

# Pregled i primjena metoda operacionalne modalne analize u frekvencijskoj domeni

---

Pajan, Jurica; Duvnjak, Ivan; Ereiz, Suzana

*Source / Izvornik:* **Zajednički temelji 2023. - uniSTem : deseti skup mladih istraživača iz područja građevinarstva i srodnih tehničkih znanosti, Split, 14.-17. rujna, 2023. : zbornik radova, 2023, 108 - 113**

**Conference paper / Rad u zborniku**

*Publication status / Verzija rada:* **Published version / Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

<https://doi.org/10.31534/10.ZT.2023.07>

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:123:204173>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-13**



*Repository / Repozitorij:*

[FCEAG Repository - Repository of the Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy, University of Split](#)



UDRUGA  
HRVATSKIH  
GRAĐEVINSKIH  
FAKULTETA



<https://doi.org/10.31534/10.ZT.2023.07>

## PREGLED I PRIMJENA METODA OPERACIONALNE MODALNE ANALIZE U FREKVENCIJSKOJ DOMENI

Jurica Pajan<sup>1</sup>, Ivan Duvnjak<sup>2</sup>, Suzana Ereiz<sup>3</sup>

(1) Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet, Hrvatska, [jurica.pajan@grad.unizg.hr](mailto:jurica.pajan@grad.unizg.hr)

(2) Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet, Hrvatska, [ivan.duvnjak@grad.unizg.hr](mailto:ivan.duvnjak@grad.unizg.hr)

(3) Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet, Hrvatska, [suzana.ereiz@grad.unizg.hr](mailto:suzana.ereiz@grad.unizg.hr)

### Sažetak

Operacionalna modalna analiza (OMA), poznata i kao ambijentalna modalna analiza, svoj je razvoj započela 90-tih godina prošlog stoljeća. Za razliku od klasične eksperimentalne modalne analize, ne zahtijeva korištenje kontrolirane i mjerene pobude što ju čini praktičnom za korištenjem na velikim građevinskim konstrukcijama koje se zbog svoje veličine teško pobuđuju. Identifikacija modalnih parametara može se dobiti obradom prikupljenih zapisa mjerene veličine u frekvencijskom i vremenskom području, stoga se metode operacionalne modalne analize mogu podijeliti u te dvije kategorije.

U ovom radu bit će kratko opisane metode razvijene u frekvencijskom području, a razlike u određenim modalnim parametrima rasponske konstrukcije mosta bit će uspoređene za svaku od opisanih metoda.

*Ključne riječi: eksperimentalna modalna analiza, operaciona modalna analiza, dekompozicija frekventnog područja, most*

## REVIEW AND APPLICATION OF OPERATIONAL MODAL ANALYSIS METHODS IN THE FREQUENCY DOMAIN

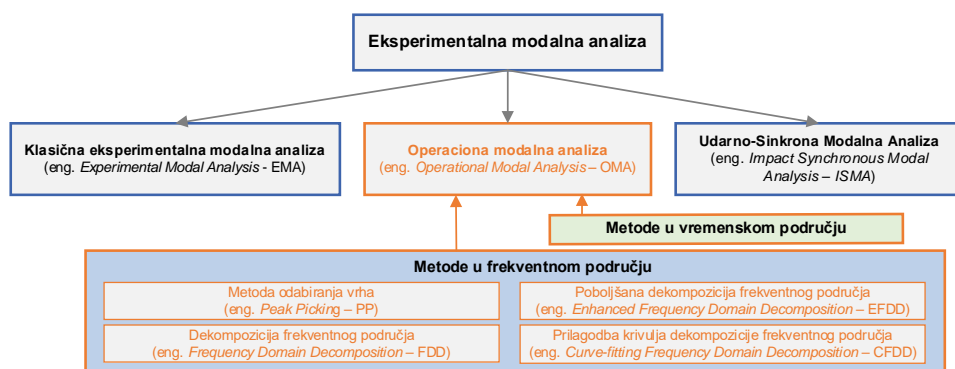
### Abstract

Operational modal analysis (OMA), also known as ambient modal analysis, started its development in the 1990s. Unlike classical experimental modal analysis, it does not require controlled and measured excitation, which makes it practical for use on large structures that are difficult to excite due to their size. Modal parameters can be identified by processing the collected records of the measured quantity in the frequency and time domains, therefore the methods of operational modal analysis can be divided into these two categories. In this paper, the methods developed in the frequency domain are briefly described, and the differences in modal parameters of a bridge superstructure are compared for each method.

*Keywords: experimental modal analysis, operational modal analysis, frequency domain decomposition, bridge*

## 1. Uvod

Modalna analiza, odnosno modalni proračun, nezaobilazan je alat za pouzdanu analizu dinamičkog ponašanja konstrukcija. Dinamičko ponašanje konstrukcije može se u potpunosti definirati s tri parametra - vlastita frekvencija, modalni oblici i prigušenje [1]. Navedeni parametri još se nazivaju modalnim parametrima, a primjenu nalaze u različitim područjima građevinarstva - od projektiranja (validacije projektirane konstrukcije [2], procjene djelovanja na konstrukciju [2, 3], kalibracije numeričkih modela [5]) do održavanja građevina (monitoring konstrukcija [5, 6]). Vlastite frekvencije i modalni oblici najčešće se određuju iz numeričkih modela konstrukcija, dok se koeficijenti prigušenja, u pravilu, određuju empirijski ili eksperimentalno. Eksperimentalno određivanje modalnih parametara konstrukcije koristeći proces korelacije dinamičkih karakteristika kroz matematički model baziran na fizikalnim svojstvima konstrukcije dobivenih iz eksperimentalnih mjerenja naziva se eksperimentalna modalna analiza.



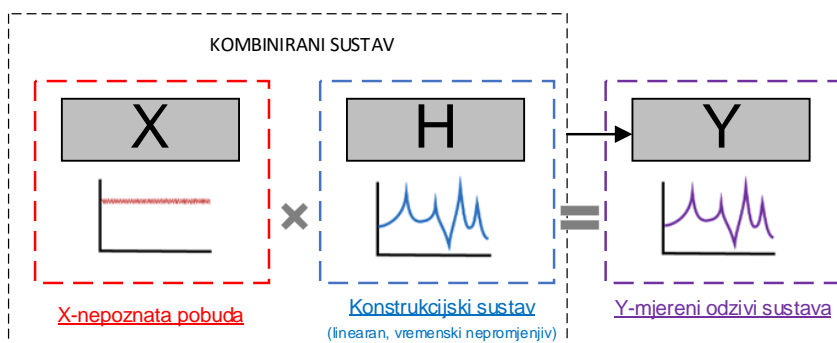
Slika 1. Metode eksperimentalne modalne analize

Operacionalna modalna analiza, kao tek jedna od metoda eksperimentalne modalne analize, ne zahtjeva poznavanje pobude što ju čini primjenjivom na građevinskim konstrukcijama. Ulazni podaci su mjereni zapisi odziva konstrukcije, a kao mjerena veličina najčešće se koriste zapisi akceleracije (mogu se koristiti i druge npr. brzine, sila...) Razvijene metode operacionalne modalne analize mogu se podijeliti ovisno o domeni u kojoj se vrši obrada podataka. Tako razlikujemo metode razvijene u frekvencijskom i vremenskom području (Slika 1). Metode razvijene u vremenskom području baziraju se na metodama stohastičke identifikacije podprostora (eng. *Stochastic Subspace Identification*, SSI), dok se metode u frekvencijskom području baziraju na dekompoziciji funkcije frekventnog odgovora. Metode u frekvencijskom području imaju nekoliko glavnih prednosti. Jedna od osnovnih je ta da je postupak analize brži i jednostavniji, a sam postupak je intuitivniji jer se pri analizi podataka koriste funkcije spektralne gustoće iz kojih se može jednostavnije razumjeti samo ponašanje konstrukcije tako da je moguća kontrola postupka u svakom koraku. Iz toga razloga u nastavku će se detaljnije obraditi samo metode za analizu podataka u frekvencijskoj domeni.

Razlike u određenim modalnim oblicima bit će prikazane na primjeru rasponske konstrukcije mosta.

## 2. Operacionalna modalna analiza

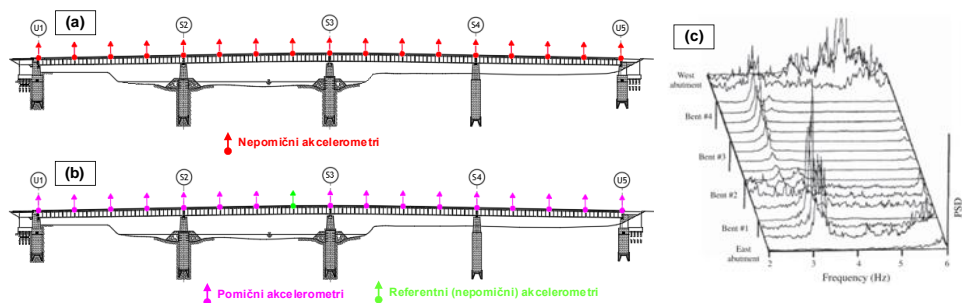
Osnovni princip operacionalne modalne analize polazi od pretpostavke da konstrukcija pobuđena širokim spektrom frekvencija filtrira nepoznatu ulaznu pobudu i u svom odgovoru dominantno oscilira pri frekvencijama koje odgovaraju njezinim vlastitim (rezonantnim). S obzirom na to da je pobuda konstrukcije nepoznata, mjereni odziv konstrukcije sadrži u sebi i karakteristike pobude – mjereni su odzivi kombiniranog sustava (konstrukcije i pobude, Slika 2.) Upravo iz tog razloga uvodi se niz pretpostavki o pobudi. Jedna od važnih pretpostavki o ulaznom signalu (pobudi) je ta da on ima karakteristiku bijelog šuma, odnosno da pobuđuje konstrukciju jednakim intenzitetom na svim frekvencijama (ravna linija u frekventnom spektru, Slika 2.) S praktičnog aspekta navedena pretpostavka opisuje pobudu koja jednakim intenzitetom pobuđuje sve modalne oblike. Prometna opterećenja, vjetar, valovi i seizmička mikro podrtavanja koja djeluju na konstrukciju prilikom redovitog korištenja (operativni uvjeti) imaju karakter sličan pretpostavljenoj pobudi bijelog šuma.



Slika 2. Shematski princip operacionalne modalne analize

Također, pretpostavlja se da je ponašanje konstrukcije linearno i vremenski nepromjenjivo [8]. Pod linearnim ponašanjem konstrukcije smatra se da je odgovor konstrukcije linearno ovisan o pobudi (linearno ponašanje) te da su modalni parametri nepromjenjivi u vremenu (za vrijeme mjerenja). Mjerenje odziva konstrukcije može se vršiti simultano (istovremeno na svim mjernim mjestima) ili na način da se senzori (akcelerometri) višestruko postavljaju na različitim mjestima na konstrukciji, no u tom slučaju potrebno je imati nekoliko fiksnih, odnosno referentnih mjesta (Slika 3.a i 3.b). Višestrukim postavljanjem možemo smanjiti broj potrebnih akcelerometara kod snimanja zapisa.

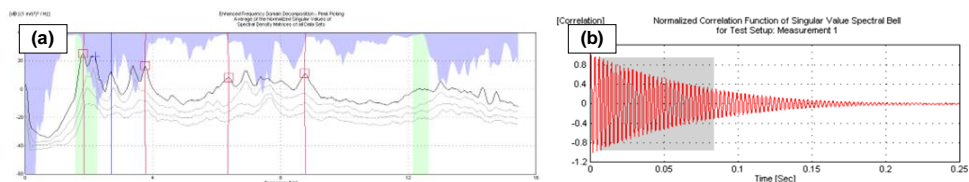
Zapisi se iz vremenske domene primjenom algoritma brze Fourierove transformacije (eng. *Fast Fourier Transform*, FFT) prebacuju u frekvencijsku domenu koristeći analizator za obradu signala. Kompleksni spektar frekvencija i funkcije spektralne gustoće snage direktan su rezultat brze Fourierove transformacije. Pikovi (vršne vrijednosti) prosječenih i normaliziranih vrijednosti spektralnih gustoća snage predstavljaju vlastite (rezonantne) frekvencije konstrukcije. Na slici 3.c. ilustriran je prikaz odabira vrhova iz zapisa spektralne gustoće snage dobivenih iz mjerenja provedenih na rasponskoj konstrukciji mosta (ukupno 5 raspona). Navedena metoda predstavlja najjednostavniji pristup u određivanju vlastitih frekvencija, a sama metoda naziva se metoda odabiranja vrha (eng. *Peak-Picking - PP*).



**Slika 3.** Položaj akcelerometara za operacionu modalnu analizu. (a) Istovremeno mjerenje na više mjernih mjesta, (b) Višestruko mjerenje akceleracije na različitim mjernim mjestima na konstrukciji, (c) Primjer metode odabiranja vrha (eng. *Peak – Picking method*) [9]

Kao nastavak na navedenu metodu razvijena je metoda dekompozicije frekventnog područja FDD (eng. *Frequency Domain Decomposition*). Metoda se temelji na dekompoziciji odziva konstrukcijskog sustava na niz neovisnih sustava s jednim stupnjem slobode. Teoretska podloga detaljno je raspisana u radu [10]. Prvi korak je odrediti matricu spektralnih gustoća snaga odziva konstrukcije. Članovi matrice dobivaju se prebacivanjem mjerenih vremenskih zapisa za svaki mjereni smjer i mjesto u frekvencijsku domenu, a svaki član matrice je funkcija spektralne gustoće snage (autospektralne i međuspektralne gustoće snage). Koristeći postupak dekompozicije singularnih vrijednosti SVD (eng. *Singular Value Decomposition*) matrice spektralnih gustoća snaga odziva pri nekoj diskretnoj frekvenciji  $\omega_i$ , dobivamo matricu koja sadrži singularne vektore te dijagonalnu matricu koja sadrži skalarnu singularne vrijednosti. U blizini vrha rezonancije singularni vektori su procjene modalnih oblika za pojedinu frekvenciju.

Nedostatak navedene metode je nepotpuna identifikacija modalnih parametara. Kako se za svaki određeni modalni oblik koristi samo diskretna frekvencija, nije moguće procijeniti prigušenja. Iz toga razloga razvijena je poboljšana metoda dekompozicije frekventnog područja, EFDD (eng. *Enhanced Frequency Domain Decomposition*), koja koristi singularne vrijednosti blizu vrha s pripadnim singularnim vektorom koji ima visoku vrijednost koeficijenta modalne ortogonalnosti (MAC faktora [11]). Autokorelacijska funkcija jednostupanjskog sistema se za pojedini modalni oblik, koristeći inverznu Furierovu transformaciju, prebacuje u vremensku domenu iz koje se određuju prigušenja i vlastite frekvencije korištenjem logaritamskog dekrementa.

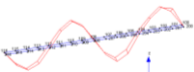
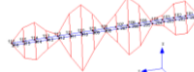
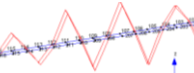
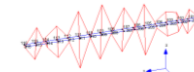


**Slika 4.** (a) Singularne vrijednosti matrice spektralnih gustoće snaga odziva, (b) vremenski zapis normalizirane funkcije korelacije (za određivanje prigušenja)

Osim navedene tehnike za određivanje modalnih parametara možemo koristiti i tehniku izjednačavanja krivulja pri dekompoziciji frekventnog područja CFDD (eng. *Curve-fitting Frequency Domain Decomposition*). Ova metoda nudi veću točnost kod određivanja vlastitih frekvencija i prigušenja u slučajevima pobude koja je čistog nasumičnog (stohastičkog) karaktera ili determinističkog karaktera. Modalni parametri određuju se koristeći izjednačavanje krivulja jednostupanjskog sustava u frekventnom području, a prigušenje se određuje iz oštine rezonantnog vrha [12]. Više o samoj metodi može se pronaći u radu [13].

U nastavku su prikazani rezultati operacionalne modalne analize (Tablica 1) provedene na rasponskoj konstrukciji mosta. Radi se o spregnutoj konstrukciji preko četiri raspona. Mjerna mjesta nalazila su se u četvrtinama raspona sa svake strane mosta (na nizvodnoj i uzvodnoj strani). Akceleracija je mjerena samo u vertikalnom smjeru piezoelektričnim akcelerometrima visoke osjetljivosti (>1000 mV/g). Raspored mjernih mjesta prikazan je na Slici 4.b. Ukupno su korištena četiri akcelerometra – jedan referentni i 3 pomična koja su se pomicala duž rasponske konstrukcije. Obrada podataka provedena je koristeći prethodno spomente metode operacionalne modalne analize - FDD, EFDD i CFDD.

**Tablica 1.** Rezultati operacione modalne analize na rasponskoj konstrukciji mosta

Oblik	Opis oblika	Vlastita frekvencija [Hz]				Prigušenje [%]	
		FDD	EFDD	CFDD	sr. vr.	maks. odstupanje	EFDD
	I. vertikalni	1,813	1,842	1,859	1,838	0,025	2,444
	I. torzijski	3,750	3,761	3,792	3,768	0,024	1,202
	II. vertikalni	6,313	6,336	6,320	6,323	0,013	1,618
	II. torzijski	8,750	8,77	8,760	8,76	0,010	1,002

### 3. Diskusija i zaključak

U prethodnim poglavljima ukratko su opisane neke od metoda za obradu podataka u frekvencijskoj domeni kod operacionalne modalne analize. Modalni parametri rasponske konstrukcije spregnutog mosta određeni su primjenom svake od spomenutih metoda. S obzirom na mjereni smjer akceleracije i položaj mjernih mjesta, ukupno su određena prva četiri modalna oblika – dva vertikalna i dva torzijska. Za analizu podataka korišteni su isti vremenski zapisi akceleracije, stoga dobivene razlike u vlastitim frekvencijama ovise isključivo o korištenoj metodi za obradu podataka. Maksimalne razlike u procijenjenim vrijednostima vlastitih frekvencija za svaki eksperimentalno određeni modalni oblik iznose od 0,010 do 0,025 Hz što je neznatno odstupanje. Dakle, može zaključiti da sve metode daju jednako dobru procjenu vlastitih frekvencija. Nedostatak FDD metode je što daje samo diskretnu vrijednost vlastite frekvencije, dok EFDD i CFDD metode daju i vrijednosti moguće greške u procjeni

vlastite frekvencije. Još jedan važan nedostatak FDD metode je nemogućnost procjene prigušenja konstrukcije. Iz toga razloga preporuka je korištenje svih navedenih metoda u cilju što pouzdanije procjene modalnih parametara. Naime EFDD i CFDD metode nastale su kao proširenje osnovne FDD metode. FDD se zbog svoje računalne efikasnosti može jednostavno koristiti za evaluaciju procijenjenih modalnih oblika na samom terenu prilikom provođenja mjerenja. Na taj način mogu se pravovremeno uočiti nedostaci u snimljenim zapisima te osigurati pouzdana identifikacija modalnih parametara.

## **Literatura**

- [1] Bin Zahid, F., Ong, Z. C., Khoo, S. Y.: A review of operational modal analysis techniques for in-service modal identification, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 42 (8), 2020, doi: 10.1007/s40430-020-02470-8.
- [2] EN 1990 Eurocode - Basis of structural design, European Committee for Standardization, 2011.
- [3] EN 1998 Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance - Part 1: General rules, seismic actions and rules for buildings, European Committee for Standardization, 2011.
- [4] Lopez Aenlle, M., Brincker, R., Fernandez, P., and Fernandez Canteli, A.: Load estimation from modal parameters, 2007.
- [5] Ereiz, S., Duvnjak, I., Jiménez-Alonso, F.: Review of finite element model updating methods for structural applications, *Structures*, 41, 2022, doi: 10.1016/j.istruc.2022.05.041.
- [6] Saidin, S. S., Jamadin, A., Abdul Kudus, S., Mohd Amin, N., Anuar, M. A.: An Overview: The Application of Vibration-Based Techniques in Bridge Structural Health Monitoring, *International Journal of Concrete Structures and Materials*, 6(1), 2022, doi: 10.1186/s40069-022-00557-1.
- [7] Nguyen, V. H., Mahowald, J., Maas, S., Golinval, J. C.: Use of time- and frequency-domain approaches for damage detection in civil engineering structures, *Shock and Vibration*, 2014, doi: 10.1155/2014/872492.
- [8] Andersen P.: ARTeMIS User Training Course. pp. 1 – 152, 2023.
- [9] Felber A. J.: Development of a hybrid bridge evaluation system, 1993.
- [10] Brincker, R., Zhang, L., Andersen, P.: Modal Identification from Ambient Responses using Frequency Domain Decomposition, 2000.
- [11] Pastor, M., Binda, M., Harčarik, T.: Modal Assurance Criterion, *Procedia Engineering*, 48, pp. 543–548, 2012, doi: 10.1016/j.proeng.2012.09.551.
- [12] Damjanović D.: Utjecaj temperature na dinamičke parametre građevinskih konstrukcija, 2010.
- [13] Jacobsen, N. J., Andersen, P., Brincker, R.: Applications of frequency domain curve-fitting in the EFDD technique, 2008.