

# Usporedba analitičke, numeričke i eksperimentalne analize grednog nosača

---

Ožinger, Luka

Master's thesis / Diplomski rad

2021

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:*

**University of Split, Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy / Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:123:943768>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-10**



*Repository / Repozitorij:*

[FCEAG Repository - Repository of the Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy, University of Split](#)



UNIVERSITY OF SPLIT



**SVEUČILIŠTE U SPLITU**  
**FAKULTET GRAĐEVINARSTVA ARHITEKTURE I GEODEZIJE**

# **DIPLOMSKI RAD**

**Luka Ožinger**

**Split, 2021.**

**SVEUČILIŠTE U SPLITU  
FAKULTET GRAĐEVINARSTVA ARHITEKTURE I GEODEZIJE**

**Luka Ožinger**

**Usporedba analitičke, numeričke i eksperimentalne  
analize grednog nosača**

**Diplomski rad**

**Split, 2021.**

# **Usporedba analitičke, numeričke i eksperimentalne analize grednog nosača**

## ***Sažetak:***

U ovom diplomskom radu izvršena je analitička, numerička i eksperimentalna analiza grednog nosača L oblika poprečnog presjeka, raspona  $L = 1,9$  metara. Analize su izvršene za slučajeve kada se nosač opterećuje posebno u trećinama te posebno u polovici raspona. Dobiveni rezultati za svaku analizu su međusobno uspoređeni te prikazani dijagramima.

## ***Ključne riječi:***

Progib, naprezanja, kut nagiba tangente, analitički proračun, numerički linearni proračun, numerički nelinearni proračun, eksperiment.

# **Comparison of analytical, numerical and experimental analysis beam girder**

## ***Abstract:***

In this diploma work, analytical, numerical and experimental analysis is performed for beam girder of L shape cross-section, length  $L = 1,9$  meters. Analyses were performed for cases where the girder load is applied separately in thirds of length, and separately in half of the length. Results obtained for each of the analysis were compared with each other and are shown in diagrams.

## ***Keywords:***

Deflection, stresses, tangent angle, analytical calculation, numerical linear calculation, numerical nonlinear calculation, experiment.

SVEUČILIŠTE U SPLITU  
FAKULTET GRAĐEVINARSTVA, ARHITEKTURE I GEODEZIJE 71

Datum prijave: 25. 6. 2021.	
Klasifikacijski oznaka: 602-04/21-13/0002	Prijava
2181-208-21/0006	

STUDIJ: DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ GRAĐEVINARSTVA

KANDIDAT: Luka Ožinger

MATIČNI BROJ (JMBAG): 0083219676

KATEDRA: Katedra za otpornost materijala i ispitivanje konstrukcija

PREDMET: Ispitivanje konstrukcija

### ZADATAK ZA DIPLOMSKI RAD

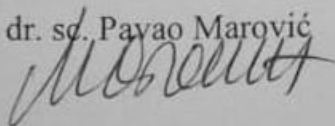
Tema: Usporedba analitičke, numeričke i eksperimentalne analize grednog nosača

Opis zadatka: U ovom diplomskom radu potrebno je izvršiti eksperimentalna ispitivanja te analitički i numerički proračun za odabrani gredni nosač poprečnog presjeka u obliku slova L. Za gredu uzeti model nosača tribina stadiona u Dugopolju izrađen od medijapana. Odrediti progibe u polovici raspona, kuteve nagiba tangente na elastičnu liniju na osloncima i naprezanja u odabranim točkama. Opterećenje od betonskih kocaka staviti u trećine raspona i nanositi pojedinačno. Ako bude moguće, ispitivanje provesti i na novom stroju s opterećenjem u polovici raspona do sloma. Numeričke proračune provesti programom Scia Engineer u linearnom i nelinearnom području. Za sve progibe nacrtati odgovarajuće sila-pomak dijagrame. Na kraju treba usporediti sve dobivene rezultate analitičkih i numeričkih proračuna s rezultatima eksperimentalnih analiza te izvući odgovarajuće zaključke.

U Splitu, 05. ožujka, 2021. godine

Voditelj Diplomskog rada:

prof. dr. sc. Pavao Marović



Predsjednik Povjerenstva  
za završne i diplomske ispite:  
Doc. dr. sc. Ivo Andrić

## Sadržaj:

<b>POPIS SLIKA .....</b>	<b>III</b>
<b>POPIS TABLICA .....</b>	<b>VI</b>
<b>1. UVOD .....</b>	<b>1</b>
1.1. Općenito o ispitivanju konstrukcija.....	1
1.2. Sadržaj zadatka.....	1
1.3. Opis grednog nosača .....	2
<b>2. ANALITIČKI PRORAČUN .....</b>	<b>4</b>
2.1. Uvod .....	4
2.2. Statički proračun .....	4
2.3. Jednadžba elastične linije:.....	5
2.4. Određivanje nepoznatih konstanti .....	7
2.5. Uvrštavanje rubnih uvjeta .....	8
2.6. Određivanje kutova nagiba tangente na elastičnu liniju.....	9
2.7. Određivanje progiba .....	10
2.8. Proračun naprezanja u zadanim točkama .....	10
2.9. Rezultati analitičkog proračuna.....	17
<b>3. NUMERIČKI PRORAČUN.....</b>	<b>19</b>
3.1. Uvod.....	19
3.2. Četverotočkasto savijanje.....	19
3.3. Rezultati numeričkog proračuna za četverotočkasto savijanje.....	21
3.4. Trotočkasto savijanje.....	26
3.5. Rezultati numeričkog proračuna za trotočkasto savijanje.....	27
<b>4. EKSPERIMENTALNA ANALIZA .....</b>	<b>31</b>
4.1. Uvod.....	31
4.2. Ispitivanje četverotočkastim savijanjem .....	37
4.3. Rezultati eksperimentalne analize za četverotočkasto savijanje .....	47
4.4. Ispitivanje trotočkastim savijanjem.....	48
4.5. Rezultati eksperimentalne analize za trotočkasto savijanje .....	55



<b>5. USPOREDBA REZULTATA.....</b>	<b>56</b>
<b>6. ZAKLJUČAK.....</b>	<b>58</b>
<b>7. LITERATURA.....</b>	<b>59</b>

## POPIS SLIKA

Slika 1: Ploče od medijapana .....	2
Slika 2: Gornji element poprečnog presjeka nosača .....	2
Slika 3: Donji elementi poprečnog presjeka nosača.....	3
Slika 4: Poprečni presjek nosača .....	3
Slika 5: Prikaz zadatka .....	4
Slika 6: Momentni dijagram statičkog sustava.....	5
Slika 7: Poprečni presjek nosača s opterećenjem.....	10
Slika 8: Težište poprečnog presjeka i novi (y,z) koordinatni sustav .....	11
Slika 9: Koordinatni sustav (u,v).....	13
Slika 10: Jezgra poprečnog presjeka nosača .....	15
Slika 11: Dijagram normalnih naprezanja.....	15
Slika 12: Dijagram naprezanja u slučaju pravog savijanja.....	16
Slika 13: Karakteristike materijala .....	19
Slika 14: Poprečni presjek nosača .....	20
Slika 15: Prikaz statičkog sustava .....	20
Slika 16: Opterećenje .....	20
Slika 17: Momentni dijagram u smjeru y za linearni proračun .....	21
Slika 18: Momentni dijagram u smjeru y za nelinearni proračun .....	21
Slika 19: Kut nagiba tangente za linearni proračun .....	22
Slika 20: Kut nagiba tangente za nelinearni proračun.....	22
Slika 21: Progib za linearni proračun .....	23
Slika 22: Progib za nelinearni proračun .....	23
Slika 23: Statički model za trotočkasto savijanje.....	26
Slika 24: Momenti dijagram u smjeru y za linearni proračun .....	27
Slika 25: Momenti dijagram u smjeru y za nelinearni proračun .....	27



Slika 26: Kut nagiba tangente za linearni proračun .....	28
Slika 27: Kut nagiba tangente za nelinearni proračun.....	28
Slika 28: Progib za linearni proračun .....	29
Slika 29: Progib za nelinearni proračun .....	29
Slika 30: Prikaz grednog nosača .....	31
Slika 31: Položaj mikroura .....	32
Slika 32: Digitalna mikroura .....	32
Slika 33: Analogna mikroura .....	32
Slika 34: Klinometar .....	33
Slika 35: Položaj klinometra na grednom nosaču .....	33
Slika 36: Barry-ev prijenosni komparator .....	34
Slika 37: Položaj markica na grednom nosaču.....	34
Slika 38: Mjerenje deformacija pomoću Barry-evog prijenosnog komparatora .....	35
Slika 39: Prikaz grednog nosača nakon montirane cjelokupne opreme za mjerenje .....	36
Slika 40: Nosač s jednim redom opterećenja, $F = 0,08$ kN .....	37
Slika 41: Nosač s dva reda opterećenja, $F = 0,16$ kN.....	37
Slika 42: Nosač s tri reda opterećenja, $F = 0,24$ kN.....	38
Slika 43: Nosač s četiri reda opterećenja, $F = 0,32$ kN .....	38
Slika 44: Uvijanje poprečnog presjeka u polovici raspona nosača, $F = 0,32$ kN.....	39
Slika 45: Nosač s pet redova opterećenja, $F = 0,40$ kN.....	39
Slika 46: Izlazak mikroure iz položaja U-5.....	40
Slika 47: Nosač sa šest redova opterećenja, $F = 0,48$ kN.....	40
Slika 48: Uvijanje poprečnog presjeka grednog nosača u $L/2$ .....	41
Slika 49: Nosač sa sedam redova opterećenja, $F = 0,56$ kN .....	41
Slika 50: Nosač s osam redova opterećenja, $F = 0,64$ kN .....	42
Slika 51: Prikaz uvijanja poprečnog presjeka nosača .....	43

Slika 52: Nosač s devet redova opterećenja, $F = 0,72$ kN.....	44
Slika 53: Prikaz odizanja i rotacije poprečnog presjeka kod ležaja .....	45
Slika 54: Uvijanje poprečnog presjeka u polovici raspona nakon devetog reda opterećenja, $F = 0,72$ kN.....	45
Slika 55: Pad svog opterećenja s nosača .....	46
Slika 56: Uređaj AUTOMAX MULTITEST Computerized Control Console .....	48
Slika 57: Priprema grednog nosača za ispitivanje na uređaju AUTOMAX MULTITEST Computerized Control Console .....	49
Slika 58: Ekran uređaja s prikazanim podacima .....	50
Slika 59: Deformacija nosača kod sile od $F = 1,13$ kN.....	50
Slika 60: Vidljiva znatna promjena kuta nagiba nosača za silu $F = 1,13$ kN.....	51
Slika 61: Bočni prikaz deformacije nosača .....	51
Slika 62: Odizanje poprečnog presjeka kod ležaja.....	52
Slika 63: Slom nosača .....	52
Slika 64: Pukotine nosača na vanjskom licu poprečnog presjeka nosača .....	53
Slika 65: Pukotine nosača na unutarnjem licu poprečnog presjeka nosača .....	53
Slika 66: Pukotine s donje strane nosača.....	54
Slika 67: Pukotine na vanjskom licu poprečnog presjeka nosača .....	54
Slika 68: Dijagram opterećenje - progib za prvo ispitivanje nosača do 170 kg odnosno $F = 1,7$ kN.....	55
Slika 69: Dijagram opterećenje - progib za drugo ispitivanje nosača do sloma .....	55
Slika 70: Usporedba rezultata progiba analitičke, numeričke i eksperimentalne analize ..	56
Slika 71: Usporedba rezultata progiba za slučaj opterećenja u $L/2$ za numeričku i eksperimentalnu analizu .....	57

---

## POPIS TABLICA

Tablica 1: Prelazak koordinata u (u,v) koordinatni sustav .....	14
Tablica 2: Odsječci na koordinatnom sustavu (u,v) .....	14
Tablica 3: Kut nagiba tangente .....	17
Tablica 4: Progib .....	17
Tablica 5: Naprezanje u točkama za slučaj kosog savijanja .....	18
Tablica 6: Naprezanja u točkama za slučaj pravog savijanja .....	18
Tablica 7: Kutovi nagiba tangente za linearni proračun numeričke analize .....	24
Tablica 8: Kutovi nagiba tangente za nelinearni proračun numeričke analize .....	24
Tablica 9: Progibi za linearni proračun numeričke analize .....	25
Tablica 10: Progibi za nelinearni proračun numeričke analize .....	25
Tablica 11: Progibi za linearni proračun numeričke analize novog statičkog sustava .....	30
Tablica 12: Progibi za nelinearni proračun numeričke analize novog statičkog sustava .....	30
Tablica 13: Apsolutne vrijednosti izmjerenih pomaka .....	47
Tablica 14: Relativne vrijednosti izmjerenih pomaka .....	47
Tablica 15: Usporedba rezultata nagiba tangente analitičke, numeričke i eksperimentalne analize .....	56

# 1. UVOD

## 1.1. Općenito o ispitivanju konstrukcija

Ispitivanje konstrukcija je u suštini niz eksperimenata kojima se saznaje o ponašanju konstrukcija prilikom različitih djelovanja na samu konstrukciju [1].

Ta djelovanja mogu biti fizikalna kao što su vlastita težina, uporabno opterećenje, izvanredno opterećenje, itd., te kemijska kao što su korozija, agresija plinova, agresija kemikalija, itd.

Ispitivanje konstrukcija je ujedno i jedini način dobivanja pouzdanih podataka o ponašanju neke konstrukcije ili modela konstrukcije jer na taj način dobivamo uvid u stvarno stanje, odnosno ponašanje konstrukcije.

Sama svrha ispitivanja konstrukcija je da se na temelju dobivenih rezultata utvrdi je li konstrukcija prikladna za predviđenu namjenu.

Danas su razvijeni razni postupci ispitivanja konstrukcija koji objedinjuju znanja iz različitih područja znanosti kao na primjer Fizika, Matematika, Reologija, Automatika, Mehanika krutog i deformabilnog tijela, itd.

## 1.2. Sadržaj zadatka

Za zadani gredni nosač potrebno je bilo izvršiti analitičku, numeričku i eksperimentalnu analizu te usporediti dobivene rezultate.

Kod analitičke analize, potrebno je bilo izvesti izraz za elastičnu liniju grednog nosača. Zatim izračunati kut nagiba tangente elastične linije kod ležajeva te progib na polovici raspona nosača. Na kraju analitičke analize treba odrediti iznos naprezanja u određenim točkama poprečnog presjeka koje su definirane zadatkom.

Kod numeričke analize potrebno je provesti linearni i nelinearni proračun za gredni nosač.

Kod eksperimentalne analize potrebno je odrediti progibe na određenim mjestima nosača pomoću mikroura. Zatim odrediti kut zaokreta nad ležajevima pomoću klinometra te na određenim mjestima nosača pomoću Barry-evog prijenosnog komparatora odrediti deformacije, te koristeći Hooke-ov zakon i poznavajući modul elastičnosti grede izračunati naprezanja na tim istim mjestima.

### 1.3. Opis grednog nosača

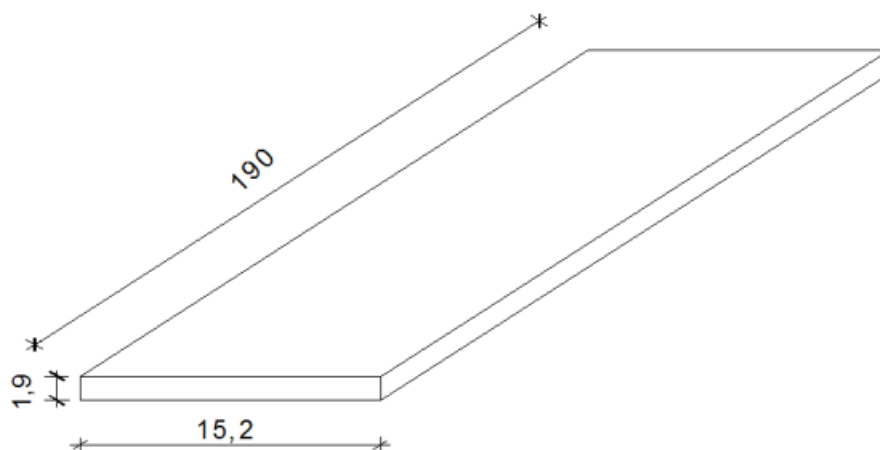
Gredni nosač koji smo koristili kod ispitivanja sastavljen je od dijelova izrezanih iz ploče Medijapana (Slika 1).



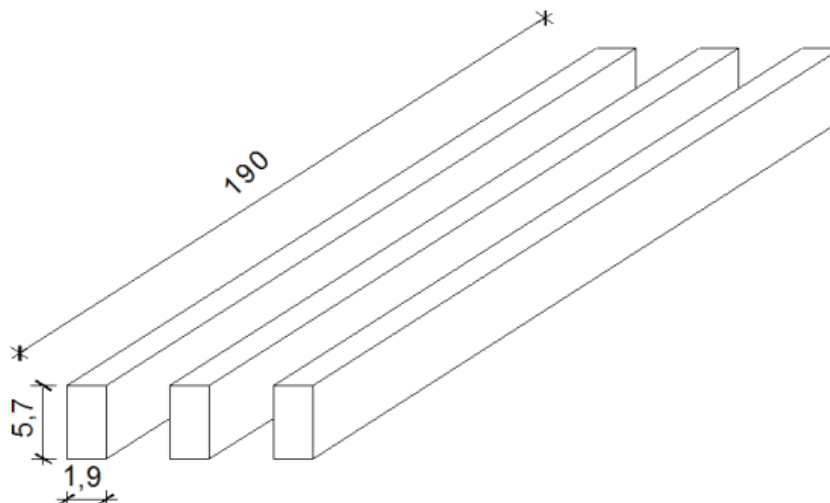
Slika 1: Ploče od medijapana

Medijapan je materijal koji je dobiven prešanjem drvene piljevine (najčešće bukve, smreke, jele i lesa). Najčešću primjenu ima u izradi namještaja, kuhinja, pregrada, itd. Korišten je iz razloga što je vrlo pogodan za rezanje i obradu te se može obrađivati isto kao i puno drvo, a opet ima bolju strukturu i mehanička svojstva od iverice.

Nosač je napravljen od 4 međusobno povezana elementa [2]. Gornji dio nosača čini element dimenzija 15,2 x 190 x 1,9 cm (Slika 2), a donji je napravljen kao spoj triju elemenata dimenzija 1,9 x 190 x 5,7 cm (Slika 3).

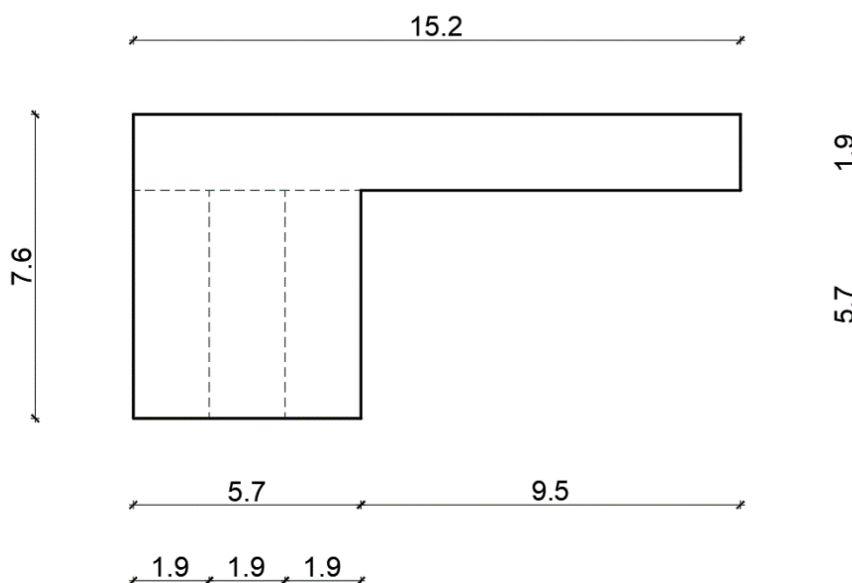


Slika 2: Gornji element poprečnog presjeka nosača



Slika 3: Donji elementi poprečnog presjeka nosača

Konačni oblik poprečnog presjeka nosača je oblika slova L prikazanog na Slici 4, a nastao je lijepljenjem epoxy smolom četiri komada, jedan gornji element (Slika 2) i tri donja elementa (Slika 3) u jedinstvenu cjelinu [2].



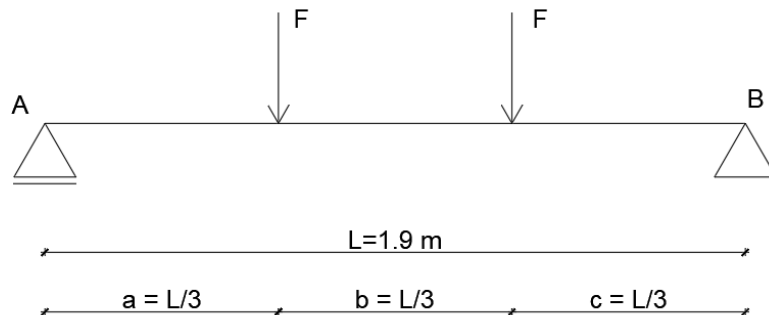
Slika 4: Poprečni presjek nosača

Prema podacima dostupnim iz literature [2] uzeto je da modul elastičnosti Medijapana od kojeg je napravljen nosač iznosi  $E_m = 2850$  [MPa], ali zbog umora materijala nosača i ljepila, pošto je nosač napravljen pred sedam godina, taj model elastičnosti je smanjen te je u proračunu uzet da iznosi  $E_m = 2000$  [MPa].

## 2. ANALITIČKI PRORAČUN

### 2.1. Uvod

Na Slici 5 prikazan je zadatak odnosno statički sustav s položajem opterećenja.



Slika 5: Prikaz zadatka

Zadatak u ovome dijelu analize je odrediti progib na polovici raspona nosača te odrediti kutove nagiba tangente u točkama A i B. Za početak ćemo odrediti momentni dijagram zadanog sustava te na temelju njega izvesti jednadžbu elastične linije preko koje ćemo dobiti progib i kutove zaokreta.

### 2.2. Statički proračun

Iz jednadžbe ravnoteže na točku A, možemo izračunati iznos reakcije u točki B:

$$\sum M_A = 0 \quad (1)$$

$$R_B * l - F \frac{2l}{3} - F * \frac{l}{3} = 0$$

$$R_B = F$$

Analogno prethodnoj jednadžbi, pomoću iste jednadžbe ravnoteže na točku B možemo izračunati reakciju u točki A:

$$\sum M_B = 0 \quad (2)$$

$$R_A * l - F \frac{2l}{3} - F * \frac{l}{3} = 0$$

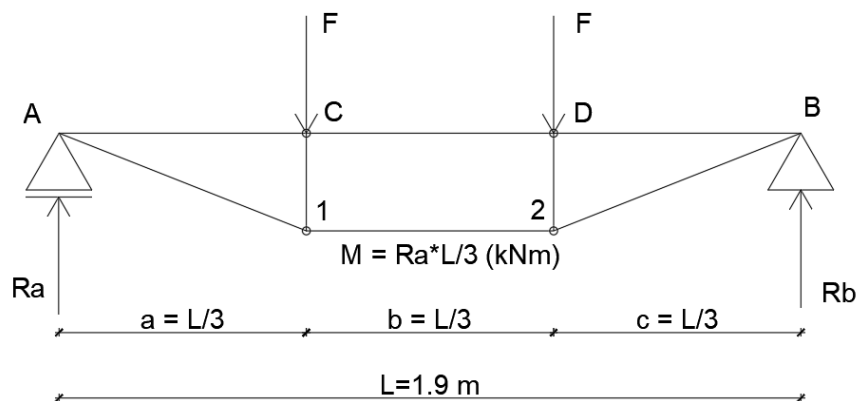
$$R_A = F$$

Rješavajući jednadžbu ravnoteže ispod hvatišta sile u točki C, dobivamo iznos maksimalnog momenta u nosaču:

$$M_C = R_A * \frac{l}{3} \quad (3)$$

Nije potrebno rješavat jednadžbu ravnoteže ispod hvatišta druge sile jer je sustav simetričan pa vrijedi:

$$M_C = M_D$$



Slika 6: Momentni dijagram statičkog sustava

### 2.3. Jednadžba elastične linije

Progib i kut zaokreta mogu se dobit iz neposrednog integriranja jednadžbe:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_z}{E * I_z} \quad (4)$$

Moment je potrebno zapisati kao funkciju položaja po gredi (x) te je zbog izgleda momentnog dijagrama taj isti moment potrebno podijeliti u tri dijela:

$$a) M_{x1} = R_a * x \quad (5)$$

$$b) M_{x2} = R_a * x - F(x - a) \quad (6)$$

$$c) M_{x3} = R_a * x - F(x - a) - F(x - (a + b)) \quad (7)$$



Rješavamo prvi dio:

Uvrštavajući funkciju momenta u izraz (4) dobivamo:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{R_a * x}{E * I_z} \quad (8)$$

Prethodni izraz možemo zapisati kao:

$$E * I_z * \frac{d^2w}{dx^2} = -R_a * x \quad (9)$$

Integrirajući prethodni izraz dobivamo izraz za kut zaokreta prvog dijela:

$$E * I_z * \frac{dw}{dx} = -R_a * \frac{x^2}{2} + C_1 \quad (10)$$

gdje  $\frac{dw}{dx}$  predstavlja kut zaokreta  $\varphi$ . Integrirajući taj izraz dobivamo:

$$E * I_z * w = -R_a * \frac{x^3}{6} + C_1x + D_1 \quad (11)$$

gdje  $w$  predstavlja progib.

Na isti način rješavamo drugi dio samo s drugačijom funkcijom momenta:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{R_a * x - F(x - a)}{E * I_z} \quad (12)$$

Prethodni izraz možemo zapisati kao:

$$E * I_z * \frac{d^2w}{dx^2} = -(R_a * x - F(x - a)) \quad (13)$$

Integrirajući prethodni izraz dobivamo izraz za kut zaokreta drugog dijela:

$$E * I_z * \frac{dw}{dx} = -R_a * \frac{x^2}{2} + \frac{F(x - a)^2}{2} + C_2 \quad (14)$$

gdje  $\frac{dw}{dx}$  predstavlja kut zaokreta  $\varphi$ . Integrirajući taj izraz dobivamo:

$$E * I_z * w = -R_a * \frac{x^3}{6} + \frac{F(x - a)^3}{6} + C_2x + D_2 \quad (15)$$

gdje  $w$  predstavlja progib.

Analogno rješavamo i treći dio s trećom funkcijom momenta:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{R_a * x - F(x - a) - F(x - (a + b))}{E * I_z} \quad (16)$$

Prethodni izraz možemo zapisati kao:

$$E * I_z * \frac{d^2w}{dx^2} = -\left(R_a * x - F(x - a) - F(x - (a + b))\right) \quad (17)$$

Integrirajući prethodni izraz dobivamo izraz za kut zaokreta trećeg dijela:

$$E * I_z * \frac{dw}{dx} = -R_a * \frac{x^2}{2} + \frac{F(x - a)^2}{2} + \frac{F * (x - (a + b))^2}{2} + C_3 \quad (18)$$

gdje  $\frac{dw}{dx}$  predstavlja kut zaokreta  $\varphi$ . Integrirajući taj izraz dobivamo:

$$E * I_z * w = -R_a * \frac{x^3}{6} + \frac{F(x - a)^3}{6} + \frac{F * (x - (a + b))^3}{6} + C_3x + D_3 \quad (19)$$

gdje  $w$  predstavlja progib.

## 2.4. Određivanje nepoznatih konstanti

Kako bi odredili šest nepoznatih konstanti, potrebno je postaviti rubne uvjete te na taj način dobiti dodatne jednadžbe. Na položajima hvatišta sila postaviti ćemo uvjete da kutovi zaokreta s lijeve i desne strane moraju biti jednaki, isto vrijedi i za progibe.

Postavljamo rubne uvjete koji ovdje predstavljaju uvjete kontinuiteta kutova zaokreta kod hvatišta prve sile ( $x = a$ ):

$$\varphi_{1L} = \varphi_{1D} \quad (20)$$

Uvrštavajući kutove zaokreta iz izraza (10) i (14) dobivamo:

$$-R_a * \frac{x^2}{2} + C_1 = -R_a * \frac{x^2}{2} + \frac{F(x - a)^2}{2} + C_2 \quad (21)$$

Iz toga proizlazi:

$$C_1 = C_2 = C$$

Postavljamo rubne uvjete koji ovdje predstavljaju uvjete kontinuiteta progiba kod hvatišta prve sile ( $x = a$ ):

$$w_{1L} = w_{1D} \quad (22)$$

Uvrštavajući progibe iz izraza (11) i (15) dobivamo:

$$-R_a * \frac{x^3}{6} + C_1x + D_1 = -R_a * \frac{x^3}{6} + \frac{F(x-a)^3}{6} + C_2x + D_2 \quad (23)$$

Iz toga proizlazi:

$$D_1 = D_2 = D$$

Postavljamo novi rubni uvjet kojeg ovdje zovemo uvjet kontinuiteta ispod hvatišta druge sile ( $x = a+b$ ):

$$\varphi_{2L} = \varphi_{2D} \quad (24)$$

Uvrštavajući kutove zaokreta iz izraza (14) i (18) dobivamo:

$$-R_a * \frac{x^2}{2} + \frac{F(x-a)^2}{2} + C_2 = -R_a * \frac{x^2}{2} + \frac{F(x-a)^2}{2} + \frac{F * (x - (a+b))^2}{2} + C_3 \quad (25)$$

Iz toga proizlazi:

$$C_2 = C_3 = C$$

Postavljamo slijedeći rubni uvjet kojeg ovdje zovemo uvjet kontinuiteta progiba kod hvatišta druge sile ( $x = a+b$ ):

$$w_{2L} = w_{2D} \quad (26)$$

Uvrštavajući progibe iz izraza (15) i (19) dobivamo:

$$-R_a * \frac{x^3}{6} + \frac{F(x-a)^3}{6} + C_2x + D_2 = -R_a * \frac{x^3}{6} + \frac{F(x-a)^3}{6} + \frac{F * (x - (a+b))^3}{6} + C_3x + D_3 \quad (27)$$

Iz toga proizlazi:

$$D_2 = D_3 = D$$

## 2.5. Uvrštavanje rubnih uvjeta

Uvrštavajući preostala dva rubna uvjeta na krajevima nosača dobit ćemo vrijednosti traženih konstanti. Prvi rubni uvjet koji ćemo koristiti glasi da nema progiba na mjestu ležaja A, odnosno ( $x = 0 \rightarrow w = 0$ ).

Koristimo jednadžbu (11) jer se položaj rubnog uvjeta nalazi u prvome djelu funkcije momenta:

$$E * I_z * w = -R_a * \frac{x^3}{6} + Cx + D \quad (28)$$

Uvrštavajući rubni uvjet ( $x = 0, w = 0$ ) dobivamo iznos konstante D:

$$D = 0$$

Sljedeći rubni uvjet koji koristimo je da na mjestu ležaja B nema progiba, odnosno ( $x = L \rightarrow w = 0$ ).

Za taj rubni uvjet koristimo jednadžbu (19) jer se položaj rubnog uvjeta nalazi u trećem djelu funkcije momenta:

$$E * I_z * w = -R_a * \frac{x^3}{6} + \frac{F(x-a)^3}{6} + \frac{F * (x - (a+b))^3}{6} + Cx + D \quad (29)$$

Uvrštavajući rubni uvjet ( $x = L, w = 0$ ) dobivamo:

$$0 = -R_a * \frac{L^3}{6} + \frac{F(L-a)^3}{6} + \frac{F * (L - (a+b))^3}{6} + C * L + 0$$

odnosno kad malo sredimo jednadžbu dobivamo iznos konstante C:

$$C = \frac{R_a * (L^3 - (L-a)^3 - (L - (a+b))^3)}{6L} \quad (30)$$

## 2.6. Određivanje kutova nagiba tangente na elastičnu liniju

Za odrediti kut nagiba tangente na elastičnu liniju potrebno je odabrati položaj na kojem tražimo nagib tangente te u kojem dijelu funkcije momenta se taj položaj nalazi. Nas konkretno zanima kut nagiba tangente kod ležajeva.

Za kut nagiba tangente kod prvog ležaja odabiremo da je ( $x = 0$ ), te koristimo prvi dio funkcije momenta:

$$E * I_z * \frac{dw}{dx} = -R_a * \frac{x^2}{2} + C \quad (31)$$

Sređivajući izraz te uvrštavajući konstantu dobivamo izraz za kut nagiba tangente na elastičnu liniju na ležaju A:

$$\varphi_A = \frac{1}{E * I_z} * \left( \frac{R_a * (L^3 - (L-a)^3 - (L - (a+b))^3)}{6L} \right) \quad (32)$$

Za kut nagiba tangente kod drugog ležaja odabiremo da je ( $x = L$ ), te koristimo treći dio funkcije momenta:

$$E * I_z * \frac{dw}{dx} = -R_a * \frac{x^2}{2} + \frac{F(x-a)^2}{2} + \frac{F * (x - (a+b))^2}{2} + C \quad (33)$$

Sređivajući izraz te uvrštavajući konstantu C dobivamo izraz za kut nagiba tangente na elastičnu liniju na ležaju B:

$$\varphi_B = \frac{1}{E * I_Z} * \left( -R_a * \frac{L^2}{2} + \frac{F(L-a)^2}{2} + \frac{F * (L - (a+b))^2}{2} + \frac{R_A * (L^3 - (L-a)^3 - (L - (a+b))^3)}{6L} \right) \quad (34)$$

## 2.7. Određivanje progiba

Za odrediti iznos progiba potrebno je odabrat položaj na kojem tražimo iznosa progiba te u kojem djelu funkcije momenta se taj položaj nalazi. Nas konkretno zanima kut iznos progiba na polovici raspona. Stoga odabiremo da je  $(x = \frac{L}{2})$ , te koristimo drugi dio funkcije momenta:

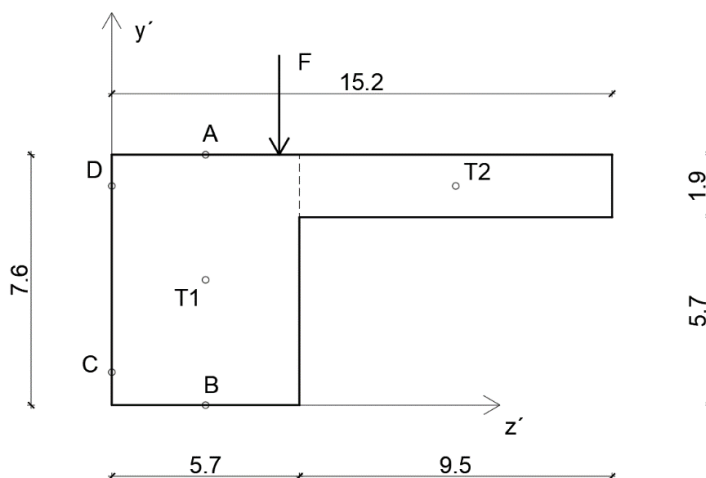
$$E * I_Z * w = -R_a * \frac{x^3}{6} + \frac{F(x-a)^3}{6} + Cx + D \quad (35)$$

Sređivajući izraz te uvrštavajući konstantu dobivamo izraz za veličinu progiba u polovini raspona:

$$w = \frac{1}{E * I_Z} * \left( -R_a * \frac{x^3}{6} + \frac{F(x-a)^3}{6} + \frac{R_A * (L^3 - (L-a)^3 - (L - (a+b))^3)}{6L} * \frac{L}{2} \right) \quad (36)$$

## 2.8. Proračun naprezanja u zadanim točkama

Na Slici 7 je prikazan poprečni presjek nosača s položajem opterećenja.



Slika 7: Poprečni presjek nosača s opterećenjem

Naprezanja u točkama A i B za zadani poprečni presjek odrediti ćemo koristeći jezgru poprečnog presjeka. Prvi korak je odrediti gdje se nalazi pravi položaj težišta s obzirom na početno postavljeni koordinatni sustav  $y', z'$ .

Površina poprečnog presjeka je određena pomoću izraza:

$$A_1 = 5,7 * 7,6 = 43,32 \text{ cm}^2 \quad (37)$$

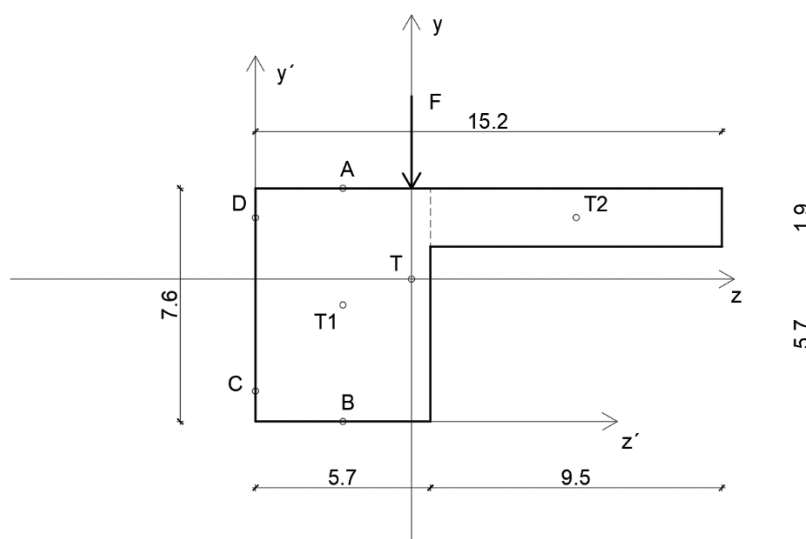
$$A_2 = 9,5 * 1,9 = 18,05 \text{ cm}^2 \quad (38)$$

$$A_U = A_1 + A_2 = 61,37 \text{ cm}^2 \quad (39)$$

Položaj težišta određujemo prema sljedećim izrazima:

$$x_T = \frac{A_1 * x_1 + A_2 * x_2}{A} = 5,09 \text{ cm} \quad (40)$$

$$y_T = \frac{A_1 * y_1 + A_2 * y_2}{A} = 4,64 \text{ cm} \quad (41)$$



Slika 8: Težište poprečnog presjeka i novi  $(y,z)$  koordinatni sustav

Moment tromosti poprečnog presjeka u oko osi z dobit ćemo kao zbroj momenata tromosti dvaju tijela na koje smo podijelili poprečni presjek pri čemu koristimo Steiner-ove stavke:

$$I_z = I_{z1} + I_{z2} \quad (42)$$

$$= \frac{b * h^3}{12} + A_1 * l_1^2 + \frac{b * h^3}{12} + A_2 * l_2^2 \quad (43)$$

$$= \frac{5,7 * 7,6^3}{12} + 43,32 * (-0,84)^2 + \frac{9,5 * 1,9^3}{12} + 18,05 * (2,01)^2$$
$$= 317,434 \text{ cm}^4 = 3,1743 * 10^{-6} \text{ m}^4$$

Na isti način izračunavamo moment tromosti poprečnog presjeka oko osi y:

$$I_y = I_{y1} + I_{y2} \quad (44)$$

$$= \frac{h * b^3}{12} + A_1 * l_1^2 + \frac{h * b^3}{12} + A_2 * l_2^2 \quad (45)$$

$$= \frac{7,6 * 5,7^3}{12} + 43,32 * (-2,24)^2 + \frac{1,9 * 9,5^3}{12} + 18,05 * (5,36)^2$$
$$= 988,972 \text{ cm}^4 = 9,8897 * 10^{-6} \text{ m}^4$$

Centrifugalni moment tromosti također računamo kao zbroj centrifugalnih momenata dvaju dijela poprečnog presjeka:

$$I_{zy} = I_{zy1} + I_{zy2} \quad (46)$$

$$= I_{c1} + A_1 * l_1 * l_2 + I_{c2} + A_2 * l_1 * l_2 \quad (47)$$

$$= 0 + 43,32 * (-0,84) * (-2,24) + 0 + 18,05 * (2,01) * (5,36)$$
$$= 275,974 \text{ cm}^4 = 2,7597 * 10^{-6} \text{ m}^4$$

Glavne momente tromosti možemo dobiti pomoću sljedećeg izraza:

$$I_{u,v} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} * \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \quad (48)$$

$$= 653,203 \pm 434,629$$

Kako je  $I_y > I_z$ , tako vrijedi da je  $I_v > I_u$  pa je:

$$I_{max} = 1087,832 \text{ cm}^4 = I_v$$

$$I_{min} = 218,574 \text{ cm}^4 = I_u$$

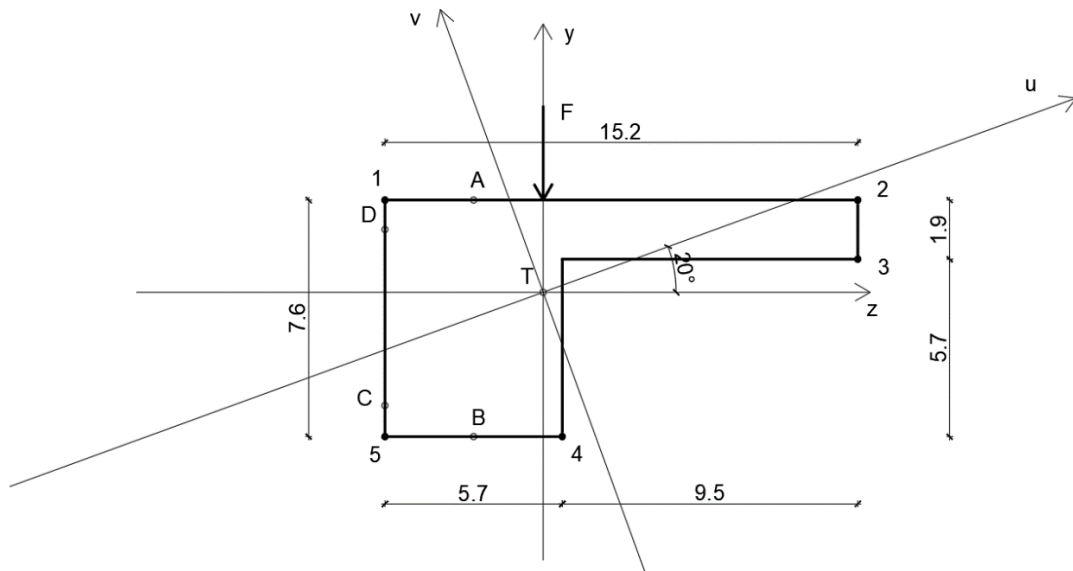
Potrebno je odrediti nagib novog (u,v) koordinatnog sustava u odnosu na (z,y) koordinatni sustav, a to određujemo prema sljedećem izrazu:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = -\frac{2 * I_{zy}}{I_z - I_y} \quad (49)$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = -\frac{2 * 275,974}{317,434 - 988,972} = 0,82 / \operatorname{tg}^{-1}$$

$$2\alpha = 39,35$$

$$\alpha = 19,68^\circ \approx 20^\circ$$



Slika 9: Koordinatni sustav (u,v)

Za odrediti jezgru poprečnog presjeka, uzimamo poprečni presjek određen konturnim točkama od 1 do 5.

Potrebno je sve koordinate svih točaka prebaciti u novi koordinatni sustav, a to radimo prema sljedećim izrazima:

$$u = z * \cos \alpha + y * \sin \alpha \quad (50)$$

$$v = y * \cos \alpha - z * \sin \alpha \quad (51)$$



Tablica 1: Prelazak koordinata u (u,v) koordinatni sustav

Točke	z	y	u	v
1	-5,09	2,96	-3,77	4,52
2	10,11	2,96	10,51	-0,68
3	10,11	1,06	9,86	-2,46
4	0,61	-4,64	-1,01	-4,67
5	-5,09	-4,64	-6,37	-2,62

Zatim određujemo odsječke neutralnih osi na novim osima prema sljedećim izrazima:

$$s = -\frac{i_v^2}{u} \quad q = -\frac{i_u^2}{v} \quad (52)$$

gdje su:

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} = \sqrt{\frac{218,574}{61,37}} = 1,89 \text{ cm} \quad (53)$$

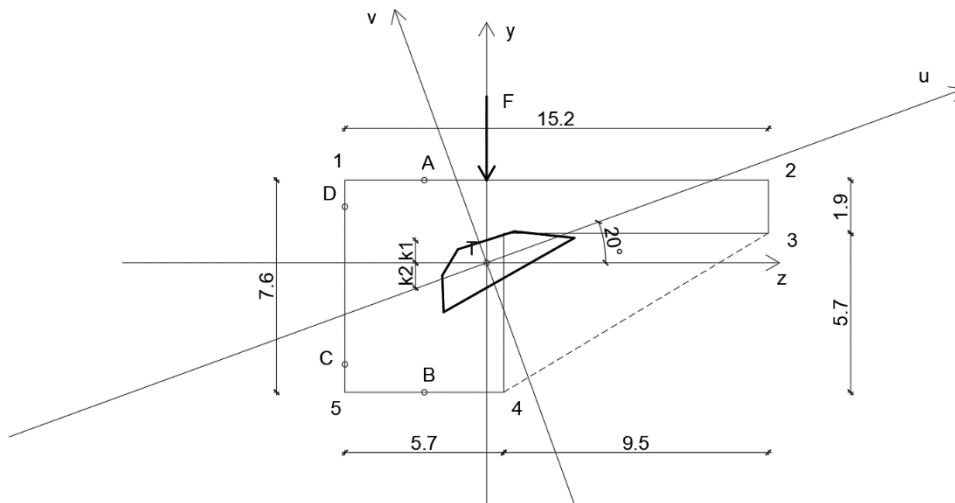
$$i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}} = \sqrt{\frac{1087,832}{61,37}} = 4,21 \text{ cm} \quad (54)$$

Odsječak s predstavlja odsječak na osi u, dok odsječak q predstavlja odsječak na osi v, tako da pravac provučen kroz ta dva odsječka predstavlja neutralnu os za pripadajuću rubnu točku poprečnog presjeka.

Tablica 2: Odsječci na koordinatnom sustavu (u,v)

Točke	u	s	v	q
1	-3,77	4,70	4,52	-0,79
2	10,51	-1,69	-0,68	5,25
3	9,86	-1,80	-2,46	1,45
4	-1,01	17,55	-4,67	0,77
5	-6,37	2,78	-2,62	1,36

Zajedno, svih 5 neutralnih osi tvore peterokut unutar poprečnog presjeka kojeg nazivamo jezgrom poprečnog presjeka.

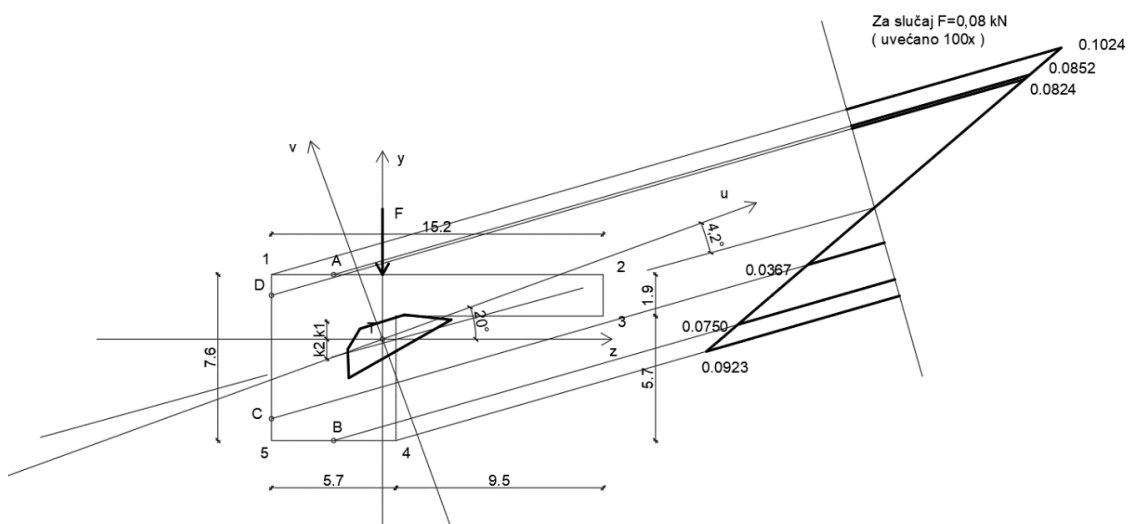


Slika 10: Jezgra poprečnog presjeka nosača

Sljedeći korak je odrediti položaj neutralne osi poprečnog presjeka jer se radi o kosom savijanju, odnosno ravnina djelovanja momenta savijanja se ne poklapa s glavnim osima te položaj neutralne osi određujemo prema sljedećem izrazu:

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \varphi * \frac{I_u}{I_v} = \operatorname{tg} (-20) * \frac{218,574}{1087,832} = -0,073 \quad (55)$$

$$\theta = -4,18^\circ$$



Slika 11: Dijagram normalnih naprezanja

Za odredit naprezanja, potrebno je očitati udaljenosti od težišta do ruba jezgre na mjestu gdje ravnina djelovanja momenta savijanja siječe jezgru.

Te udaljenosti su označene s  $k_1$  i  $k_2$  te je sa Slike 11 očitano da  $k_1$  iznosi 0,8065 cm, a  $k_2$  iznosi 0,8955 cm.

Prema sljedećim izrazima dobit ćemo maksimalna naprezanja u poprečnom presjeku:

$$\sigma_{vlak} = \frac{M_{max}}{k_1 * A} = \frac{(F * \frac{l}{3}) * 100}{k_1 * 61,37} \quad (56)$$

$$\sigma_{tlak} = \frac{M_{max}}{k_2 * A} = \frac{(F * \frac{l}{3}) * 100}{k_2 * 61,37} \quad (57)$$

Ostale tražene vrijednosti naprezanja u odabranim točkama dobivene su jednostavnim očitavanjem iz dijagrama naprezanja (Slika 11).

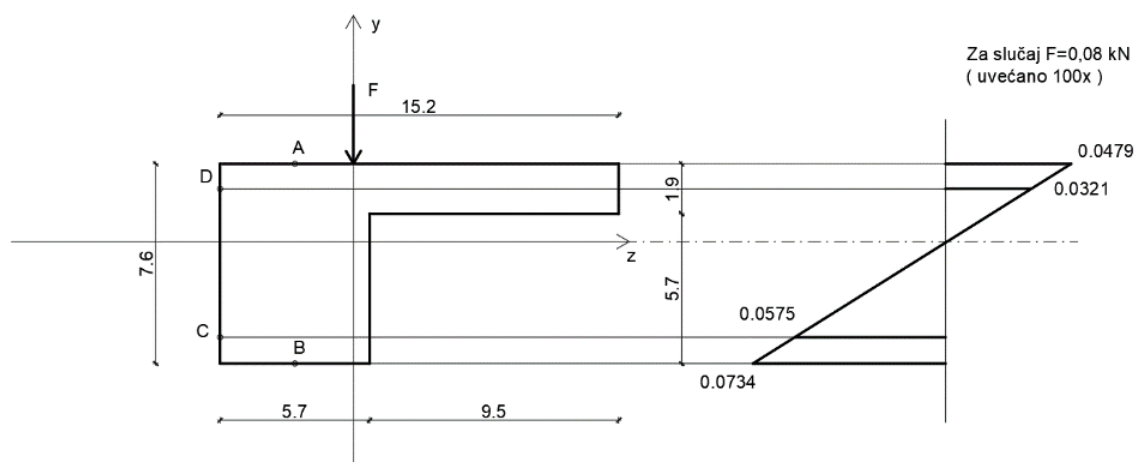
Da bismo mogli usporediti naprezanja analitičkog proračuna s eksperimentalnim rezultatima, izračunat ćemo naprezanja u zadanim točkama kao da se radi o pravom savijanju odnosno da se ravnina djelovanja momenta savijanja poklapa s glavnim osima koordinatnog sustava te ćemo ta naprezanja računati prema izrazu:

$$\sigma = \frac{M}{W_z} \quad (58)$$

gdje  $W$  predstavlja osni moment otpora koji se izračunava prema izrazu:

$$W_z = \frac{I_z}{y} \quad (59)$$

gdje  $y$  predstavlja udaljenost promatrane točke od težišta koordinatnog sustava po koordinatnoj osi  $y$ . Uz pretpostavku da se radi o pravome savijanju, dobivamo dijagram naprezanja prikazan na Slici 12.



Slika 12: Dijagram naprezanja u slučaju pravog savijanja

## 2.9. Rezultati analitičkog proračuna

Temeljem prethodno opisanih postupaka izrađeni su odgovarajući proračuni za pojedine faze nanošenja opterećenja (betonske kocke težine 8 kg svaka) i to za kut nagiba tangente na ležajevima A i B (Tablica 3), progib u polovici raspona (Tablica 4), naprezanja u odabranim točkama za slučaj kosog savijanja (Tablica 5) i naprezanja u odabranim točkama za slučaj pravog savijanja (Tablica 6).

Tablica 3: Kut nagiba tangente

Opterećenje	Kut nagiba tangente na ležaju A (°)	Kut nagiba tangente na ležaju B (°)
F = 8 kg = 0,08 kN	0,290	-0,290
F = 16 kg = 0,16 kN	0,579	-0,579
F = 24 kg = 0,24 kN	0,869	-0,869
F = 32 kg = 0,32 kN	1,158	-1,158
F = 40 kg = 0,40 kN	1,448	-1,448
F = 48 kg = 0,48 kN	1,738	-1,738
F = 56 kg = 0,56 kN	2,027	-2,027
F = 64 kg = 0,64 kN	2,317	-2,317
F = 72 kg = 0,72 kN	2,606	-2,606
F = 80 kg = 0,80 kN	2,896	-2,896

Tablica 4: Progib

Opterećenje	Progib u L/2 (mm)
F = 8 kg = 0,08 kN	3,068
F = 16 kg = 0,16 kN	6,135
F = 24 kg = 0,24 kN	9,203
F = 32 kg = 0,32 kN	12,270
F = 40 kg = 0,40 kN	15,338
F = 48 kg = 0,48 kN	18,405
F = 56 kg = 0,56 kN	21,473
F = 64 kg = 0,64 kN	24,541
F = 72 kg = 0,72 kN	27,608
F = 80 kg = 0,80 kN	30,676

Tablica 5: Naprezanje u točkama za slučaj kosog savijanja

Opterećenje	Naprezanje u točki A (kN/cm <sup>2</sup> )	Naprezanje u točki B (kN/cm <sup>2</sup> )	Naprezanje u točki C (kN/cm <sup>2</sup> )	Naprezanje u točki D (kN/cm <sup>2</sup> )
F = 8 kg = 0,08 kN	0,0852	0,0750	0,0367	0,0824
F = 16 kg = 0,16 kN	0,1703	0,1499	0,0734	0,1647
F = 24 kg = 0,24 kN	0,2555	0,2249	0,1100	0,2471
F = 32 kg = 0,32 kN	0,3406	0,2999	0,1467	0,3294
F = 40 kg = 0,40 kN	0,4258	0,3749	0,1834	0,4118
F = 48 kg = 0,48 kN	0,5109	0,4498	0,2207	0,4941
F = 56 kg = 0,56 kN	0,5961	0,5248	0,2568	0,5765
F = 64 kg = 0,64 kN	0,6812	0,5998	0,2934	0,6588
F = 72 kg = 0,72 kN	0,7664	0,6747	0,3301	0,7412
F = 80 kg = 0,80 kN	0,8515	0,7497	0,3668	0,8235

Tablica 6: Naprezanja u točkama za slučaj pravog savijanja

Opterećenje	Naprezanje u točki A (kN/cm <sup>2</sup> )	Naprezanje u točki B (kN/cm <sup>2</sup> )	Naprezanje u točki C (kN/cm <sup>2</sup> )	Naprezanje u točki D (kN/cm <sup>2</sup> )
F = 8 kg =0,08 kN	0,0479	0,0734	0,0575	0,0321
F = 16 kg =0,16 kN	0,0958	0,1468	0,1149	0,0642
F = 24 kg =0,24 kN	0,1437	0,2203	0,1724	0,0963
F = 32 kg =0,32 kN	0,1915	0,2937	0,2298	0,1284
F = 40 kg =0,40 kN	0,2394	0,3671	0,2873	0,1606
F = 48 kg =0,48 kN	0,2873	0,4405	0,3448	0,1927
F = 56 kg =0,56 kN	0,3352	0,5140	0,4022	0,2248
F = 64 kg =0,64 kN	0,3831	0,5874	0,4597	0,2569
F = 72 kg =0,72 kN	0,4310	0,6608	0,5172	0,2890
F = 80 kg =0,80 kN	0,4788	0,7342	0,5746	0,3211

## 3. NUMERIČKI PRORAČUN

### 3.1. Uvod

Numerički proračun je proveden u računalnom programu Scia Engineer [4]. To je jedan računalni program baziran na metodi konačnih elemenata koji se koristi u svrhu modeliranja i proračunavanja raznih konstrukcija napravljenih od raznih materijala za različite vrste opterećenja. Program Scia Engineer također ima opciju provođenja nelinearnog proračuna koji je također obuhvaćen u ovome radu. U nastavku su prikazana samo rješenja za iznos sile  $F = 8$  kg odnosno 0,08 kN.

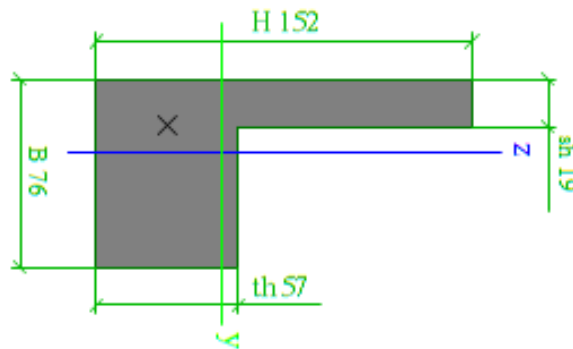
### 3.2. Četverotočkasto savijanje

U startu programa je potrebno definirati materijal. Program Scia Engineer uz mnoštvo standardnih materijala, ima mogućnost definiranja novog materijala, te je u sklopu ovog zadatka korištena ta opcija za definiranje novog materijala nazvanog „Medijapan“ s pripadajućim karakteristikama (Slika 13).

Name <b>Mediapan</b>	
Code independent	
Material type	Timber
Thermal expansion [m/mK]	0.00
Unit mass [kg/m <sup>3</sup> ]	370.0
E modulus [MPa]	2.0000e+03
Poisson coeff.	0
Independent G modulus	<input checked="" type="checkbox"/>
G modulus [MPa]	5.0000e+02
Log. decrement (non-uniform c	0.15
Colour	
Specific heat [J/gK]	6.0000e-01
Thermal conductivity [W/mK]	4.5000e+01
Price per unit [€/m <sup>3</sup> ]	1.00
EC5	
Bending (fm,k) [MPa]	16.0
Tension (ft,0,k) [MPa]	8.5
Tension (ft,90,k) [MPa]	0.4
Compression (fc,0,k) [MPa]	17.0
Compression (fc,90,k) [MPa]	2.2
Shear (fv,k) [MPa]	3.2
Modulus (E0.05) [MPa]	5400.0
Modulus (E90 mean) [MPa]	270.0
Type of timber	Solid

Slika 13: Karakteristike materijala

Zatim je definiran poprečni presjek koji je u našem slučaju L oblika (Slika 14).



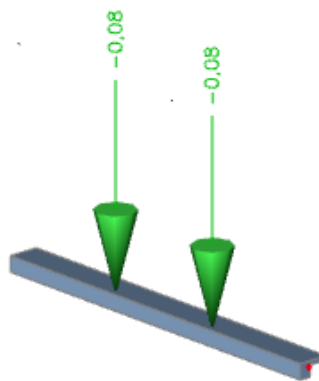
Slika 14: Poprečni presjek nosača

Nakon toga je bilo potrebno definirati statički sustav koji ćemo analizirati. U našem slučaju je to jedna prosta greda (Slika 15).



Slika 15: Prikaz statičkog sustava

Zatim je trebalo definirati opterećenje konstrukcije. U našem zadatku je greda opterećena u trećinama raspona betonskim kockama mase 8 kilograma, što predstavlja sile od 0,08 kN (Slika 16).

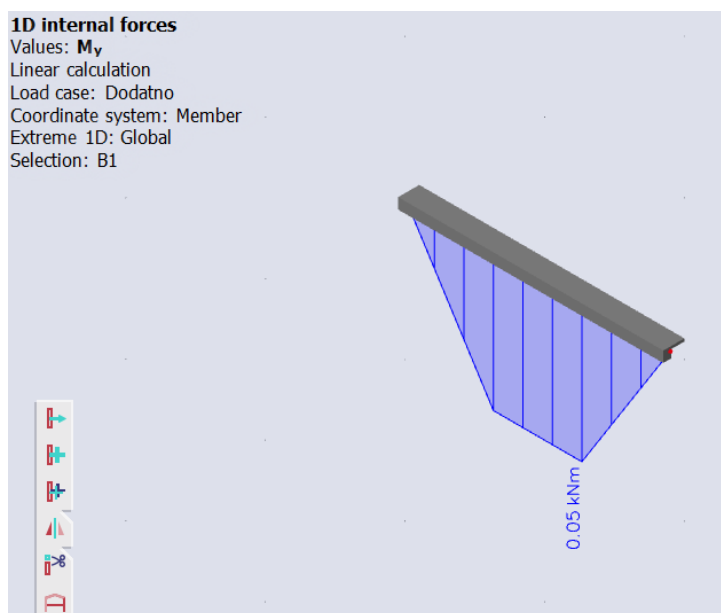


Slika 16: Opterećenje

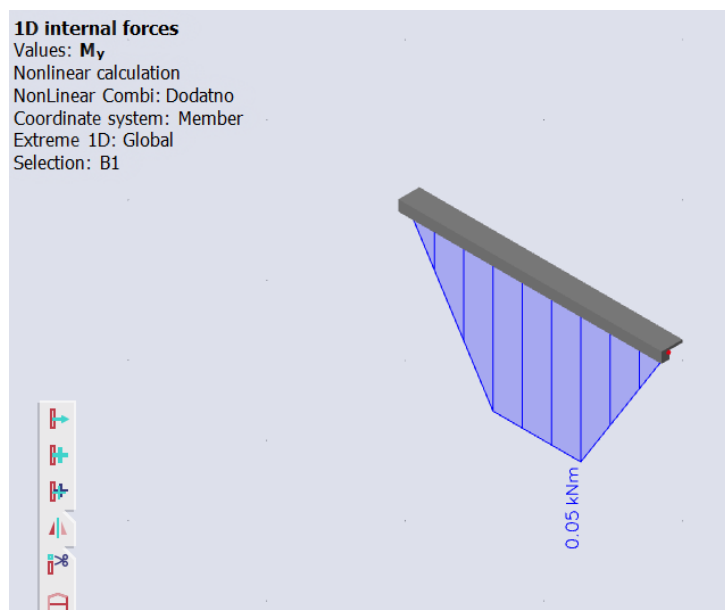
Nakon što su statički sustav i opterećenje definirani, ostaje nam samo provesti linearni i nelinearni proračun.

### 3.3. Rezultati numeričkog proračuna za četverotočkasto savijanje

Temeljem prethodno opisanog postupka izrađeni su odgovarajući proračuni za pojedine faze nanošenja opterećenja u trećinama raspona – četverotočkasto savijanje (betonske kocke težine 8 kg svaka). Na slikama 17 do 22 prikazani su momentni dijagrami u smjeru y, kutovi nagiba tangente na elastičnu liniju i progibi, i to za linearni i nelinearni proračun za opterećenje  $F = 0,08$  kN.

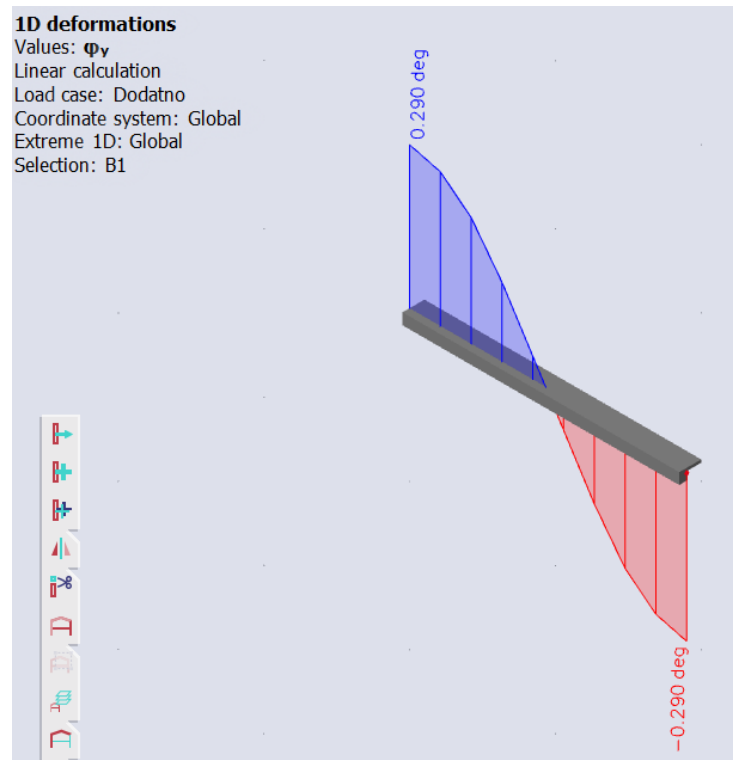


Slika 17: Momentni dijagram u smjeru y za linearni proračun

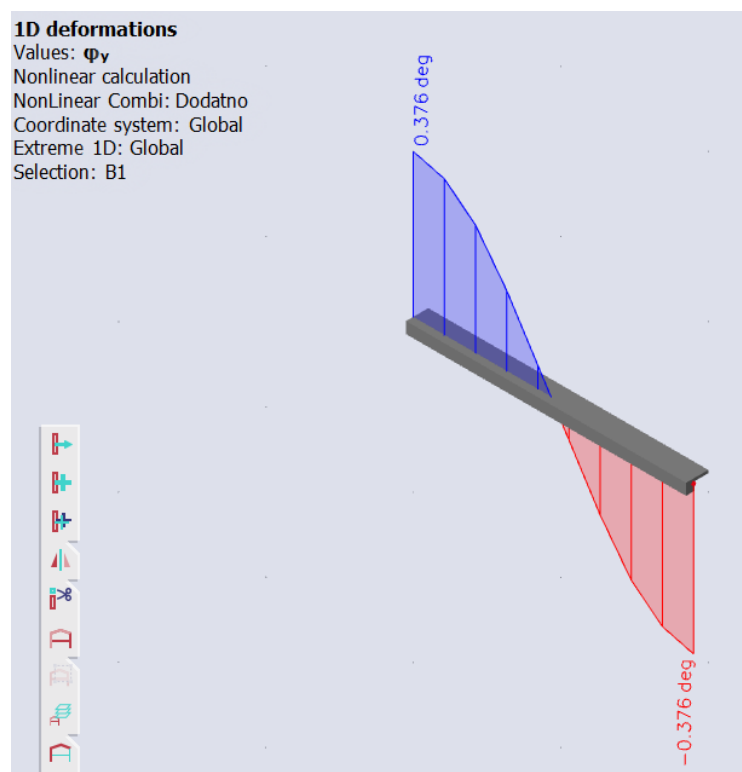


Slika 18: Momentni dijagram u smjeru y za nelinearni proračun

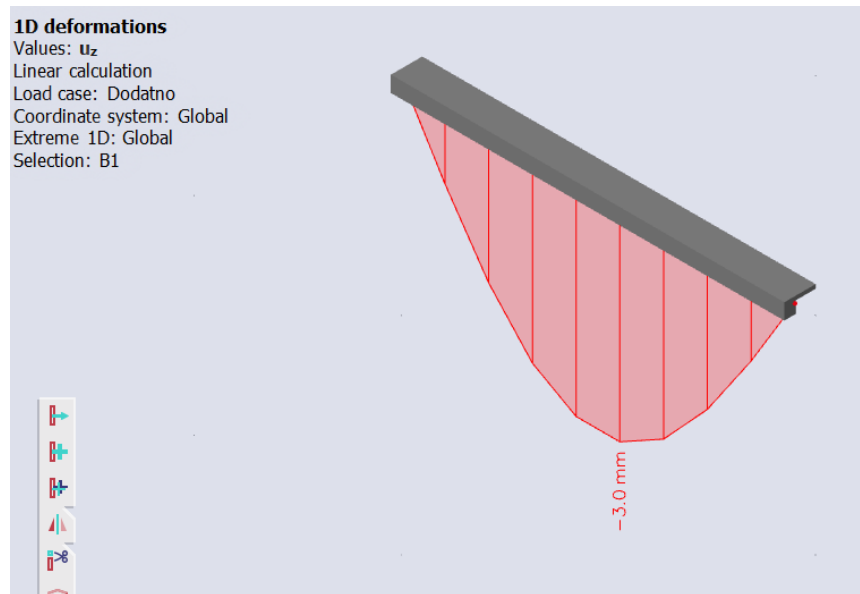




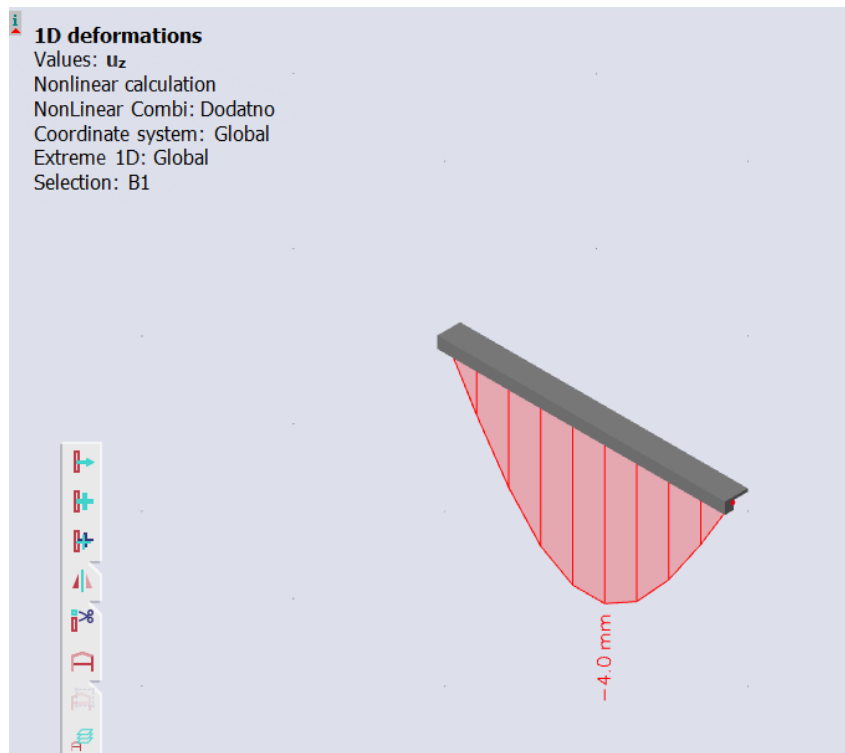
Slika 19: Kut nagiba tangente za linearni proračun



Slika 20: Kut nagiba tangente za nelinearni proračun



Slika 21: Progib za linearni proračun



Slika 22: Progib za nelinearni proračun

U nastavku su tablično prikazani dobiveni kutovi nagiba tangente na ležajevima A i B za linearni (Tablica 7) i nelinearni (Tablica 8) proračun, kao i progibi u polovici raspona za linearni (Tablica 9) i nelinearni (Tablica 10) proračun za sva opterećenja odnosno za nanošenje opterećenja od jedne do desete betonske kocke.

**Tablica 7: Kutovi nagiba tangente za linearni proračun numeričke analize**

Opterećenje	Kut nagiba tangente na ležaju A (°)	Kut nagiba tangente na ležaju B (°)
F = 8 kg = 0,08 kN	0,290	-0,290
F = 16 kg = 0,16 kN	0,579	-0,579
F = 24 kg = 0,24 kN	0,869	-0,869
F = 32 kg = 0,32 kN	1,158	-1,158
F = 40 kg = 0,40 kN	1,448	-1,448
F = 48 kg = 0,48 kN	1,738	-1,738
F = 56 kg = 0,56 kN	2,027	-2,027
F = 64 kg = 0,64 kN	2,317	-2,317
F = 72 kg = 0,72 kN	2,606	-2,606
F = 80 kg = 0,80 kN	2,896	-2,896

**Tablica 8: Kutovi nagiba tangente za nelinearni proračun numeričke analize**

Opterećenje	Kut nagiba tangente na ležaju A (°)	Kut nagiba tangente na ležaju B (°)
F = 8 kg = 0,08 kN	0,376	-0,376
F = 16 kg = 0,16 kN	0,753	-0,753
F = 24 kg = 0,24 kN	1,129	-1,129
F = 32 kg = 0,32 kN	1,506	-1,506
F = 40 kg = 0,40 kN	1,882	-1,882
F = 48 kg = 0,48 kN	2,259	-2,259
F = 56 kg = 0,56 kN	2,635	-2,635
F = 64 kg = 0,64 kN	3,012	-3,012
F = 72 kg = 0,72 kN	3,388	-3,388
F = 80 kg = 0,80 kN	3,765	-3,765

**Tablica 9: Progibi za linearni proračun numeričke analize**

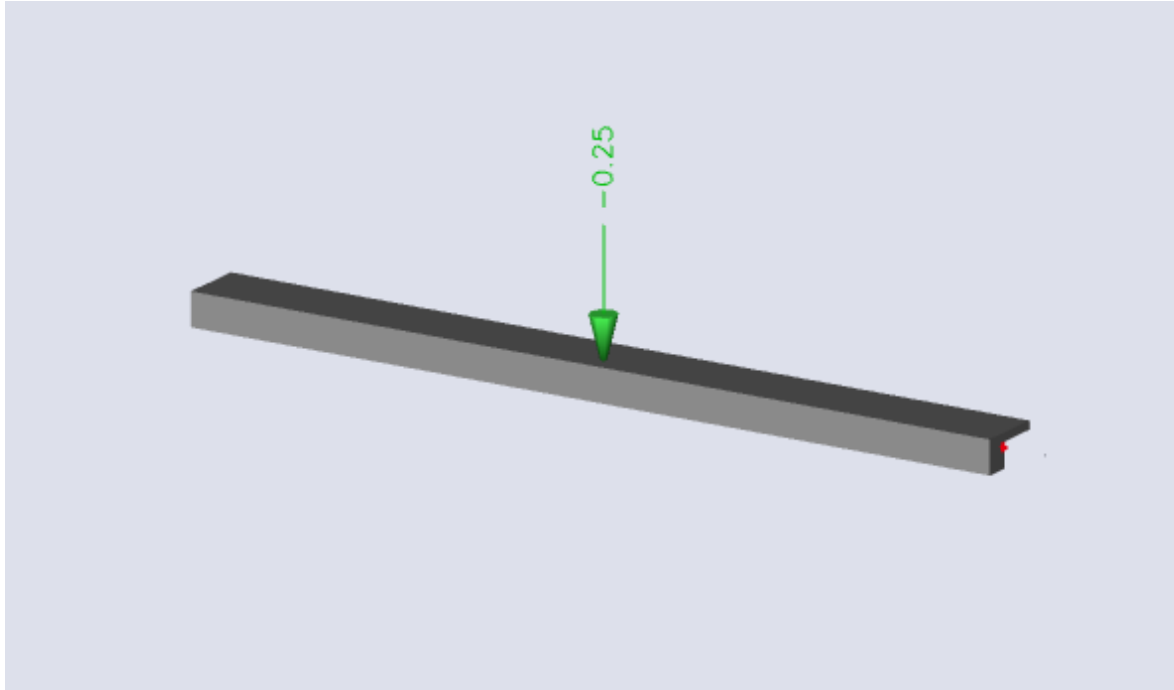
Opterećenje	Progib – linearni proračun (mm)
$F = 8 \text{ kg} = 0,08 \text{ kN}$	3,0
$F = 16 \text{ kg} = 0,16 \text{ kN}$	6,1
$F = 24 \text{ kg} = 0,24 \text{ kN}$	9,1
$F = 32 \text{ kg} = 0,32 \text{ kN}$	12,2
$F = 40 \text{ kg} = 0,40 \text{ kN}$	15,2
$F = 48 \text{ kg} = 0,48 \text{ kN}$	18,2
$F = 56 \text{ kg} = 0,56 \text{ kN}$	21,3
$F = 64 \text{ kg} = 0,64 \text{ kN}$	24,3
$F = 72 \text{ kg} = 0,72 \text{ kN}$	27,4
$F = 80 \text{ kg} = 0,80 \text{ kN}$	30,4

**Tablica 10: Progibi za nelinearni proračun numeričke analize**

Opterećenje	Progib – nelinearni proračun (mm)
$F = 8 \text{ kg} = 0,08 \text{ kN}$	4,0
$F = 16 \text{ kg} = 0,16 \text{ kN}$	7,9
$F = 24 \text{ kg} = 0,24 \text{ kN}$	11,9
$F = 32 \text{ kg} = 0,32 \text{ kN}$	15,8
$F = 40 \text{ kg} = 0,40 \text{ kN}$	19,8
$F = 48 \text{ kg} = 0,48 \text{ kN}$	23,7
$F = 56 \text{ kg} = 0,56 \text{ kN}$	27,7
$F = 64 \text{ kg} = 0,64 \text{ kN}$	31,6
$F = 72 \text{ kg} = 0,72 \text{ kN}$	35,6
$F = 80 \text{ kg} = 0,80 \text{ kN}$	39,5

### 3.4. Trotočkasto savijanje

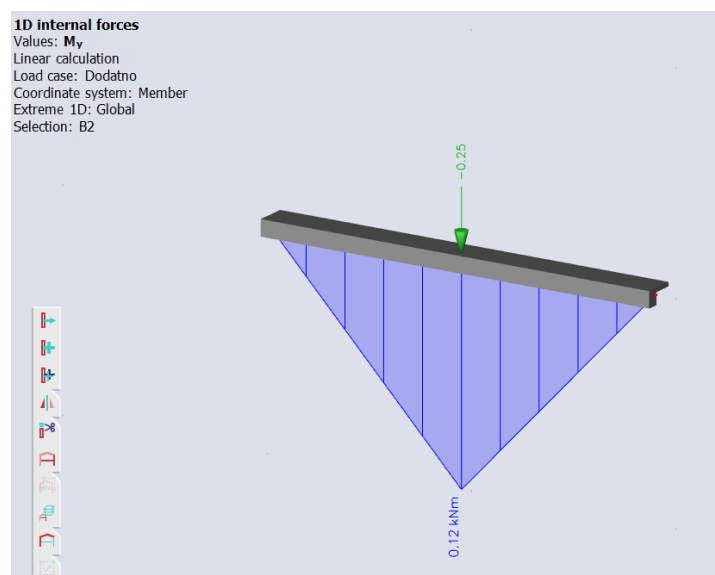
Pošto smo kasnije vršili eksperimentalnu analizu za trotočkasto savijanje na uređaju AUTOMAX MULTITEST Computerized Control Console, potrebno je bilo izraditi novi statički model te provesti numeričku linearnu i nelinearnu analizu za taj slučaj opterećenja.



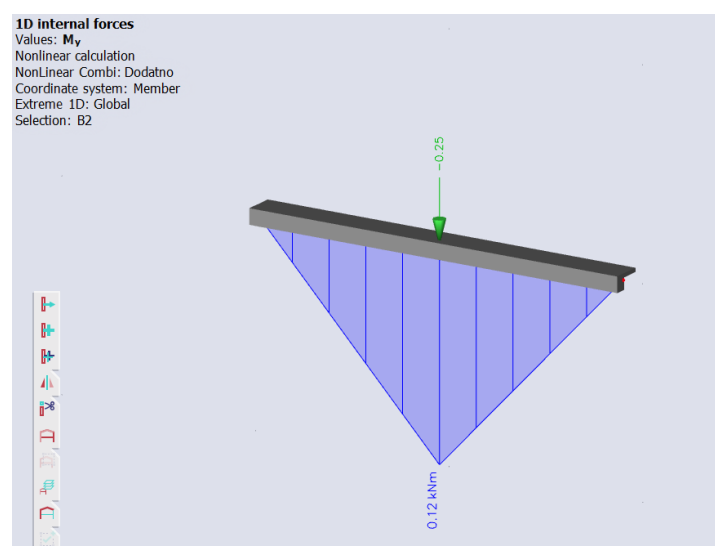
Slika 23: Statički model za trotočkasto savijanje

### 3.5. Rezultati numeričkog proračuna za trotočkasto savijanje

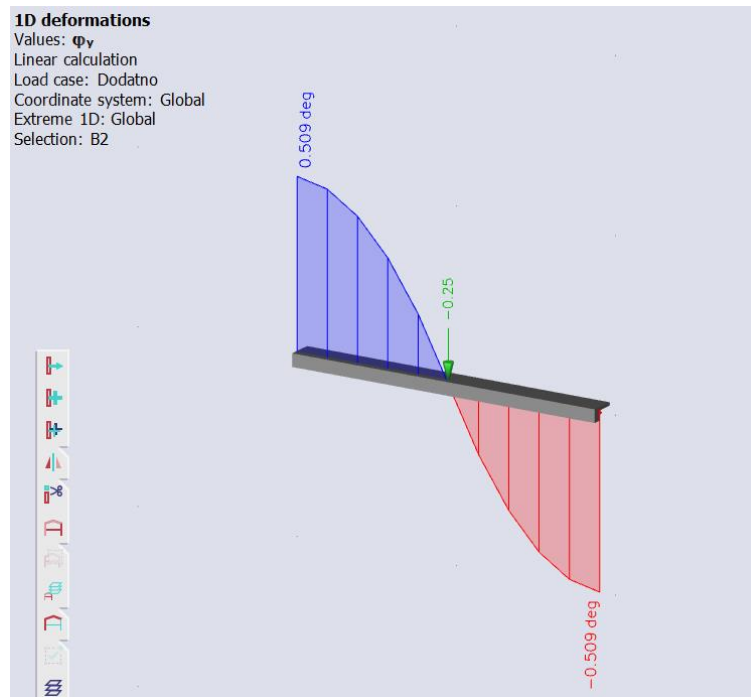
Temeljem prethodno opisanog postupka izrađeni su odgovarajući proračuni za pojedine faze nanošenja opterećenja u polovici raspona – trotočkasto savijanje (uređaj AUTOMAX MULTITEST Computerized Control Console). Na slikama 24 do 29 prikazani su momentni dijagrami u smjeru y, kutovi nagiba tangente na elastičnu liniju i progibi, i to za linearni i nelinearni proračun za opterećenje  $F = 0,25$  kN.



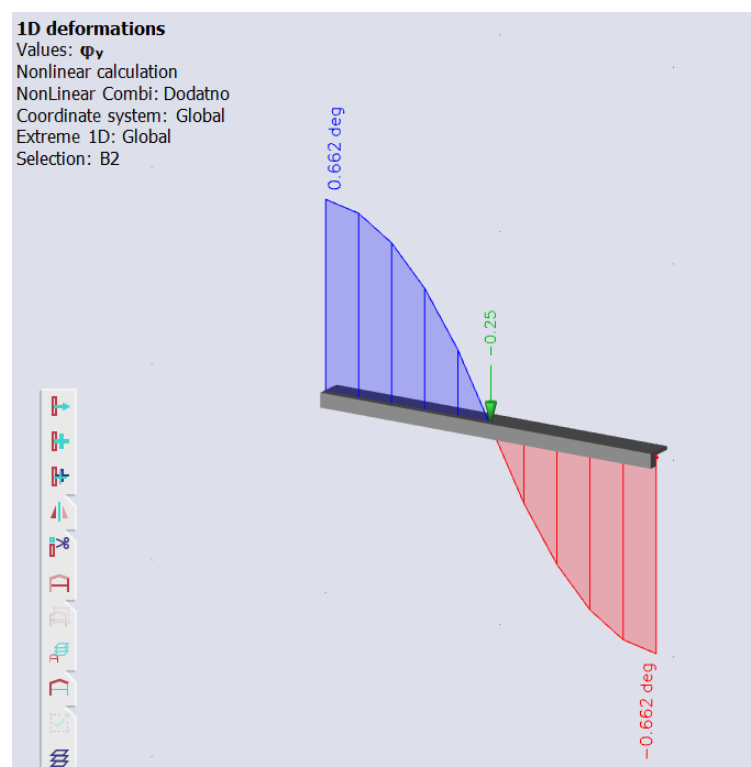
Slika 24: Momenti dijagram u smjeru y za linearni proračun



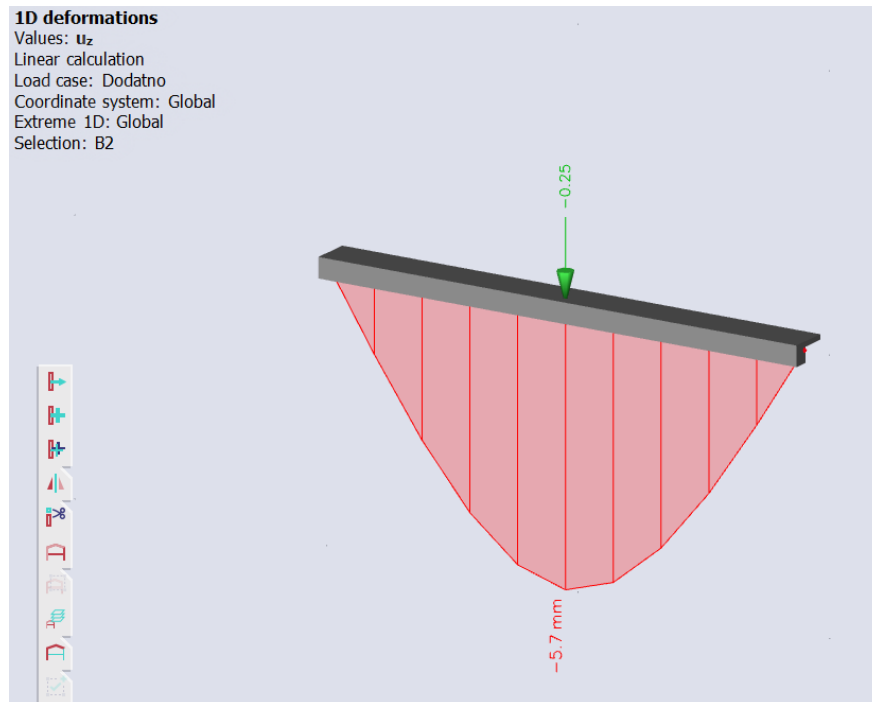
Slika 25: Momenti dijagram u smjeru y za nelinearni proračun



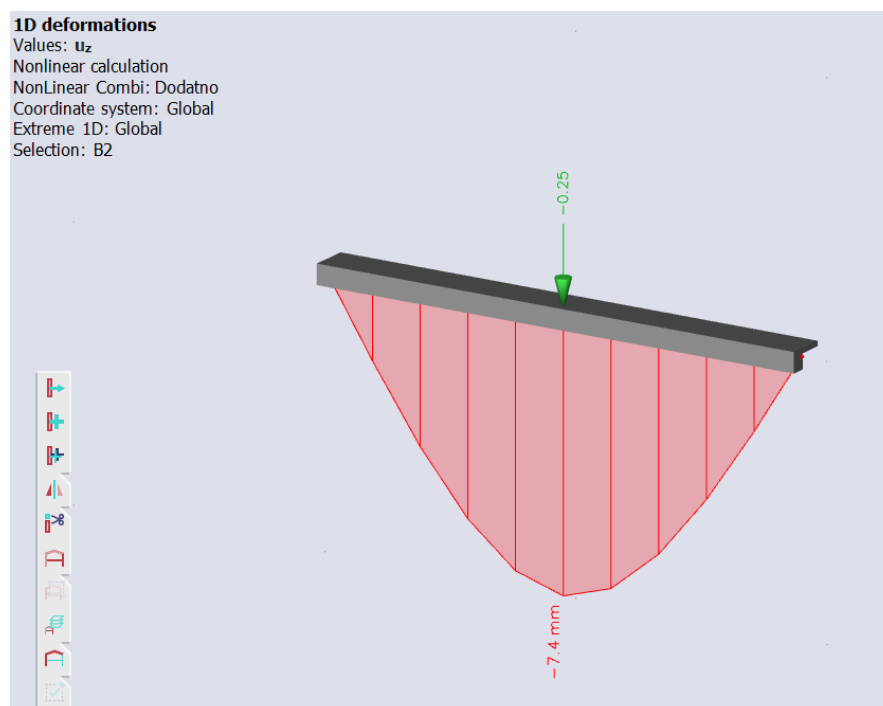
Slika 26: Kut nagiba tangente za linearni proračun



Slika 27: Kut nagiba tangente za nelinearni proračun



Slika 28: Progib za linearni proračun



Slika 29: Progib za nelinearni proračun



U nastavku su tablično prikazani dobiveni progibi u polovici raspona za linearni (Tablica 11) i nelinearni (Tablica 12) proračun za opterećenja od 0,25 kN do 2,00 kN uz priraste opterećenja od 0,25 kN.

**Tablica 11: Progibi za linearni proračun numeričke analize novog statičkog sustava**

Opterećenje	Progib – linearni proračun (mm)
F = 25 kg = 0,25 kN	5,7
F = 50 kg = 0,50 kN	11,3
F = 75 kg = 0,75 kN	17,0
F = 100 kg = 1,00 kN	22,7
F = 125 kg = 1,25 kN	28,3
F = 150 kg = 1,50 kN	34,0
F = 175 kg = 1,75 kN	39,7
F = 200 kg = 2,00 kN	45,3

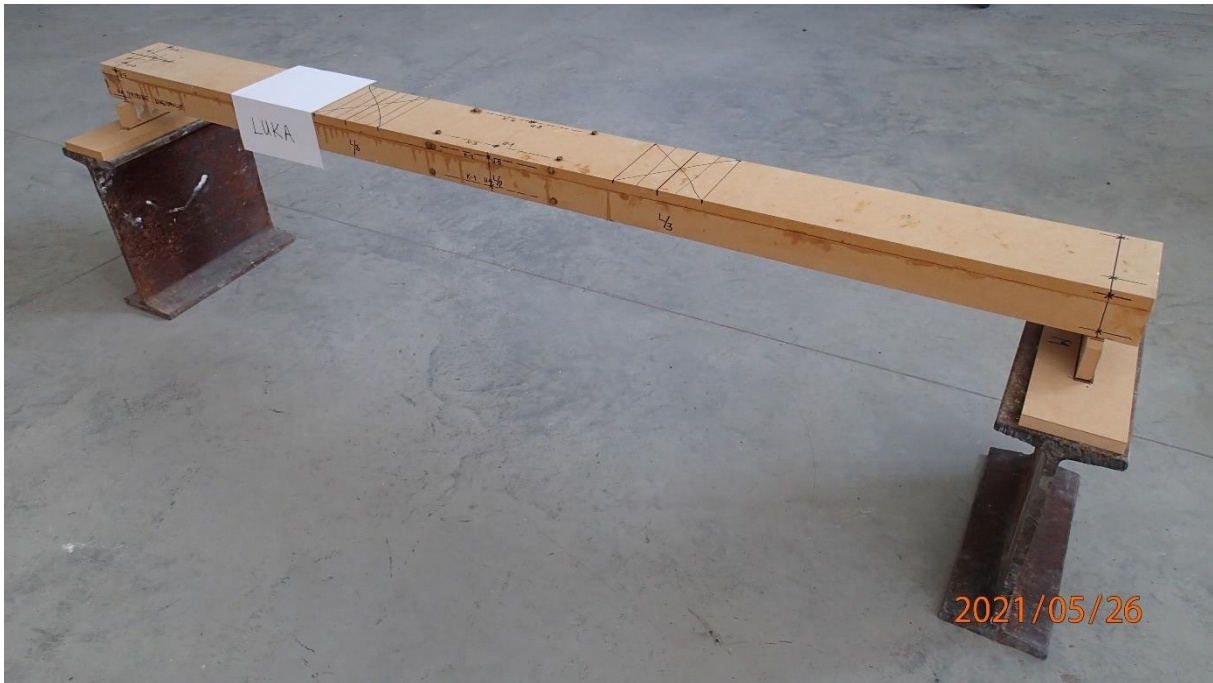
**Tablica 12: Progibi za nelinearni proračun numeričke analize novog statičkog sustava**

Opterećenje	Progib – nelinearni proračun (mm)
F = 25 kg = 0,25 kN	7,4
F = 50 kg = 0,50 kN	14,7
F = 75 kg = 0,75 kN	22,1
F = 100 kg = 1,00 kN	29,5
F = 125 kg = 1,25 kN	36,8
F = 150 kg = 1,50 kN	44,2
F = 175 kg = 1,75 kN	51,6
F = 200 kg = 2,00 kN	58,9

## 4. EKSPERIMENTALNA ANALIZA

### 4.1. Uvod

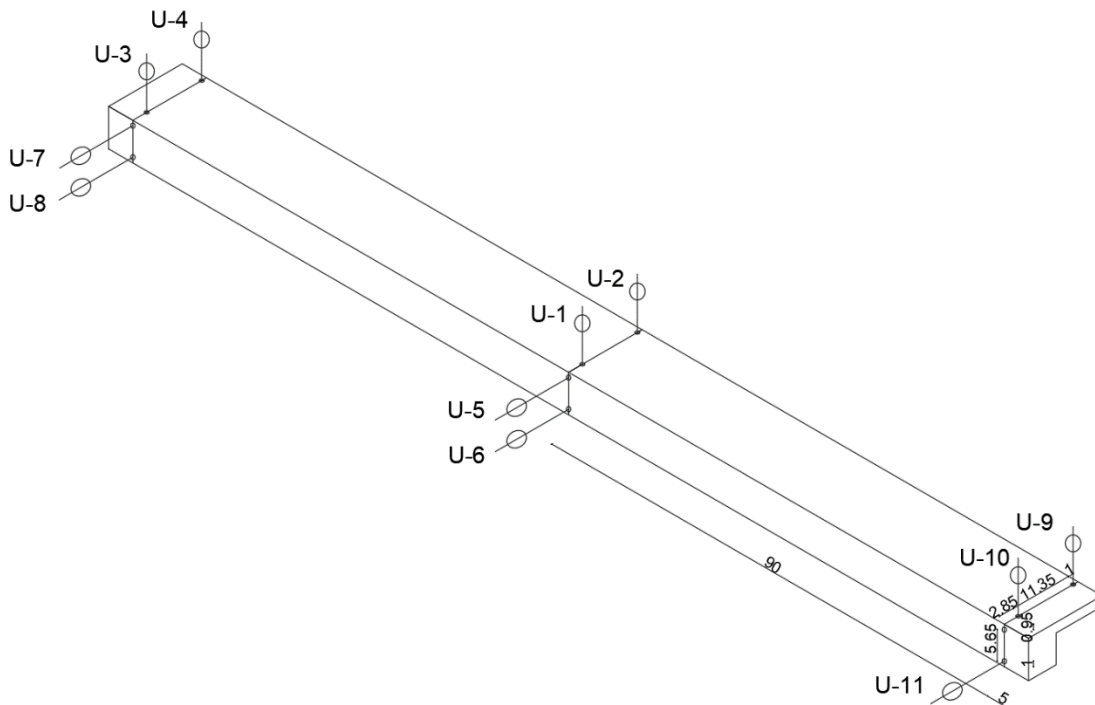
Eksperimentalna ispitivanja provedena su na ranije prikazanom grednom nosaču poprečnog presjeka oblika L (Slika 30).



Slika 30: Prikaz grednog nosača

Zadatak je bio odrediti pomake u jedanaest zadanih točaka, zatim odrediti nagib tangente elastične linije nosača iznad ležaja, te izmjeriti deformacije u zadana četiri položaja na grednom nosaču te koristeći Hooke-ov zakon, znajući modul elastičnosti materijala odrediti naprezanja.

Uređaji koji su korišteni za određivanje pomaka su mikroure (položaj mikroura je prikazan na Slici 31), pri čemu su tri bile digitalne (Slika 32) i osam analogne (Slika 33).



Slika 31: Položaj mikroura

Mikroure su uređaji koji služe za mjerenje apsolutnih pomaka konstrukcije. Koriste se na način da se tijelo mikroure čvrsto pričvrsti na stalak. Zatim se ticalo mikroure postavi okomito na površinu konstrukcije ovisno u kojem smjeru mjerimo pomake.



Slika 32: Digitalna mikroura



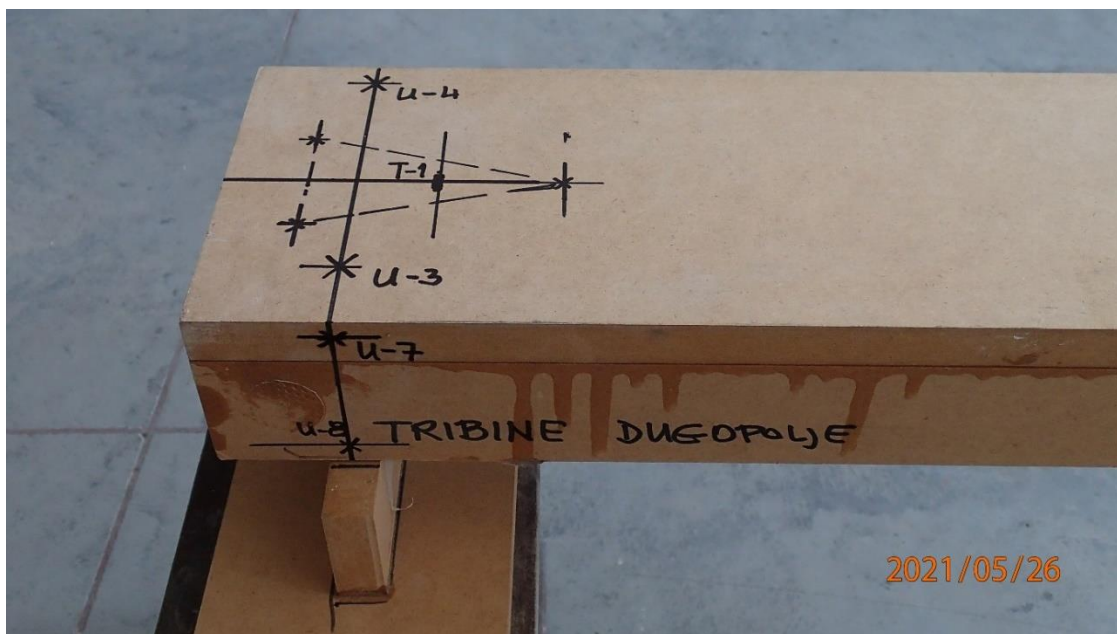
Slika 33: Analogna mikroura

Određivanje nagiba tangente na elastičnu liniju mjerili smo pomoću klinometra (Slika 34) postavljenog na osloncu (Slika 35).



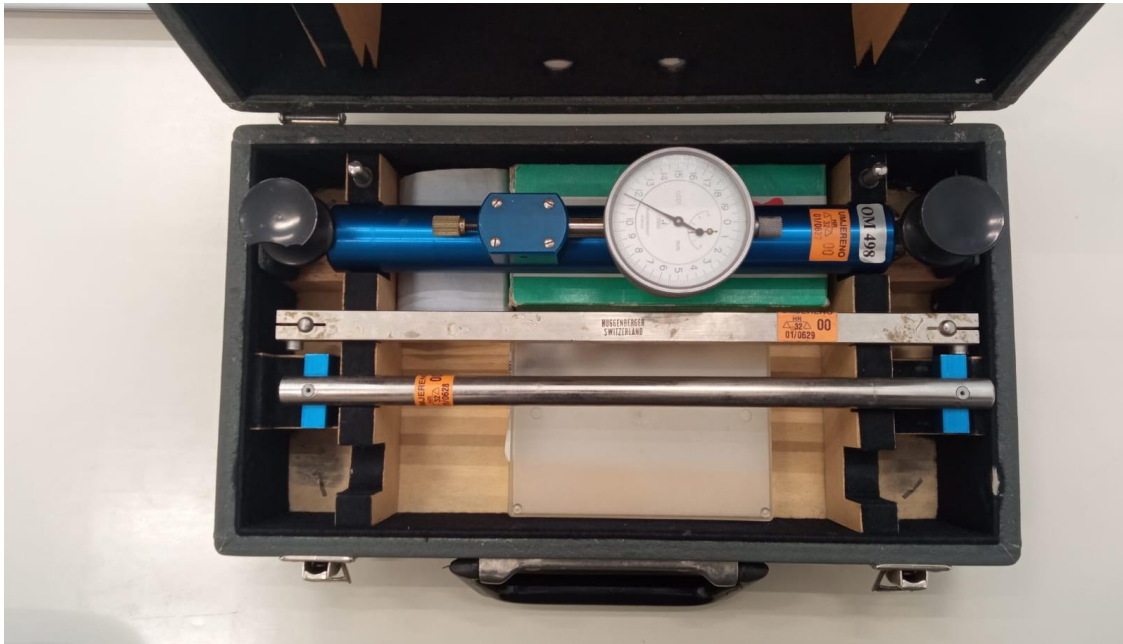
Slika 34: Klinometar

Klinometar u sebi ima libelu te se koristi na način da se u tri točke osloni na nosač i zatim se zupčanik rotira sve dok se dvije polovice srednje libele ne poklope u sredini. Tada se očitava kut zaokreta u stupnjevima. Uređaj je jako osjetljiv, te je uspješno očitana vrijednost kuta zaokreta samo za jedan red kocaka, odnosno za opterećenje silom  $F = 0,08 \text{ kN}$ .



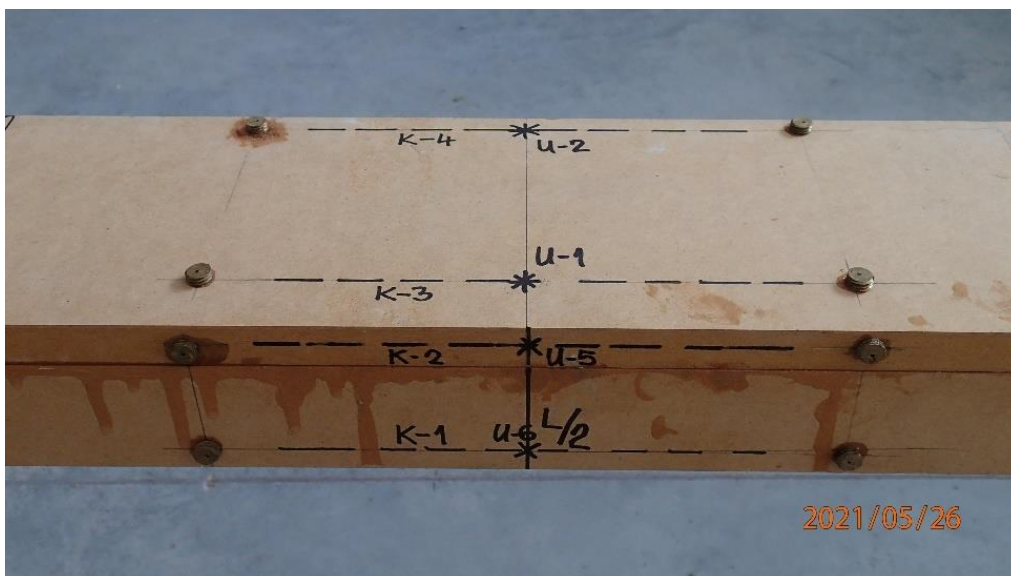
Slika 35: Položaj klinometra na grednom nosaču

Za mjerenje deformacija u četiri različita položaja, koristili smo mehanički tenzometar, odnosno Berry-ev prijenosni komparator (Slika 36).



Slika 36: Berry-ev prijenosni komparator

Mjerenje se odvija na način da se prije početka mjerenja vrijednost očita na invarskom štapu. Zatim se provede nulto očitavanje, odnosno očitaju se početni razmaci markica na nosaču bez opterećenja (Slika 37).



Slika 37: Položaj markica na grednom nosaču



Na Slici 38 prikazan je postupak mjerenja deformacija pomoću Barry-evog prijenosnog komparatora.



Slika 38: Mjerenje deformacija pomoću Barry-evog prijenosnog komparatora

Nakon nanošenja opterećenja, na isti način se mjere razmaci markica, ali ovaj puta na deformiranom sustavu. Razlika između dvaju očitavanja daju veličinu promjene bilo to produljenje ili skraćenje. Deformacije se zatim računaju prema izrazu:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_1} \quad (60)$$

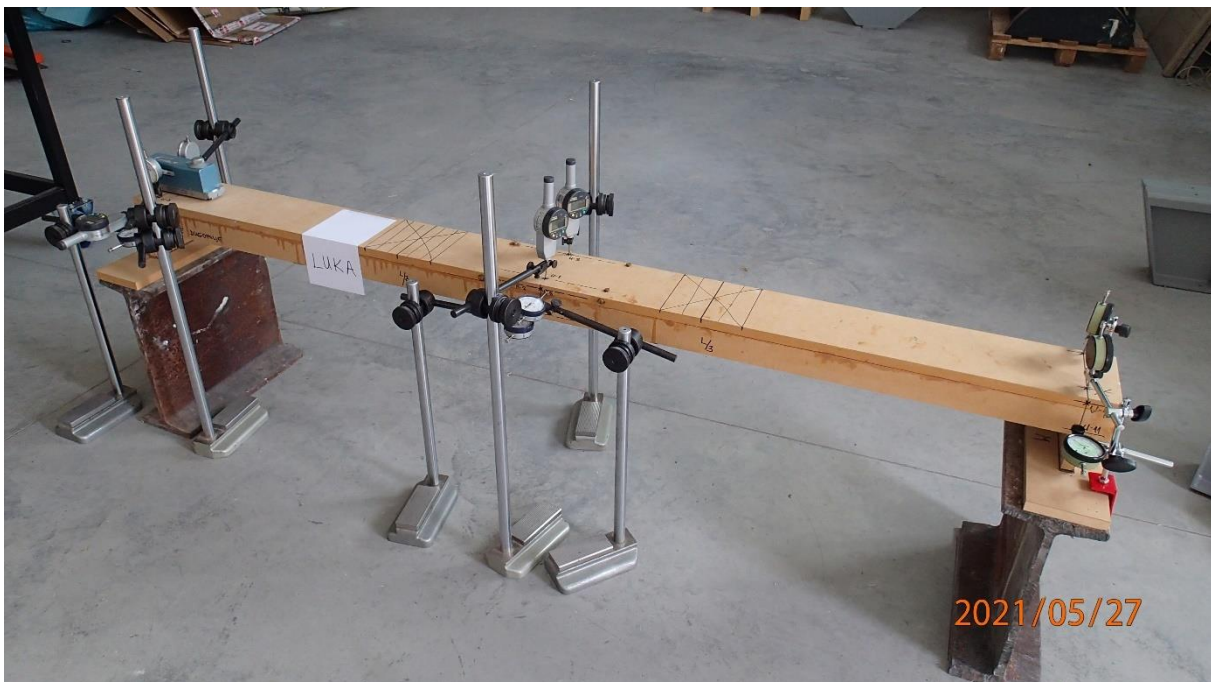
gdje  $\Delta L$  predstavlja produljenje ili skraćenje, a  $L_1$  početnu udaljenost markica.

Zatim se koristeći Hooke-ov zakon koji glasi:

$$\sigma = \varepsilon * E \quad (61)$$

ako znamo modul elastičnosti materijala, mogu dobiti iznosi naprezanja u tim položajima. Ta mjerenja nije bilo moguće izvesti jer su se područja predviđenog mjerenja deformacija preklapala s mjestima za mjerenje pomaka, a prednost je dana mjerenju pomaka.

Na Slici 39 prikazani su položaji svih mjernih uređaja koji su korišteni prilikom provedbe ovog ispitivanja.

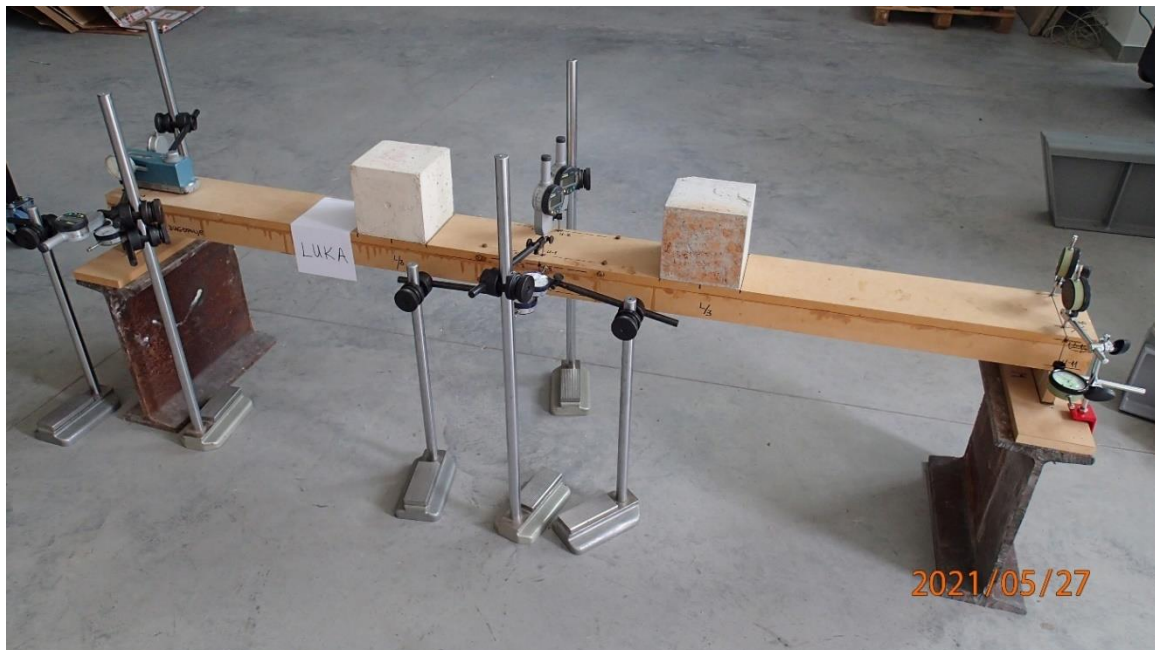


Slika 39: Prikaz greznog nosača nakon montirane cjelokupne opreme za mjerenje

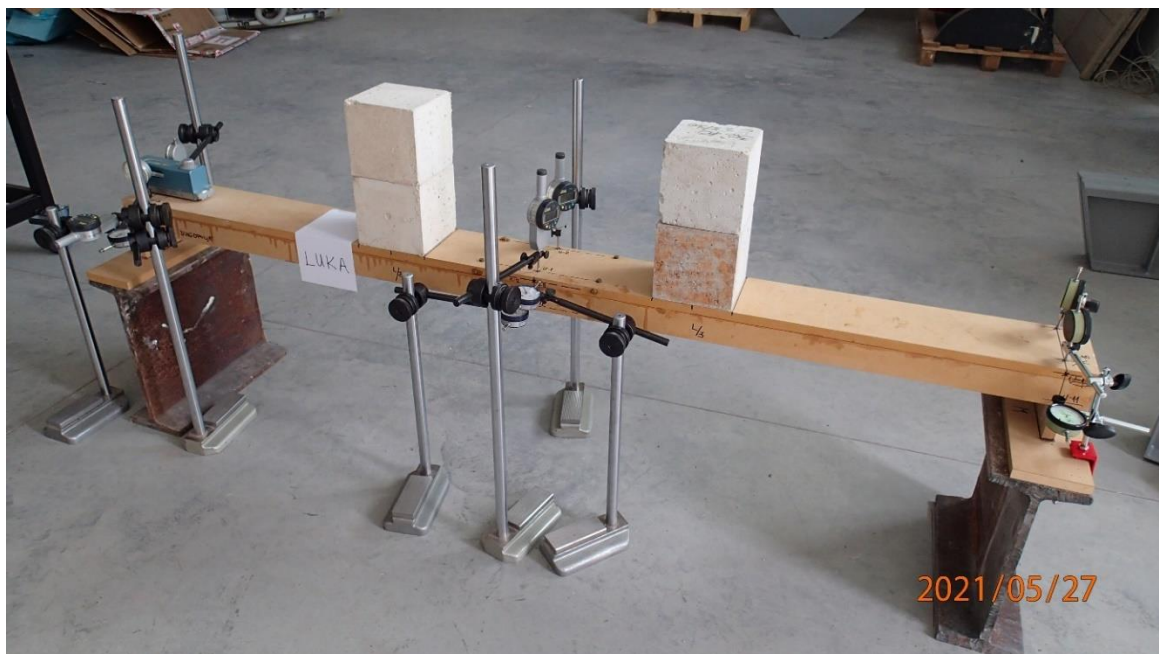


## 4.2. Ispitivanje četverotočkastim savijanjem

Ispitivanje se odvijalo na način da je nakon svakog reda dodanog opterećenja (Slike 40 – 43, 45, 47, 49 – 52) izvršeno očitavanje pomaka s mikroura, a na klinometru je izmjeren kut nagiba nosača na ležaju A. Kao što je već ranije navedeno, klinometar koji smo koristili je preosjetljiv te smo uspjeli očitati kut nagiba nosača samo za jedan red betonskih kocaka odnosno opterećenje silom  $F = 0,08 \text{ kN}$ .

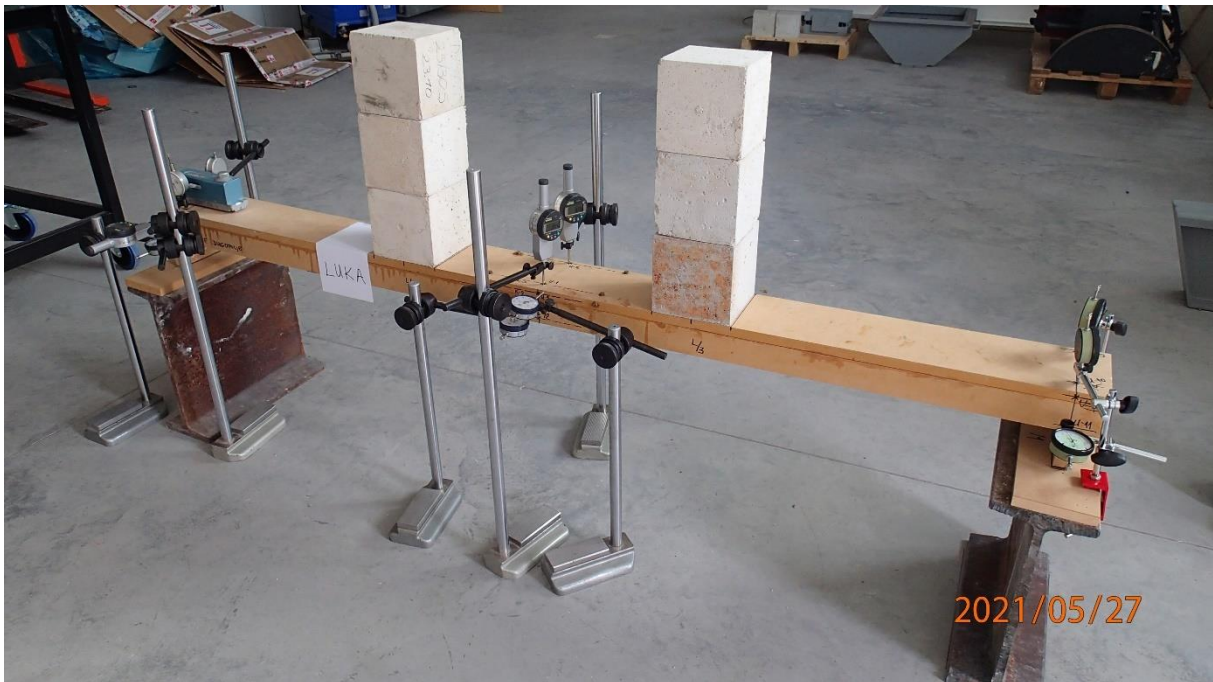


Slika 40: Nosač s jednim redom opterećenja,  $F = 0,08 \text{ kN}$



Slika 41: Nosač s dva reda opterećenja,  $F = 0,16 \text{ kN}$



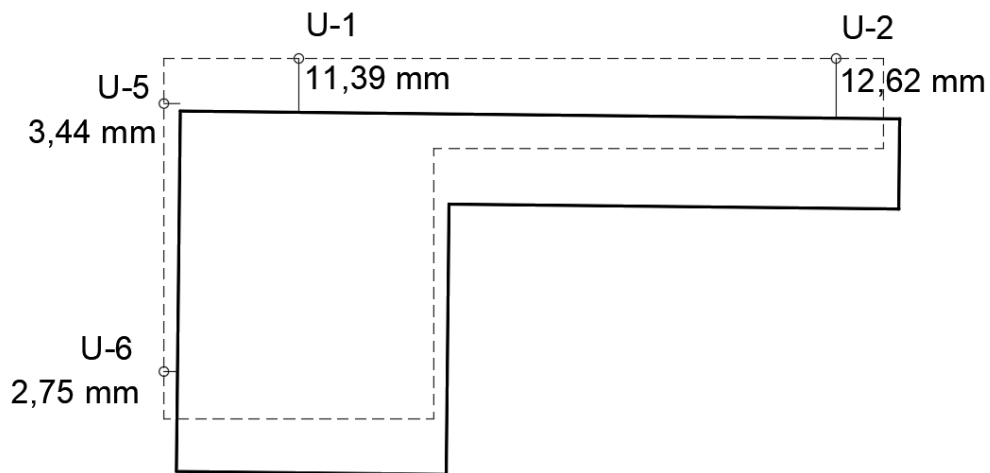


Slika 42: Nosač s tri reda opterećenja,  $F = 0,24$  kN



Slika 43: Nosač s četiri reda opterećenja,  $F = 0,32$  kN

Već nakon četiri reda kocaka možemo vidjeti da je došlo do uvijanja poprečnog presjeka u polovici raspona nosača (Slika 44), što potvrđuje da se u ovome slučaju radi o kosom savijanju.



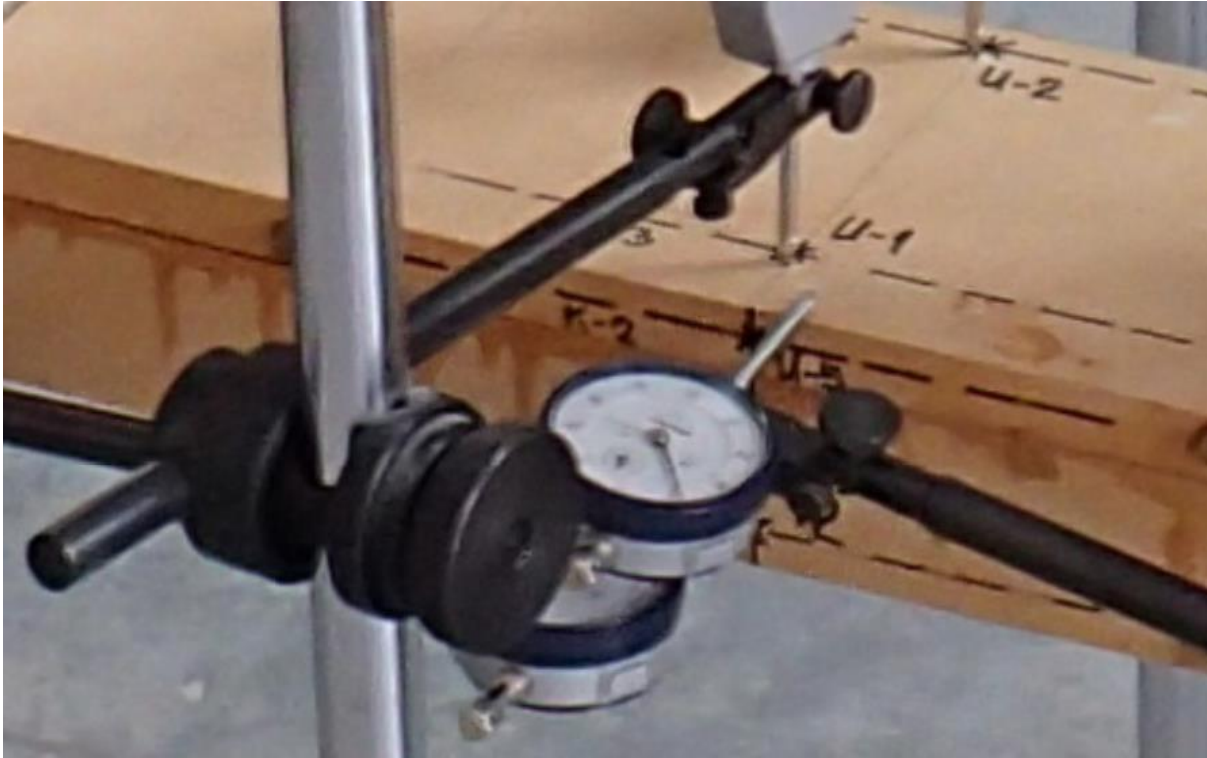
Slika 44: Uvijanje poprečnog presjeka u polovici raspona nosača,  $F = 0,32$  kN



Slika 45: Nosač s pet redova opterećenja,  $F = 0,40$  kN



Kod opterećenja od pet redova kocaka, mikroure na položaju U-5 je zbog vertikalnog pomaka nosača izašla iz svog položaja, te daljnja mjerenja pomaka u tom položaju nisi bila moguća (Slika 46).



Slika 46: Izlazak mikroure iz položaja U-5

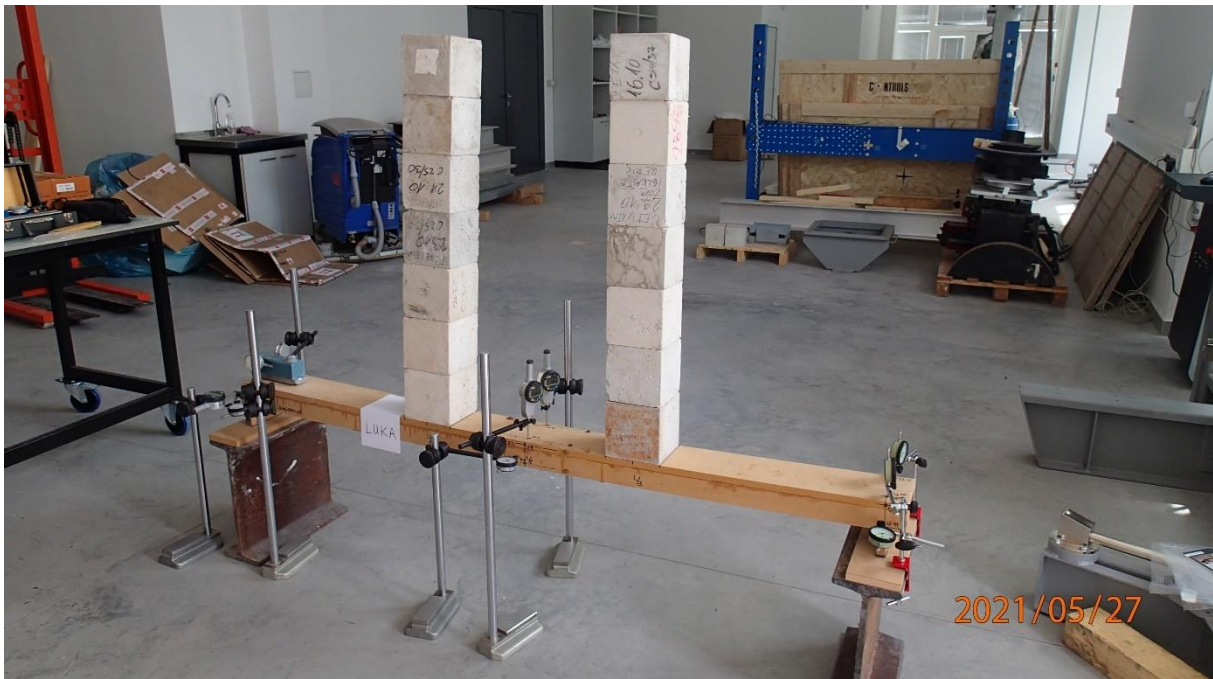


Slika 47: Nosač sa šest redova opterećenja,  $F = 0,48 \text{ kN}$

Značajnije uvijanje grednog nosača u  $L/2$  vidljivije je pomoću libele, nakon nanesenog šestog reda betonskih kocaka (Slika 48).



Slika 48: Uvijanje poprečnog presjeka grednog nosača u  $L/2$



Slika 49: Nosač sa sedam redova opterećenja,  $F = 0,56\text{kN}$





Slika 50: Nosač s osam redova opterećenja,  $F = 0,64 \text{ kN}$



Slika 51: Prikaz uvijanja poprečnog presjeka nosača

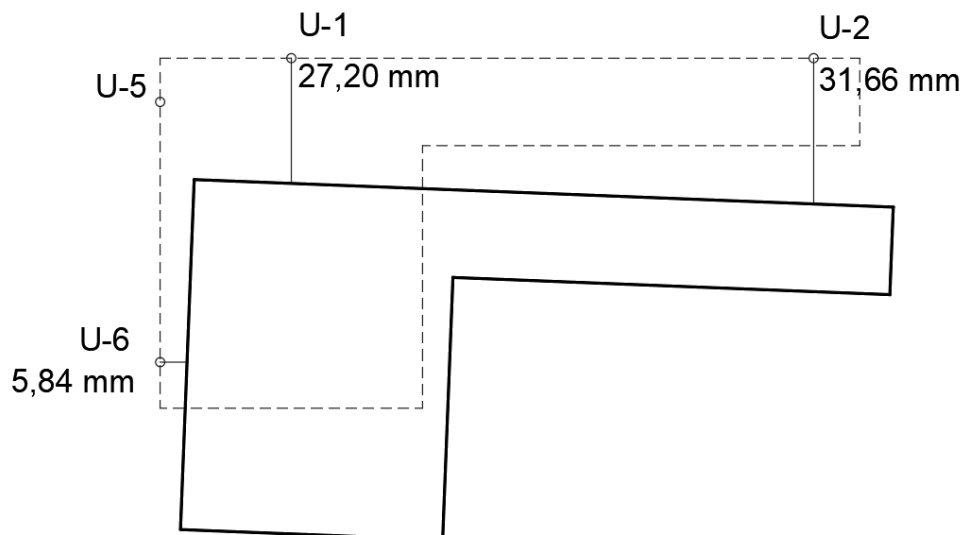




Na Slici 53 je prikazano odizanje i rotacija poprečnog presjeka kod ležaja, dok je na Slici 54 grafički prikazano uvijanje poprečnog presjeka u polovici raspona nakon nanesenog devetog reda kocaka odnosno pri sili  $F = 0,72 \text{ kN}$ .



Slika 53: Prikaz odizanja i rotacije poprečnog presjeka kod ležaja



Slika 54: Uvijanje poprečnog presjeka u polovici raspona nakon devetog reda opterećenja,  $F = 0,72 \text{ kN}$



Nakon postavljanja desetog reda opterećenja odnosno pri sili  $F = 0,80$  kN, zbog velikog uvijanja poprečnog presjeka nosača što je uzrokovalo nagnuće opterećenja (10 betonskih kocaka ukupne visine cca 150 cm) došlo je do pada istog (Slika 55).



**Slika 55: Pad svog opterećenja s nosača**

### 4.3. Rezultati eksperimentalne analize za četverotočkasto savijanje

Očitane apsolutne vrijednosti izmjerenih pomaka, za sva mjerna mjesta, su prikazane u Tablici 13.

Tablica 13: Apsolutne vrijednosti izmjerenih pomaka

Sila (kg)	U-1	U-2	U-3	U-4	U-5	U-6	U-7	U-8	U-9	U-10	U-11
0	0,00	0,00	6662	2879	10026	12600	0,00	23998	13622	15981	16384
8	-2,68	-3,05	6568	2559	9204	11961	-0,29	23971	13576	16019	16409
16	-5,42	-6,11	6480	2370	8408	11289	-0,52	23952	13556	16039	16443
24	-8,34	-9,29	6451	2341	7598	10569	-0,58	23951	13552	16042	16460
32	-11,39	-12,62	6455	2331	6584	9851	-0,60	23952	13551	16059	16481
40	-14,49	-16,12	6470	2333	-	9140	-0,65	23955	13552	16099	16534
48	-17,64	-19,78	6525	2337	-	8471	-0,74	23960	13550	16161	16611
56	-20,79	-23,58	6610	2349	-	7832	-0,85	23981	13546	16245	16713
64	-23,97	-27,46	6693	2370	-	7240	-0,86	24081	13541	16348	16828
72	-27,20	-31,66	6861	2389	-	6760	-0,88	24327	13539	16506	17012

Apsolutne vrijednosti izmjerenih pomaka su obrađene i prebačene u nulirane vrijednosti te su prikazane u Tablici 14.

Tablica 14: Relativne vrijednosti izmjerenih pomaka

Sila (kg)	U-1	U-2	U-3	U-4	U-5	U-6	U-7	U-8	U-9	U-10	U-11
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8	-2,68	-3,05	-0,094	-0,320	-0,822	-0,639	-0,29	-0,027	-0,046	0,038	0,025
16	-5,42	-6,11	-0,182	-0,509	-1,618	-1,311	-0,52	-0,046	-0,066	0,058	0,059
24	-8,34	-9,29	-0,211	-0,538	-2,428	-2,031	-0,58	-0,047	-0,070	0,061	0,076
32	-11,39	-12,62	-0,206	-0,548	-3,442	-2,749	-0,60	-0,046	-0,071	0,078	0,097
40	-14,49	-16,12	-0,192	-0,546	-	-3,460	-0,65	-0,043	-0,070	0,118	0,150
48	-17,64	-19,78	-0,137	-0,542	-	-4,129	-0,74	-0,038	-0,072	0,180	0,227
56	-20,79	-23,58	-0,052	-0,530	-	-4,768	-0,85	-0,017	-0,076	0,264	0,329
64	-23,97	-27,46	+0,031	-0,609	-	-5,360	-0,86	+0,083	-0,081	0,367	0,444
72	-27,20	-31,66	+0,199	-0,490	-	-5,840	-0,88	+0,329	-0,083	0,525	0,628

Napomena: vertikalni pomaci (U-1, U-2, U-3, U-4, U-9 i U-10) – pomak prema dole, + pomak prema gore; horizontalni pomaci (U-5, U-6, U-7, U-8 i U-11) – pomak prema nosaču, + pomak od nosača.

Klinometrom je očitana iznos nagiba tangente poprečnog presjeka na osloncu za slučaj  $F = 0,08 \text{ kN}$  te je iznosio  $0,296^\circ$ .

#### 4.4. Ispitivanje trotočkastim savijanjem

Ispitivanje trotočkastim savijanjem izvršeno je na uređaju AUTOMAX MULTITEST Computerized Control Console, te je nosač opterećen na polovici raspona (Slika 56).



Slika 56: Uređaj AUTOMAX MULTITEST Computerized Control Console

Uređaj ima opciju zadavanja brzine nanošenja opterećenja, ciljano opterećenje do kojeg će ići, a za vrijeme nanošenja opterećenja bilježi pomake, naprezanja, i razne druge podatke, te ih zapisuje u excel datoteku. U startu odabiremo iznos nekog predopterećenja (u našem slučaju 0,2 kN), u kojem se preko tog predopterećenja definira dolazak klipa do nosača. Zatim se rasterećuje do nule, i tada počinje zadano opterećivanje konstrukcije do ciljane vrijednosti sile. Prvo ispitivanje je provedeno do sile od 170 kg odnosno  $F = 1,7$  kN. Zatim je nosač rasterećen te je provedeno ispitivanje do sloma.

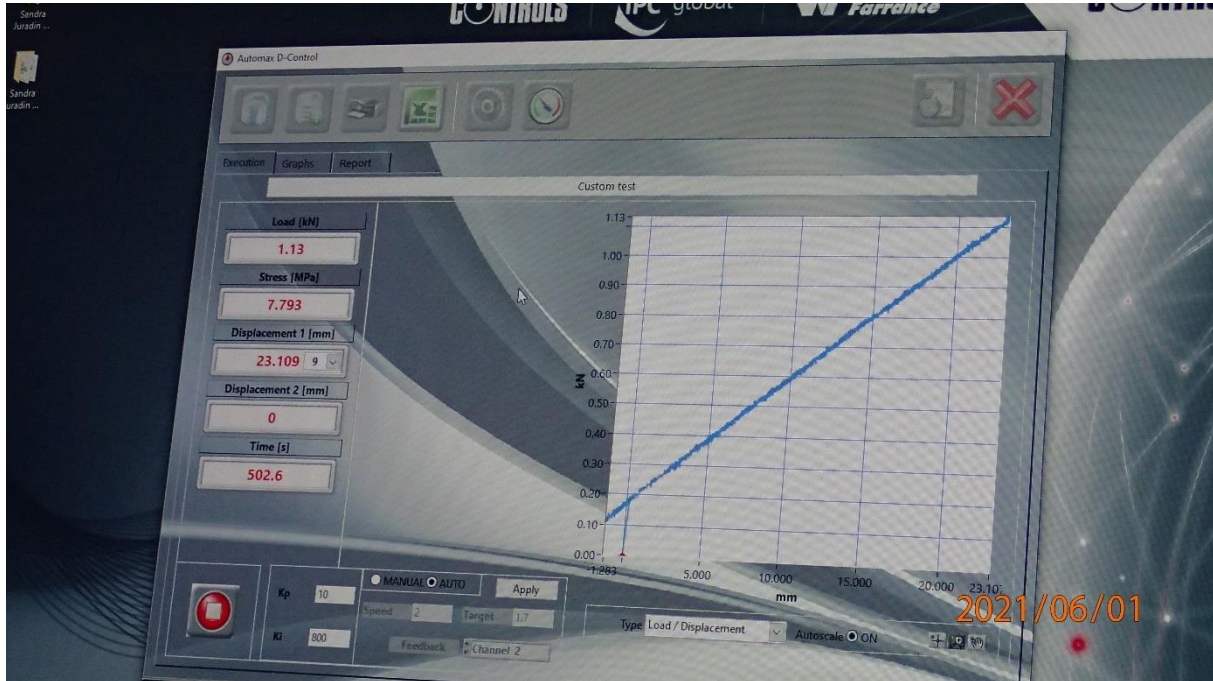
Na Slici 57 se vidi priprema nosača za provedbu ispitivanja u uređaju AUTOMAX MULTITEST Computerized Control Console.



Slika 57: Priprema grednog nosača za ispitivanje na uređaju AUTOMAX MULTITEST Computerized Control Console

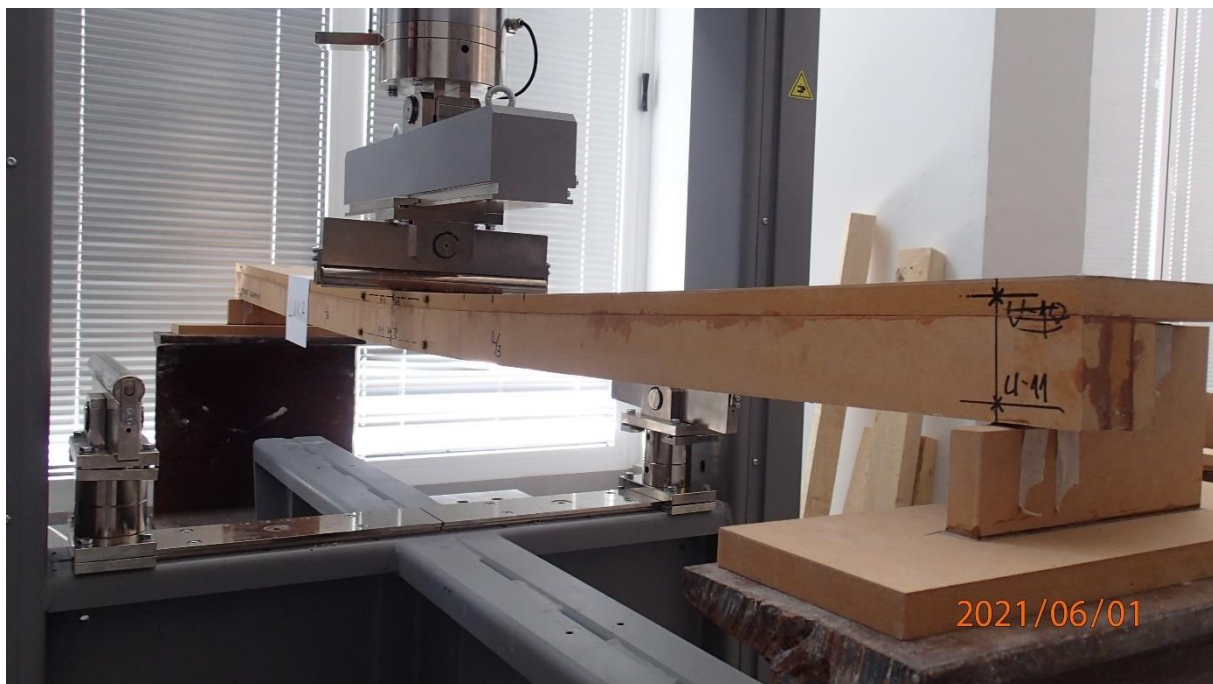


Na Slici 58 vidimo ekran uređaja s podacima koje prikazuje tijekom ispitivanja. Na ekranu se vidi postepeno nanošenje opterećenja, te odabrani mjerni podaci kao i neki drugi parametri koji nam nisu bili potrebni za naše ispitivanje.



Slika 58: Ekran uređaja s prikazanim podacima

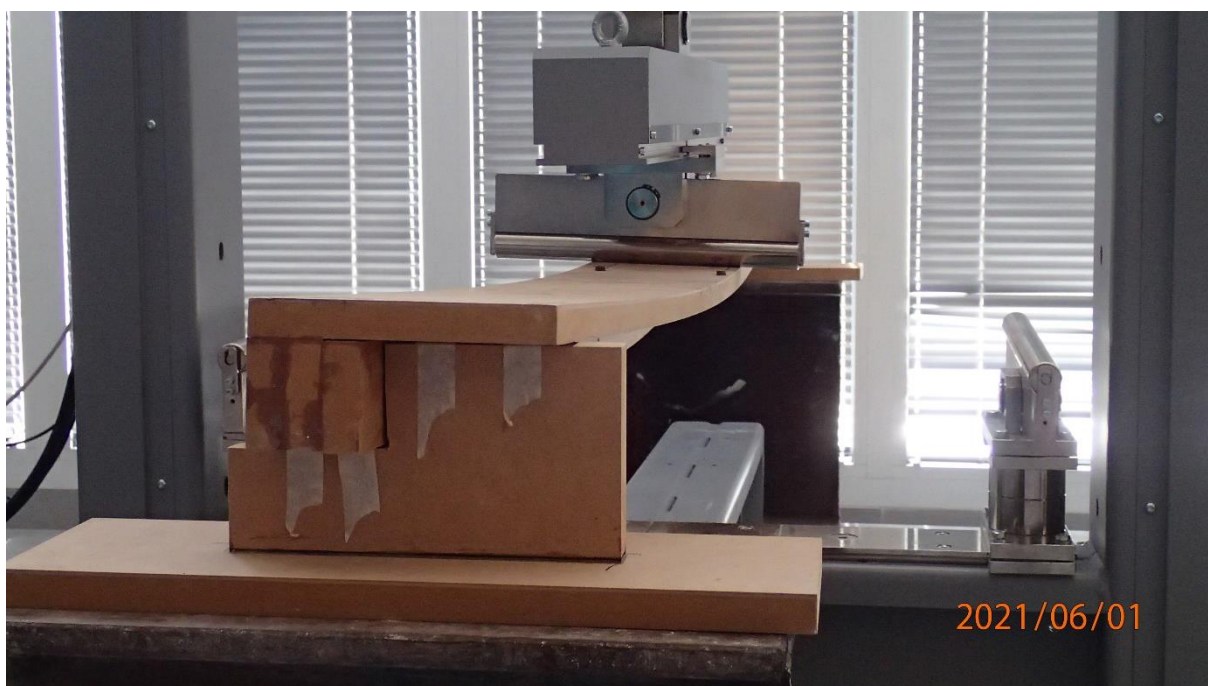
Na Slici 59 vidi se deformacija nosača pri sili od 113 kg, a kut nagiba tangente na ležaju B se uvelike promijenio (Slika 60 i 61).



Slika 59: Deformacija nosača kod sile od  $F = 1,13$  kN



Slika 60: Vidljiva znatna promjena kuta nagiba nosača za silu  $F = 1,13$  kN



Slika 61: Bočni prikaz deformacije nosača

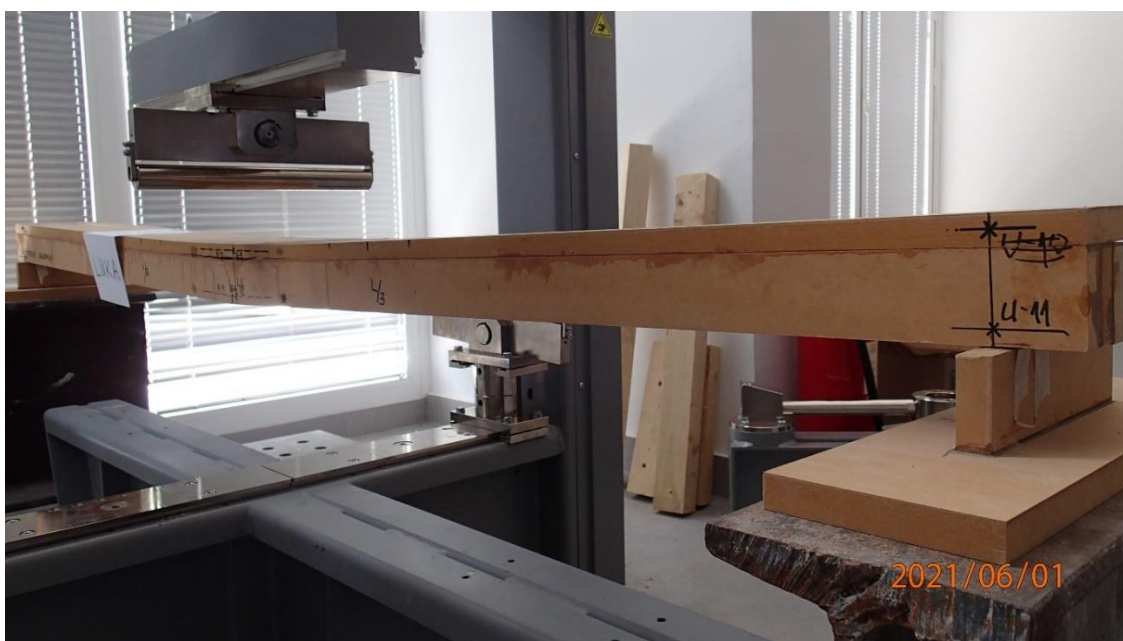


Na Slici 62 vidi se odizanje nosača na ležaju uslijed uvijanja poprečnog presjeka.



Slika 62: Odizanje poprečnog presjeka kod ležaja

Kao što se može vidjeti na Slikama 63 do 67, slom je nastupio u polovini raspona. Donja tri elementa grede koji čine donji deblji dio poprečnog presjeka su pukle u polovici raspona (Slike 64 do 67) te je nakon njihovog sloma uslijedio horizontalni lom ploče koja čini gornji dio poprečnog presjeka (slika 64).



Slika 63: Slom nosača



Slika 64: Pukotine nosača na vanjskom licu poprečnog presjeka nosača



Slika 65: Pukotine nosača na unutarnjem licu poprečnog presjeka nosača





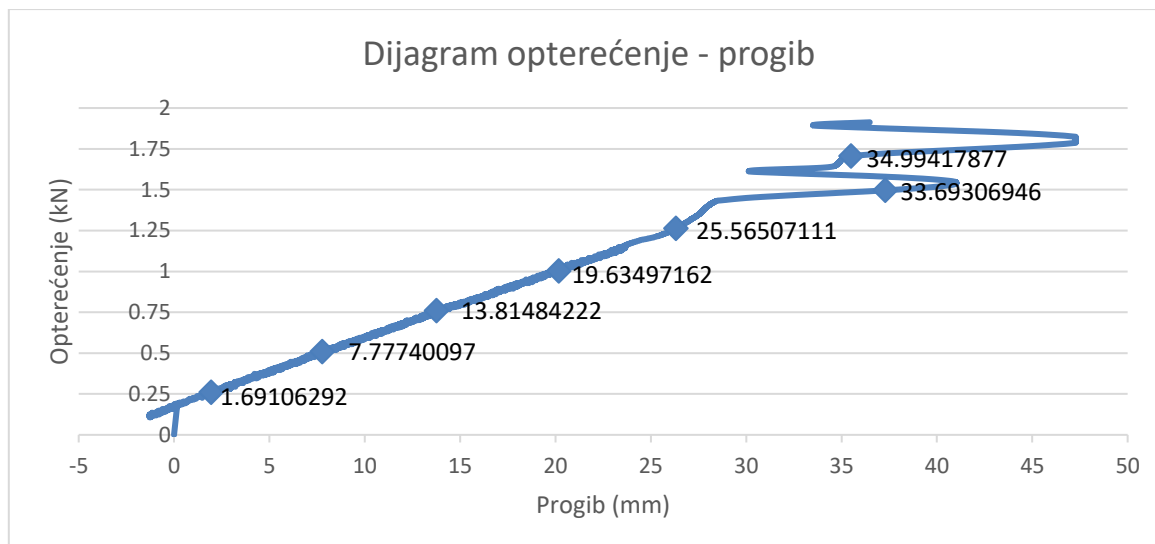
Slika 66: Pukotine s donje strane nosača



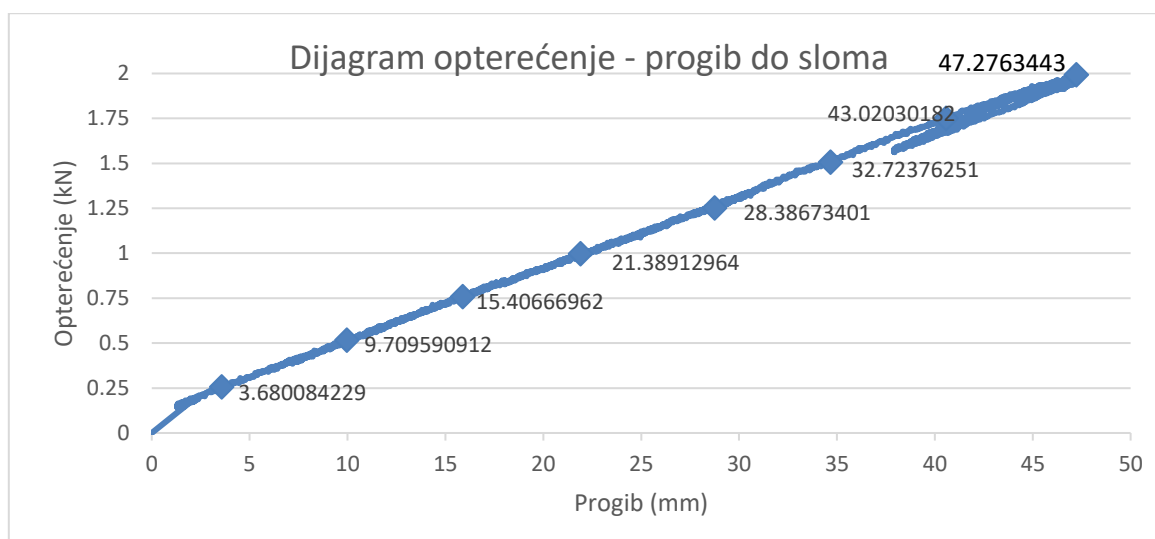
Slika 67: Pukotine na vanjskom licu poprečnog presjeka nosača

## 4.5. Rezultati eksperimentalne analize za trotočkasto savijanje

Kao što je ranije navedeno, uređaj rezultate ispitivanja upisuje u excel datoteku, te su temeljem tih podataka nacrtani dijagrami opterećenje – progib prikazani na Slikama 68 i 69.



Slika 68: Dijagram opterećenje - progib za prvo ispitivanje nosača do 170 kg odnosno  $F = 1,7\text{kN}$



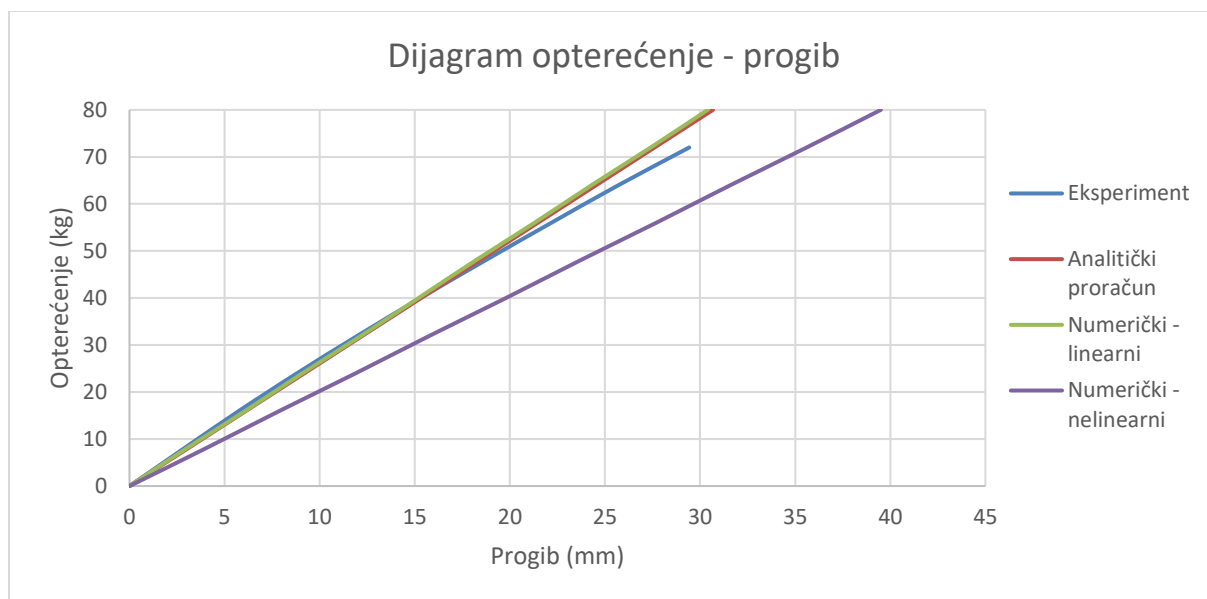
Slika 69: Dijagram opterećenje - progib za drugo ispitivanje nosača do sloma

Uvidom u dijagrame opterećenje – progib (Slike 68 i 69) može se konstatirati da je veza između opterećenja i progiba linearna. Naime, manja odstupanja od pravca odnosno vrludanja krivulje su posljedica rada s uređajem na kojem je izvršeno ispitivanje.

Nadalje iz linearnosti veze opterećenje – progib može se konstatirati da u trenutku loma nosača još nije nastupila plastifikacija poprečnog presjeka, odnosno da je nastupio krti lom.

## 5. USPOREDBA REZULTATA

Prvo ćemo usporediti rezultate analitičke, numeričke i eksperimentalne analize za slučaj da se opterećenje nalazi u trećinama raspona nosača (Slika 70). Podaci pomaka dobivenih mikrouorama u polovici nosača su osrednjeni kako bi približno dobili rezultate progiba u težištu poprečnog presjeka.



Slika 70: Usporedba rezultata progiba analitičke, numeričke i eksperimentalne analize

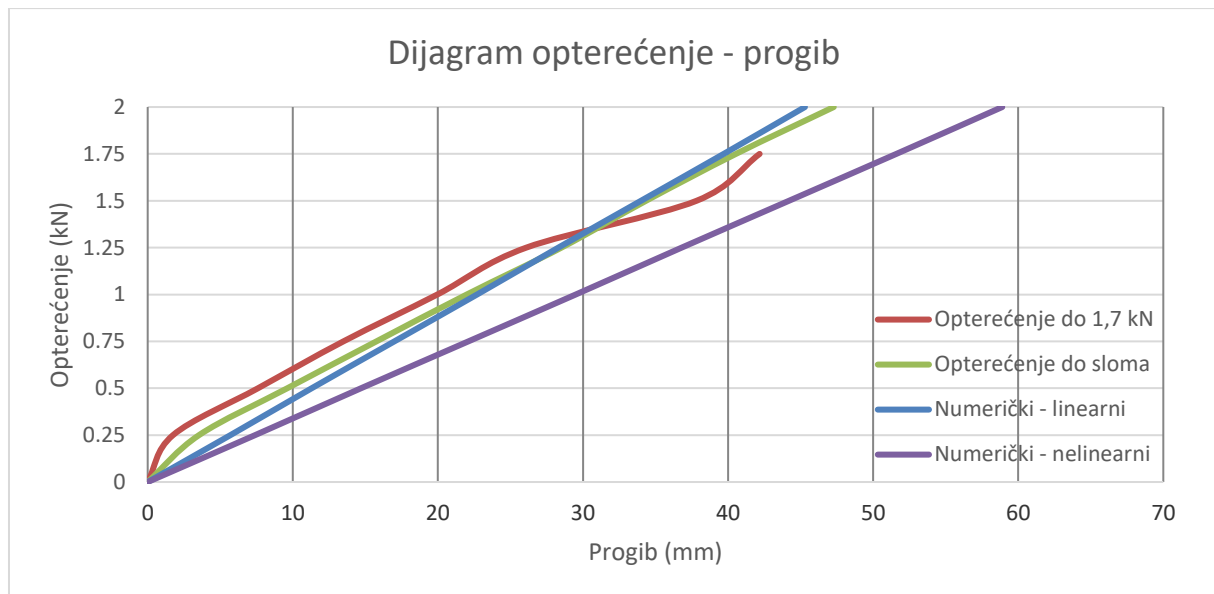
Rezultati eksperimentalne analize predstavljaju pravo stanje odnosno ponašanje analiziranog grednog nosača. Sa Slike 70 vidimo da se rezultati analitičko proračuna i numeričkog linearnog proračuna poklapaju te da neznatno odstupaju od eksperimentalnih rezultata. Rezultati nelinearnog numeričkog proračuna pokazuju nešto veća odstupanja.

Rezultati kutova nagiba tangente na elastičnu liniju nosača nisu prikazali dijagramom, već samo tabelarno (Tablica 15), iz razloga jer se je eksperimentalnom analizom uspio utvrditi samo nagib za prvi red opterećenja, dok se rezultati analitičke i numeričke linearne analize potpuno poklapaju. Nelinearni numerički proračun kao i kod progiba ima veće odstupanje.

Tablica 15: Usporedba rezultata nagiba tangente analitičke, numeričke i eksperimentalne analize

Kut nagiba tangente (°)			
Analitički proračun	Linearni proračun	Nelinearni proračun	Eksperimentalna analiza
0,290	0,290	0,376	0,296

Sljedeća usporedba rezultata odnosi se za slučaj kad je gredni nosač opterećen u polovici raspona (trotočkasto savijanje). Na Slici 71 prikazana je usporedba rezultata numeričkog linearnog proračuna, s rezultatima dvije eksperimentalne analize, jedne gdje je nosač opterećen do 1,70 kN pa rasterećen i druge gdje je nosač opterećen do sloma.



Slika 71: Usporedba rezultata progiba za slučaj opterećenja u L/2 za numeričku i eksperimentalnu analizu

Rezultati eksperimentalne analize predstavljaju pravo stanje odnosno ponašanje analiziranog grednog nosača. Sa Slike 71 vidimo da se rezultati eksperimentalne analize za opterećenje do 1,70 kN i do sloma neznatno razlikuju, uz globalno isti trend (linearno ponašanje), što ukazuje na utjecaj svojstava uređaja za pri zadavanju granica opterećivanja. Rezultati numeričkog linearnog proračuna se vrlo dobro slažu s eksperimentalnim ispitivanjem do sloma. Rezultati numeričkog nelinearnog proračuna odstupaju od ostalih rezultata i daju veće progibe za isti nivo opterećenja.

Kutovi zaokreta se nisu mogli izmjeriti jer uređaj nema opciju zaustavljanja nanošenja opterećenja kad dosegne ciljano opterećenje pa je bilo nemoguće koristiti klinometar.

---

## 6. ZAKLJUČAK

U ovom radu izvršen je analitički proračun, linearni i nelinearni numerički proračun te eksperimentalna analiza jednog grednog nosača poprečnog presjeka L oblika.

Rezultati eksperimentalne analize predstavljaju pravo stanje odnosno ponašanje analiziranog grednog nosača. Rezultati analitičkog i linearnog numeričkog proračuna poklapaju se te neznatno odstupaju od eksperimentalnih rezultata za oba slučaja opterećenja (opterećenje u trećinama nosača – četverotočkasto savijanje i opterećenje u polovici nosača – trotočkasto savijanje). Ovo ukazuje na linearno ponašanje analiziranog grednog nosača L oblika.

Rezultati nelinearne numeričke analize odstupaju od rezultata ostalih proračuna za oba slučaja opterećenja (opterećenje u trećinama nosača – četverotočkasto savijanje i opterećenje u polovici nosača – trotočkasto savijanje). Iz linearnosti veze opterećenje – progib može se zaključiti da u trenutku loma još nije nastupila plastifikacija poprečnog presjeka odnosno da je nastupio krti lom. Naime, provedene analize su pokazale da za zadani nosač nelinearni proračun nije mjerodavan jer je do loma došlo u linearnom području.



## 7. LITERATURA

- [1] P. Marović, Ispitivanje konstrukcija, interna skripta – zapisi s predavanja, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Sveučilište u Splitu, Split, 2020.
- [2] M. Padovan, Usporedba modelskog i numeričkog ispitivanja montažnog elementa tribine sportske dvorane u Dugopolju, Diplomski rad, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Sveučilište u Splitu, Split, 2014.
- [3] <https://stormyboy.wixsite.com/marbelstil/lesonit> (datum pristupanja 4. lipnja 2021.)
- [4] Scia Engineer 2021, Nemetschek Scia nv, Copyright © 2021.
- [5] AutoCAD 2020, Autodesk nv, Copyright © 2021.