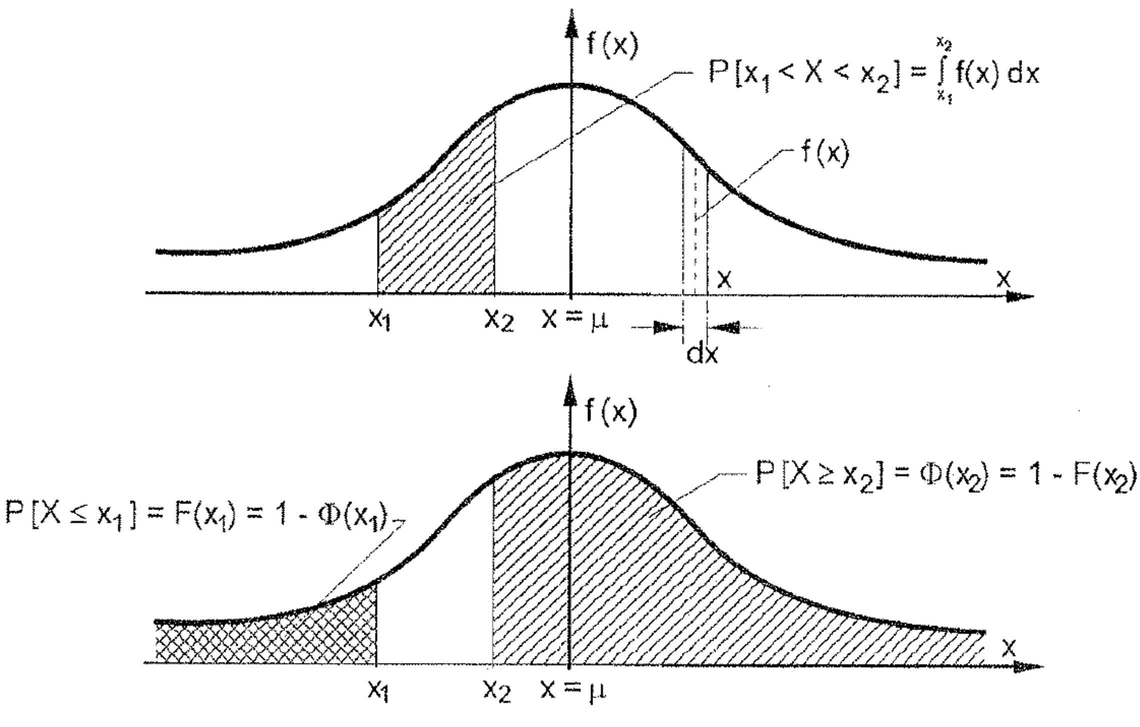
Slika 5. Grafička predstava normalne kumulativne funkcije raspodjele vjerojatnosti

S obzirom da je normalna funkcija raspodjele definirana za $-\infty < x < +\infty$, ova se raspodjela, teorijski, ne bi mogla primijeniti na varijable koje ne mogu uzeti negativne vrijednosti. Kako je $P[X < 0]$, u slučaju $\mu > 3\sigma$ (tj. $c_v < 1/3$), veoma mala vrijednost, ova se raspodjela može upotrijebiti i za modeliranje procesa koji ne mogu biti negativni (padaline, protoci, i sl.), bez straha da će se izgubiti veliki dio statističkih informacija .
Značajna svojstva ove funkcije raspodjele su i (slika 6.):

$$x_1 \leq x_2, \quad F(x_2) \geq F(x_1)$$

$$P[x_1 \leq X \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$$
$$= 1 - [F(x_1) + \Phi(x_2)]$$

$$limF(x) = 1, \quad za \ x \to +\infty$$
$$limF(x) = 0, \quad za \ x \to -\infty$$



Slika 6. Grafički prikaz nekih značajnih svojstava normalne funkcije raspodjele

STANDARDNA NORMALNA FUNKCIJA RASPODJELE GUSTOĆE VJEROJATNOSTI.

lz prethodno navedenog vidi se da je za određivanje bilo koje vjerojatnosti slučajne varijable X, uz poznavanje parametara μ i σ, potrebno riješiti integral kojim je definirana kumulativna funkcija raspodjele vjerojatnosti. Zbog važnosti te funkcije i s obzirom na to da se taj integral može izračunati samo posebnom numeričkom metodom, uvodi se značajno olakšanje za definiranje vjerojatnosti poznavanjem tzv. standardne normalne funkcije raspodjele gustoće vjerojatnosti, čija će primjena biti pokazana u nastavku. Ako se promatra jedan element površine ispod krivulje raspodjele gustoće vjerojatnosti sa varijablom x u sredini intervala dx, onda je površina (slika 6.):

$$dF = f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Ako se u gornjoj jednadžbi izvrši sljedeća zamjena:

$$z = (x-\mu)/\sigma\,, \quad x = z\sigma + \mu, \quad dx = \sigma dz,$$

prethodna jednadžba postaje:

$$dF = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad \text{te}$$

$$F(z) = P[Z \leq z] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

što predstavlja kumulativnu funkciju raspodjele tzv. standardizirane normalno raspodjeljene slučajne varijable Z.

Odgovarajuća funkcija gustoće raspodjele vjerojatnosti je:

$$\varphi(z) = \frac{dF(z)}{dz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}; \quad -\infty < z < \infty$$

Neprekidna funkcija

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

u intervalu $(-\infty < x < +\infty)$ predstavlja zakon vjerojatnosti, koji nosi naziv standardni normalni zakon vjerojatnosti gustoće raspodjele, jer je:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z)dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1$$

Dakle, za neprekidnu slučajnu varijablu

$$Z = \left\{ z \in (+\infty, -\infty); \quad dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dp = 1 \right\}$$

skraćeno se kaze da ima standardiziranu normalnu raspodjelu.

Funkcija $\varphi(z)$ je definirana, pozitivna i neprekidna za svaku vrijednost z.
Ona je parna, jer je

$$\varphi(-z) \equiv \varphi(+z)$$

te je njen dijagram simeričan u odnosu na $y = p(z)$ os.
Iz

$$\lim_{z \to \pm\infty} \varphi(z) = 0$$

zaključuje se da je z - os asimptota. Iz prvog izvoda

$$\varphi'(z) = -\frac{z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

vidi se da je

$$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}3989$$

maksimum, a iz drugog izvoda

$$\varphi''(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} (z+1)(z-1)$$

zaključuje se da u točkama

$$\varphi(\pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1^2}{2}} = 0{,}2420$$

postoje točke infleksije.

Dijagram zakona gustoće vjerojatnosti standardizirane normalne raspodjele ima poznati oblik tzv. Gausove krivulje (slika 7.). Ona je standardizirana jer je E [Z]= $\bar{Z}$ = 0, a Var [Z]= $\sigma^2 = \sigma = 1$, što simbolički pišemo N($\bar{z}$ = 0, σ = 1), odnosno N (0, 1).

Koeficijent asimetrije

$$c_s = \frac{M_3}{1} = 0$$

Kako je $M_1 = \bar{z} = 0$, $M_2 = 1$, $M_3 = 0$ to potvrđuje raniju konstataciju da je normalna raspodjela simetrična i unimodalna

.

$$\bar{z} = Mo = Me = 0$$

Za funkciju raspodjele gustoće vjerojatnosti *f(x)* standardizirane normalno raspodjeljene slučajne varijable oblika

$$F(z) = P[Z \leq z] = \int_{-\infty}^{z} \varphi(z)dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

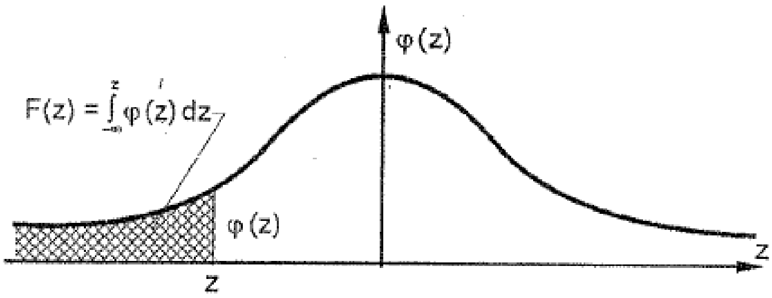
postoje gotove tablice, ustvari vrijednosti površine ispod standardizirane normalne krivulje.

Obzirom da je

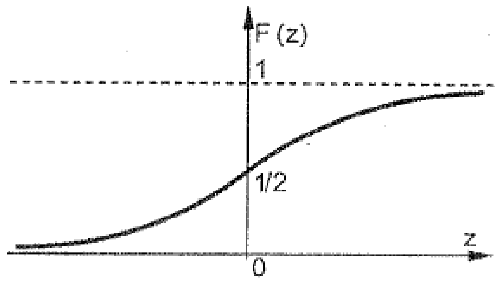
$$\lim_{z \to -\infty} F(z) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{z \to +\infty} F(z) = 1$$

iz toga se zaključuje da funkcija $y = F(z)$ ima dvije asimptote: y = 0 i y = 1 (slika 8.).

Pošto je funkcija $y = \varphi(z)$ parna, a cijela površina ispod krivulje u intervalu $(-\infty, +\infty)$ jednaka je jedinici, pa je pola površine jednako 0,5 iz čega se zaključuje da je $F(0) = {}^{1}\!/_{2}$.



Slika 7. Karakteristični izgled standardizirane normalne funkcije raspodjele gustoće vjerojatnosti



Slika 8. Grafički prikaz standardizirane normalne kumulativne funkcije raspodjele vjerojatnosti

Vjerojatnost da će se standardizirana normalno raspodjeljena slučajna varijabla Z naći u jednom intervalu jednaka je, kako je poznato, prirastu funkcije raspodjele u tom intervalu:

$$P[a < Z < b] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F(b) - F(a)$$

što je ustvari površina ispod krivulje $\varphi(z)$ u zadanom intervalu koji može biti otvoren, zatvoren ili poluotvoren, jer su funkcije $\varphi(z)$ i $F(z)$ Type equation here. neprekidne. Ako postoji simetričan interval u odnosu na koordinatni početak, tada se može slijedećom transformacijom pojednostavniti izračunavanje odgovarajuće vjerojatnosti

$$P[-a < Z < a] = F(a) - F(a)$$

Kako je zbog simetrije

$$F(-a) = \int_{-\infty}^{-a} \varphi(z)dz = \int_{a}^{+\infty} \varphi(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z)dz - \int_{-\infty}^{a} \varphi(z)dz = 1 - F(a)$$

prethodna relacija dobiva oblik

$$P[-a < Z < a] = F(a) - 1 + F(a) = 2F(a) - 1$$

Ova jednadžba se često koristi u hidrologiji .

Ako se upotrijebi opći oblik normalne raspodjele, N (μ,σ) onda je vjerojatnost da će se varijabla X naći u intervalu

$$P[a < X < b] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Zamjenom

$$z(x) = z = \frac{x-\mu}{\sigma}, \;\; dx = \sigma dz, \;\; z(a) = \frac{a-\mu}{\sigma} \;\; \text{i} \;\; z(b) = \frac{b-\mu}{\sigma}$$

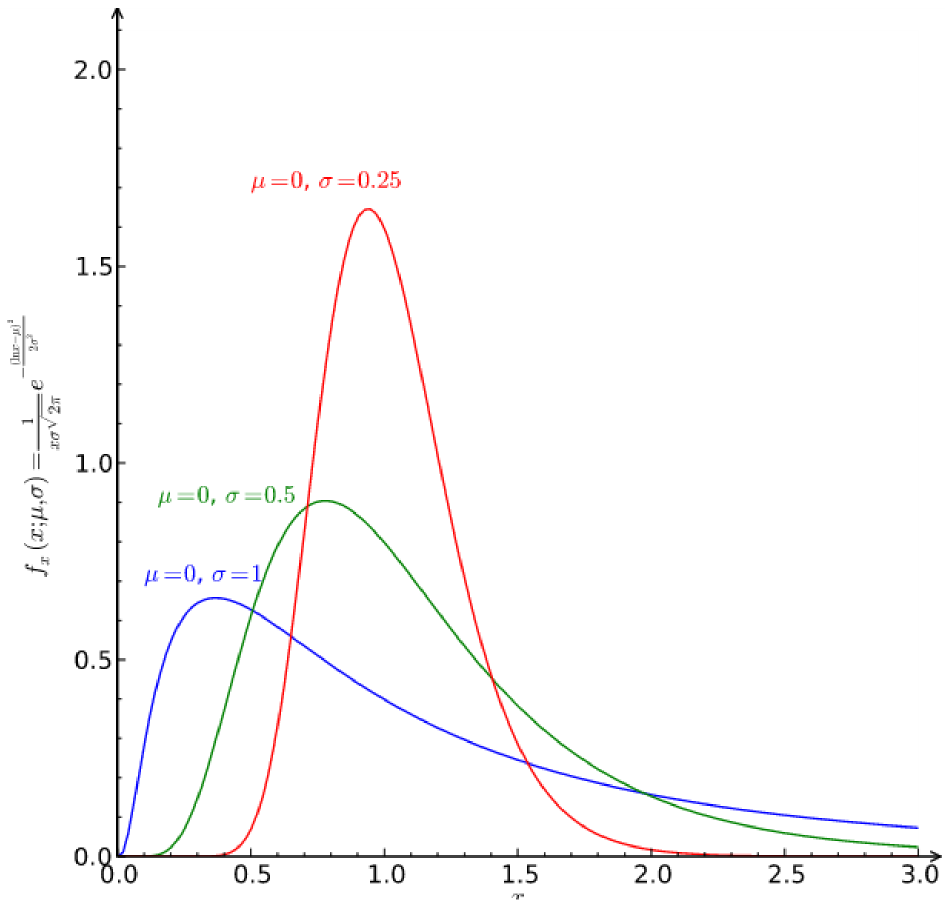
dobije se:

$$P[a < X < b] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) =$$

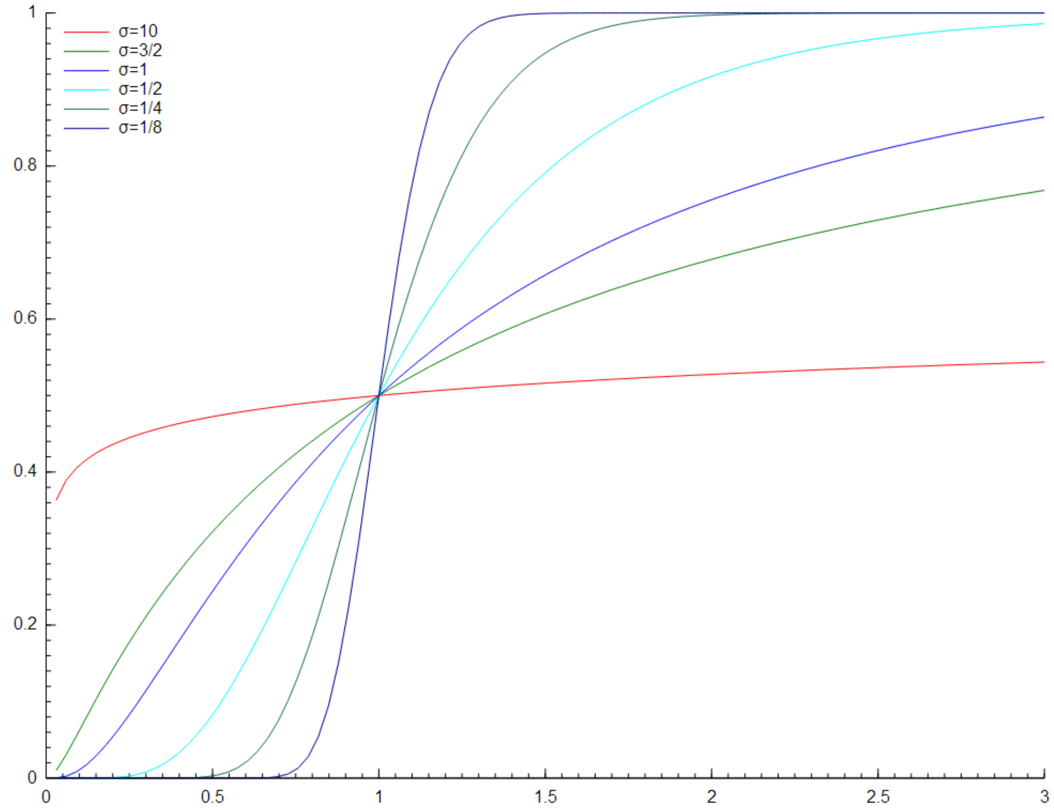
$$= F(z_b) - F(z_a)$$

LOG-NORMALNA RASPODJELA

U teoriji vjerojatnosti, log-normalna (ili logaritamska) distribucija je kontinuirana raspodjela vjerojatnosti slučajne varijable čiji je logaritam normalno distribuiran. Dakle, ako je slučajna varijabla X log-normalno distribuirana, onda je i $Y = log(X)$ normalno distribuirana. Isto tako, ako Y ima normalnu distribuciju, onda $X = exp(Y)$ ima log-normalnu distribuciju. Slučajna varijabla koja je log-normalno distribuirana uzima samo pozitivne vrijednosti.



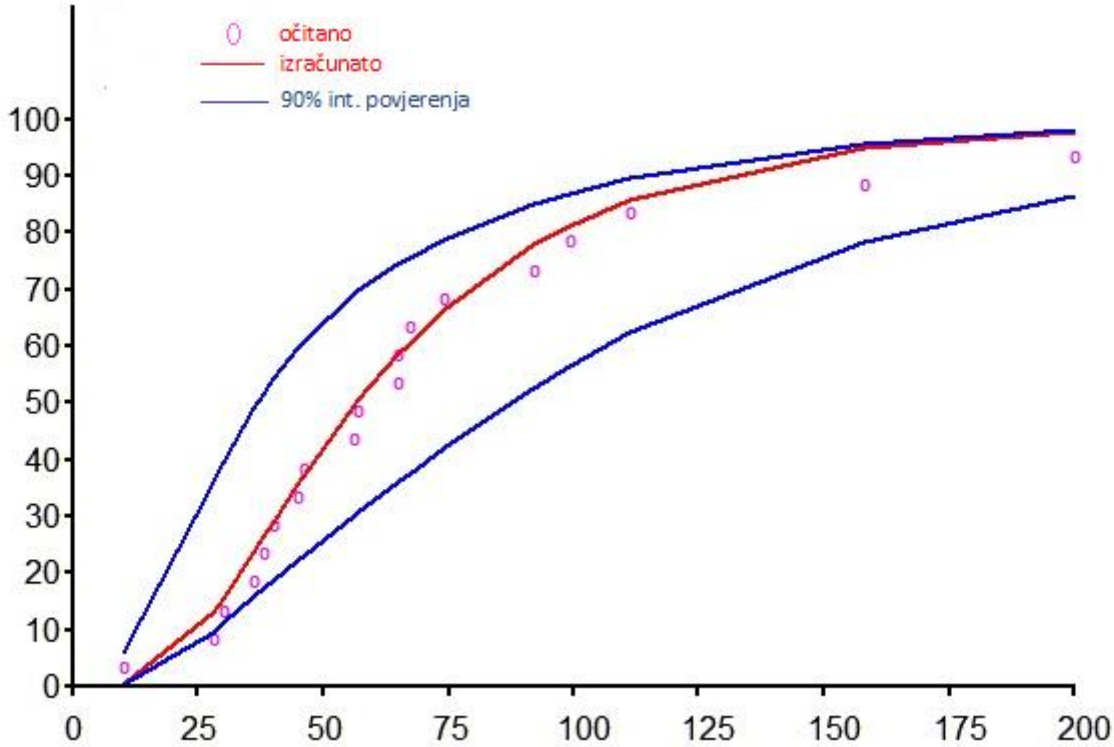
Slika 9. Prikaz raznih log-normalnih funkcija raspodjela gustoće vjerojatnosti sa istim parametrom μ ali različitim σ



Slika 10. Prikaz raznih log-normalnih kumulativnih funkcija raspodjele

U hidrologiji, log-normalna raspodjela se koristi za analizu ekstremnih vrijednosti određenih varijabli poput mjesečnih i godišnjih maksimalnih vrijednosti dnevnih oborina i riječnih protoka koje se mjere od baze nula i nemaju gornju granicu.

Slika 11. ilustrira primjer aproksimacije maksimalnih dnevnih padalina log-normalnom raspodjelom prikazujući i 90% interval sigurnosti pojas na temelju binomna raspodjele.



Slika 11. Prilagođavanje log-normalne kumulativne raspodjele godišnjih maksimalnim vrijednostima dnevnih oborina

OBILJEŽJA

Ako se izvrši zamjena $y = \ln(x)$, $x > 0$, i uvrsti u funkciju gustoće normalne raspodjele vjerojatnosti, dobijamo log-normalnu raspodjelu gustoće vjerojatnosti:

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < y < +\infty$$

$$x = e^y = e^{\mu_y + z\sigma_y}$$

Logaritam za bilo koju bazu može se preko neke konstante prevesti u prirodni pa je oblik funkcije gustoće vjerojatnosti isti za svaki logaritam.
Može se pokazati da je:

$$f(x) = \frac{1}{x}\varphi(lnx)$$

Funkcija distribucije izgleda:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{x}\varphi(lnx)dx$$

Parametri log-normalne funkcije gustoće raspodjele vjerojatnosti:

$$E[Y] = \mu_y$$
$$Var[Y] = \sigma_y^2$$

Ostale karakteristike ove funkcije su iste kao i kod funkcije normalne raspodjele pa se za proračun $F(y)$ koristi standardizirana normalna raspodjela sa standardiziranom varijablom:

$$z = \frac{y - \mu_y}{\sigma_y}, \qquad y = \mu_y + z\sigma_y$$

pa je vrijednost slučajne varijable x

$$x = e^y = e^{\mu_y + z\sigma_y}$$

Kao i za normalnu raspodjelu i za ovu funkciju vrijednost slučajne varijable za zadanu vjerojatnost se može izračunati preko faktora frekvencije:

$$y(T) = \ln x(T) = \mu_y + K(T)\sigma_y$$

gdje je *K* faktor frekvencije za *N(0, 1)* raspodjelu.

Pomoću metode momenata mogu se naći veze između parametara originalnog i logaritamskog uzorka μ_x, μ_y, σ_x i σ_y.

$$E[X] = \mu_x = e^{\mu_y + \frac{\sigma_y^2}{2}}$$

$$Var[X] = \sigma_x^2 = \mu_x\left(e^{\sigma_y^2} - 1\right)$$

$$c_v = [X] = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = \left(e^{\sigma_y^2} - 1\right)^2$$

$$c_s = [X] = \frac{M_3}{\sigma_x^3} = 3c_v + c_v^3$$

$$x_{Me} = e^{\mu_y}$$

$$x_{Mo} = e^{\mu_y - \sigma_y^2}$$

Srednja vrijednost i varijanca se određuju pomoću $\bar{y}$ i S_y.

$$\bar{y} = \frac{1}{2} ln\left(\frac{\bar{x}^2}{c_v^2 + 1}\right) = \frac{1}{2} ln\left(\frac{\bar{x}^4}{\bar{x}^2 + S_x^2}\right)$$

$$S_y^2 = ln(c_v^2 + 1) = ln\left(\frac{S_x^2 + \bar{x}^2}{\bar{x}^2}\right)$$

Parametar S_y, odnosno σ_y se često u hidrologiji naziva indeksom varijabilnosti l_v (l_v=σ_y). Što je njegova vrijednost veća, to su i veće vrijednosti c_v i c_s.

Parametri log-normalne raspodjele određuju se na jedan od dva načina:

- da se na osnovu uzorka slučajne varijable X odrede μ_x i σ_x pa da se pomoću prethodnih jednadžbi odrede ocjene parametara $\bar{y}$ i S_y,
- na drugi, češći, način, parametri μ_y i σ_y se ocjenjuju direktno iz logaritamskog uzorka:

$$\bar{y} = \overline{\ln(x)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(x_i - \overline{\ln(x)}\right]^2$$

Umjesto prirodnih logaritama mogu se također koristiti i logaritmi sa drugim bazama. Vrijednost slučajne varijable x za određeni povratni period T, koristeći se parametrima slučajne varijable X, možemo dobiti na slijedeći način:

$$x(T) = \mu_x + K_{LN}(T)\sigma_x$$

gdje izraz K_{LN} predstavlja faktor frekvencije za log-normalnu raspodjelu koji se određuje preko izraza:

$$K_{LN} = \frac{e^{\sigma_y K - \frac{\sigma_y^2}{2}} - 1}{\left(e^{\sigma_y^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

gdje je K faktor frekvencije za standardiziranu normalnu raspodjelu i računa se prema

$$K = z = \frac{y - \mu_y}{\sigma_y}$$

Faktor frekvencije K_{LN} se može odrediti i pomoću izraza:

$$K_{LN} = \frac{exp\left\{\left[ln\left(1+c_v^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}K - \left[ln\left(1+c_v^2\right)\right]/2\right\} - 1}{c_v}.$$

GUMBELOVA RASPODJELA

U vjerojatnosti i statistici, Gumbelova raspodjela koristi se za model raspodjele maksimuma (ili minimuma) određenog broja uzoraka raznih raspodjela. Takva raspodjela se može predstavljati raspodjelu maksimalne razine rijeka u određenoj godini, ako postoji popis maksimalnih vrijednosti u posljednjih deset godina. To svojstvo korisno nam je u predviđanju vjerojatnosti pojave ekstremnog potresa, poplave ili neke druge prirodne katastrofe.

SVOJSTVA

Funkcija gustoće raspodjele vjerojatnosti dana je izrazom

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \cdot e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} \cdot e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

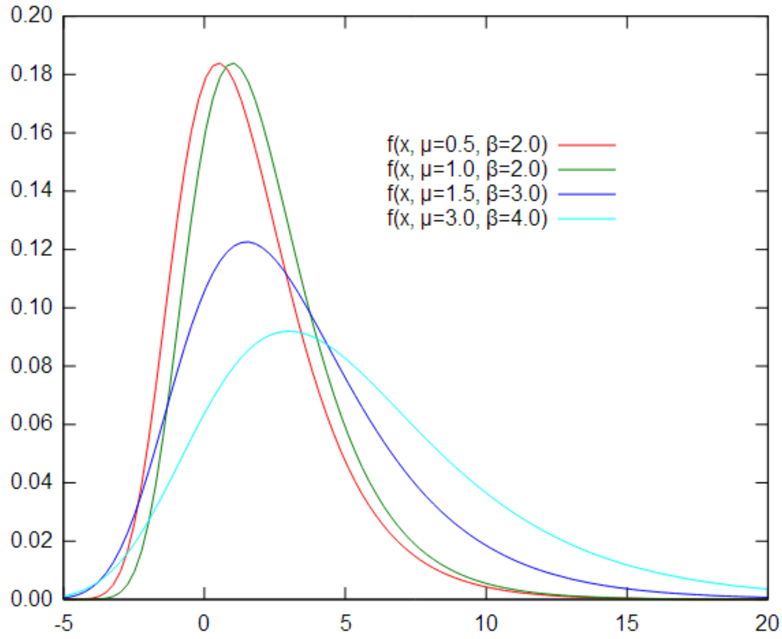
Kumulativna funkcija Gumbelove raspodjele je

$$F(x;\, \mu, \beta) = e^{-e^{-(x-\mu)/\beta}}.$$

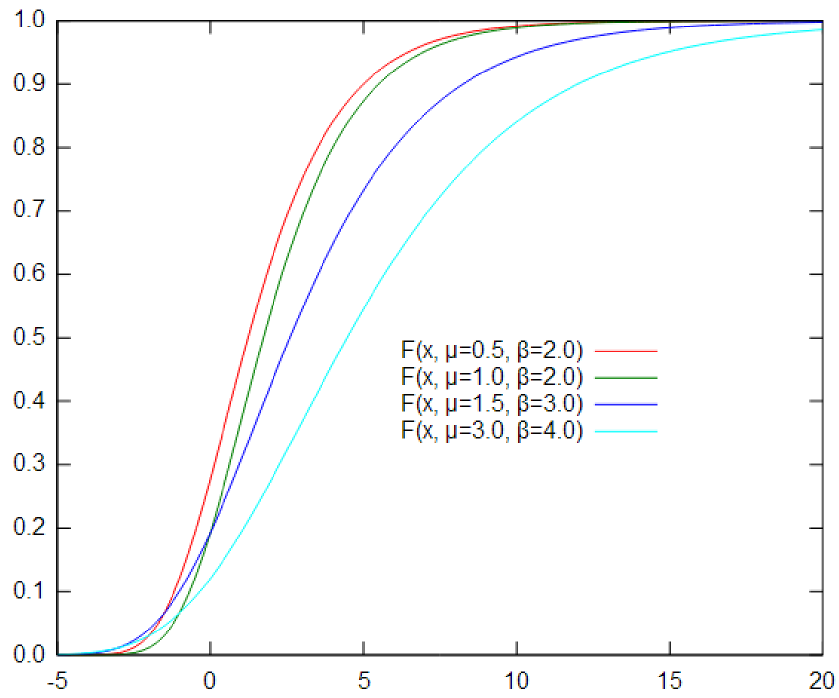
Modus je μ, a medijan je $\mu - \beta \ln(\ln 2)$ dok je srednja vrijednost dana sa

$$E(X) = \mu + \gamma\beta,$$

gdje je γ Euler-Mascheronijeva konstanta i iznosi približno $\gamma \approx 0{,}5772$. Standardno odstupanje je $\beta\pi/6$.



Slika 12. Prikaz raznih Gumbelovih funkcija raspodjele gustoće vjerojatnosti sa različitim parametrima



Slika 13. Prikaz raznih Gumbelovih kumulativnih funkcija raspodjele sa različitim parametrima

STANDARDNA GUMBELOVA RASPODJELA

Standardna Gumbelova raspodjela za slučaj gdje je $\mu = 0$ i $\beta = 1$ ima kumulativnu funkciju raspodjele

$$F(x) = e^{-e^{(-x)}}$$

i funkciju gustoće vjerojatnosti

$$f(x) = e^{-(x+e^{-x})}.$$

Za slučaj kada je modus $\mu = 0$, medijan je $-\ln(\ln(2)) \approx 0{,}3665$, medijan je γ, a standardno odstupanje je $\sigma/\sqrt{6} \approx 1{,}2825$.

POVEZANE RASPODJELE

Neka je varijabla X ima Gumbelovu raspodjelu. Tada, uvjetna raspodjela Y = -X, Y > 0, X < 0, ima Gompertzovu raspodjelu. Kumulativna funkcija raspodjele G(y) je povezana sa F, kumulativnom raspodjelom od X, formulom

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(X \geq -y | X \leq 0) = (F(0) - F(-y))/F(0),$$

za y > 0.

Prema tome, gustoće su povezane sa $g(y) = f(-y)/F(0)$.

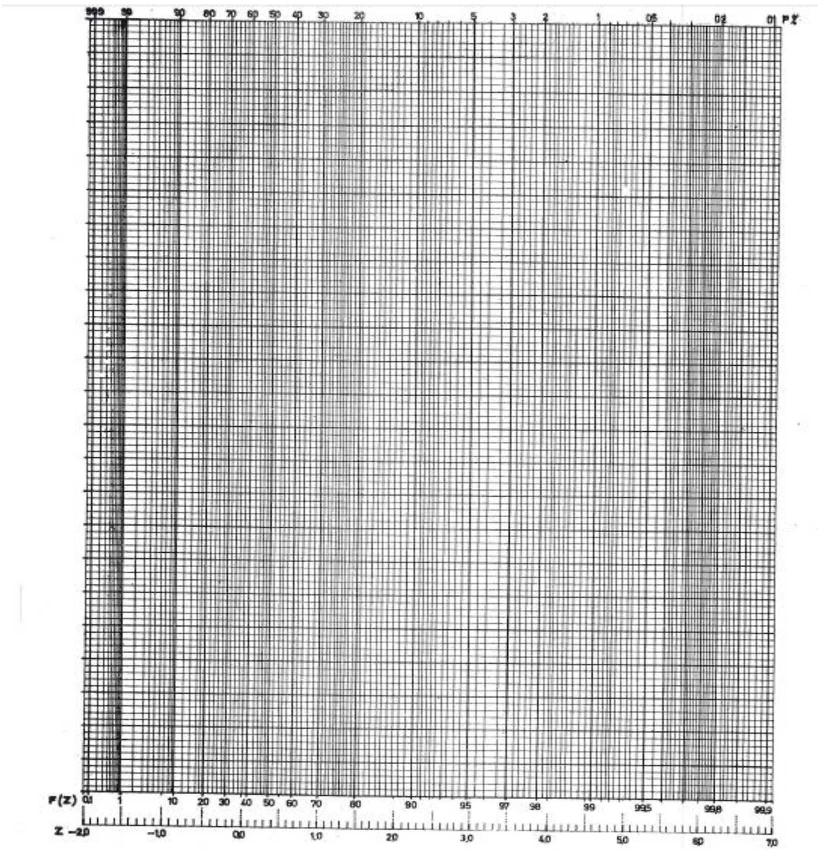
Gompertzova gustoća je proporcionalna Gumbelovoj ograničenoj samo na pozitivni dio.

GRAFIČKI PRIKAZ

U vremenima prije modernih softwarea za prikaz Gumbelove raspodjele koristio se grafički papir baziran na linearizaciji kumulativne raspodjele F:

$$-ln[-\ln(F)] = (x - \mu)/\beta$$

Na papiru je na vodoravnoj osi konstruirana dvostruko log mjerilo, a na okomita os je linearna. Određivanjem F na horizontalnoj osi i x-varijable na okomitoj osi, raspodjela se predstavlja kao pravac sa nagibom 1/β.



Slika 14. Vjerojatnosni papir prilagođen za linearizaciju Gumbelove raspodjele

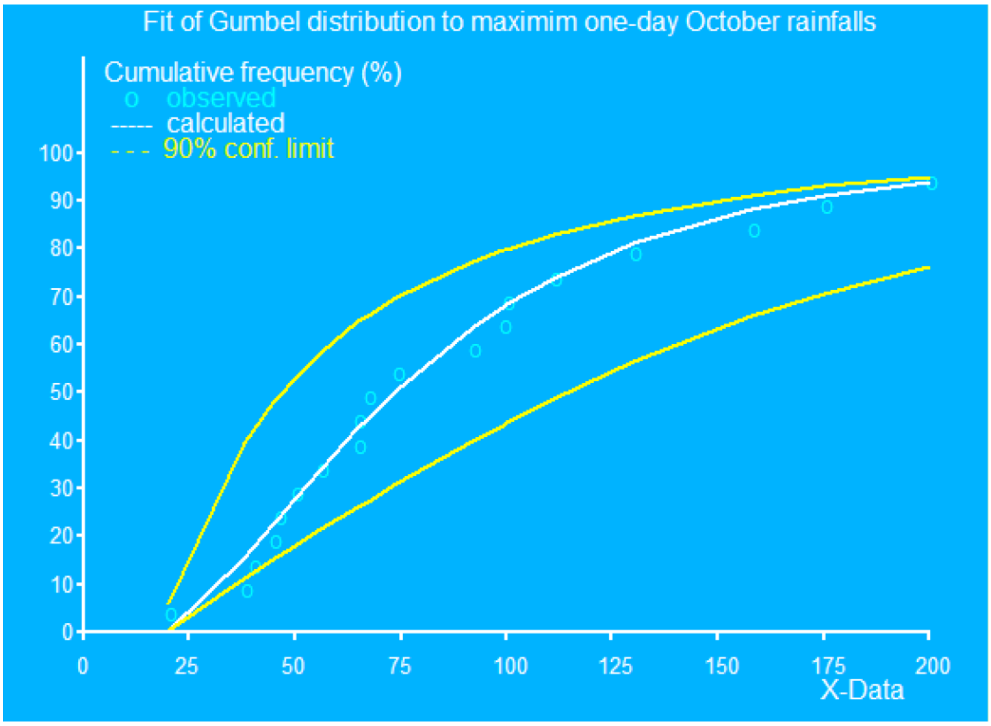
PRIMJENA

Gumbel je dokazao da se najveća vrijednost na uzorku slučajnih varijabli sa eksponencijalnom raspodjelom približava Gumbelovoj raspodjeli sa povećanjem veličine uzorka.

U hidrologiji, dakle, Gumbelova raspodjela se koristi za analizu varijabli poput mjesečnih i godišnjih maksimalnih vrijednosti dnevnih oborina i riječnih protoka, a također može opisati sušne periode.

Gumbel je također pokazao da je procjenitelj r / (n +1) za vjerojatnost događaja - gdje je r rang broj promatrane vrijednosti u nizu podataka i n je ukupan broj opažanja - nepristran procjenitelj kumulativne vjerojatnosti oko modusa raspodjele.

Također, ova raspodjela se koristi i u teoriji brojeva.



Slika 15. Prilagodba Gumbelove raspodjele maksimalnim dnevnim oborinama u listopadu

PRIMJERI

U slijedećem dijelu rada prikazani su primjeri uporabe krivulja raspodjele u svrhu prognoziranja veličine protoka na osnovu empirijskih rezultata protoka rijeke Save kod Zagreba u periodu od 1926.-1981. godine (n=81 godina). Podatci su preuzeti iz stručnog članka „Karakteristični protoci Save kod Zagreba“ autora Trninić D., Bošnjak T. i koristit će se za proračun u slijedećim primjerima.

Tablica 1. Karakteristični protoci na Savi kod Zagreba u razdoblju od 1926.-2006. godine

	Q_{MAX}	Q_{MIN}	Q_{SRED}	Ukupna godišnja količina vode		Karakteristika godine
Godina	**(m3s-1)**	**(m3s-1)**	**(m3s-1)**	**V (109 m3)**	**K**	
1926	2726	130,0	506	15,957	1,64	Vrlo kišna
1927	1959	76,8	327	10,312	1,06	Kišna
1928	1640	55,9	309	9,771	1,00	Normalna
1929	1348	60,9	265	8,357	0,86	Sušna
1930	2320	113,0	368	11,605	1,19	Kišna
1931	1919	85,3	342	10,785	1,11	Kišna
1932	1828	74,0	306	9,676	0,99	Normalna
1933	2877	83,6	414	13,056	1,34	Kišna
1934	2108	156,0	459	14,475	1,48	Vrlo kišna
1935	1640	92,6	316	9,965	1,02	Normalna
1936	2136	95,7	367	11,605	1,19	Kišna
1937	1880	92,6	528	16,651	1,71	Vrlo kišna
1938	1664	75,1	204	6,433	0,66	Vrlo sušna
1939	2347	74,9	346	10,911	1,12	Kišna
1940	2045	88,9	379	11,985	1,23	Kišna
1941	1593	95,0	350	11,038	1,13	Kišna
1942	1442	81,9	219	6,906	0,71	Vrlo sušna
1943	1581	88,9	234	7,379	0,76	Sušna
1944	1713	82,9	309	9,771	1,00	Normalna
1945	875	61,0	173	5,456	0,56	Vrlo sušna
1946	859	64,2	191	6,023	0,62	Vrlo sušna
1947	1817	47,5	271	8,546	0,88	Sušna
1948	2282	120,0	357	11,289	1,16	Kišna
1949	1785	66,2	197	6,213	0,64	Vrlo sušna
1950	1360	76,2	300	9,461	0,97	Normalna
1951	1655	111,0	437	13,781	1,41	Vrlo kišna
1952	1680	101,0	393	12,428	1,27	Kišna
1953	1722	94,3	250	7,884	0,81	Sušna
1954	1800	73,8	292	9,209	0,94	Normalna
1955	1487	91,5	321	10,123	1,04	Kišna
1956	1590	111,0	301	9,518	0,98	Normalna

1957	1120	115,0	278	8,767	0,90	Sušna
1958	1654	62,3	286	9,019	0,92	Normalna
1959	2259	85,5	321	10,123	1,04	Kišna
1960	1764	90,7	444	14,040	1,44	Vrlo kišna
1961	1798	77,4	329	10,375	1,06	Kišna
1962	2085	79,1	423	13,340	1,37	Vrlo kišna
1963	2139	91,2	363	11,448	1,17	Kišna
1964	3126	69,1	329	10,404	1,07	Kišna
1965	1592	144,0	424	13,371	1,37	Vrlo kišna
1966	2581	137,0	326	10,281	1,05	Kišna
1967	1230	68,4	258	8,136	0,83	Sušna
1968	1463	89,2	273	8,633	0,88	Sušna
1969	1470	103,0	356	11,227	1,15	Kišna
1970	1355	85,2	341	10,754	1,10	Kišna
1971	1107	53,5	234	7,379	0,76	Sušna
1972	2244	79,9	397	12,554	1,29	Kišna
1973	2545	82,6	274	8,641	0,89	Sušna
1974	2709	107,0	326	10,281	1,05	Kišna
1975	1845	85,2	293	9,240	0,95	Normalna
1976	1561	77,0	289	9,139	0,94	Normalna
1977	1582	95,0	314	9,902	1,02	Normalna
1978	1117	82,7	308	9,713	1,00	Normalna
1979	2348	70,3	367	11,574	1,19	Kišna
1980	2190	71,4	357	11,289	1,16	Kišna
1981	1065	85,8	260	8,199	0,84	Sušna
1982	1885	71,8	305	9,618	0,99	Normalna
1983	1395	65,0	202	6,370	0,65	Vrlo sušna
1984	1432	83,0	305	9,645	0,99	Normalna
1985	1545	73,0	312	9,839	1,01	Normalna
1986	1263	83,0	285	8,988	0,92	Sušna
1987	1579	80,0	315	9,934	1,02	Normalna
1988	1175	76,9	246	7,779	0,80	Sušna
1989	1496	60,0	236	7,442	0,76	Sušna
1990	2328	76,2	259	8,168	0,84	Sušna
1991	2071	78,6	291	9,177	0,94	Normalna
1992	1830	52,6	269	8,506	0,87	Sušna
1993	1953	46,5	228	7,190	0,74	Sušna
1994	1247	64,6	245	7,726	0,79	Sušna
1995	1450	64,4	266	8,389	0,86	Sušna
1996	1903	64,9	335	10,594	1,09	Normalna
1997	1627	55,5	228	7,190	0,74	Sušna
1998	2469	78,8	270	8,515	0,87	Sušna
1999	1505	99,3	313	9,871	1,01	Normalna
2000	1961	52,9	273	8,633	0,88	Sušna
2001	1818	66,0	297	9,366	0,96	Normalna
2002	1388	60,7	247	7,789	0,80	Sušna
2003	1267	47,4	174	5,487	0,56	Vrlo sušna
2004	1881	81,1	362	11,447	1,17	Kišna
2005	1800	73,8	299	9,429	0,97	Normalna
2006	1930	71,5	275	8,672	0,89	Sušna

PRIMJER 1.

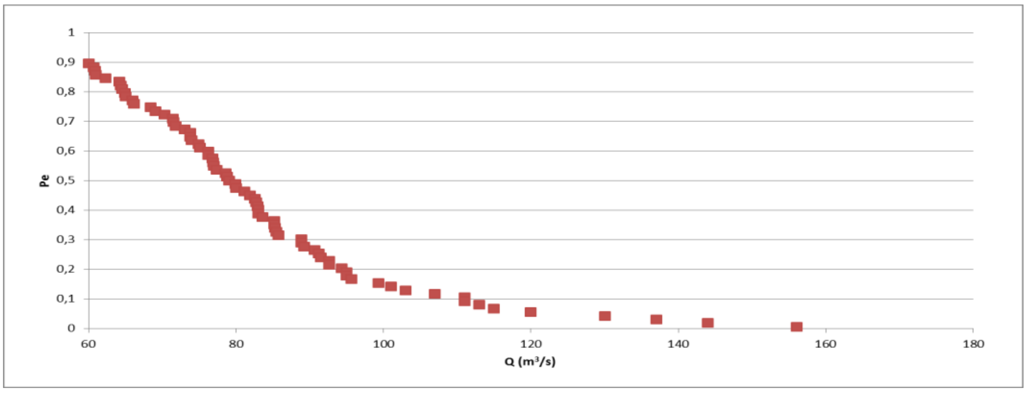
Zadani su minimalni protoci rijeke Save od 1926. do 2006. godine (n=81 godina). Na temelju zadanih protoka potrebno je odrediti empirijske raspodjele te napraviti empirijsku krivulju raspodjele te krivulju Gumbelove raspodjele. Izvršiti proračun vjerojatnosti godišnjih protoka te proračun protoka za određeni povratni period. Provjeriti prilagodljivost Gumbelove raspodjele ulaznim podatcima χ^2 testom te Kolmogorov-Smirnov testom.

$\bar{Q} = 81{,}9\ m^3/s$, $S_Q = 21{,}2\ m^3/s$, $C_V = 0{,}259$, $C_S = 1{,}09$

Tablica 2. Izračun empirijske vjerojatnosti po formuli Pe=(n-0,5)/N

GODINA	Q (m^3/s)	RANG	Pe
1934	156	1	0,006173
1965	144	2	0,018519
1966	137	3	0,030864
1926	130	4	0,04321
1948	120	5	0,055556
1957	115	6	0,067901
1930	113	7	0,080247
1951	111	8	0,092593
1956	111	9	0,104938
1974	107	10	0,117284
1969	103	11	0,12963
1952	101	12	0,141975
1999	99,3	13	0,154321
1936	95,7	14	0,166667
1941	95	15	0,179012
1977	95	16	0,191358
1953	94,3	17	0,203704
1935	92,6	18	0,216049
1937	92,6	19	0,228395
1955	91,5	20	0,240741
1963	91,2	21	0,253086
1960	90,7	22	0,265432
1968	89,2	23	0,277778
1940	88,9	24	0,290123
1943	88,9	25	0,302469
1981	85,8	26	0,314815
1959	85,5	27	0,32716
1931	85,3	28	0,339506
1970	85,2	29	0,351852
1975	85	30	0,364198
1933	83,6	31	0,376543
1984	83	32	0,388889
1986	83	33	0,401235
1944	82,9	34	0,41358
1978	82,7	35	0,425926
1973	82,6	36	0,438272
1942	81,9	37	0,450617
2004	81,1	38	0,462963
1987	80	39	0,475309

1972	79,9	40	0,487654
1962	79,1	41	0,5
1998	78,8	42	0,512346
1991	78,6	43	0,524691
1961	77,4	44	0,537037
1976	77	45	0,549383
1988	76,9	46	0,561728
1927	76,8	47	0,574074
1950	76,2	48	0,58642
1990	76,2	49	0,598765
1938	75,1	50	0,611111
1939	74,9	51	0,623457
1932	74	52	0,635802
1954	73,8	53	0,648148
2005	73,8	54	0,660494
1985	73	55	0,67284
1982	71,8	56	0,685185
2006	71,5	57	0,697531
1980	71,4	58	0,709877
1979	70,3	59	0,722222
1964	69,1	60	0,734568
1967	68,4	61	0,746914
1949	66,2	62	0,759259
2001	66	63	0,771605
1983	65	64	0,783951
1996	64,9	65	0,796296
1994	64,6	66	0,808642
1995	64,4	67	0,820988
1946	64,2	68	0,833333
1958	62,3	69	0,845679
1945	61	70	0,858025
1929	60,9	71	0,87037
2002	60,7	72	0,882716
1989	60	73	0,895062
1928	55,9	74	0,907407
1997	55,5	75	0,919753
1971	53,5	76	0,932099
2000	52,9	77	0,944444
1992	52,6	78	0,95679
1947	47,5	79	0,969136
2003	47,4	80	0,981481
1993	46,5	81	0,993827

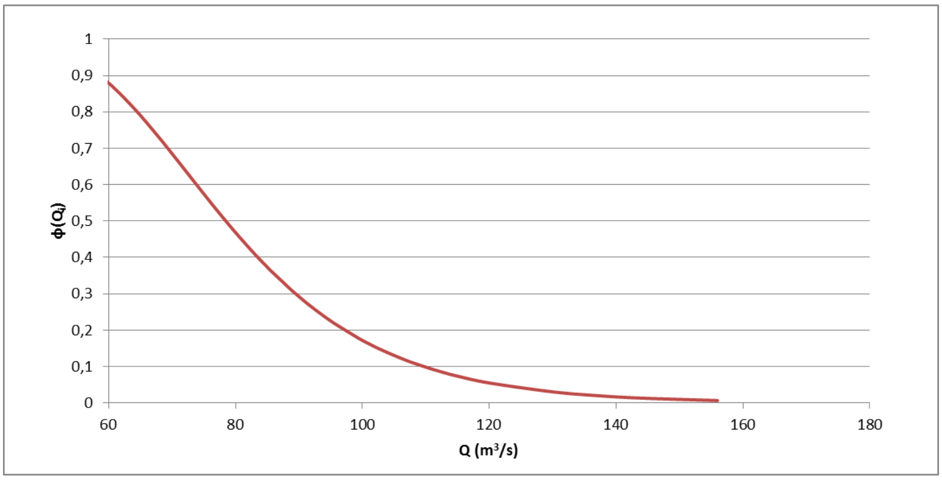


Slika 16. Empirijska raspodjela

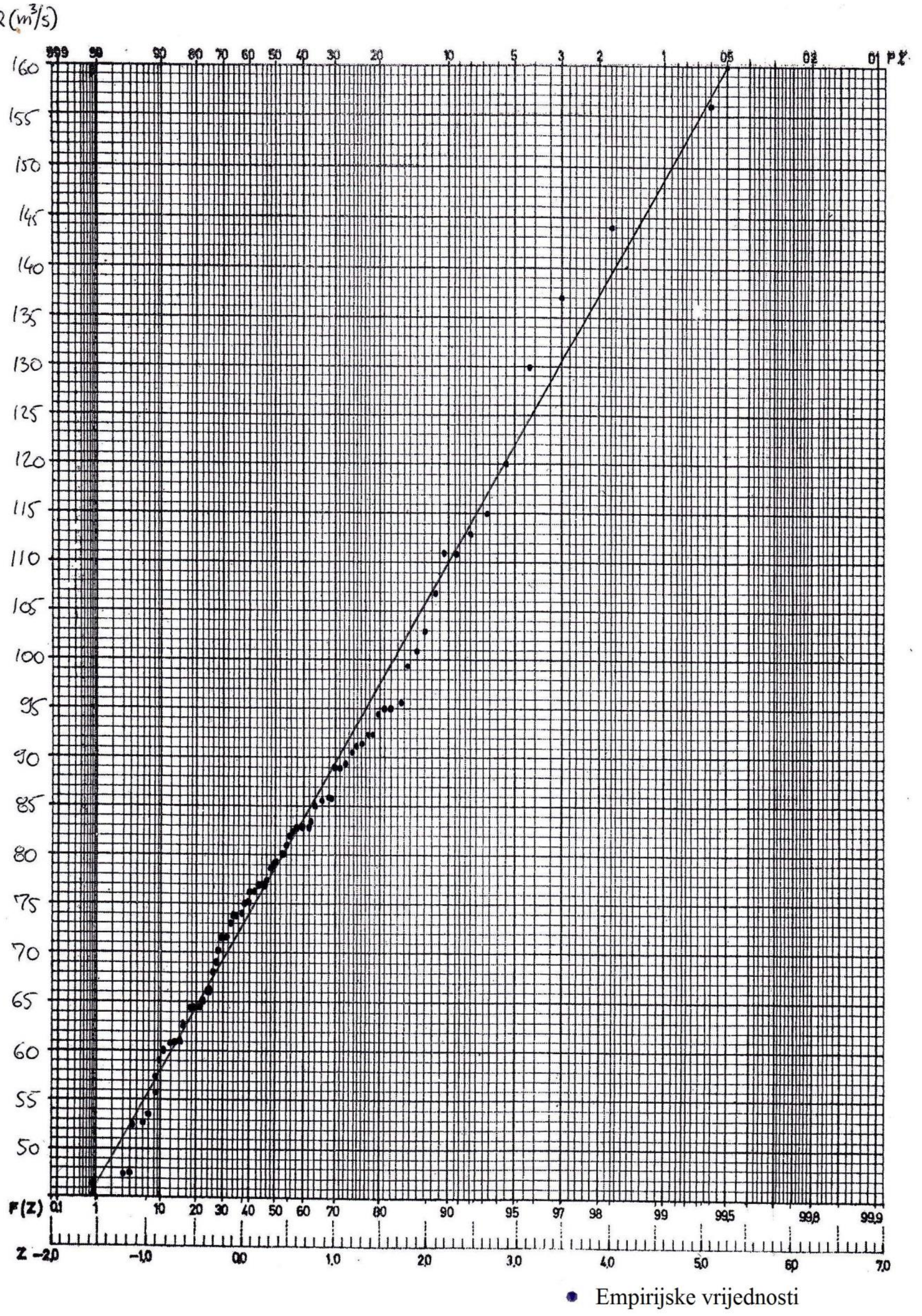
Tablica 3. Gumbelova funkcija raspodjele

GODINA	Q (m^3/s)	z	F(z)	φ
1993	46,5	-1,56184	0,008501	0,991499
2003	47,4	-1,50752	0,010938	0,989062
1947	47,5	-1,50148	0,011239	0,988761
1992	52,6	-1,19366	0,036915	0,963085
2000	52,9	-1,17555	0,039166	0,960834
1971	53,5	-1,13934	0,04395	0,95605
1997	55,5	-1,01862	0,062701	0,937299
1928	55,9	-0,99448	0,066983	0,933017
1989	60	-0,74702	0,121154	0,878846
2002	60,7	-0,70477	0,132209	0,867791
1929	60,9	-0,69269	0,135458	0,864542
1945	61	-0,68666	0,137097	0,862903
1958	62,3	-0,60819	0,159277	0,840723
1946	64,2	-0,49352	0,194356	0,805644
1995	64,4	-0,48144	0,198214	0,801786
1994	64,6	-0,46937	0,202101	0,797899
1996	64,9	-0,45127	0,207983	0,792017
1983	65	-0,44523	0,209958	0,790042
2001	66	-0,38487	0,230057	0,769943
1949	66,2	-0,3728	0,23415	0,76585
1967	68,4	-0,24001	0,280476	0,719524
1964	69,1	-0,19776	0,295622	0,704378
1979	70,3	-0,12534	0,321896	0,678104
1980	71,4	-0,05894	0,346209	0,653791
2006	71,5	-0,05291	0,348426	0,651574
1982	71,8	-0,0348	0,35508	0,64492
1985	73	0,03763	0,381719	0,618281
1954	73,8	0,085916	0,399448	0,600552
2005	73,8	0,085916	0,399448	0,600552
1932	74	0,097987	0,403871	0,596129
1939	74,9	0,152309	0,423703	0,576297
1938	75,1	0,16438	0,428091	0,571909
1950	76,2	0,230773	0,45207	0,54793
1990	76,2	0,230773	0,45207	0,54793
1927	76,8	0,266988	0,465017	0,534983
1988	76,9	0,273024	0,467164	0,532836
1976	77	0,279059	0,469308	0,530692
1961	77,4	0,303202	0,477854	0,522146
1991	78,6	0,375631	0,503156	0,496844
1998	78,8	0,387703	0,50732	0,49268
1962	79,1	0,40581	0,513535	0,486465
1972	79,9	0,454096	0,529924	0,470076
1987	80	0,460132	0,531953	0,468047
2004	81,1	0,526525	0,553965	0,446035
1942	81,9	0,574811	0,569605	0,430395
1973	82,6	0,617061	0,583023	0,416977
1978	82,7	0,623096	0,584919	0,415081
1944	82,9	0,635168	0,588695	0,411305
1984	83	0,641204	0,590575	0,409425
1986	83	0,641204	0,590575	0,409425
1933	83,6	0,677418	0,601742	0,398258
1975	85,2	0,77399	0,630546	0,369454
1970	85,2	0,77399	0,630546	0,369454
1931	85,3	0,780026	0,632298	0,367702

1959	85,5	0,792097	0,635786	0,364214
1981	85,8	0,810204	0,640974	0,359026
1940	88,9	0,997312	0,691516	0,308484
1943	88,9	0,997312	0,691516	0,308484
1968	89,2	1,01542	0,696108	0,303892
1960	90,7	1,105956	0,718281	0,281719
1963	91,2	1,136134	0,725381	0,274619
1955	91,5	1,154241	0,729572	0,270428
1935	92,6	1,220635	0,7445	0,2555
1937	92,6	1,220635	0,7445	0,2555
1953	94,3	1,323242	0,766232	0,233768
1941	95	1,365492	0,774719	0,225281
1977	95	1,365492	0,774719	0,225281
1936	95,7	1,407743	0,782943	0,217057
1999	99,3	1,625029	0,821268	0,178732
1952	101	1,727637	0,83719	0,16281
1969	103	1,848351	0,85428	0,14572
1974	107	2,089781	0,883632	0,116368
1951	111	2,331211	0,907394	0,092606
1956	111	2,331211	0,907394	0,092606
1930	113	2,451925	0,917477	0,082523
1957	115	2,57264	0,926507	0,073493
1948	120	2,874427	0,945115	0,054885
1926	130	3,478001	0,969603	0,030397
1966	137	3,900503	0,979972	0,020028
1965	144	4,323004	0,986828	0,013172
1934	156	5,047293	0,993594	0,006406



Slika 17. Gumbelova raspodjela



Slika 18. Empirijska i Gumbelova raspodjela

Tablica 4. Protoci za zadane vjerojatnosti

Vjerojatnost pojavljivanja p(%)	**z**	**$Q(m^3/s)=\mu+z*\sigma$**
0,1	6,9073	186,8174
1	4,6001	148,5926
10	2,2504	109,6607
30	1,0309	89,4567
50	0,3665	78,4485
70	-0,1856	69,3005
90	-0,8340	58,5575
99	-1,5272	47,0732

Tablica 5. Vrijednosti protoka za određene povratne periode

PP	**F(z)**	**z**	**Xpp=μ+z*σ**
200	0,995	5,2958	160,1185
100	0,99	4,6001	148,5926
50	0,98	3,9019	137,0244
10	0,9	2,2504	109,6607

TESTIRANJE HIPOTEZA:

HIKVADRAT TEST

Tablica 6. Tablica testiranja suglasnosti empirijske i teorijske funkcije raspodjele hikvadrat testom

Q (m^3/s)	**z**	**F**	**ΔF**	**f_{ti}**	**f**	**$(f-f_{ti})^2/f_{ti}$**	**Q(m^3/s)**	**i**
55	-1,0488	0,0576	0,0576	4,665598	6	0,38165	<55	1
70	-0,14344	0,315297	0,257697	20,87346	16	1,137837	55-70	2
85	0,761918	0,627024	0,311727	25,24991	29	0,55696	70-85	3
100	1,667279	0,827985	0,200961	16,27784	18	0,1822	85-100	4
115	2,57264	0,926507	0,098522	7,980256	6	0,491389	100-115	5
130	3,478001	0,969603	0,043096	3,490743	2	0,636631	115-130	6
145	4,383362	0,987594	0,017992	1,457331	3	1,633003	130-145	7
			0,012406	1,004864	1	2,35E-05	>145	8
	Σ		1	81	81	5,019694		

$\chi^2_5 = 5{,}0197 \quad < \quad \chi^2_{5,0.05} = 11{,}07 \quad \rightarrow$ PRIHVAĆAMO HIPOTEZU H_0

K-S TEST

Tablica 7. Tablica testiranja suglasnosti empirijske i teorijske funkcije raspodjele k-s testom

GODINA	Q (m^3/s)↓	RANG	Pe	z	F(z)	D_{51}
1993	46,5	1	0,0062	-1,56184	0,0085	0,0023
2003	47,4	2	0,0185	-1,50752	0,0109	0,0076
1947	47,5	3	0,0309	-1,50148	0,0112	0,0196
1992	52,6	4	0,0432	-1,19366	0,0369	0,0063
2000	52,9	5	0,0556	-1,17555	0,0392	0,0164
1971	53,5	6	0,0679	-1,13934	0,0439	0,0240
1997	55,5	7	0,0802	-1,01862	0,0627	0,0175
1928	55,9	8	0,0926	-0,99448	0,0670	0,0256
1989	60	9	0,1049	-0,74702	0,1212	0,0162
2002	60,7	10	0,1173	-0,70477	0,1322	0,0149
1929	60,9	11	0,1296	-0,69269	0,1355	0,0058
1945	61	12	0,1420	-0,68666	0,1371	0,0049
1958	62,3	13	0,1543	-0,60819	0,1593	0,0050
1946	64,2	14	0,1667	-0,49352	0,1944	0,0277
1995	64,4	15	0,1790	-0,48144	0,1982	0,0192
1994	64,6	16	0,1914	-0,46937	0,2021	0,0107
1996	64,9	17	0,2037	-0,45127	0,2080	0,0043
1983	65	18	0,2160	-0,44523	0,2100	0,0061
2001	66	19	0,2284	-0,38487	0,2301	0,0017
1949	66,2	20	0,2407	-0,3728	0,2341	0,0066
1967	68,4	21	0,2531	-0,24001	0,2805	0,0274
1964	69,1	22	0,2654	-0,19776	0,2956	0,0302
1979	70,3	23	0,2778	-0,12534	0,3219	0,0441
1980	71,4	24	0,2901	-0,05894	0,3462	0,0561
2006	71,5	25	0,3025	-0,05291	0,3484	0,0460
1982	71,8	26	0,3148	-0,0348	0,3551	0,0403
1985	73	27	0,3272	0,03763	0,3817	0,0546
1954	73,8	28	0,3395	0,085916	0,3994	0,0599
2005	73,8	29	0,3519	0,085916	0,3994	0,0476
1932	74	30	0,3642	0,097987	0,4039	0,0397
1939	74,9	31	0,3765	0,152309	0,4237	0,0472
1938	75,1	32	0,3889	0,16438	0,4281	0,0392
1950	76,2	33	0,4012	0,230773	0,4521	0,0508
1990	76,2	34	0,4136	0,230773	0,4521	0,0385
1927	76,8	35	0,4259	0,266988	0,4650	0,0391
1988	76,9	36	0,4383	0,273024	0,4672	0,0289
1976	77	37	0,4506	0,279059	0,4693	0,0187
1961	77,4	38	0,4630	0,303202	0,4779	0,0149
1991	78,6	39	0,4753	0,375631	0,5032	0,0278
1998	78,8	40	0,4877	0,387703	0,5073	0,0197
1962	79,1	41	0,5000	0,40581	0,5135	0,0135
1972	79,9	42	0,5123	0,454096	0,5299	0,0176
1987	80	43	0,5247	0,460132	0,5320	0,0073
2004	81,1	44	0,5370	0,526525	0,5540	0,0169
1942	81,9	45	0,5494	0,574811	0,5696	0,0202
1973	82,6	46	0,5617	0,617061	0,5830	0,0213
1978	82,7	47	0,5741	0,623096	0,5849	0,0108
1944	82,9	48	0,5864	0,635168	0,5887	0,0023
1984	83	49	0,5988	0,641204	0,5906	0,0082
1986	83	50	0,6111	0,641204	0,5906	0,0205
1933	83,6	51	0,6235	0,677418	0,6017	0,0217
1975	85,2	52	0,6358	0,77399	0,6305	0,0053
1970	85,2	53	0,6481	0,77399	0,6305	0,0176
1931	85,3	54	0,6605	0,780026	0,6323	0,0282

1959	85,5	55	0,6728	0,792097	0,6358	0,0371
1981	85,8	56	0,6852	0,810204	0,6410	0,0442
1940	88,9	57	0,6975	0,997312	0,6915	0,0060
1943	88,9	58	0,7099	0,997312	0,6915	0,0184
1968	89,2	59	0,7222	1,01542	0,6961	0,0261
1960	90,7	60	0,7346	1,105956	0,7183	0,0163
1963	91,2	61	0,7469	1,136134	0,7254	0,0215
1955	91,5	62	0,7593	1,154241	0,7296	0,0297
1935	92,6	63	0,7716	1,220635	0,7445	0,0271
1937	92,6	64	0,7840	1,220635	0,7445	0,0395
1953	94,3	65	0,7963	1,323242	0,7662	0,0301
1941	95	66	0,8086	1,365492	0,7747	0,0339
1977	95	67	0,8210	1,365492	0,7747	0,0463
1936	95,7	68	0,8333	1,407743	0,7829	0,0504
1999	99,3	69	0,8457	1,625029	0,8213	0,0244
1952	101	70	0,8580	1,727637	0,8372	0,0208
1969	103	71	0,8704	1,848351	0,8543	0,0161
1974	107	72	0,8827	2,089781	0,8836	0,0009
1951	111	73	0,8951	2,331211	0,9074	0,0123
1956	111	74	0,9074	2,331211	0,9074	0,0000
1930	113	75	0,9198	2,451925	0,9175	0,0023
1957	115	76	0,9321	2,57264	0,9265	0,0056
1948	120	77	0,9444	2,874427	0,9451	0,0007
1926	130	78	0,9568	3,478001	0,9696	0,0128
1966	137	79	0,9691	3,900503	0,9800	0,0108
1965	144	80	0,9815	4,323004	0,9868	0,0053
1934	156	81	0,9938	5,047293	0,9936	0,0002

$\mathbf{D_{81}} = 0{,}0599 \quad < \quad \mathbf{D_{81,0.05}} = 0{,}1511 \quad \rightarrow$ PRIHVAĆAMO HIPOTEZU H_0

PRIMJER 2.

Pod pretpostavkom da se maksimalni godišnji protoci rijeke Save na vodomjernoj stanici Zagreb za period od 1926. do 2006. godine (n = 81 godina) prilagođavaju Gumbelovoj funkciji raspodjele vjerojatnosti, definirati vrijednosti maksimalnih godišnjih protoka za nekoliko karakterističnih povratnih perioda javljanja (T = 2, 5, 10, 50 i 100 godina), te predstaviti teorijsku i empirijsku funkciju raspodjele na dijagramu vjerojatnosti. Potrebne vrijednosti statistika uzorka iznose:

$\bar{Q} = 1776\, m^3/s$, $S_Q = 454\, m^3/s$, $C_V = 0{,}255$, $C_S = 0{,}546$

T(Q) = 2 godine $\Phi(Q) = \frac{1}{T(Q)} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

F(Q) = 1 – Φ(Q) = 1-0,5 = 0,5

Za F(Q) = 0,5 prema izrazu

$$x(T) = \mu + \sigma\left[\frac{c_s}{2} z(T) - \frac{2}{c_s}\right]$$

$z(T) = -ln[-lnF(Q)] = 0{,}367$, slijedi prema izrazu

$$K_p(T) \cong z + (z^2-1)\frac{c_s}{6} + \frac{1}{3}(z^3-6z)\left(\frac{c_s}{6}\right)^2 - (z^2-1)\left(\frac{c_s}{6}\right)^3 + z\left(\frac{c_s}{6}\right)^4 + \frac{1}{3}\left(\frac{c_s}{6}\right)^5$$

$$Q(T) = \bar{Q} + S_Q(0{,}78z(T) - 0{,}45) = 1701{,}66\, m^3/s$$

Koristeći istu proceduru dobiju se vrijednosti protoka Q za ostale povratne periode koji su dani u donjoj tablici:

Tablica 8. Vrijednosti protoka za različite povratne periode

Povratni period T (godina)	2	5	10	50	100
Protok Q(m^3/s)	1701,66	2102,88	2368,47	2952,77	3200,65

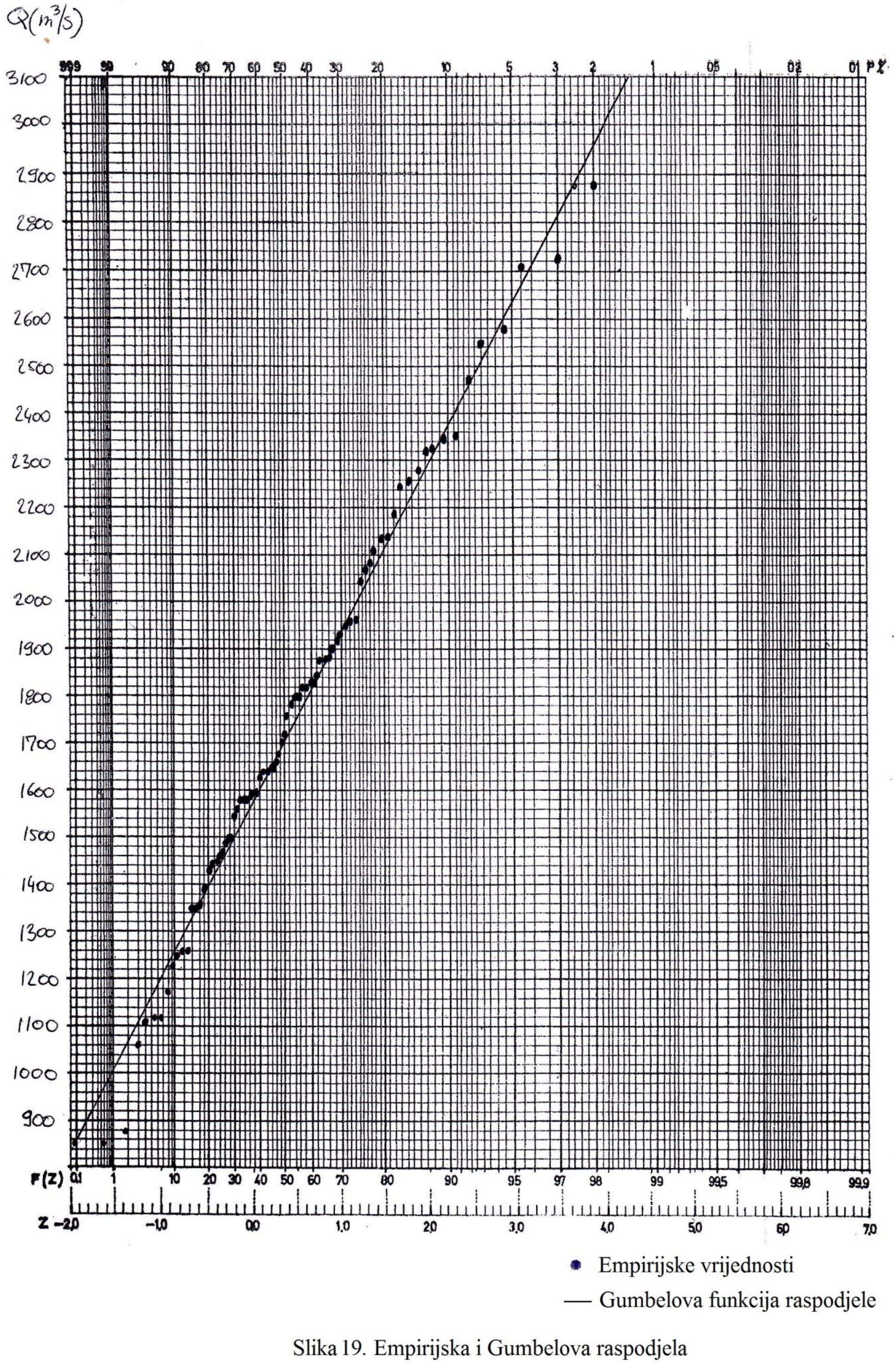
Vrijednosti empirijske funkcije raspodjele mogu se izračunati prema obrascu

$$F_e(Q_m) = P[Q \leq Q_m] = \frac{m}{n+1} 100 \ (\%)$$

kao skup od n =81 točaka nanešene na dijagram vjerojatnosti prikazan na slici gdje je svaka točka određena koordinatama

$[F(Q_m); \ Q_m]$.

Na isti dijagram je nanesena i teorijska Gumbelova raspodjela koristeći podatke o izračunatim protocima određenih povratnih perioda javljanja u gornjoj tablici. Za prikaz je korišten vjerojatnosni papir za linearizaciju Gumbelove raspodjele.



Slika 19. Empirijska i Gumbelova raspodjela

PRIMJER 3.

Ako se pretpostavi da se srednji godišnji protoci rijeke Save na vodomjernoj stanici Zagreb prilagođavaju log-normalnoj funkciji raspodjele vjerojatnosti, potrebno je odrediti vrijednost srednjeg godišnjeg protoka rijeke Save na vodomjernoj stanici Zagreb povratnog perioda T = 100 godina, ako su parametri uzorka srednjih godišnjih protoka:

$\bar{Q} = 309\, m^3/s, \qquad S_Q = 70{,}3\, m^3/s$

$$S_y^2 = \ln\left(\frac{S_Q^2}{\bar{Q}^2} + 1\right) = ln\left(\frac{70{,}3^2}{309^2} + 1\right) = 1{,}0518$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2} ln\left(\frac{\bar{Q}^4}{\bar{Q}^2 + S_Q^2}\right) = \frac{1}{2} ln\left(\frac{309^4}{309^2 + 70{,}3^2}\right) = 5{,}7081$$

$P(Q \geq Q_{100}) = \Phi(Q_{100}) = 1 - F(Q_{100}) = 1/T = 1/100 = 0{,}01 \rightarrow$
$\rightarrow F(Q_{100}) = F(z_{100}) = 1\text{-}0{,}01 = 0{,}99$

Iz statističke tablice očitamo za $F\left[z_{100} = (y_{100} - \bar{y})/S_y\right] = 0{,}99,$ slijedi da je vjerojatnost $z_{100} = 2{,}32$.

Slijedi:

$$y_{100} = \bar{y} + zS_y = 5{,}7081 + 2{,}32 \cdot 1{,}0256 = 8{,}087$$

$$Q_{100} = e^{y_{100}} = e^{8{,}087} = 3251{,}92\, m^3/s$$

ZAKLJUČAK

Osnovni cilj ovog rada bio je opisati i predstaviti krivulje raspodjele i njihovu primjenu u hidrologiji. Odabirom prikladnih krivulja raspodjele možemo dovoljno precizno pretpostaviti i opisati određenu hidrološku ili meteorološku veličinu. Uz pomoć novih tehnologija te razvojem softwarea još se više može poboljšati prognoza ekstremnih veličina.

Dakako još uvijek nemamo dovoljno velik broj mjerenja na svim mjernim postajama da bi se mogli apsolutno pouzdati u teorijska predviđanja te stoga valja biti vrlo rezerviran u procjenama ekstrema na tim lokacijama.

U ovom završnom radu na primjerima zadataka opisan je osnovni način prilagodbe empirijskih veličina teorijskim (Gumbel, log-normalna) na uzorcima protoka rijeke Save na vodomjernoj postaji Zagreb u razdoblju od 1926. do 2006. godine (n=81). Točnost je ispitivana hi-kvadrat i K-S testom. Također obrađivana je i procjena maksimalnih protoka na različite povratne periode javljanja.

Podatci o protocima rijeke Save potrebni za proračun, preuzeti su iz stručnog članka „Karakteristični protoci Save kod Zagreba“ autora Dr. sc. Dušana Trninića i Tomislave Bošnjak ing. građ.

LITERATURA:

Žugaj R. (2000): Hidrologija, Sveučilište u Zagrebu, Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Zagreb

Žugaj, R. (1994): Ekstremni protoci u kršu Hrvatske, Građevinar 12, Zagreb

Hrelja, H. (2000): Vjerovatnoća i statistika u hidrologiji, Univerzitet u Sarajevu, Građevinski fakultet, Sarajevo

Haan, C. (1979): Statistical Methods in hydrology, The Iowa State University Press, Ames

Trninić, D., Bošnjak, T. (2009): Karakteristični protoci Save kod Zagreba. Stručni članak, Zagreb

POPIS URL-ova:

URL 1:
http://www.gradst.hr/Portals/9/docs/katedre/Hidrologija/GENETSKA%20HIDROLOGIJA%20(2.%20dio).pdf

URL: 2
http://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution

URL 3:
http://en.wikipedia.org/wiki/Gumbel_distribution

URL 4:
http://en.wikipedia.org/wiki/Log-normal_distribution

URL 5:
http://www.droughtsandfloods.com/Chapter%204%20Hydrological%20statistics.pdf