

# Procjena rubnih uvjeta grede korištenjem metode najstrmijeg spusta

---

Kožar, Ivica; Plovanić, Marina; Sulovsky, Tea

*Source / Izvornik:* **Zajednički temelji 2023. - uniSTem : deseti skup mladih istraživača iz područja građevinarstva i srodnih tehničkih znanosti, Split, 14.-17. rujna, 2023. : zbornik radova, 2023, 136 - 139**

**Conference paper / Rad u zborniku**

*Publication status / Verzija rada:* **Published version / Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

<https://doi.org/10.31534/10.ZT.2023.15>

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:123:872769>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-10**



*Repository / Repozitorij:*

[FCEAG Repository - Repository of the Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy, University of Split](#)





UDRUGA  
HRVATSKIH  
GRAĐEVINSKIH  
FAKULTETA



<https://doi.org/10.31534/10.ZT.2023.15>

## PROCJENA RUBNIH UVJETA GREDE KORIŠTENJEM METODE NAJSTRMIJEG SPUSTA

Ivica Kožar<sup>1</sup>, Marina Plovanić<sup>1</sup>, Tea Sulovsky<sup>1</sup>

(1) Građevinski fakultet u Rijeci, Hrvatska, [marina.plovanic@gradri.uniri.hr](mailto:marina.plovanic@gradri.uniri.hr)

### Sažetak

Krajnji cilj istraživanja je procjena rubnih uvjeta staklenih ploča. U ovoj fazi istraživanja razvijen je model koji procjenjuje stupanj uklještenja grede. Model se zasniva na metodi najstrmijeg spusta što je pojednostavljenije Levenberg-Marquardt metode. Model je verificiran numeričkim rezultatima grede te su nepoznati rubni uvjeti uspješno određeni. Proširenje ovog postupka na ploče zahtijeva optimizaciju u višedimenzionalnom prostoru sa svim izazovima koje sa sobom nosi.

*Ključne riječi: procjena parametara, rubni uvjeti grede, laser Doppler vibrometar*

## ESTIMATION OF BOUNDARY CONDITIONS FOR A BEAM USING THE STEEPEST DESCENT METHOD

### Abstract

The main objective of the research is the assessment of the boundary conditions of the glass panel. At this stage of research, a model that estimates the degree of restraint of a beam has been developed. The model is based on the steepest descent method, which is a simplification of the Levenberg-Marquardt method. The model is verified against the numerical beam results and the unknown boundary conditions have been successfully determined. Extending the estimation procedure will require optimization in a multidimensional space, with all the challenges that entails.

*Keywords: parameter estimation, beam boundary conditions, laser Doppler vibrometer*

## 1. Uvod

U današnje doba staklene ploče se ugrađuju u okvire upotrebom polimera čime se rubni uvjeti staklene ploče nalaze negdje između slobodno oslonjenih i upetih. Usporedbom rezultata mjerenih pomaka i numeričkih modela moguće je procijeniti rubne uvjete sa zadovoljavajućom točnošću.

Kao prvi korak u procjeni rubnih uvjeta ploče prikazana je metoda procjene rubnih uvjeta grede s različitim stupnjevima upetosti ležajeva. Parametrizacija ležajnih uvjeta omogućava uspješnu primjenu tehnika numeričkih procjena kao što je metoda najstrijemijeg spusta. Predložena metoda verificirana je numeričkim primjerom.

### 1.1. Matematički model

Matematički model baziran je na diferencijalnoj jednačini grede 4. reda koja je diskretizirana. Rubni uvjeti predstavljeni su oprugama koje su integrirane u diskretiziranu matricnu jednačinu tako da krutost svake opruge leži u intervalu  $[0,1]$  gdje 0 predstavlja zglobovi ležaj, a 1 predstavlja upeti ležaj. U konačnici, matrica krutosti uključuje rubne uvjete. Posljedica ovakve formulacije je upotreba Lagrangeovih multiplikatora kako bi se uključili rubni uvjeti. Funkcija minimizacije je kombinacija izmjerenih i izračunatih podataka.

$$F(\kappa_l, \kappa_r) = \left| \frac{y_m \cdot y_r}{y_r \cdot y_r} - b \right|^a \quad (1)$$

Izraz (1) predstavlja funkciju minimizacije gdje su  $y_m$  izmjereni podaci,  $y_r$  su izračunati podaci,  $\kappa_l$  i  $\kappa_r$  su lijevi i desni rubni uvjeti grede. Parametri  $a$  i  $b$  odabrani su tako da minimizacijska funkcija ima izražen ekstrem. Vektor podataka koji se koristi u modelu ne sadrži Lagrangeove multiplikatore. Procjena parametara se zasniva na metodi najstrijemijeg spusta što je pojednostavljeno Levenberg-Marquardt metode [1].

$$\Delta \mathbf{m} \approx \frac{1}{\lambda} \nabla f(\mathbf{m}) \quad (2)$$

$$\nabla f(\mathbf{m}) = 2\mathbf{J}(\mathbf{m})^T \mathbf{F}(\mathbf{m}) \quad (3)$$

Izraz (2) predstavlja matematičku formulaciju gdje je  $\nabla f(\mathbf{m})$  definiran izrazom (3) te  $\mathbf{J}(\mathbf{m})$  je Jakobijana.

### 1.2. Prikupljanje eksperimentalnih podataka

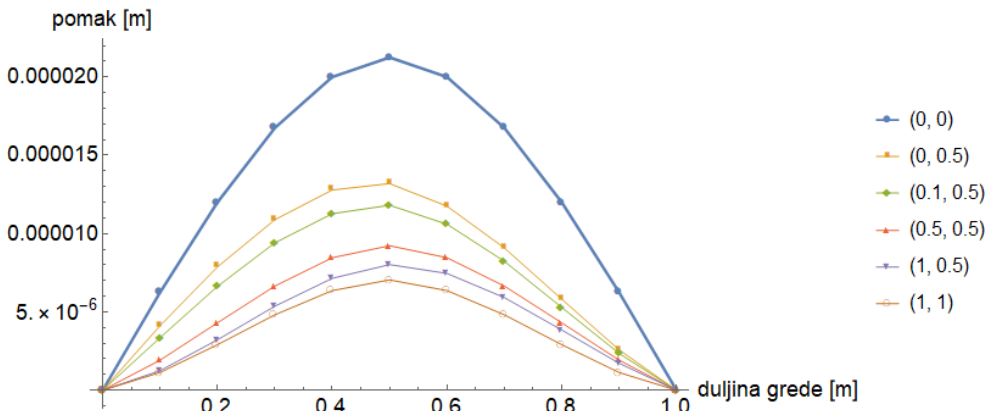
U ovoj fazi razvoja model je statički i eksperimentalni podaci koje zahtjeva su pomaci unutar konstrukcije, odnosno grede. Prikupljanje podataka vrši se pomoću laserskog Doppler vibrometra koji mjeri brzine koje je potrebno pretvoriti u pomake. Kako bismo zabilježili statičke pomake, potrebno je pratiti poziciju opterećenja, odnosno povećanje opterećenja dok ne dosegne konstantnu veličinu. Na Slici 1. prikazan je laserski uređaj korišten za prikupljanje eksperimentalnih podataka.



Slika 1. Laserski Doppler vibrometar

## 2. Verifikacija modela

Nepoznati rubni uvjeti dobiveni su inverznim modelom, odnosno modelom „prema nazad“. Ulazni podaci, odnosno svojstva grede, su:  $L=1$  m te  $EI=1000$   $\text{Nm}^2$ . Postupak dobivanja rubnih uvjeta sličan je postupcima [2] i [3].



Slika 2. Utjecaj promjene parametra uklještenja lijeve i desne strane na progib grede

Na Slici 2. prikazan je progib grede za različite parametre uklještenja, odnosno krutosti fiktivne opruge koja simulira uklještenje grede, lijeve i desne strane. Prvi broj unutar zagrade označava parametar uklještenja lijeve strane, dok drugi broj označava parametar uklještenja desne strane.

Verifikacija modela vrši se usporedbom rezultata procijenjenih parametara modela s numeričkim rezultatima modela „prema naprijed“. Osim opisane prilagođene metode najstrmijeg spusta primijenjene su metoda simuliranog žarenja i metoda nasumičnog traženja. Konvergencija rezultata ovisna o primijenjenoj metodi prikazana je u Tablici 1.

**Tablica 1.** Konvergencija rezultata ovisno o odabranoj metodi

Metoda	$K_l$	$K_r$
Simulirano žarenje	1,553	0,665
Nasumično traženje	0,963	1,038
Prilagođena metoda najstrmijeg spusta	1,000	1,000

Iz Tablice 1. vidljivo je da prilagođena metoda najstrmijeg spusta daje najbolje rezultate za određivanje rubnih uvjeta grede.

### 3. Zaključak

Prvi korak prema procjeni rubnih uvjeta ploče je procjena rubnih uvjeta grede. Rubni su uvjeti u modelu predstavljeni oprugama koje su integrirane u diskretiziranu matricnu jednadžbu. Za navedeni pojednostavljeni problem predstavljena je metoda koja uspješno procjenjuje različite rubne uvjete grede.

### Literatura

- [1] Kožar, I., Torić Malić, N.: Spectral method in realistic modelling of bridges under moving vehicles, *Engineering Structures* (50), pp 149 - 157, 2013, doi: 10.1016/j.engstruct.2012.10.024
- [2] Kožar, I., Torić Malić, N., Rukavina, T.: Inverse model for pullout determination of steel fibers, *Coupled Systems Mechanics* (7), pp 197 - 209, 2018, doi: 10.12989/csm.2018.7.2.197
- [3] Kožar, I., Rukavina, T., Torić Malić, N.: Similarity of structures based on matrix similarity, *Technical Gazette* (24), pp 239-246, 2017, doi: 10.17559/TV-20160208123402