

Numeričko modeliranje vremenski ovisnih deformacija betona pri 3D analizi konstrukcija

Džolan, Ante

Doctoral thesis / Disertacija

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:

University of Split, Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy / Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije

<https://doi.org/10.31534/DocT.049.DzolA>

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:123:885416>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-10**



Repository / Repozitorij:

[FCEAG Repository - Repository of the Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy, University of Split](#)



SVEUČILIŠTE U SPLITU

**FAKULTET GRAĐEVINARSTVA, ARHITEKTURE
I GEODEZIJE**

Ante Džolan, mag.ing.aedif.

**NUMERIČKO MODELIRANJE VREMENSKI
OVISNIH DEFORMACIJA BETONA PRI 3D
ANALIZI KONSTRUKCIJA**

D i s e r t a c i j a

Split, 2020.

Ante Džolan, mag.ing.aedif.

Redni broj: 049

**Ova disertacija predana je na ocjenu
Sveučilištu u Splitu,
Fakultetu građevinarstva, arhitekture i geodezije
u svrhu stjecanja akademskog stupnja
doktora tehničkih znanosti u
znanstvenom polju građevinarstvo**

Mentor: prof. dr. sc. Alen Harapin

Komentor: izv. prof. dr. sc. Mladen Kožul

Povjerenstvo za ocjenu:

prof. dr. sc. Mirela Galić

prof. dr. sc. Mladen Glibić

doc. dr. sc. Radoslav Markić

izv. prof. dr. sc. Armin Hadrović

izv. prof. dr. sc. Naida Ademović

Povjerenstvo za obranu:

prof. dr. sc. Mirela Galić _____

prof. dr. sc. Mladen Glibić _____

izv. prof. dr. sc. Neno Torić _____

izv. prof. dr. sc. Armin Hadrović _____

izv. prof. dr. sc. Naida Ademović _____

Rad je obranjen dana 17. siječnja 2020.

Tajnica:

Saša Delić, dipl. iur.

Rad sadrži:

126 stranica teksta

82 crteža

4 tablice

138 citiranih referenci

Posvećeno didovima Šimunu i Marku

Posebnu zahvalnost dugujem:

mentoru prof. dr. sc. Alenu Harapinu i komentoru izv. prof. dr. sc. Mladenu Kožulu za razumijevanje, podršku i pomoć pri izrade disertacije,

članovima povjerenstva za ocjenu i obranu rada prof. dr. sc. Mireli Galić, prof. dr. sc. Mladenu Glibiću, doc. dr. sc. Radoslavu Markiću, izv. prof. dr. sc. Neni Toriću, izv. prof. dr. sc. Arminu Hadroviću i izv. prof. dr. sc. Naidi Ademović na izdvojenom vremenu pri čitanju rada i korisnim sugestijama,

te obitelji, prijateljima i kolegama na podršci i toplim riječima ohrabrenja.

Ante Džolan, mag.ing.aedif.

Numeričko modeliranje vremenski ovisnih deformacija betona pri 3D analizi konstrukcija

Sažetak:

Beton je materijal čije je ponašanje izrazito nelinearno. Usporedno s tim, u betonu se javlja i niz sekundarnih efekata, kao što su starenje, skupljanje i puzanje betona, koji dodatno otežavaju realnu simulaciju armiranobetonskih i prenapetih konstrukcija. U moderno vrijeme, zbog sve smjelije gradnje, sve većih raspona i stremljenja u vis, potreba za realnom simulacijom ponašanja betonskih konstrukcija u uvjetima raznih vrsta opterećenja, postaje sve izraženija. S druge strane javlja se potreba za modelima koji s malim brojem realno uvjetovanih parametara mogu što vjernije opisati stvarno ponašanje betona. Jedan takav model uzet je kao osnova za ovaj rad, a to je prethodno razvijeni model, Precon 3D, koji se zasniva na malom broju parametara a dokazano može vrlo dobro opisati ponašanje betonskih, armiranobetonskih i prednapetih konstrukcija za kratkotrajna statička opterećenja. Kroz ovaj rad numerički model Precon 3D je nadograđen modelom za praćenje ponašanja betona tijekom vremena, tj. model je nadograđen modelom puzanja i skupljanja betona, što je neophodno za praćenje ponašanja prednapetih konstrukcija. Razvijeni software je testiran na više eksperimentalnih primjera iz literature, pri čemu je uočeno vrlo dobro podudaranje numeričkih i eksperimentalnih rezultata.

Ključne riječi: beton, dugotrajno statičko opterećenje, puzanje, skupljanje, numerički model

Ante Džolan, mag.ing.aedif.

Numerical modeling of time-dependent deformations of concrete at 3D analysis of structures

Abstract:

Concrete is a material with highly nonlinear behavior. In parallel, there are numerous secondary effects in concrete, such as aging, shrinkage, and creep, which further complicate the realistic simulation of reinforced concrete and prestressed concrete structures. In modern times, due to bolder construction, increasing spans and high rising construction, the need for realistic simulation of the behavior of concrete structures under conditions of various types of loads is becoming more pronounced. On the other hand, models with a small number of real-life parameters that can describe the actual behavior of concrete as accurately as possible are necessary. One such model, the previously developed model Precon 3D, which is based on a small number of parameters and can very well describe the behavior of concrete, reinforced concrete and prestressed structures for short-term static loads was taken as the basis for this work. Through this work, the numerical model Precon 3D has been upgraded with a model for following the behavior of concrete during time, i.e. the model has been upgraded with a model of creep and shrinkage of concrete, which is necessary for following the behavior of prestressed structures. The developed software has been tested against several experimental examples from the literature, with a very good match between numerical and experimental results.

Keywords: concrete, long-term static load, creep, shrinkage, numerical model

SADRŽAJ

1. UVOD	1
1.1. Općenito	1
1.2. Cilj rada.....	2
1.3. Kratak opis rada	4
2. MATERIJALNI MODELI BETONA.....	7
2.1. Općenito	7
2.2. 1D model ponašanja betona.....	10
2.3. 2D model ponašanja betona.....	11
2.4. Korišteni 3D model ponašanja betona.....	13
2.4.1. Materijalni model Precon 3D	14
2.4.2. Diskretizacija betonskog elementa metodom konačnih elemenata.....	19
3. MATERIJALNI MODEL ARMATURE	20
3.1. Općenito	20
3.2. Sila prednapinjanja.....	25
3.3. Gubici sile prednapinjanja	26
3.3.1. Gubitak sile prednapinjanja uslijed tranja.....	28
3.3.2. Gubitak sile prednapinjanja pri sidrenju kabela.....	30
3.3.3. Gubitak sile prednapinjanja zbog elastičnih deformacija betona.....	31
3.3.4. Gubitak sile prednapinjanja zbog relaksacije čelika	32
3.4. Numerički model klasične i prednapete armature	32
3.4.1. Matrice deformacija i krutosti elementa armature	35
3.4.2. Materijalni model armature.....	37

4. NUMERIČKI MODEL VREMENSKI OVISNOG PONAŠANJA BETONA.....	39
4.1. Općenito o problematici puzanja i skupljanja	39
4.2. Skupljanje betona.....	41
4.2.1. Općenito	41
4.2.2. Modeli skupljanja betona	44
4.3. Puzanje betona	45
4.3.1. Općenito	45
4.4. Ukupna dugotrajna deformacija betona.....	47
4.4.1. Koeficijent puzanja i funkcija puzanja.....	49
4.4.2. Načelo superpozicije	50
4.5. Utjecaj puzanja i skupljanja na gubitke sile prednapinjanja.....	51
4.6. Pregled modela puzanja betona iz literature	53
4.6.1. AASHTO LRFD 2010	54
4.6.2. ACI 209R–92	54
4.6.3. AS 3600.....	57
4.6.4. Puzanje betona prema EC–2	58
4.6.5. Fib Model Code 2010.....	61
4.7. Skupljanje betona prema Fib Model Code 2010	63
4.8. Numerički model puzanja betona	65
4.8.1. Prostorno stanje naprezanja i deformacija	66
4.8.2. Korekcija modula elastičnosti	69
4.9. Numerički model skupljanja betona	74
4.10. Korigirana matrica krutosti.....	76
4.11. Razvoj čvrstoće i modula elastičnosti betona tijekom vremena.....	77
5. PRIMJERI.....	78
5.1. Primjer 1.....	78

5.2.	Primjer 2.....	82
5.3.	Primjer 3.....	88
5.4.	Primjer 4.....	101
5.5.	Primjer 5.....	106
6.	ZAKLJUČCI I PRAVCI DALJNJIH ISTRAŽIVANJA.....	112
7.	LITERATURA	116

1. UVOD

1.1. Općenito

Početak korištenja „modernoga“ betona, onakvoga kakav danas poznajemo, može se uzeti prva polovica XIX stoljeća i otkriće Portland cementa [H.17, R.5]. Kroz skoro 200 godina korištenja, beton je izrastao u, danas, najkorišteniji građevinski materijal. Od samih početaka korištenja uočavane su prednosti i mane betona, te je cijeli „životni“ vijek predmet kontinuiranih znanstvenih istraživanja.

Već od samih početaka korištenja betona, inženjeri su uvidjeli kako je beton materijal s velikom tlačnom i malom, te vrlo nepouzdanom, vlačnom čvrstoćom. Kako bi se prevladao ovaj nedostatak, u beton je ugrađivana armatura koja bi trebala preuzeti vlačna naprezanja, što je dovelo do razvoja armiranog betona [H.4, H.15, H.17, R.5].

Iako je armiranjem riješen problem preuzimanja vlačnih naprezanja u armiranobetonskim konstrukcijama, vrlo brzo se pojavio problem trajnosti armiranobetonskih konstrukcija. Naime, u betonskim konstrukcijama se pojavljuju pukotine uzrokovane djelovanjem opterećenja, ali i pukotine uzrokovane prirodnom pojavom skupljanja cementne paste, kao i pukotine uzrokovane temperaturnim utjecajima. Pojava pukotina dovodi do korozije armature i propadanja armiranobetonskih konstrukcija, te je za potrebu osiguranja trajnosti i uporabljivosti armiranobetonskih konstrukcija neophodno kontrolirati njihovu širinu i razvoj.

Kako bi se kontrolirala širina i razvoj pukotina u betonu, pojavila se ideja da se vanjskim utjecajima u betonu izazovu tlačna naprezanja koja će se suprotstaviti vlačnim naprezanjima konstrukcije izazvanim vanjskim uporabnim silama. Na ovaj način razvijen je model prednapetog betona [R.5]. Prednapinjanjem betonskih konstrukcija, pojava pukotina u betonu može se u potpunosti eliminirati (potpuno prednapinjanje), bez obzira na veličinu vanjskih uporabnih sila. Ovim se omogućava korištenje manjih betonskih presjeka, čime se onda povećava ekonomičnost korištenja betona, dok velika potrošnja čelika za prednapinjanje može povećati ukupne troškove gradnje. Za razliku od potpunog prednapinjanja, kod djelomičnog prednapinjanja dozvoljava se pojava pukotine ograničene širine u području vlačnog naprezanja, za izuzetna opterećenja. Po prestanku djelovanja izuzetnog opterećenja, pukotina se u potpunosti zatvara. Djelomično prednapete konstrukcije, za razliku od potpuno prednapetih, imaju osobinu duktilnosti i apsorpcije energije unesene u konstrukciju. Ovo je posebno bitno kod konstrukcija koje se izvode u seizmički aktivnim područjima. Kod djelomično prednapetih konstrukcija troškovi ugradnje čelika za prednapinjanje znatno su manji nego kod potpuno prednapetih konstrukcija.

Uočljivo je kako armirani i prednapeti beton imaju svoje prednosti i mane. Za građenje armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija koriste se dva različita materijala, beton i čelik,

koji imaju karakter viskoznog ponašanja. Viskoznost uzrokuje pojavu deformacija, u armiranim i prednapetim konstrukcijama, koje nisu posljedica samo naprezanja izazvanih vanjskim opterećenjima, nego i drugih faktora vezanih za sam materijal i ambijent u kojem se konstrukcija nalazi tijekom eksploatacijskog perioda. Viskozne deformacije u betonu mogu se podijeliti na deformacije puzanja i skupljanja, dok je čelik, u slučaju konstantnih naprezanja, podložan tečenju. Za slučaj konstantne deformacije čelika tijekom vremena, u prednapetim kablovima dolazi do pada naprezanja, što je poznato kao relaksacija čelika. Isto vrijedi za beton. Pri trajnoj deformaciji betona tijekom vremenu, u betonu dolazi do pada naprezanja, što je poznato kao relaksacija betona.

Pored svega, armirani i prednapeti beton su kompozitni materijali dobiveni od betona i čelika, pri čemu je beton heterogen materijal čija svojstva nisu potpuno poznata i definirana. Za razliku od stvarnog heterogenog karaktera betona, ponašanje betona se analizira kao da je homogen i izotropan materijal. Osim što je heterogen materijal, beton je i izrazito nelinearan materijal s relativno malom vlačnom čvrstoćom u odnosu na tlačnu, što uzrokuje pojavu pukotina u betonu pri niskim razinama opterećenja. Pojava pukotina u betonu dovodi do anizotropije ili ortotropije u betonu, tako da je tretiranje betona kao izotropnog materijala opravdano samo za razine opterećenja do pojave pukotine. Pojave pukotina u vlačnom području betona glavni su uzrok nelinearnosti betona, ali pri graničnim tlačnim deformacijama i naprezanjima betona također dolazi do nelinearnosti betona izazvane tečenjem i drobljenjem betona. Ovako složeno ponašanje betona uzrok je nepostojanja nekog općeprihvaćenog modela ponašanja betona, tako da u literaturi postoji više različitih modela od kojih su neki navedeni u ovom radu. Kako su armirani i prednapeti beton kompozitni materijali, tako postoji problem njihove međusobne interakcije, te može doći do klizanja na spoju betona i čelika.

1.2. Cilj rada

Sve prethodno navedeno pokazuje složenost ponašanja armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija i razlog nepostojanja nekog općeprihvaćenog modela koji bi predviđao ponašanje armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija. Iz ove složenosti proizlazi potreba daljnjeg znanstvenog istraživanja armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija, iako se one u praksi koriste već skoro 200 godina.

Na Fakultetu građevinarstva, arhitekture i geodezije Sveučilišta u Splitu, u disertaciji [G.1] razvijen je numerički model Precon 3D za statičku, kratkotrajnu, analizu betonskih, armiranobetonskih i prednapetih betonskih konstrukcija kako bi se doprinijelo razumijevanju ponašanja betona. Razvijeni model koristi mali broj, lako dostupnih, ulaznih parametara

potrebnih za provođenje proračuna. U razvijenom modelu uspješno je opisano nelinearno ponašanje betona, kako u tlaku tako i u vlaku, za slučaj opterećivanja kratkotrajnim statičkim opterećenjem. Numerički rezultati dobiveni ovim modelom uspoređeni su s eksperimentalnima, te je dobiveno dobro slaganje rezultata. Dobiveni rezultati su opravdali potrebu daljnjega razvoja numeričkog modela Precon 3D. Stoga je cilj ovoga rada nadograditi numerički model Precon 3D kako bi bio u stanju simulirati dugotrajno ponašanje betona uzrokovano vremenski ovisnim deformacijama betona, puzanjem i skupljanjem, te pokazati kako je analiza betonskih, armiranobetonskih i prednapetih betonskih konstrukcija besmislena bez uzimanja u obzir ovih dugotrajnih deformacija betona.

Naime, puzanje i skupljanje betona dovest će do znatnog povećanja početne deformacije betona izazvane djelovanjem vanjskih uporabnih sila [B.4, E.1, G.5, R.3, S.5], što onda može izazvati preraspodjele naprezanja u konstrukcijama koje mogu ugroziti uporabljivost i stabilnost konstrukcija. Puzanje pored ambijentalnih uvjeta u kojima se konstrukcija nalazi ovisi i od trajnog uporabnog opterećenja te, kako je već rečeno, dovodi do povećanja početne deformacije betona izazvane djelovanjem vanjskih uporabnih sila koja bi tijekom vremena opadala u slučaju zanemarivanja puzanja [M.2]. Za razliku od puzanja, skupljanje betona ovisi od ambijentalnih uvjeta u kojima se konstrukcija nalazi ali ne i od trajnog uporabnog opterećenja. Skupljanje se može promatrati kao dio „naravi ponašanja“ betona, te kod „čistih“ betonskih konstrukcija neće izazvati promjene naprezanja u betonu [G.10, G.12, G.13]. Međutim, ako je beton ojačan armaturom, armatura će spriječiti razvoj skupljanja betona što će u betonu izazvati pojavu vlačnih naprezanja [G.9, G.10, G.12, G.13]. Ova naprezanja mogu doseći granicu vlačne čvrstoće betona prije nanošenja vanjskog uporabnog opterećenja, odnosno mogu dovesti do pojave pukotina u betonu prije opterećivanja konstrukcije [B.9]. Puzanje i skupljanje, skupa, dovode do gubitka sile prednapinjanja kod prednapetih betonskih konstrukcija. Kod predgotovljenih nosača mostova ovaj gubitak sile prednapinjanja iznosi oko 18 % [O.1]. Utjecaj vremenski ovisnih deformacija betona, puzanja i skupljanja, na ponašanje betonskih, armiranobetonskih i prednapetih betonskih konstrukcija ovdje je ukratko prikazan, dok je detaljnije dan u poglavlju 4. Ovim se htjela naglasiti važnost ovih deformacija za ponašanje betonskih, armiranobetonskih i prednapetih betonskih konstrukcija.

Kako bi razvijeni numerički model Precon 3D mogao simulirati ove utjecaje, nadograđen modelima puzanja i skupljanja prema Fib Model Codeu 2010 [F.1]. Model skupljanja ugrađen je u numerički model Precon 3D pomoću ekvivalentnog temperaturnog opterećenja, tj. termalne analogije, dok je model puzanja ugrađen pomoću korekcije modula elastičnosti betona u pravcu glavnih naprezanja.

Rezultati dobiveni nadograđenim numeričkim modelom Precon 3D dali su dobro slaganje s eksperimentalnima, te se može zaključiti kako je ispunjen cilj rada.

1.3. Kratak opis rada

Cilj ovoga rada bio je, dakle, razviti numerički model koji će pouzdano predviđati ponašanje armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija tijekom vremena. Vremenski ovisne deformacije betona su deformacija uslijed puzanja i deformacija uslijed skupljanja betona. Modeli ovih deformacija načelno se mogu podijeliti na mehaničke i empirijske modele, pri čemu nacionalni propisi pojedinih država koriste empirijske modele za predviđanje deformacija puzanja i skupljanja betona. U ovom radu korišten je jedan od općeprihvaćenih empirijskih modela kako bi se opisao razvoj deformacija puzanja i skupljanja betona tijekom vremena. Ove deformacije znatno utječu na ponašanje betona, čelika za armiranje i čelika za prednapinjanje, tako da je njihova analiza pri analizi ponašanja armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija neophodna.

Kao polazište za analizu ovih deformacija preuzet je numerički model Precon 3D, koji je razvijen u radu [G.1]. Numerički model Precon 3D predstavlja trodimenzionalni model za analizu armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija za slučaj statičkih opterećenja, te se u ovom radu pristupilo njegovom daljnjom razvoju kako bi bio u stanju analizirati ponašanje betona tijekom vremena, tj. predvidjeti utjecaj puzanja i skupljanja betona na ponašanje armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija. Numerički model Precon 3D uključuje sve bitne nelinearne osobine betona, armature i kablova za prednapinjanje. Numerički model je testiran na nizu primjera iz literature, pri čemu je dobivena dobra podudarnost rezultata. Ovakav model omogućava simulaciju većine mogućih oblika i načina deformiranja armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija u prostoru.

Rad je podijeljen u sedam poglavlja, čiji je sadržaj ukratko dan u nastavku.

Prvo poglavlje je uvodno i u njemu se daje povijesni prikaz razvoja betonskih, armirano betonskih i prednapetih konstrukcija. U ovom poglavlju su ukratko opisani problemi i nepoznanice pri stvarnom ponašanju betona, kao i pri numeričkoj simulaciji tog ponašanja. Naglašeni su razlozi potrebe istraživanja ponašanja betonskih, armirano betonskih i prednapetih konstrukcija, iako se one koriste u današnjem obliku već stotinjak godina. Kako je cilj ovoga rada razviti numerički model koji će pouzdano simulirati razvoj deformacija puzanja i skupljanja tijekom vremena, te njihov utjecaj na ponašanje armiranih i prednapetih konstrukcija, tako da je naglasak stavljen na ovu tematiku.

U drugom poglavlju dan je kratak kronološki razvoj numeričkih modela ponašanja betona, od jednodimenzionalnih preko dvodimenzionalnih, do trodimenzionalnih. Detaljnije je opisan trodimenzionalni model ponašanja betona razvijen u radu [G.1], a u ovom radu preuzet kao osnova za razvoj modela za vremensku simulaciju ponašanja beona. Razvijeni model predstavlja kombinaciju modificiranog Mohr–Coulombova materijalnog modela ponašanja betona u tlaku i modificiranog Rankinova materijalnog modela ponašanja betona u vlaku. Model simulira sve bitnije aspekte pojave nelinearnosti u betonu, otvaranje pukotina u vlaku, te tečenje i drobljene betona u tlaku. Pojava pukotina simulira se na razini Gauss točke, pri čemu je usvojen razmazani (*smeared*) model pukotina. Ovim modelom pukotina, u slučaju da su naprezanja u betonu, u nekoj Gauss točki, dosegla razinu vlačne čvrstoće betona dolazi do otvaranja, a pojava pukotine se simulira redukcijom modula elastičnosti u toj Gauss točki. Model može simulirati otvaranje tri ortogonalne pukotine u jednoj točki, pri čemu može doći do zatvaranja pukotine i njenog ponovnog otvaranja ovisno o stanju naprezanja i deformacija u Gauss točki.

U trećem poglavlju dan je model čelika za armiranje i prednapinjanje. U uvodnom dijelu ovog poglavlja dan je kratak opis problema koji se pojavljuju kod armirano betonskih konstrukcija, te potreba korištenja prednapinjanja. Potom su opisani način prednapinjanja, te nedostaci i mane prednapetih konstrukcija. Također, dan je prikaz gubitaka sile prednapinjanja. Opis klasične i prednapete armature dan je jednodimenzionalnim modelom, pri čemu je usvojen elasto–visokoplastični model ponašanja čelika. Pretpostavka je kako nema klizanja između betona i čelika, tj. radi se o idealnom (punom) spoju betona i čelika.

U četvrtom poglavlju naglasak je stavljen na problematiku puzanja i skupljanja betona. Uvodni dio poglavlja daje opis utjecaja puzanja i skupljanja na beton, klasičnu i prednapetu armaturu. Potom je dan opis empirijskih modela skupljanja iz više nacionalnih propisa, te empirijski model skupljanja prema Fib Model Code 2010 [F.1, M.2]. Za proračun deformacija puzanja i skupljanja, u ovom radu, usvojeni su modeli prema Fib Model Code 2010 [F.1, M.2]. Detaljno su opisani numerički modeli puzanja i skupljanja, pri čemu se model puzanja zasniva na korekciji modula elastičnosti s obzirom na veličinu koeficijenta puzanja. Naime, analizira se stanje naprezanja na razini svake Gauss točke i ukoliko je minimalno jedno glavno naprezanje tlačno ili vlačno manje od vlačne čvrstoće betona, za pravac tog glavnog naprezanja vrši se korekcija modula elastičnosti s obzirom na veličinu koeficijenta puzanja u promatranom trenutku. Za razliku od modela puzanja, model skupljanja zasniva se na ekvivalentnom čvornom temperaturnom opterećenju. Za promatrani trenutak i promatranu konstrukciju izračuna se veličina deformacije skupljanja prema Fib Model Code 2010 [F.1, M.2] betonske konstrukcije, zanemarujući utjecaj čelika za armiranje i prednapinjanje. Na temelju ovako dobivene

deformacije skupljanja izračunaju se temperaturne sile potrebne za njen razvoj, te se njima optereti stvarna konstrukcija, uzimajući u obzir čelik za armiranje i prednapinjanje. Ova temperaturna sila zadaje se u svim čvorovima konstrukcije i jednaka je po visini i širini poprečnog presjeka.

U petom poglavlju izvršena je verifikacija numeričkog modela kroz pet primjera. U prvom primjeru analizira se skupljanje više tipova betonskih zidova, čiji su rezultati dostupni u literaturi. Numeričkom simulacijom dobiveno je dobro slaganje numeričkih s eksperimentalnim rezultatima. Drugi primjer daje utjecaj skupljanja na ponašanje armirano betonskih konstrukcija. Za analizu je usvojena proizvoljna greda, proizvoljnih materijalno geometrijskih karakteristika i proizvoljnog stupnja armiranja. Rezultati dobiveni numeričkom analizom slažu se s teorijskim postavkama utjecaja skupljanja na ponašanje armirano betonskih konstrukcija. U trećem primjeru analizira se armirano betonska greda iz literature. U literaturi su dani eksperimentalni rezultati, koji uključuju utjecaj puzanja i skupljanja na ponašanje armirano betonskih konstrukcija. Numeričkom analizom dobiveno je dobro slaganje s eksperimentalnim rezultatima. U četvrtom primjeru analizirana je klasično armirana betonska ploča preuzeta iz literature. Rezultati eksperimentalnih ispitivanja prikazani su u literaturi, te su ovdje preuzeti kako bi se usporedili s numerički dobivenim rezultatima. Usporedbom rezultata vidljivo je njihovo dobro slaganje. Peti primjer daje usporedbu rezultata numeričke analize s eksperimentalnima, preuzetima iz literature, za slučaj prethodno prednapete betonske grede, čije je ponašanje analizirano tijekom vremena. Kao u prethodnim, i u ovom primjeru dobiveno je dobro slaganje numeričkih i eksperimentalnih rezultata.

U šestom poglavlju daju se zaključci i pravci daljnjih istraživanja. U zaključcima su prikazane prednosti i nedostaci nadograđenog numeričkog modela Precon 3D, te na temelju nedostataka preporuke za daljnji rad na usavršavanju modela.

U sedmom poglavlju dan je prikaz korištene literature.

2. MATERIJALNI MODELI BETONA

2.1. Općenito

Iz sastava betonske mješavine uočljiv je heterogeni karakter betona kao materijala, što za posljedicu ima anizotropno, kohezivno i kompleksno nelinearno ponašanje betona. Još prije samog opterećivanja betona, zbog temperaturnih djelovanja i procesa hidratacije, u betonu dolazi do pojave mikropukotina, koje u kombinaciji s vanjskim opterećenjima doprinose nelinearnom ponašanju betona. Kompleksnost opisivanja ponašanja betona proizlazi i iz činjenice da on pokazuje različito ponašanje u tlaku i vlaku. Naime, beton ima znatno veću tlačnu čvrstoću od vlačne. Istraživanja su pokazala kako beton gubi linearni karakter ponašanja pri naprezanjima znatno manjim od promatrane tlačne ili vlačne čvrstoće materijala. Isto tako, važno je spomenuti kako nelinearnost prije nastupa kod dugotrajnog nego kratkotrajnog opterećenja (opterećenja dugog odnosno kratkog nanosa na konstrukciju). Kod dugotrajnih opterećenja prve promjene u betonu, tj. pojava nelinearnosti, pojavljuju se već za naprezanja koja iznose 30 % promatrane tlačne ili vlačne čvrstoće betona [I.2]. Kratkotrajna naprezanja izazivaju pojavu nelinearnosti pri veličini 50 do 80 % odgovarajuće vlačne ili tlačne čvrstoće [I.2], dok neki izvori donju granicu uzimaju 45 % odgovarajuće čvrstoće [H.18]. U literaturi [J.1] kao granica linearnosti navodi se naprezanje koje iznosi 30 % tlačne čvrstoće za beton u tlaku, odnosno naprezanje koje iznosi 70 % vlačne čvrstoće za beton u vlaku. Pojava nelinearnosti pri ovim razinama opterećenja doprinosi postojanju ranije spomenutih mikropukotina. S opterećivanjem i njegovim daljnjim povećanjem postojeće pukotine se povećavaju i povezuju u glavnu (*major*) pukotinu, te se otvaraju nove pukotine. Pukotine su glavni uzrok pojave nelinearnosti u betonu, jer pri pojavi pukotine opada modul elastičnosti materijala u području pukotine. To dovodi do povećanja anizotropnosti betona. Zbog znatno manje vlačne čvrstoće betona zaključuje se kako beton brže popušta u vlaku nego tlaku, te kako za manja naprezanja gubi linearnost. Međutim, u tlačnom području je također izražena nelinearnost betona, osobito pri visokim naprezanjima kada se pojavljuje viskoplastično tečenje betona. Prema svemu navedenom može se zaključiti kako je nelinearnost armirano betonskih i prednapetih konstrukcija isključivo posljedica ili pucanja i pojave pukotina betona u vlaku ili tečenja i drobljenja betona u tlaku. Nelinearnost betona je posljedica i prokliznuća armature u odnosu na okolni beton pri graničnom stanju deformacija, zaglavljivanja agregata unutar pukotina i djelovanja armature kao trna u području pukotina [M.4]. Pri pojavi pukotine, u njenom području i dalje postoji određena nosivost zbog nehomogenosti betona, odnosno moguće pojave trenja na plohama pukotina. Nosivost se gubi tek kada je pukotina dovoljno široka da neće doći do trenja. Ranije spominjane mehaničke karakteristike betona (tlačna/vlačna čvrstoća, modul elastičnosti, i dr.) bitno ovise o starosti

betona, uvjeta okoliša u kojima se ugrađeni beton nalazi, kao i o načinu njege betona. Dobra njega betona bitno će povećati čvrstoću betona. Iz povijesnog prikaza razvoja betona vidi se kako se „primitivni“ beton koristio za gradnju tisuću godina prije našega vremena, te kako su objavljene prve publikacije o ponašanju betona prije skoro 100 godina; međutim, zbog naglašene kompleksnosti ponašanja, beton i danas predstavlja područje istraživanja i iznalaženja nekog općeprihvaćenog modela betona koji bi dobro simulirao kompleksni karakter njegovog ponašanja. Unatoč stogodišnjem korištenju modernog betona kao građevnog materijala, te stogodišnjem proučavanju ponašanja betona, još uvijek ne postoji neki općeprihvaćeni model ponašanja betona. U literaturi se može naći mnoštvo različitih predloženih modela, a ovdje će se prikazati 6 različitih tipova modela: (1) empirijski modeli, (2) linearno/nelinearno elastični modeli, (3) plastični modeli, (4) reološki modeli, (5) endohorni modeli i (6) modeli mehanike loma i oštećenja [B.1, B.2, G.3, G.11, J.1, K.3, M.4, R.1, S.7, S.10, Š.2].

Empirijski modeli zakon ponašanja materijala dobivaju se iz eksperimentalnih ispitivanja. Eksperimentalni podaci koriste se kako bi se predložila funkcija koja opisuje ponašanje materijala i pri tome zahtjeva poznavanje velikog broja ulaznih parametara. Nedostatak ovih modela je što nije lako doći do eksperimentalnih podataka, pa čak ni kada je riječ o jednoosnim ispitivanjima. Problem predstavlja dobivanje podataka o deformaciji pri omekšavanju betona. Ako postoji problem kod dobivanja podataka jednoosnih ispitivanjima, onda nema potrebe ni naglašavati težinu dobivanja istih podataka za višeosne modele. Jedan od razloga nepotpunih podataka pri deformaciji omekšavanja je pojava nekontroliranog loma pri dostizanju vršnog opterećenja. Za dobivanje spomenutih podataka potrebno je pribjeći korištenju preskupih tehnika.

Linearni/nelinearni elastični modeli predstavljaju skupinu najjednostavnijih modela. Linearno elastični modeli daju dosta točne rezultate, te opisuju ponašanje betona do dostizanja granične čvrstoće. Ovi modeli se koriste u praktičnim problemima analize konstrukcija u stanju eksploatacije. Veza naprezanja i deformacija se preklapa u fazi opterećenja i rasterećenja, tako da nema gubitka energije. Nelinearno elastični modeli, kao i linearno elastični, imaju potpuno povratnu deformaciju u fazi rasterećenja, s tim da ne postoji preklapanje veze naprezanja i deformacija u fazama opterećenja i rasterećenja što dovodi do gubitka energije. Veza naprezanja i deformacija može se jednostavno matematički opisati, a postoje sekantna i inkrementalna formulacija. Najveći nedostatak ovih modela je što ne opisuju ponašanje betona pri visokim razinama opterećenja.

Plastični modeli pojavu nelinearnosti u betonu smatraju kao posljedicu plastičnog popuštanja i pojave mikropukotina. Oblik početne plohe tečenja, zakon ojačanja i formulacija

odgovarajućeg zakona tečenja tri su osnovna parametra na kojima je utemeljena formulacija konstitutivnih veza bilo kojeg plastičnog modela. U plastičnim modelima ukupna deformacija se predstavlja kao zbroj elastične i plastične deformacije, gdje je elastična deformacija povratna dok je plastična deformacija nepovratna. Veza naprezanja i deformacija u elastičnom području predstavljena je Hookovim zakonom, dok je stanje naprezanja u plastičnom području određeno uvjetom plastičnosti. Ovi modeli dobro opisuju ponašanje u području deformacijskog ojačanja, dok se u području deformacijskog omekšavanja ponašanje ne može dobro opisati klasičnom teorijom plastičnosti.

Reološki modeli daju vremenski ovisne deformacije puzanja i skupljanja betona, koje također sadržavaju linearni i nelinearni dio. Dok je puzanje deformacija osim o vremenu ovisna i o opterećenju, to je skupljanje neovisno o bilo kakvom opterećenju.

Endohornu teoriju plastičnosti u troosne konstitutivne veze prvi je uveo Valanis [V.1], dok je Bažant [B.3] prvi koji je ovu teoriju primijenio na beton koristeći se konceptom intrinističkog vremena. Endohorni modeli mogu opisati neelastičnu volumnu dilataciju, rasterećenje, omekšavanje, osjetljivost hidrostatičkog pritiska i stezanje histerezne petlje pod cikličnim opterećenjem. Intrističko vrijeme se koristi kao mjera stupnja oštećenja betona pri općenitim oblicima deformiranja, a predstavlja skalarni parametar čiji je inkrement funkcija inkrementa deformacije. Glavni nedostatak ovih modela je veliki broj zahtijevanih ulaznih parametara, te iako daju dobre rezultate zbog kompleksnosti im je ograničena primjena.

Modeli mehanike loma i oštećenja zasnivaju se na konceptu nastanka i širenja mikropukotina, koje su postojale u betonu prije njegova opterećivanja. Ovi modeli često se koriste za opisivanje ponašanja betona u vlaku, a koriste se energetskim kriterijem i kriterijem čvrstoće kako bi opisali nastanak i širenje pukotina. Linearna mehanika loma i oštećenja je naročito korisna u određivanju početnih pukotina i njihova širenja, a sve to u primjeni diskretnog modela pukotina u metodi konačnih elemenata. Nelinearna mehanika loma i oštećenja daju uvid u stanje raspucanosti betona, uvodeći zonu pucanja kao zonu u kojoj je materijal podvrgnut deformacijskom omekšavanju. Deformacijsko omekšavanje je zapravo opadanje naprezanja u području pukotine, okomito na pukotinu, sa širenjem pukotine. Osnovna pretpostavka je kako se za lokalno oštećenje u materijalu može uzeti prosječno oštećenje prikazano u ovisnosti od varijabli oštećenja, koje su povezane s tangencijalnom krutosti materijala. Modeli ove kategorije mogu opisati razvoj oštećenja betona koji se pojavljuje na mikrorazini kroz varijable naprezanja i deformacija definirane na makro-razini.

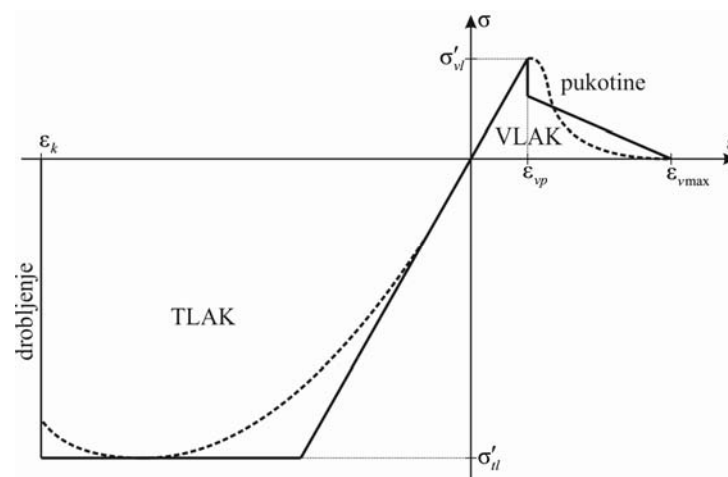
Na temelju prethodnog razmatranja može se uvidjeti kompleksnost opisivanja ponašanja armirano betonskih i prednapetih konstrukcija, tako da se pri opisivanju toga ponašanja treba

držati sljedećih pretpostavki, kako bi se dobili što jednostavniji modeli koji će davati zadovoljavajuće rezultate ponašanja materijala [K.3]:

- krutosti betona i armature/kablova računaju se odvojeno, a potom se zbrajaju kako bi se dobila ukupna krutost,
- usvaja se razmazani (*smearred*) model pukotina betona,
- pojava pukotina betona u više različitih pravaca predstavljena je sustavom ortogonalnih pukotina,
- dopušteno je otvaranje i zatvaranje pukotina pojedinog pravca kod promjenjivog i cikličnog opterećenja,
- pretpostavlja se kako armatura sudjeluje samo u preuzimanju aksijalnih sila i
- pretpostavka je kako nema klizanja armature u odnosu na okolni beton.

2.2. 1D model ponašanja betona

Već je spomenuta kompleksnost ponašanja betona, te se na osnovi te kompleksnosti može reći kako je matematički opis ponašanja betona, prateći pokuse materijala, praktično neizvodljiv. Prema tome svi modeli ponašanja betona daju ponašanje približno stvarnom ponašanju betona, odnosno daju rezultate ponašanja betona koji se bolje ili lošije podudaraju s eksperimentalnim rezultatima. Ovdje će se prikazati jednodimenzionalni model ponašanja materijala (crtež 2.1.) čiji je opis preuzet iz literature [M.4].



Crtež 2.1. Prikaz 1D modela betona u tlaku i vlaku [M.4]

Za ponašanje betona u tlaku dane su dvije numeričke formulacije odnosa naprezanja i deformacija: (1) elasto-plastična formulacija prikazana bilinearnim dijagramom (puna linija na crtežu 2.1.) i (2) nelinearno-očvršćavajuća formulacija prikazana poligonom ili kombinacijom

poligona i kvadratne odnosno kubne parabole (isprekidana linija na crtežu 2.1.). Zakon ponašanja materijala jednostavno je opisati do granice popuštanja, međutim nakon dostizanja granice popuštanja slijedi drugo područje, nazvano područjem popuštanja. Ovo područje se proteže između granice popuštanja i granice sloma, a definira ga se zakonom popuštanja. Lomna deformacija betona u tlaku (ε_k) približno se uzima u granicama od 0,003 do 0,005 (3‰ do 5‰).

Kao kod betona u tlaku, tako i kod betona u vlaku postoji mnoštvo različitih numeričkih modela kojima se nastoji opisati ponašanje betona. Ovdje se, kao karakteristični modeli, navode (1) jednostavni poligonalni model (puna linija na crtežu 2.1.) i (2) složeni model (isprekidana linija na crtežu 2.1.).

Bez obzira da li je riječ o modelu betona u tlaku ili vlaku, model se oblikuje uz pretpostavku odgovarajućeg (tlačnog ili vlačnog) naprezanja uzrokovanog mirnim, trenutno nanesenim opterećenjem koje slijedi nosivost promatranog sustava.

Ako se pogleda model prikazan punom linijom na crtežu 2.1., može se zamijetiti kako se beton u tlaku ponaša linearno sve dok naprezanja ne dosegnu tlačnu čvrstoću σ'_{tl} betona, potom dolazi do viskoplastičnog tečenja i naposljetku drobljenja betona pri dostizanju lomne granične deformacije ε_k .

U vlaku beton iskazuje linearni karakter ponašanja do trenutka u kome naprezanja betona dosegnu vrijednost vlačne σ'_{vl} čvrstoće betona, te tada dolazi do promjena u betonu, tj. pojave prve pukotine (crtež 2.1.–puna linija). Zbog promjene materijalnih karakteristika betona na mjestu pojave prve pukotine dolazi do trenutnog pada naprezanja. Međutim, zbog pojave trenja na plohama pukotine i mogućeg zaklinjenja zrna agregata u pukotini beton i dalje ima neku vlačnu čvrstoću, koja daljnjim širenjem pukotine linearno opada sve dok se pukotina u potpunosti ne otvori. Kada se pukotina u potpunosti otvorila, što odgovara deformaciji ε_{vmax} , beton nema više nikakvu vlačnu čvrstoću. Ovakvo ponašanje betona u vlaku, po dostizanju vlačne čvrstoće betona, naziva se vlačno omekšavanje betona.

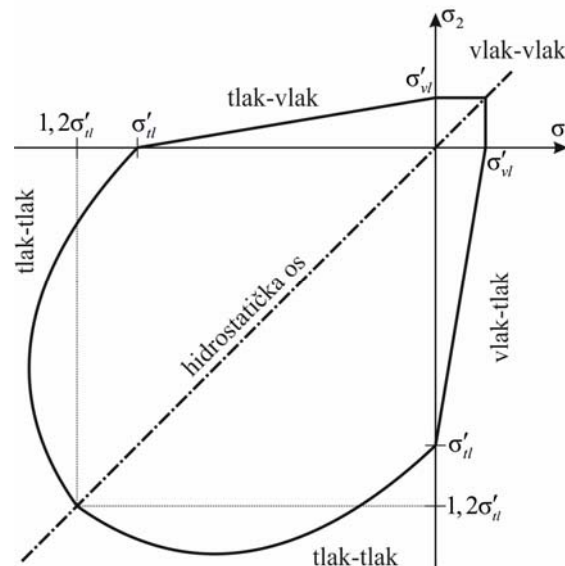
2.3. 2D model ponašanja betona

Dvodimenzionalni model ponašanja betona detaljno je opisan u literaturi [H.1, K.5, M.4]. Modeliranje zakona veze naprezanja i deformacija u nelinearnom području dvodimenzionalnog naponskog stanja tlak-tlak predstavlja složenu zadaću. Zakon ponašanja mora definirati slijedeća tri odnosa:

- uvjet popuštanja,
- zakon popuštanja i očvršćivanja i

- uvjet sloma.

Ovdje se neće detaljno opisivati prethodne tri stavke, ali se može reći da Kupferov model materijala definiše navedene uvjete i zakone na način da daje dobre rezultate ponašanja betona u odnosu na eksperimentalna istraživanja. Opis Kupferovog modela dan je u literaturi [K.5, M.4], a ovdje je dan samo njegov grafički prikaz na crtežu 2.2.



Crtež 2.2. Kupferov dvodimenzionalni model popuštanja i pojave pukotina u betonu [H.1, M.4]

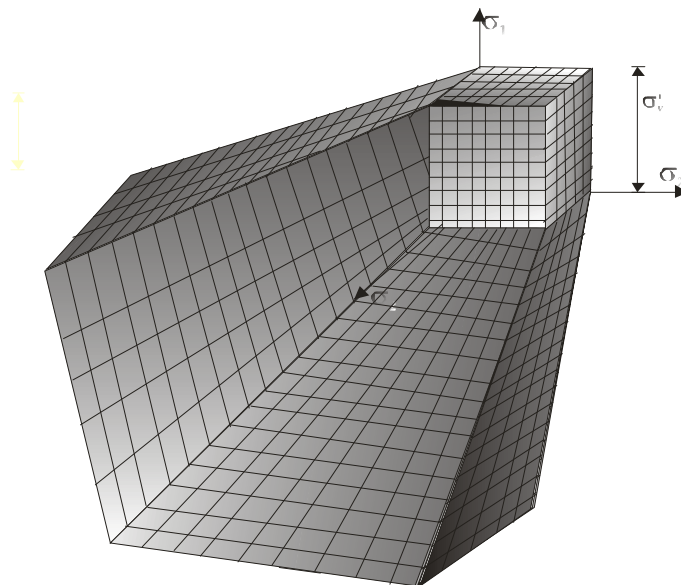
Kod promatranja betona u vlaknima presudni utjecaj na nelinearno ponašanje betona ima pojava pukotina. Provedena su brojna istraživanja kojima je praćena pojava i razvoj pukotina u betonu, te su na osnovi njih predloženi mnogi numerički modeli kojima se nastoji pratiti ponašanje betona po nastanku i daljnjem razvoju pukotina. Ovdje je, kao što je već rečeno, opisan Kupferov model materijala (crtež 2.2.). U slučaju kada je beton u području vlaknima, do pojave prve pukotine dolazi čim jedno od glavnih naprežanja (σ_1 ili σ_2) dosegne vlačnu čvrstoću betona σ'_{vl} . Ako se beton nalazi u području vlak-tlak za pojavu prve pukotine potrebno je ispuniti određene uvjete, opisane u literaturi [H.1, K.5, M.4].

Na crtežu 2.2. prikazana je hidrostatska os uzduž koje su glavna naprežanja jednaka ($\sigma_1 = \sigma_2$) i ona predstavlja os simetrije modela. U modelu vlačna naprežanja imaju pozitivan predznak, a tlačna negativan. S crteža 2.2. vidi se kako je maksimalno hidrostatsko naprežanje 20 % veće od tlačne čvrstoće promatranoga betona, što upućuje na pojavu očvršćivanja betona pri dvoosnom tlaku.

2.4. Korišteni 3D model ponašanja betona

Ovaj se rad bavi prostornim (3D) betonskim konstrukcijama, pa je za modeliranje ponašanja betona korišten prostorni (3D) model. Korišteni prostorni model zasniva se na kombinaciji modificiranog Mohr-Coulombova i modificiranog Rankinova zakona ponašanja materijala, koji je razvijen u literaturi [G.1, G.3], te je iskorišten kao polazišna osnova za ovaj rad. U nastavku će se dati samo kratki prikaz modela iz [G.1, G.3], neophodan za praćenje daljnje procedure.

Razvijeni model [G.1, G.3] načelno je ekstenzija ranije spomenutog dvodimenzionalnog Kupferov-og modela ponašanja betona. Kupferov model, u usporedbi s eksperimentalno dobivenim rezultatima ponašanja betona, davao je dobro slaganje rezultata, te se došlo na ideju da se njegovom „nadogradnjom“ razvije trodimenzionalni model ponašanja betona. Model razvijen u literaturi [G.1, G.3] (crtež 2.3.) dobiven je rotacijom Kupferove krivulje (crtež 2.2.) oko koordinatnih osi Haigh-Westergaardova prostora. U Haigh-Westergaardovom prostoru osi čine pravci glavnih naprezanja σ_1 , σ_2 i σ_3 [B.8]. Zbog matematičkih ograničenja definiranih Druckerovim postulatom [G.1] rotirane krivulje su zamijenjene tangentnim krivuljama, što je upućivalo na modificirani Mohr–Coulombov model predstavljen višeravninski.



Crtež 2.3. Grafička prezentacija korištenog materijalnog modela Precon 3D [G.1, G.3]

U ovako dobivenom modelu, nelinearno ponašanje betona opisano je modificiranim Mohr–Coulombovim materijalnim zakonom ponašanja za beton u tlaku, te modificiranim Rankinovim materijalnim zakonom ponašanja za beton u vlaku [G.1, G.3]. Razvijenim modelom (crtež 2.3.) omogućena je brza konvergencija matematičkog postupka, te opis nelinearnog, troosnog

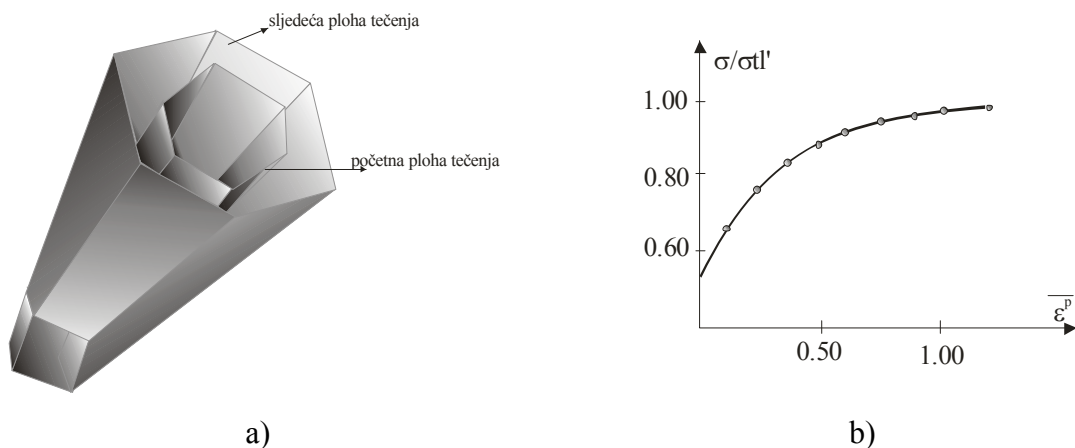
ponašanja betona sa svim dominantnim utjecajima u betonu, kao što su otvaranje pukotina u vlaklu, tečenje u tlaku, te omekšavanje i očvršćivanje betona.

2.4.1. Materijalni model Precon 3D

U ovom modelu korištena je višeravninska prezentacija koja opisuje šest ploha tečenja (crtež 2.4.–a) definiranih sljedećim izrazima, u ovisnosti od glavnih napreznja:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3) \cdot \sin \varphi - 2 \cdot c \cdot \cos \varphi, & \text{za } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3, \\
 f_2 &= (\sigma_2 - \sigma_3) + (\sigma_2 + \sigma_3) \cdot \sin \varphi - 2 \cdot c \cdot \cos \varphi, & \text{za } \sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3, \\
 f_3 &= (\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_2 + \sigma_1) \cdot \sin \varphi - 2 \cdot c \cdot \cos \varphi, & \text{za } \sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_1, \\
 f_4 &= (\sigma_3 - \sigma_1) + (\sigma_3 + \sigma_1) \cdot \sin \varphi - 2 \cdot c \cdot \cos \varphi, & \text{za } \sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1, \\
 f_5 &= (\sigma_3 - \sigma_2) + (\sigma_3 + \sigma_2) \cdot \sin \varphi - 2 \cdot c \cdot \cos \varphi, & \text{za } \sigma_3 > \sigma_1 > \sigma_2, \\
 f_6 &= (\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_2 + \sigma_1) \cdot \sin \varphi - 2 \cdot c \cdot \cos \varphi, & \text{za } \sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

U ovakvoj formulaciji ploha tečenja, matrica konzistentnosti se određuje za svaki sekstant zasebno. U izrazima (2.1) c je kohezija, a zapravo predstavlja funkciju ekvivalentnih akumuliranih plastičnih deformacija pri jednoosnom opitu. Ta funkcija dobije se matematičkom interpolacijom funkcije koja daje vezu plastičnih deformacija i jednoosnih tlačnih napreznja. Iz dostupnih eksperimentalnih rezultata dobije se veza prikazana crtežom 2.4.–b [H.11]. Tom funkcijom, u modelu Precon 3D [G.1], opisano je očvršćivanje betona.

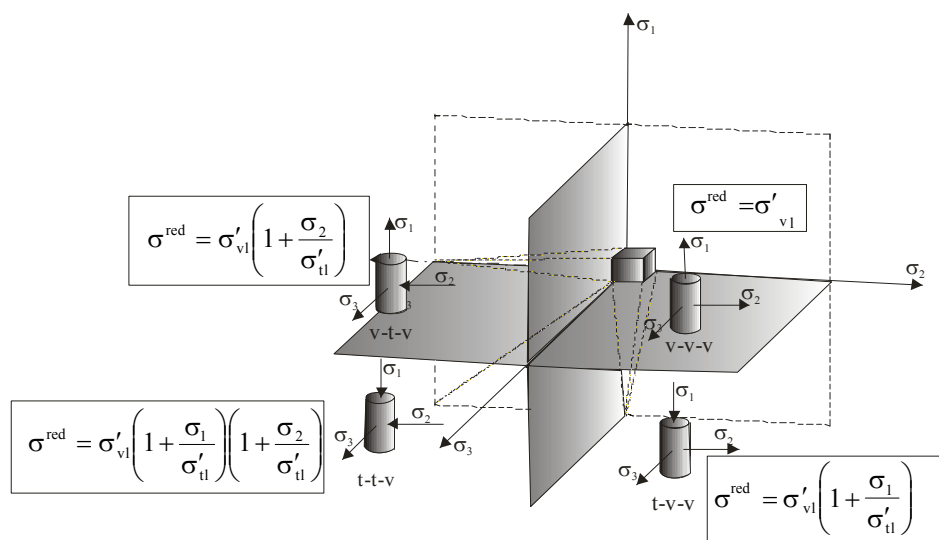


Crtež 2.4. Trodimenzionalni prikaz razvoja ploha tečenja definiranog pravilom očvršćivanja [G.1] (a), Odnos normiranog napreznja i plastičnih deformacija pri jednoosnom testu [G.1] (b)

Na crtežu 2.4.–b σ je napreznje u betonu u promatranom trenutku, σ_t' tlačna čvrstoća betona i $\overline{\epsilon^p}$ plastična deformacija pri jednoosnom testu. Koristeći funkcionalnu vezu između kohezije i jednoosnog normiranog tlačnog napreznja može se napisati [K.4]:

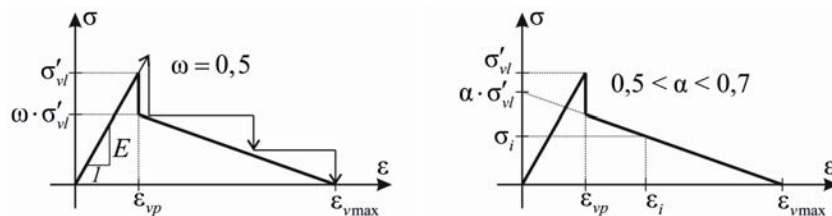
$$c = \frac{1 - \sin \varphi}{2 \cdot \cos \varphi} \cdot \sigma'_{tl} \quad (2.2)$$

Za opis ponašanja betona u području s dominantnim vlačnim napreznjima, u modelu Precon 3D [G.1], korišten je modificirani Rankineov materijalni zakon s definiranom ravninom koja predstavlja plohu loma. Modificirani Rankineov materijalni zakon ima jednostavnu matematičku interpretaciju, te je dokazano kako daje dobro slaganje rezultata s eksperimentalnima. Prema ovome zakonu, beton omekšava u vlak u kada je najmanje jedno glavno vlačno napreznje doseglo granicu vlačne čvrstoće betona σ'_{vl} . U području u kojemu se pojavljuju i tlačna napreznja (minimalno jedan glavni pravac ima vlačna napreznja, dok se u druga dva pravca mogu pojaviti tlačna napreznja), eksperimentalno je dokazano kako vlačna čvrstoća betona ovisi, također, od tlačne čvrstoće betona [C.1]. Shodno tome, u ovome području neophodno je reducirati veličinu vlačnih napreznja (crtež 2.5.). Na crtežu 2.5., σ^{red} reducirana vlačna čvrstoća betona, σ_i ($i = 1, 2, 3$) su glavna vlačna napreznja u promatranim pravcima i σ'_{tl} je tlačna čvrstoća betona. Ovaj model simulira pojavu fiksnih, međusobno ortogonalnih pukotina na razini Gauss točke (u jednoj Gauss točki mogu se pojaviti maksimalno tri pukotine), tj. položaj prve pukotine je stalan za iduće inkremente opterećenja, dok je položaj novih pukotina ortogonalan na položaj prve pukotine. Također, može doći do zatvaranja i ponovnog otvaranja jednom formirane pukotine. U modelu je usvojen razmazani model pukotina (*smearred cracking model*), koji pojavu pukotine simulira promjenom modula elastičnosti, tj. vlačnim omekšavanjem betona.



Crtež 2.5. Rezultirajuće ravnine pukotina [G.1] i veličine reduciranih vlačnih napreznja za svaku kombinaciju pojave napreznje (vlak(v)-vlak(v)-vlak(v); vlak(v)-tlak(t)-vlak(v); tlak(t)-tlak(t)-vlak(v) i tlak(t)-vlak(v)-vlak(v)) u području Gauss točke

Vlačno omekšavanje betona simulira se linearnim opadanjem vlačnih napreznja okomito na ravan pukotine. Ovo se ostvaruje promjenom modula elastičnosti tijekom opterećivanja (crtež 2.6.–lijevi crtež) i rasterećivanja (crtež 2.6.–desni crtež) raspucanog betona. Na crtežu 2.6. ω je empirijski koeficijent kojim je određeno vlačno omekšavanje, a ε_{vp} deformacija koja predstavlja granicu pojave vlačnih pukotina dok su ostale oznake objašnjene u nastavku teksta.



Crtež 2.6. Opterećenje i rasterećenje raspucanog betona s prikazom vlačnog omekšavanja [D.1, S.7]

Pretpostavlja se da je modul elastičnosti konstantan do dosezanja jednoosne vlačne čvrstoće betona. Nakon prekoračenja vlačne čvrstoće betona, modul elastičnosti slijedi linearni zakon držanja [D.1]:

$$E_i^* = \alpha \cdot \sigma'_{vl} \cdot \frac{1 - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{vmax}}}{\varepsilon_i} \quad (2.3)$$

Ovo vrijedi u svim slučajevima opterećenja, rasterećenja i ponovnog opterećenja raspucanog betona.

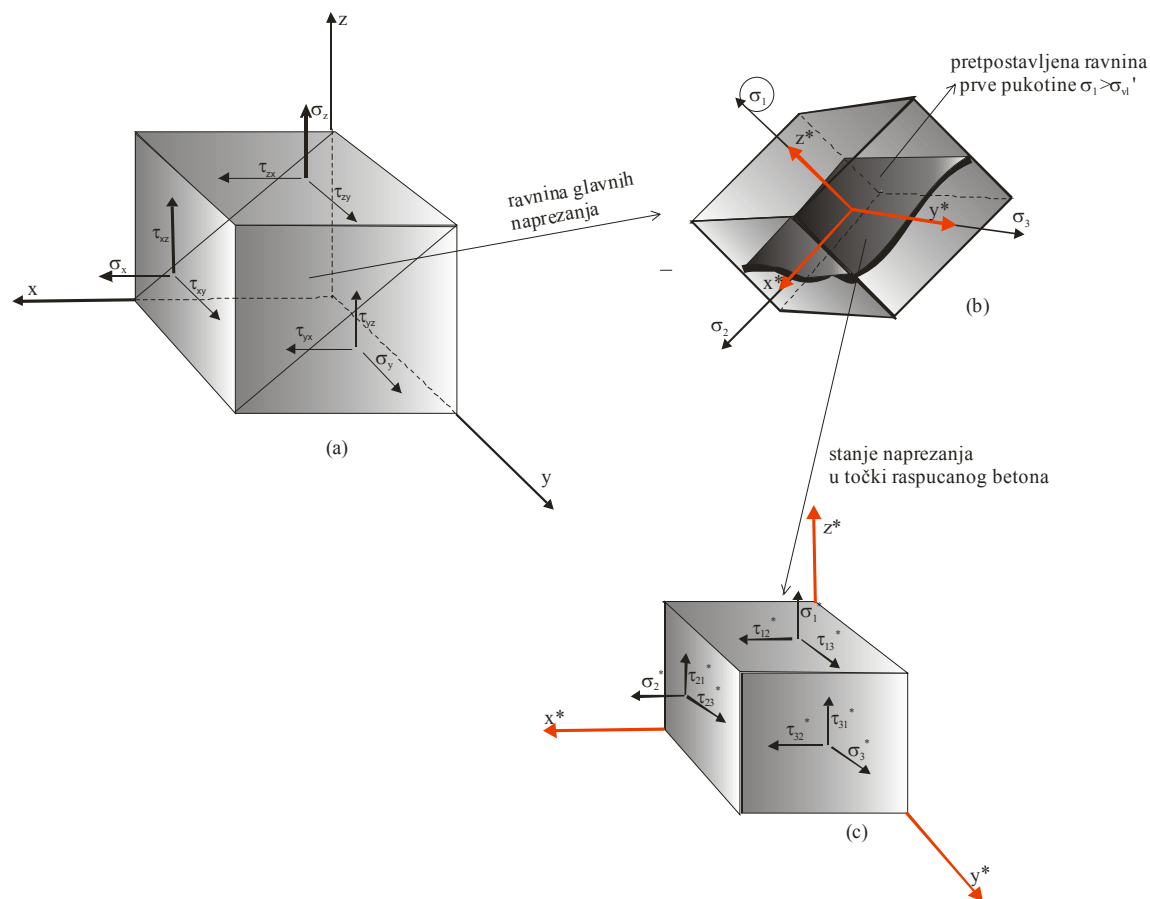
U gornjem izrazu α i ε_{vmax} su parametri kojima je određeno vlačno omekšavanje, a ε_i najveća dosegnuta deformacija u promatranoj Gaussovoj točki. U modelu dostignutu deformaciju ε_i je potrebno pamtiiti za svaku integracijsku točku i svaki smjer pukotine.

Normalno napreznje se izračunava iz sljedećeg izraza:

$$\sigma_1 = \alpha \cdot \sigma'_{vl} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{vmax}} \right) \quad (2.4)$$

Kako su promjene ponašanja s promjenama parametra α relativno malene preporučuje se upotrebe vrijednosti $\alpha = 0,6$ [D.1]. Ovaj parametar nema fizikalno značenje i određuje se eksperimentalnim putem. Za maksimalnu deformaciju nakon kojeg nema nikakve vlačne krutosti betona, obično se uzima vrijednost: $\varepsilon_{vmax} = 0,002$.

Pri modeliranju veze napreznja i deformacija omekšanog betona potrebno je prvo odrediti glavne osi ortotropije materijala. Osi ortotropije određuju nastale pukotine i glavna napreznja (crtež 2.7.).



Crtež 2.7. Stanje napreznja: (a) Početno napreznje u Cartesijevu koordinatnom sustavu; (b) Stanje glavnih napreznja, (c) Stanje napreznja u omekšanom betonu određeno u koordinatnom sustavu $x^*-y^*-z^*$ [G.1]

Pukotine se formiraju u ravnini okomitoj na glavna vlačna napreznja koja su veća od vlačne čvrstoće ili reducirane vlačne čvrstoće betona, ovisno u kojem području se proračunava napreznje. Konstitutivnu vezu prirasta napreznja i deformacija svakako treba prvo promotriti u tom koordinatnom sustavu [G.1].

Sada se konstitutivna veza stanja napreznja i deformacija preslikava u globalni kordinatni sustav. Nakon što je formirano stanje napreznja u globalnom koordinatnom sustavu (x - y - z), to stanje napreznje se preslikava u ravninu pukotine. U ravnini pukotine konstruira se novi koordinatni sustav $x^*-y^*-z^*$ u kojem se uspostavlja konstitutivna veza napreznja i deformacija. Treba napomenuti kako se, u trenutku nastajanja prve pukotine, taj lokalni koordinatni sustav i koordinatni sustav glavnih napreznja poklapaju (crtež 2.7.).

U lokalnom koordinatnom sustavu pukotine ($x^*-y^*-z^*$), veza napreznja i deformacija može se odrediti sljedećim izrazom:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{D}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (2.5)$$

gdje su: $\boldsymbol{\sigma}^* = [\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*, \tau_{12}^*, \tau_{13}^*, \tau_{23}^*]^T$ vektor naprezanja, a $\boldsymbol{\varepsilon}^* = [\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*, \gamma_{12}^*, \gamma_{13}^*, \gamma_{23}^*]^T$ vektor deformacija u lokalnom koordinatnom sustavu. \mathbf{D}^* je matrica omekšanog betona koja je pri pojavi jedne pukotine (npr. u smjeru 1) određena izrazom:

$$\mathbf{D}^* = \begin{pmatrix} \frac{E_1^*(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31}^* \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

a pri pojavi dvije pukotine (u smjerovima 1 i 2) postaje dijagonalna:

$$\mathbf{D}^* = \begin{pmatrix} \frac{E_1^*(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_2^*(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31}^* \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

gdje su E_1^* i E_2^* određeni izrazom (2.3), a reducirani moduli posmika G_{12}^* , G_{23}^* i G_{31}^* izrazom (2.8):

$$G^* = \eta \cdot G, \quad (2.8)$$

gdje je G početni modul posmika neraspucanog betona i η redukcijski koeficijent koji se može izračunati prema sljedećem izrazu:

$$\eta = 1 - \frac{\varepsilon_n^*}{\varepsilon_{\gamma \max}}, \quad \eta \in [0, 1] \quad \text{za } \varepsilon_n^* < \varepsilon_{\gamma \max}, \quad (2.9)$$

$$\eta = 0 \quad \text{za } \varepsilon_n^* > \varepsilon_{\gamma \max},$$

gdje je ε_n^* normalna vlačna deformacija prema smjeru pukotine u tekućem inkrementu, a $\varepsilon_{\gamma \max}$ maksimalna deformacija nakon koje je modul posmika jednak nuli, a ona se dobiva aproksimacijom iz izraza:

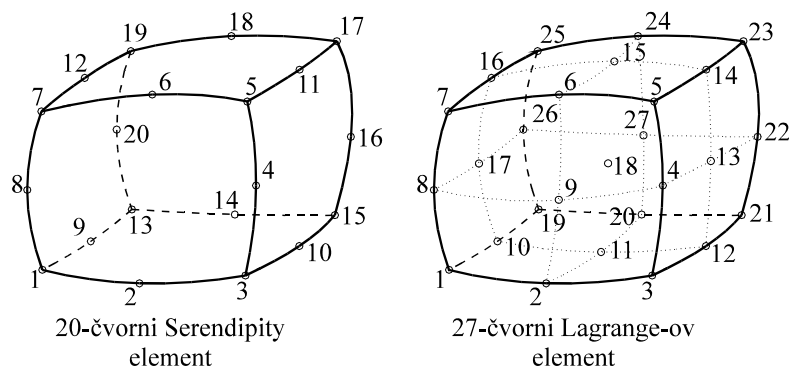
$$\varepsilon_{\gamma \max} = \gamma \cdot \varepsilon_{vp}. \quad (2.10)$$

Prema [D.2] γ je empirijski koeficijent i preporuča se u iznosu od 10 do 15, odnosno $\varepsilon_{\gamma \max} = 0,001 - 0,0025$.

Kada se pojave tri pukotine u jednoj Gauss točki potrebno je korigirati sva tri modula elastičnosti prema izrazu (2.3), te module posmika prema izrazu (2.8). Ako je deformacija u Gauss točkama prešla vrijednost zadane maksimalne deformacije $\varepsilon_{v \max}$, onda se uzima da je $\mathbf{D}^* = 0$, te da je došlo do sloma materijala.

2.4.2. Diskretizacija betonskog elementa metodom konačnih elemenata

Usvojeni model za diskretizaciju betonskog elementa koristi prostorne (*brick*) 20-čvorne Serendipity konačne elemente, ili 27-čvorne Lagrangeove konačne elemente (crtež 2.8.). Bazine funkcije koje koriste ovi konačni elementi, kao i način izračuna matrice krutosti dani su u raznim literaturama, npr. [J.5, Z.2, Z.3] i neće se ovdje obrazlagati.



Crtež 2.8. Prostorni (*brick*) konačni elementi [B.11]

3. MATERIJALNI MODEL ARMATURE

3.1. Općenito

Pojmom materijalni model armature obuhvaća se klasična i prednapeta armatura. U uvodnom poglavlju je rečeno kako je glavni nedostatak betona znatno manja vlačna čvrstoća u odnosu na tlačnu, što dovodi do gubitka nosivosti betonskih konstrukcija pri niskoj razini vlačnih naprezanja, koja su dostigla vrijednost vlačne čvrstoće betona.

Kako bi se povećala nosivosti betonskih konstrukcija pristupilo se njihovom ojačanju, odnosno armiranju betonskih presjeka. Međutim, kod armirano betonskih konstrukcija dolazi do otvaranja pukotine u vlačnoj zoni presjeka ukoliko su vlačna naprezanja dostigla vrijednost vlačne čvrstoće betona. Nakon pojave pukotina u betonu sva vlačna naprezanja preuzima armatura, te se u praktičnim analizama armirano betonskih konstrukcija vlačno područje betona u potpunosti isključuje iz presjeka, iako beton doprinosi prijenosu vlačnih naprezanja preko pukotina. Pukotine u vlačnom području betona su trajne, te je potrebno ograničiti njihovu širinu kako bi se osigurala trajnost i uporabljivost konstrukcije.

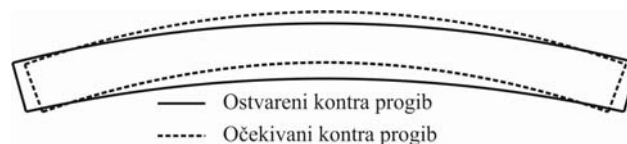
Odavno je poznat princip funkcioniranja kotača bicikla. Naime, žice kotača se prednapinju tako da u žici uvijek postoji vlačno naprezanje koje poništava tlačno naprezanje u žici pri korištenju bicikla. U slučaju nepostojanja ovog vlačnog naprezanja pri korištenju bicikla došlo bi do izvijanja žica uslijed pojave tlačnog naprezanja. Kako bi se ograničila širina pukotina u betonu, ili u potpunosti izbjegla njena pojava, ideja prednapinjanja se javlja i kod armirano betonskih konstrukcija. Ideja je da se vanjskim utjecajima u betonu javi takva tlačna naprezanja koja će se suprotstaviti vlačnim naprezanjima konstrukcije izazvanim djelovanjem vanjskog uporabnog opterećenja. Baš kao što je učinjeno kod kotača bicikla prednapinjanjem žice kotača. Ovim bi se postiglo da čitav betonski presjek sudjeluje u preuzimanju naprezanja izazvanih vanjskim opterećenjem, što bi omogućilo upotrebu presjeka manjih dimenzija u odnosu na klasično armirane betonske presjeke.

Princip prednapetog betona izložio je W. Doehring još 1888. god., međutim njegova ideja doživjela je neuspjeh zbog slabe kvalitete betona. God. 1886. P. H. Jackson patentirao je primjenu prednapetih zatega koje se sidre vijcima ili klinovima. M. Koenen (1906. god.) oživljava ideju prednapinjanja, koja nije doživjela uspjeh jer je prednapinjanje čelika, zbog niske čvrstoće, iznosilo samo 60 MPa. Ta veličina prednapinjanja nije bila zadovoljavajuća jer su početna naprezanja čelika poništena vremenskim deformacijama betona (puzanjem i skupljanjem). U vremenskom periodu između 1906. i 1928. god. u SAD-u i Europi bilo je više neuspjelih pokušaja patentiranja ideje prednapinjanja. Te ideje su uglavnom napuštene zbog gubitka sile prednapinjanja, a sve to zbog nepoznavanja efekta puzanja i skupljanja betona.

Naime, uslijed skupljanja i puzanja betona u betonu se pojavljuju deformacije, prije opterećivanja konstrukcije, koje su neutralizirale početnu silu prednapinjanja. Kao početak uspješnog korištenja prednapinjanja može se uzeti 1928. god. kada je francuski inženjer E. Freyssinet uspio izvesti iskoristivu prednapetu konstrukciju. Iz ovoga kratkoga povijesnoga prikaza uočljivo je kako su pokušaji prednapinjanja uglavnom propadali zbog upotrebe betona i čelika niske kvalitete. Uspjeh E. Freyssineta upravo leži u činjenici da je on shvatio važnost upotrebe betona i čelika visoke kvalitete. Važnost korištenja betona i čelika visokih kvaliteta neophodna je jer se oba materijala iskorištavaju do vrlo visokih stupnjeva [L.1, T.2].

Primjena ovakvih materijala omogućuje izvedbu elemenata manjih poprečnih presjeka, te time ima značajan utjecaj na ekonomičnost građenja. Kod prednapinjanja tlačna čvrstoća betona je bitna jer u preuzimanju naprezanja izazvanih vanjskim djelovanjima sudjeluje gotovo cijeli betonski presjek, iz čega proizlazi mogućnost korištenja presjeka manjih dimenzija. Iz povijesnog pregleda uočava se kako su pokušaji prednapinjanja često padali jer su početna tlačna naprezanja poništavana zbog puzanja i skupljanja betona. Važnost korištenja betona visokih čvrstoća proizlazi i iz te činjenice kako betoni viših tlačnih čvrstoća imaju manje deformacije puzanja i skupljanja, što onda dovodi do manjih gubitaka sile prednapinjanja.

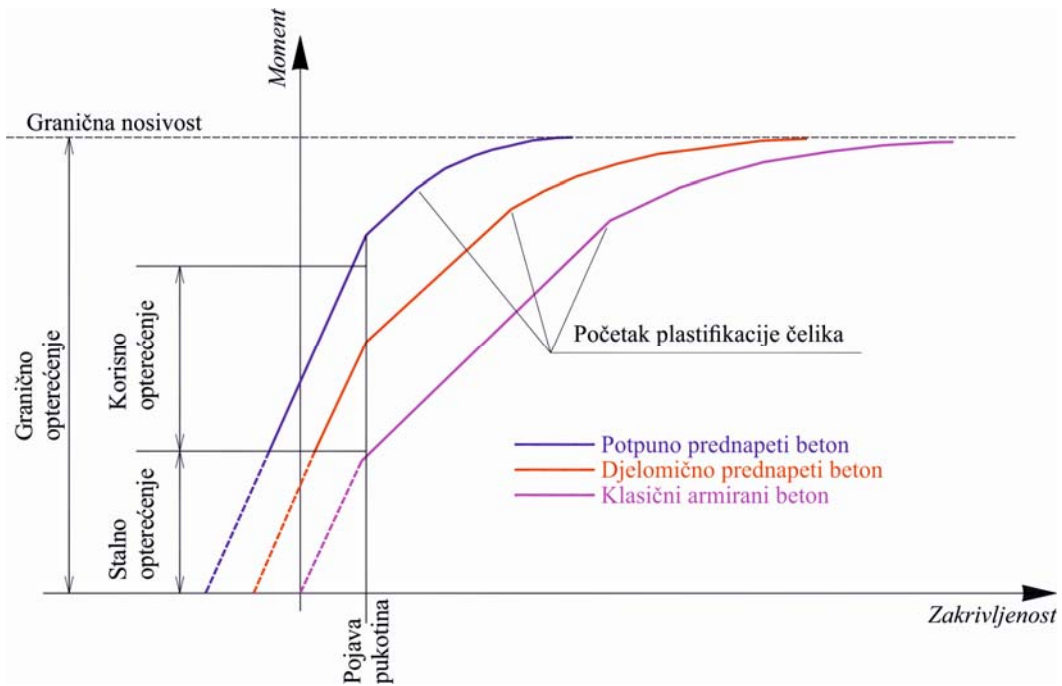
S obzirom na odnos klasične armature i prednapetih kablova unutar betonskog presjeka prednapinjanje se može podijeliti na potpuno i djelomično. Odabir tipa prednapinjanja ovisi kako o ekonomičnosti građenja tako i o tipu konstrukcije, te uvjetima korištenja konstrukcije i odnosu stalnog i korisnog opterećenja. Kod potpunog prednapinjanja u cijelom betonskom presjeku djeluje tlačno naprezanje za konačno opterećenje (stalno + korisno). Prema tome, kod potpuno prednapetih konstrukcija isključuje se mogućnost pojave pukotina u betonskom presjeku za konačno opterećenje. Glavni nedostaci ovog tipa prednapinjanja su: (1) povećavanje progiba tijekom vremena, (2) velika potrošnja čelika za prednapinjanje što dovodi do velikih troškova građenja, (3) nepotrebno velika sigurnost konstrukcije i (4) pojava nepredviđenih pukotina. Potpunim prednapinjanjem može se izazvati pojava pukotina u gornjoj zoni betonskog presjeka znatno iznad neutralne osi presjeka, prije samog opterećivanja konstrukcije. Zatvaranje ovih pukotina može izazvati smanjenje tlačnih naprezanja na donjem rubu presjeka što dovodi do smanjenja efekta kontra progiba u nosačima mostova izloženih masovnoj pojavi ovih prethodnih pukotina [W.1] (crtež 3.1.).



Crtež 3.1. Utjecaj otvaranja prethodnih pukotina na veličinu elastičnog kontra progiba [W.1]

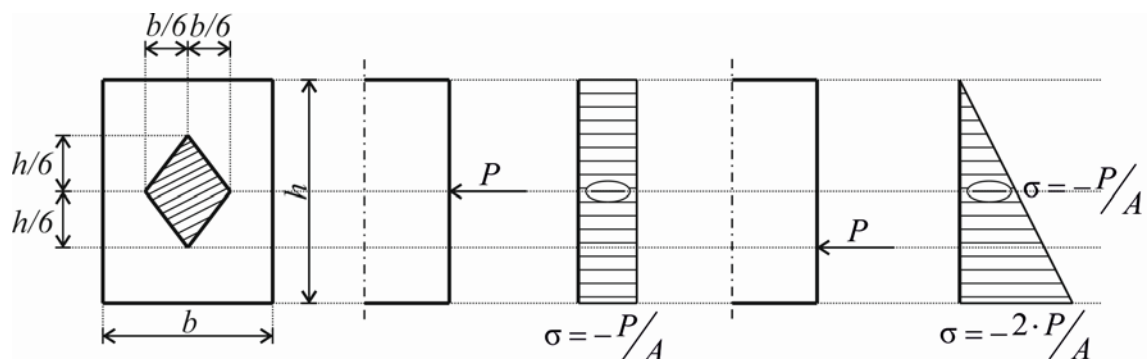
Za računanje ovih kontra progiba postoji više različitih metoda. Jedna od najčešće korištenih analitičkih metoda za računanje elastičnih kontra progiba kod jednostavnih elemenata opterećenih na savijanje je metoda momentne površine [H.7]. Ova metoda daje polu-grafički način određivanja nagiba elastične linije i njoj odgovarajućeg progiba grede uslijed savijanja. Kako bi se izbjeglo ručno računanje progiba [P.2] daje tablične izraze za računanje progiba, primjenjive kod sedam najčešćih slučajeva prednapinjanja. Za proračun progiba kod kompleksnih sustava jedna od najčešće korištenih je energetska metoda [B.10], koja je izuzetno kompleksna te nije praktična za projektante. Njome se mogu računati progibi koji se obično zanemaruju kod drugih metoda. U literaturi postoje mnoge druge metode, kako za računanje kontra progiba, tako i za računanje dugotrajnih progiba konstrukcije. Potencijalni štetni kontra progibi mogu se smanjiti dodavanjem armaturnih šipki i prednapetih kablova u gornju zonu betonskog presjeka. Dodavanje 5 ϕ 9 dovodi do smanjenja dugotrajnih kontra progiba za 17 %, dok se dodavanjem dviju prednapetih žica kontra progib umanjuje za 35 %, odnosno 70 % postavljanjem 4 prednapete žice u gornju zonu [J.2].

Prethodno je bilo govora o potpunom prednapinjanju, ali vremenom se došlo do spoznaje kako je za uporabljivost konstrukcija mjerodavno stalno opterećenje. Pukotine izazvane djelovanjem pokretnog opterećenja ponovno se zatvaraju bez štetnih utjecaja po konstrukciju. Sve ovo doprinosi favoriziranju korištenja djelomičnog prednapinjanja. Kod djelomičnog prednapinjanja dozvoljava se pojava pukotine ograničene širine, u vlačnom području betonskog presjeka, uslijed djelovanja stalnog i pokretnog opterećenja. Nakon prestanka djelovanja pokretnog opterećenja pukotina se zatvara, te konstrukcija i dalje ima zadovoljavajuću sigurnost od korozije i drugih štetnih djelovanja [A.6, H.10, K.1, L.1, T.2]. U odnosu na potpuno prednapete konstrukcije, djelomično napete konstrukcije imaju osobinu duktilnosti i apsorpcije energije (što je posebno značajno za građenje u seizmički aktivnim područjima), te mogućnost bolje kontrole deformacija. Za razliku od klasičnih armirano betonskih konstrukcija djelomično prednapete konstrukcije izložene su manjim deformacijama, te su širine pukotina manje. Kod klasičnih armirano betonskih konstrukcija pukotine će se pojaviti pod djelovanjem stalnog opterećenja, kod potpuno prednapetih konstrukcija pukotine će se pojaviti samo u slučaju nepredviđenih opterećenja, dok se kod djelomično prednapetih konstrukcija pukotine pojavljuju između prethodna dva slučaja (crtež 3.2.).



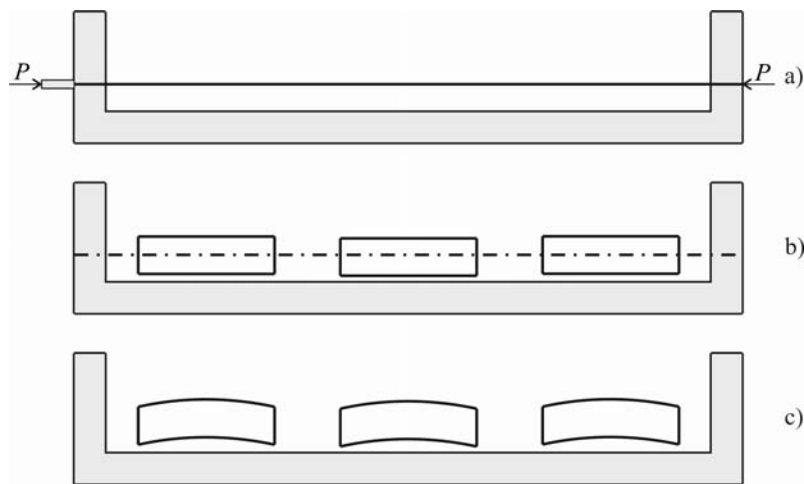
Crtež 3.2. Usporedba ponašanja klasičnih armirano betonskih, djelomično prednapetih i potpuno prednapetih konstrukcija [T.2]

Prilikom prednapinjanja betonskih elemenata potrebno je voditi računa da se sila prednapinjanja unosi u jezgri presjeka. U slučaju unosa sile prednapinjanja izvan jezgre presjeka u presjeku bi se pojavila naprezanja različitih predznaka. Kod pravokutnih poprečnih presjeka jezgra presjeka udaljena je od težišta presjeka za $\frac{1}{6}$ visine presjeka prema gore i dolje, te $\frac{1}{6}$ širine presjeka prema desno i lijevo (crtež 3.3). Poznato je ako se uzdužna sila prednapinjanja zada u težištu presjeka tlačna naprezanja će biti ista po visini presjeka. Kod ekscentričnog zadavanja sile prednapinjanja po visini presjeka će se pojaviti tlačna naprezanja ali različitih veličina. Kada je uzdužna sila prednapinjanja zadana na donjem rubu jezgre presjeka na donjem rubu poprečnog presjeka pojavit će se tlačno naprezanje duplo veće od tlačnog naprezanja u težištu presjeka, dok će naprezanje gornjeg ruba presjeka biti jednako nuli.



Crtež 3.3. Jezgra presjeka kod pravokutnih presjeka [H.16]

Pri promatranju prednapetih konstrukcija u odnosu na vrijeme prednapinjanja razlikuju se prethodno (adhezijsko) i naknadno (nakon stvrdnjavanja betona) prednapinjanje. Prethodno prednapinjanje se izvodi na stazi, gdje se najprije izvrši istežanje kabela (crtež 3.4.-a). Tek potom se izvodi betoniranje elemenata (crtež 3.4.-b), a po dostizanju potrebne čvrstoće betona kable se sijeku i na taj način se unosi sila prednapinjanja u betonske elemente (crtež 3.4.-c). Potrebna čvrstoća betona pri kojoj se mogu presjeći kable iznosi 70 % predviđene čvrstoće, a ne manje od 30 MPa [T.2].



Crtež 3.4. Faze prethodnog (adhezijskog) prednapinjanja [H.16]

Kod naknadnog prednapinjanja čelik za prednapinjanje se polaže kroz prethodno ugrađene zaštitne cijevi kako bi se mogao slobodno istežati. Kada je beton postigao zadovoljavajuću čvrstoću vrši se prednapinjanje preko kabela koji se na jednom kraju usidre a na drugom istežu. Moguće je da se istovremeno izvrši istežanje kabela na obje strane. Naknadno prednapinjanje se koristi kod više opterećenih konstrukcija i kod konstrukcija većih raspona.

Kod prethodnih tipova prednapinjanja podrazumijevalo se kako kablovi za prednapinjanje prolaze kroz betonski presjek, tj. bilo je govora o unutrašnjem prednapinjanju. Međutim, prednapinjanje je moguće izvršiti vanjskim kablovima, što se zove vanjsko prednapinjanje. Vanjsko prednapinjanje predstavlja popularan i jedan od glavnih načina za ojačavanje nenapetih konstrukcija, uglavnom mostova. U [H.3] su ispitivani uzorci betonskih greda koje su bile ispucale, te naknadno ojačanje vanjskim prednapinjanjem. Rezultati ispitivanja ukazuju na povećanje čvrstoće na savijanje kod ojačanih uzoraka za 146 % i smanjenje postojećih progiba za 75 %. Kablovi korišteni u vanjskom prednapinjanju analitički se promatraju kao nevezani (*unbonded*) i stoga se za njihovo promatranje koriste analitička rješenja prednapetih elemenata s unutrašnjim nevezanim (*unbonded*) kablovima. Za vezane (*bonded*) kablove pretpostavlja se

kako nema klizanja između kabela i okolnog betona, dok kod nevezanih (*unbonded*) kablova ta pretpostavka ne vrijedi. Vanjsko prednapinjanje sve više se koristi kod građenja novih konstrukcija, te je ono predmet istraživanja velikog broja radova [A.7, M.1, N.1, N.2, N.6, N.7, N.8, P.3, X.1,].

Model korišten u ovom radu simulira ponašanje unutrašnjih vezanih (*bonded*) kablova.

3.2. Sila prednapinjanja

Prednapinjanjem se u kabel unosi početna sila prednapinjanja S_0 . Kako je tu riječ o velikim silama neophodno je voditi računa o trasi kabela kako bi se osigurao što bolji efekt sile prednapinjanja, odnosno kako bi se izbjegla prevelika razlika naprezanja između projektiranog i izvedenog stanja. Početna sila prednapinjanja može se iskazati sljedećim izrazom:

$$S_0 = A_p \cdot \sigma_{0,\max}, \quad (3.1)$$

gdje je A_p površina poprečnog presjeka kabela, a $\sigma_{0,\max}$ maksimalno naprezanje u kabelu koje mora biti jednako manjoj od sljedećih veličina [E.1]:

$$\sigma_{0,\max} \leq \begin{cases} 0,8 \cdot f_{pk}, \\ 0,9 \cdot f_{p0,1k}. \end{cases} \quad (3.2)$$

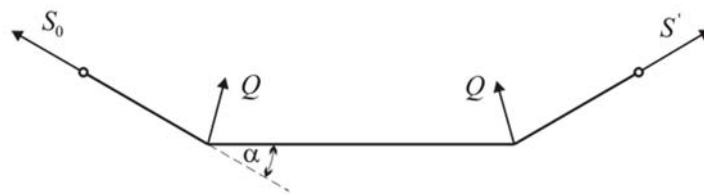
Sila koja djeluje na beton neposredno nakon prednapinjanja kablova (pri naknadnom prednapinjanju), ili nakon prenošenja sile iz kabela na beton (pri prethodnom prednapinjanju), može se napisati kao $S_{m0} = A_p \cdot \sigma_{pm0}$ i može biti maksimalno jednaka manjoj od idućih veličina [E.1]:

$$S_{m0} \leq \begin{cases} 0,75 \cdot f_{pk} \cdot A_p, \\ 0,85 \cdot f_{p0,1k} \cdot A_p. \end{cases} \quad (3.3)$$

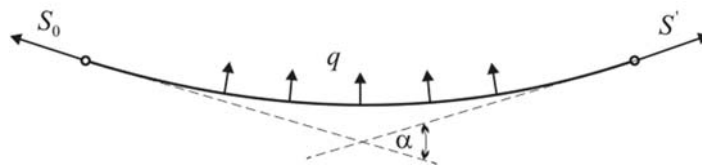
U izrazima (3.2) i (3.3) pojavljuju se veličine: f_{pk} -karakteristična vlačna čvrstoća čelika za prednapinjanje i $f_{p0,1k}$ -karakteristična granica naprezanja čelika za prednapinjanje koja odgovara naprezanju s nepovratnom deformacijom 0,1 %.

Na temelju prethodnih izraza može se zaključiti kako početna sila prednapinjanja S_0 ne predstavlja konačnu veličinu sile prednapinjanja. Konačna sila prednapinjanja S_∞ dobije se oduzimanjem gubitaka sile prednapinjanja ΔS od početno unesene sile S_0 . Prema [O.1] gubici sile prednapinjanja kod predgotovljenih nosača mostova iznose oko 18 % veličine početne sile S_0 s tim da se oko 15 % gubitaka, u odnosu na veličinu početne sile S_0 , dogodi u prvih pet godina nakon izgradnje nosača.

Pri matematičkom modeliranju sila prednapinjanja se tretira kao vanjska sila, a isto tako i njeni utjecaji na beton uzduž kabla. Ovakav sustav sila predstavlja uravnoteženi sustav, te za statički određene nosače (za razliku od statički neodređenih) ne daje utjecaj na reakcije u osloncima. Geometrijski oblik kabla može biti pravocrtan, poligonalan ili zakrivljen (paraboličan). Međutim, najčešće je u upotrebi zakrivljeni kabel jer se njegovim geometrijskim oblikom utječe na nosivost prednapete konstrukcije. Upotrebom zakrivljenih kabla umanjuju se veličine poprečnih sila u blizini oslonaca. Na mjestima prijeloma, odnosno promijene pravca trase kabla, dolazi do pojave skretnih sila koje opterećuju beton u pogledu koncentriranih ili linijskih sila, ovisno o obliku kabla (crtež 3.5. i 3.6.).



Crtež 3.5. Poligonalna trasa kabla sa skretnim silama [K.3]

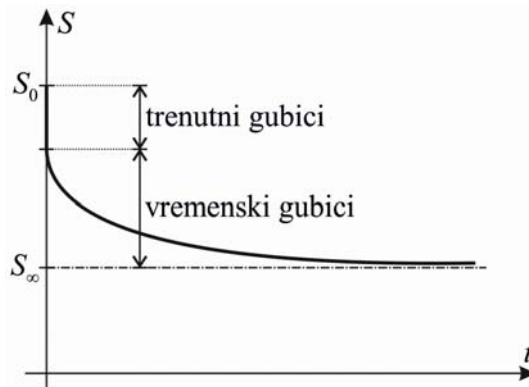


Crtež 3.6. Zakrivljena trasa kabla sa skretnim silama [K.3]

3.3. Gubici sile prednapinjanja

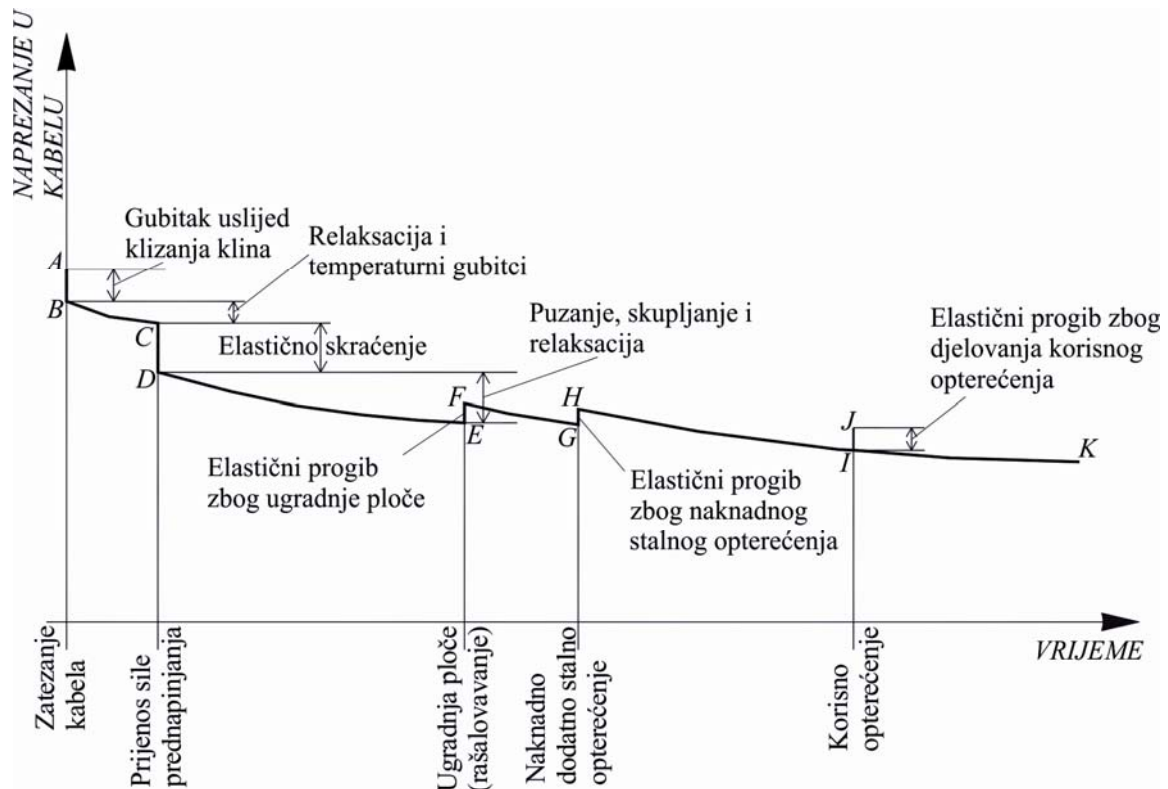
Prethodno je rečeno kako se konačna veličina sile prednapinjanja dobije oduzimanjem gubitaka ΔS od početne vrijednosti sile prednapinjanja S_0 . Ove promijene sile prednapinjanja događaju se tokom vremena i po dužini promatranog prednapetog elementa, te dovode do promijene naprezanja u betonu i čeliku. Stoga je vrlo važno što točnije izračunati veličine gubitaka sile prednapinjanja. Gubici sile prednapinjanja se dijele u dvije grupe: (1) početni gubici i (2) vremenski (dugotrajni) gubici. Pojmom početni gubici obuhvaćeni su gubici uslijed trenja kabla o zaštitnu cijev, klizanja kabla na sidrenom klinu, relaksacije čelika, temperaturnih utjecaja i elastičnog skraćenja betona. Doprinos gubitaka uslijed klizanja kabla na sidrenom klinu, relaksacije čelika i temperaturnih utjecaja relativno je neznatan, tako da gubici trenja i elastičnog skraćenja daju glavni doprinos početnom gubitku sile prednapinjanja [M.2]. Vremenski gubici obuhvaćaju gubitke koji se razvijaju nakon prijenosa sile prednapinjanja s kabla na beton i uglavnom započinju s početkom eksploatacije promatranog elementa.

Uzrokovani su kompleksnim međudjelovanjem viskoznog ponašanja betona (deformacija puzanja i skupljanja), relaksacije čelika i temperaturnih promjena. Za izračunavanje i procjenjivanje vremenskih gubitaka postoje mnoge metode, koje se uglavnom oslanjaju na točnost odabranog matematičkog modela kojim se opisuju krutosti betona, relaksacije čelika, puzanja i skupljanja. Svi prethodno nabrojani gubitci pojavljuju se kod naknadnog prednapinjanja, a shematski prikaz dan je na crtežu 3.7.



Crtež 3.7. Promjena sile kod naknadnog prednapinjanja [K.3]

Kod prethodnog prednapinjanja pojavljuju se svi prethodno navedeni gubici izuzev gubitaka uslijed trenja. Shematski prikaz gubitaka kod prethodnog prednapinjanja dan je na crtežu 3.8. preko promjene napreznaja u kabelu tokom vremena. Gubici između točaka A i D predstavljaju početne gubitke, a nakon točke D vremenske gubitke.



Crtež 3.8. Shematski prikaz promjene napreznaja u kabelu tokom vremena [M.2]

3.3.1. Gubitak sile prednapinjanja uslijed trenja

Ranije je rečeno kako se kod naknadnog prednapinjanja kablovi postavljaju u zaštitne cijevi i zatežu tek nakon što je beton dostigao odgovarajuću čvrstoću. Pri zatezanju kablova dolazi do međudjelovanja između zaštitne cijevi i kabela, odnosno kabel na svakoj krivini ili lomu trase pritišće cijev, tj. pojavljuju se skretne sile Q . Kako dodirna ploha između kabela i cijevi nije idealno glatka ($\mu > 0$) na mjestu skretne sile, kao umnožak skretne sile i koeficijenta trenja pojavit će se sila trenja T , koja dovodi do smanjenja sile prednapinjanja u području pojave trenja. Najveći utjecaj na pojavu trenja ima geometrija trase kabela, dok je utjecaj promjene geometrije kablova zanemariv. Gubici uslijed trenja ne postoje kod prethodnog naprezanja jer se kablovi zatežu prije betoniranja.

Od ranije je poznato kako trasa kablova može biti pravocrtna, poligonalna ili zakrivljena, a može se izvršiti kombinacija ova tri tipa trase. Za slučaj poligonalne trase, djelovanje sila na kabel dano je na crtežu 3.9.-a, za slučaj zakrivljene trase na crtežu 3.9.-b i za kabel dobiven kombinacijom pravocrtne, poligonalne i zakrivljene trase na crtežu 3.9.-c. Utjecaj kabela na beton dobio bi se kada bi sustavu sila s crteža 3.9. zadržali intenzitet i pravac a promijenili smjer. Za sva tri primjera početna sila prednapinjanja S_0 unosi se na lijevom kraju kabela i na desnom kraju kabela ona opada na veličinu S' . Ova promjena sile uzrokovana je pojavom trenja.

Kod poligonalnog kabela (crtež 3.9.-a) javlja se kontinuirana sila trenja t_L na pravocrtnom dijelu kabela (trenje na pravcu). Ova sila se javlja zbog mogućih geometrijskih nepravilnosti trase kabela, jer trasa kabela sigurno nije idealno pravocrtna pogotovo ne nakon sipanja betona. Na mjestu promjene trase kabela u točki B, za skretni kut α_B , javlja se koncentrirana sila trenja T_B kao umnožak tlačne skretne sile Q_B i koeficijenta trenja μ između kabela i zaštitne cijevi. Skretni kut α_B odredi se tako što se u točki promjene trase kabela (točka B) postave tangente na trasu kabela prije i nakon točke B, te kut koji zatvaraju te dvije tangente je kut α_B . Skretni kut u točki B neposredno prije točke B (između točaka A i B) jednak je nuli, dok je neposredno iza točke B (između točaka B i C) jednak α_B . Pravac vektora sile trenja T_B leži na simetrali skretnog kuta α_B , dok je pravac vektora skretne sile Q_B okomit na pravac vektora sile trenja T_B .

Kod zakrivljene trase kabela (crtež 3.9.-b), pored trenja na pravcu t_L , pojavljuje se i kontinuirana komponenta sile trenja u krivini t_R zbog kontinuiranog tlaka $q_k(s, \alpha)$. Skretni kut između dvije promatrane točke dobije se tako što se u tim točkama konstruiraju tangente na trasu kabela ili okomice na tangente, te kut koji zatvaraju tangente ili okomice na tangente predstavlja skretni kut α između te dvije točke.

Pridržavajući se pravila opisanih za poligonalnu i zakrivljenu (s) trasu kabela može se izračunati gubitak složene trase kabela kao što je dan na crtežu 3.9.-c. Sada se može izračunati stvarna sila u kabelu, u proizvoljnom presjeku x , preostala nakon gubitka zbog trenja:

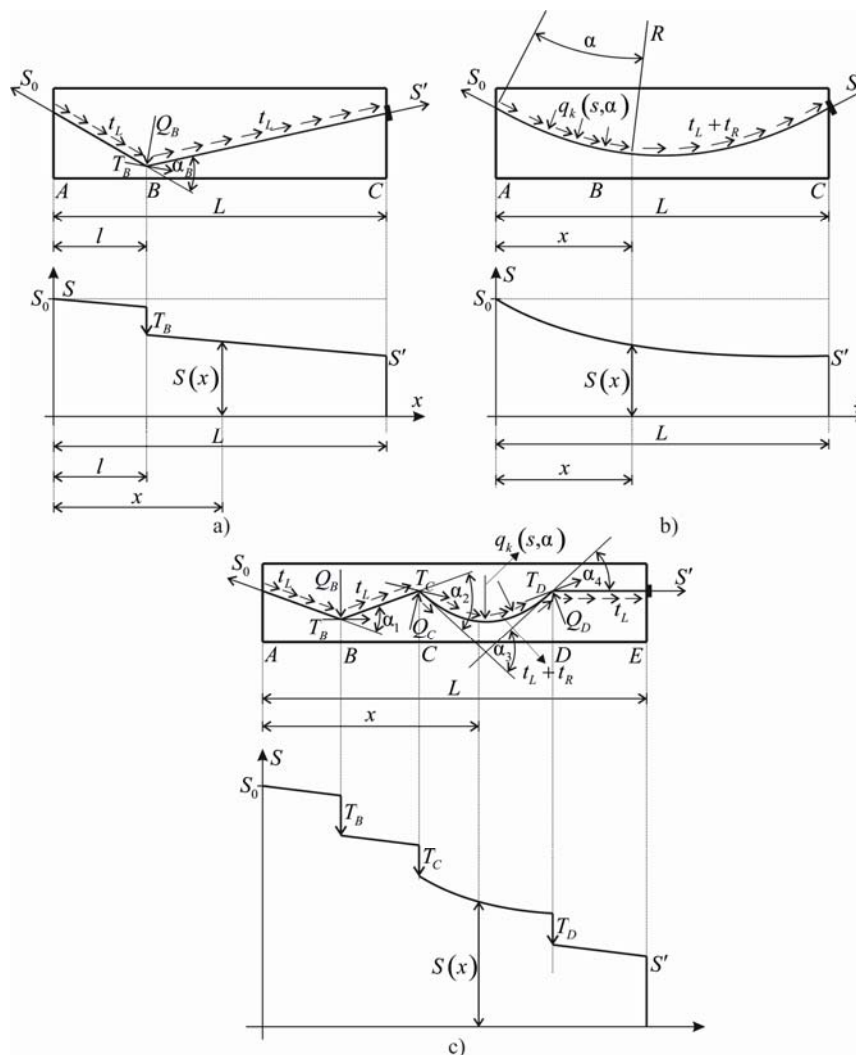
$$S(x) = S_0 \cdot e^{-(\lambda x + \mu \alpha)}. \quad (3.4)$$

U izrazu (3.4) $\lambda = \mu\beta$ predstavlja koeficijent kojim se uzima u obzir trenje nastalo zbog nepredviđenih geometrijskih nepravilnosti trase kabela, μ je koeficijent trenja između kabela i materijala kojeg pritišće, β je valovitost kabela u pravcu i α je ukupni skretni kut od mjesta istezanja kabela do promatranog presjeka u x pravcu.

Prema [N.10, T.2] uzima se da je λ u granicama od 0,3 do 0,7 %, dok se μ uzima 0,35 kada je kabel u zaštitnoj cijevi, odnosno 0,5 kada je kabel u dodiru s betonom.

Za kabel u pravcu vrijedi sljedeći izraz za silu prednapinjanja u proizvoljnom presjeku:

$$S(x) = S_0 \cdot e^{-\lambda x}. \quad (3.5)$$



Crtež 3.9. Trenje kod poligonalne, zakrivljene i kombinirane trase kabela [A.4]

3.3.2. Gubitak sile prednapinjanja pri sidrenju kabela

Pri prijenosu sile prednapinjanja s preše na kotve dolazi do smanjenja dužine istežanja kabela zbog klizanja kabela, što posljedično uzrokuje pad unesene sile prednapinjanja. Kod prethodnog prednapinjanja na stazi utjecaj klizanja klina rasprostire se po cijeloj dužini kabela, te se pojavljuje konstantan gubitak naprežanja u kabelu:

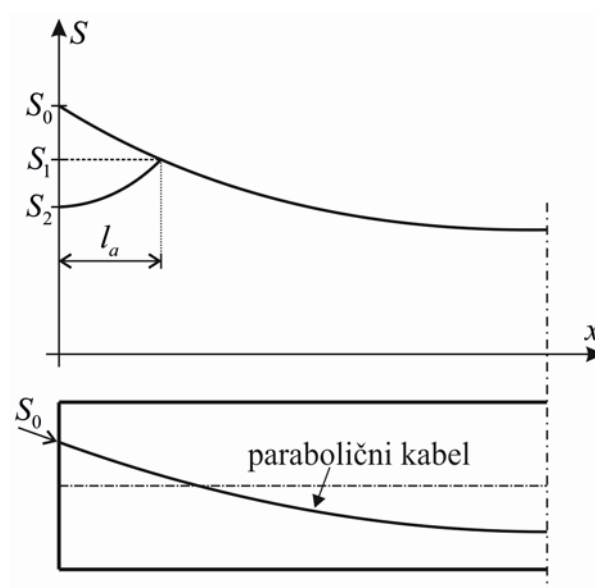
$$\Delta\sigma_k = \frac{\Delta l_k}{l} \cdot E_k, \quad (3.6)$$

gdje je $\Delta\sigma_k$ gubitak naprežanja u kabelu uslijed klizanja, Δl_k veličina klizanja klina, l dužina kabela i E_k modul elastičnosti kabela.

Kada je poznat gubitak naprežanja u kabelu, može se izračunati gubitak sile prednapinjanja kao umnožak gubitka naprežanja u kabelu $\Delta\sigma_k$ i površine kabela A_p :

$$\Delta S_k = \frac{\Delta l_k}{l} \cdot E_k \cdot A_p. \quad (3.7)$$

Za razliku od prethodnog prednapinjanja, kod naknadnog prednapinjanja utjecaj klizanja kabela nije rasprostranjen duž cijelog kabela nego je ograničen na određenu dužinu l_a . Ovo ograničenje dužine l_a rezultat je pojave trenja kabela o zaštitnu cijev, koje se protivi povratku kabela. Zbog toga se na mjestu usidrenja kabela javlja sila S_2 , koja je manja od početne sile prednapinjanja S_0 (crtež 3.10.). Utjecaj gubitka sile prednapinjanja uslijed klizanja klina uzima se u obzir na dužine l_a od mjesta sidrenja kabela.



Crtež 3.10. Pad sile prednapinjanja uslijed klizanja kabela [K.3]

Kod naknadnog prednapinjanja sa spojem, povratnom klizanju kabela protivi se trenje kabela o zaštitnu cijev s koeficijentom povratnog trenja μ' . Dužina l_a , na kojoj klizanje kabela ostvaruje utjecaj na gubitak sile prednapinjanja, može se približno izračunati kako slijedi:

$$l_a = \sqrt{\frac{\Delta l_k \cdot E_k}{\sigma_0 \cdot \left(\frac{\mu + \mu'}{2} \cdot \frac{\alpha}{l} + k \right)}}. \quad (3.8)$$

Kada je poznata dužina l_a , onda se može izračunati pad sile prednapinjanja na sidrištu:

$$\Delta S_k = S_0 \cdot \left[(\mu + \mu') \cdot \frac{\alpha \cdot l_a}{l} + 2 \cdot k \cdot l_a \right], \quad (3.9)$$

gdje je Δl_k veličina klizanja klina, E_k modul elastičnosti kabela, σ_0 početno naprezanje u kabelu, μ' koeficijent povratnog trenja koji se kreće u granicama od μ do $1,5 \cdot \mu$, $\frac{\alpha}{l}$ prosječni skretni kut kabela na dužini l_a i k slučajno kutno odstupanje.

Već je kazano kako je ovaj gubitak neznatan u usporedbi s gubicima uslijed trenja i elastičnog skraćanja betona. Međutim, utjecaj klizanja klina može biti značajan kod kratkih kablova, gdje se prokliznuće klina kreće u granicama od 2 do 10 mm. Svi proizvođači sustava za prednapinjanje daju vrijednost klizanja klina i dopuštaju privremeno prekoračenje dopuštene sile na preši (oko 5 %), te na taj način omogućuju kompenzaciju utjecaja klizanja klina. Uvjet je da najveća stvarna sila u kabelu, nakon uvlačenja klina, ne bude veća od dopuštene sile na preši S_0 .

3.3.3. Gubitak sile prednapinjanja zbog elastičnih deformacija betona

Kod prethodnog prednapinjanja postoji spoj između kabela i betona, te se ukupna sila prednapinjanja prenosi odjednom nakon presijecanja kablova. Pri prijenosu sile prednapinjanja s kabela na beton, beton je podložan elastičnim deformacijama koje izazivaju skraćanje betona. Uslijed ovog skraćanja dolazi do gubitka naprezanja u kabelu, odnosno gubitka početne sile prednapinjanja S_0 . Ovaj gubitak proporcionalan je naprezanjima koja se unose u beton [N.10, T.2] i računa se prema izrazu:

$$\Delta S_C = \sigma_0 \cdot \frac{\alpha}{1 + \rho \cdot \beta} \cdot A_p, \quad (3.10)$$

gdje je σ_0 početno naprezanje u visini težišta kabela umanjeno za gubitke zbog trenja i klizanja klina, ρ utjecaj ekscentriciteta početne sile prednapinjanja S_0 , α skretni kut između dvije točke, A_p površina kabela za prednapinjanje i β omjer modula elastičnosti čelika za prednapinjanje i betona.

Ako je riječ o naknadnom prednapinjanju jednim kablom nema gubitka sile uslijed elastičnih deformacija betona, zbog činjenice kako se trenutne deformacije kabla odigravaju istovremeno s prednapinjanjem. U slučaju naknadnog prednapinjanja s više kablova, gdje se kablovi sukcesivno prednapinju postoji gubitak sile uslijed elastičnih deformacija betona i može se izračunati prema slijedećem izrazu:

$$\Delta S_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \beta \cdot \sigma_0 \cdot A_p, \quad (3.11)$$

gdje je n broj kabla koji se prednapinju jedan nakon drugog.

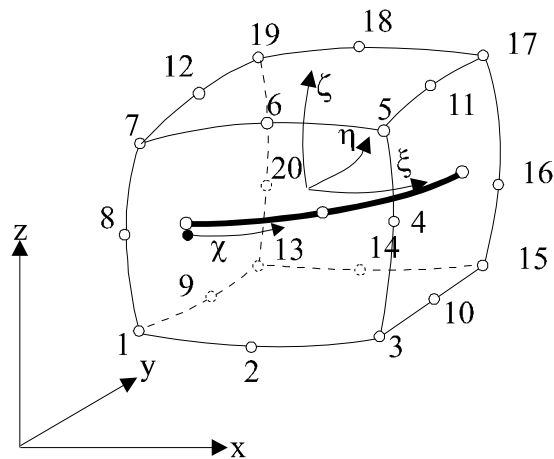
3.3.4. Gubitak sile prednapinjanja zbog relaksacije čelika

Pri kratkotrajnom opterećenju kablovi se izdužuju za određenu dužinu. Ako se opterećenje nastavi kablovi se dodatno izdužuju pri konstantnom opterećenju. Ovaj prirast deformacije kabla u vremenu pri konstantnom opterećenju naziva se tečenje čelika, fenomen sličan puzanju betona. Ako se postignuto izduženje kabla Δl_0 održava konstantnim tokom vremena, dolazi do pada napreznja u kabeu (postignutog pri izduženju). Ova pojava pada napreznja u kabeu pri konstantnom izduženju kabla naziva se relaksacija čelika, a uvelike ovisi o razini napreznja u kabeu i temperaturi okoliša. Proizvođači čelika za prednapinjanje daju veličine relaksacije nakon 1000 sati, ali treba uzeti u obzir da konačne veličine relaksacije mogu biti 2 do 3 puta veće od te vrijednosti.

Izračun gubitka sile prednapinjanja uslijed puzanja i skupljanja betona, te relaksacije čelika prikazan je u poglavlju 4.

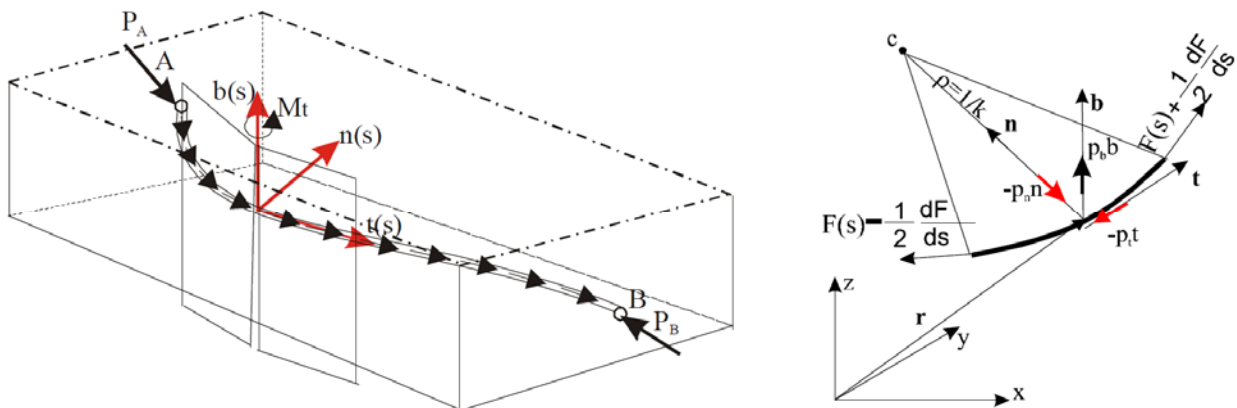
3.4. Numerički model klasične i prednapete armature

Geometrija klasične i prednapete armature, u preuzetom modelu Precon 3D [G.1], opisuje se 1D prostornom izoparametrijskom tročvornom krivuljom drugoga reda, kojoj se koordinate čvorova definiraju u globalnom koordinatnom sustavu [G.1, G.2]. Ovaj 1D element armature ugrađuje se u 3D element betona pri čemu se zanemaruje utjecaj klizanja u odnosu na 3D prostorne elemente. Također, pretpostavlja se idealna veza između betona (3D elementa) i čelika (1D elementa), dok 1D elementi prenose samo uzdužne sile [G.1, G.2]. Krajnji čvorovi ovih elemenata nalaze se na plohama 3D elemenata, dok je treći čvor na polovici samog elementa (crtež 3.11.).



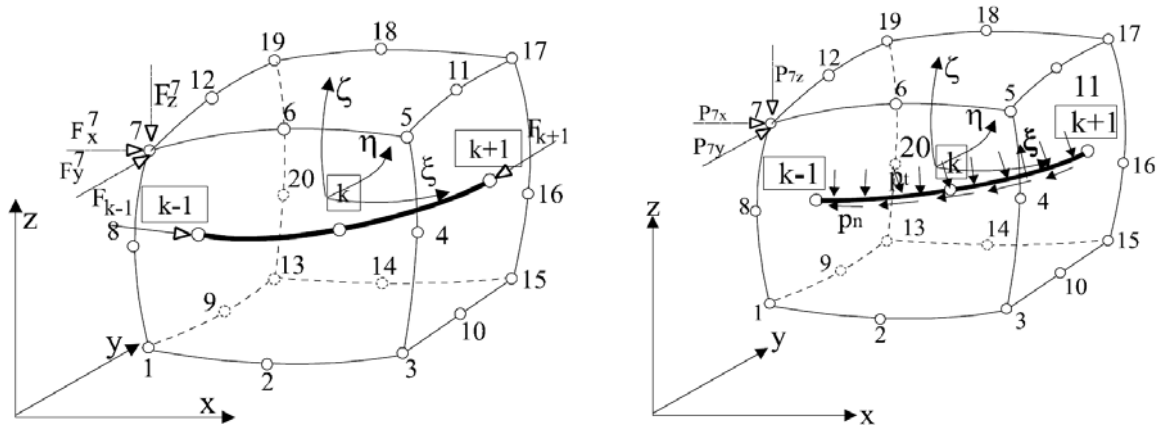
Crtež 3.11. Element betona (20-čvorni), s ugrađenom klasičnog ili prednapetom armaturom, i koordinatni sustavi na elementu [G.1]

Ovako definirani 1D elementi omogućuju modeliranje kablova proizvoljne zakrivljenosti u prostoru, neovisno od 3D mreže prostornih konačnih elemenata. Na ovaj način omogućeno je modeliranje kablova za prednapinjanje koji ne leže u jednoj ravnini [G.1] (crtež 3.12.).



Crtež 3.12. Prostorna zakrivljenost kabla za prednapinjanje [G.1, G.2]

Sila prednapinjanja zadaje se na jednom ili drugom kraju kabla (jednostrano prednapinjanje) ili na oba kraja (obostrano prednapinjanje), dok joj se prijenos na element betona modelira numerički [G.1] (crtež 3.13.). Modelom razvijenim u [G.1] mogu se izračunati gubitci sile prednapinjanja uzrokovani trenjem i elastičnim deformacijama betona, dok će se kroz ovaj rad omogućiti i izračun gubitaka uzrokovanih vremenski ovisnim deformacijama betona, tj. pužanjem i skupljanjem.



Crtež 3.13. Numerička tretman sile prednapinjanja [G.1]

Ukupne sile prednapinjanja u pravcu globalnih koordinatnih osi, kao posljedica raspodijeljenih sila u 1D elementu uzrokovanih unosom sile prednapinjanja, mogu se izračunati prema sljedećim izrazima [G.1, G.2]:

$$\begin{aligned}
 P_x &= \int_K \left(-p_n \frac{1}{\sqrt{\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{d^2z}{ds^2}}} \rho \frac{d^2x}{ds^2} - p_t \frac{dx}{d\chi} \right), \\
 P_y &= \int_K \left(-p_n \frac{1}{\sqrt{\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{d^2z}{ds^2}}} \rho \frac{d^2y}{ds^2} - p_t \frac{dy}{d\chi} \right), \\
 P_z &= \int_K \left(-p_n \frac{1}{\sqrt{\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{d^2z}{ds^2}}} \rho \frac{d^2z}{ds^2} - p_t \frac{dz}{d\chi} \right),
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

gdje je ρ zakrivljenost prednapetog kabela [G.1], p_n i p_t normalna i tangencijalna komponenta opterećenja duž kabela uzrokovana unosom sile prednapinjanja (crtež 3.12.) [G.1, G.2].

Gaussovom numeričkom integracijom izraza (3.12) mogu se dobiti čvrne sile duž kabela u Gauss točkama 1D elementa $(P_x^{g.p.}, P_y^{g.p.}, P_z^{g.p.})$ u globalnom koordinatnom sustavu [G.1, G.2]. Kako bi se odredio utjecaj ovih sila, duž elementa kabela, na beton, neophodno je preslikati koordinate Gauss točaka iz globalnog koordinatnog sustava u lokalni koordinatni sustav elementa betona. Nakon provedenog postupka preslikavanja, detaljno opisanog u [G.1], konačno će se dobiti komponente ekvivalentnih čvornih sila u betonu kao posljedica prijenosa sile prednapinjanja duž samog kabela [G.1, G.2]:

$$\begin{aligned}
 P_x^i &= \sum_{g,t=1}^3 N_i(\xi^{g,t}, \eta^{g,t}, \zeta^{g,t}) P_x^{g,t}, \\
 P_y^i &= \sum_{g,t=1}^3 N_i(\xi^{g,t}, \eta^{g,t}, \zeta^{g,t}) P_y^{g,t}, \\
 P_z^i &= \sum_{g,t=1}^3 N_i(\xi^{g,t}, \eta^{g,t}, \zeta^{g,t}) P_z^{g,t},
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

gdje je $\chi^{g,t}$ koordinata Gaussove točke u linijskom koordinatnom sustavu [G.1, G.2], g,t indeks Gaussove točke, i indeks koji označava broj čvora 3D elementa betona, te $P_x^{g,t}$, $P_y^{g,t}$ i $P_z^{g,t}$ vrijednosti komponenta sile u pravcu osi globalnog koordinatnog sustava u Gaussovima točkama elementa.

Na analogan način dobiju se ekvivalentne čvorne sile uzrokovane sidrenim silama na krajevima kabela, čija se detaljna matematička i numerička formulacija može vidjeti u [G.2].

3.4.1. Matrice deformacija i krutosti elementa armature

Globalni pomaci konstrukcije u, v i w definirani su u globalnom koordinatnom sustavu $x-y-z$, dok se deformacija elementa armature definira u linijskom koordinatnom sustavu preko koordinate χ . U literaturi [G.1, G.2] detaljno je opisan postupak izvoda matrice deformacije, a ovdje je dan samo njen konačni oblik.

Pomaci čvorova linijskog elementa u, v i w u globalnom koordinatnom sustavu mogu se prikazati preko baznih funkcija $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ i pomaka čvorova osnovnog 3D elementa u_i, v_i i w_i ($i=1,2,\dots,n$). Deformacija armaturene šipke/kabela može se izraziti preko globalnih pomaka primjenjujući odgovarajuće Cartesyeve derivacije (detaljni postupak dan je u [G.1, G.2]), te se može napisati kako je deformacija elementa armature jednaka:

$$\varepsilon_s = \mathbf{B}_s \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \tag{3.14}$$

gdje je \mathbf{B}_s matrica deformacija elementa armature:

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} B_{s11} & B_{s12} & B_{s13} \\ B_{s21} & B_{s22} & B_{s23} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{si1} & B_{si2} & B_{si3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{sn1} & B_{sn2} & B_{sn3} \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

čiji su članovi jednaki [G.1, G.2]:

$$\begin{aligned}
 B_{si1} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial \chi} \right)^2 + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \chi} \frac{\partial y}{\partial \chi} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \chi} \frac{\partial z}{\partial \chi}, \\
 B_{si2} &= \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial \chi} \right)^2 + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \chi} \frac{\partial y}{\partial \chi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \chi} \frac{\partial z}{\partial \chi}, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 B_{si3} &= \frac{\partial N_i}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial \chi} \right)^2 + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial \chi} \frac{\partial z}{\partial \chi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \chi} \frac{\partial y}{\partial \chi}.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

U gornjim izrazima n predstavlja broj čvorova osnovnog 3D elementa betona [G.1, G.2].

Kada je poznata matrica deformacija elementa armature može se izračunati matrica krutosti armature. Nakon provođenja postupka linijske numeričke integracije u Gaussovima točkama 1D elementa armature, kako je detaljno opisano u [G.1, G.2], može se zapisati matrica krutosti elementa armature, odnosno prednapetog kabela kako slijedi:

$$\mathbf{K}_s = \int_{V_s^e} \mathbf{B}_s^T E_s \mathbf{B}_s dV_s^e, \tag{3.17}$$

gdje je E_s modul elastičnosti čelika i dV_s^e diferencijalni element volumena armature koji se može izraziti kao funkcija elementa duljine i površine poprečnog presjeka:

$$dV_s = A_s dx. \tag{3.18}$$

Sada se matrica krutosti elementa armature, odnosno prednapetog kabela, može izračunati numeričkom integracijom po linijskom elementu:

$$\mathbf{K}_s = \int_{\chi} \mathbf{B}_s^T E_s \mathbf{B}_s \frac{ds}{d\chi} A_s d\chi. \tag{3.19}$$

Kada su poznate matrica krutosti osnovnog elementa betona K_c i matrica krutosti elementa armature K_s , može se izračunati ukupna matrica krutosti [D.1]:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_c. \tag{3.20}$$

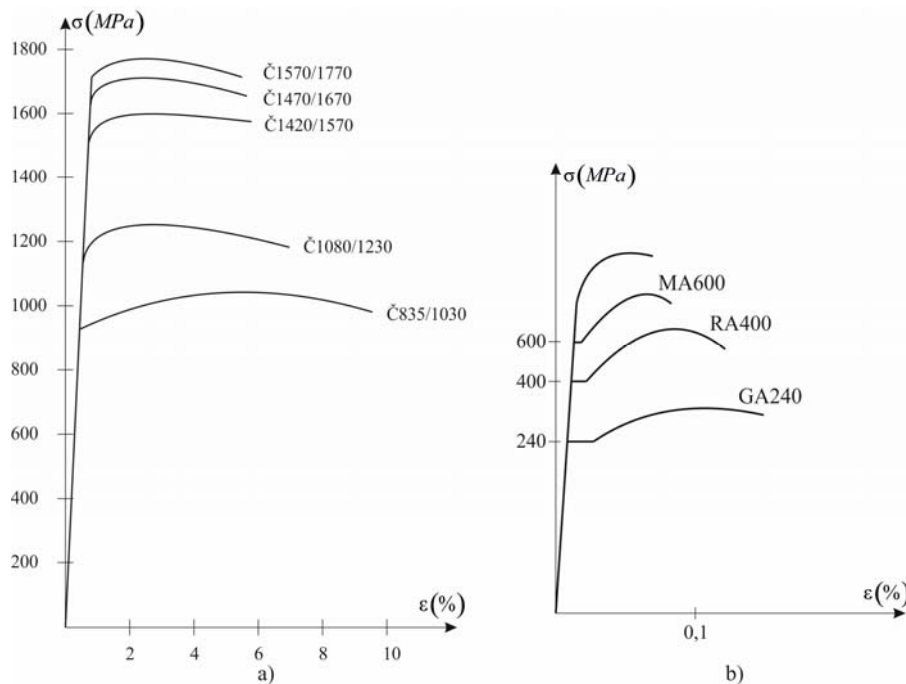
Jednoosno naprezanje u armaturi može se izračunati prema izrazu:

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s, \tag{3.21}$$

gdje je E_s modul elastičnosti čelika, a ε_s deformacija elementa armature prema (3.14).

3.4.2. Materijalni model armature

Već nekoliko puta kazano je kako armatura prenosi samo uzdužne sile, bilo da je riječ o vlačnim ili tlačnim uzdužnim silama. Otud se ponašanje armature može aproksimirati jednoosnim stanjem naprezanja. Za proračun armirano betonskih konstrukcija u upotrebi je više različitih radnih dijagrama čelika, ovisno o tome što se želi opisati. Tako se za armirano betonske konstrukcije koriste radni dijagrami manjih nosivosti (crtež 3.14.-b), dok se za prednapete konstrukcije koriste visokovrijedni čelici čiji je radni dijagram dan na crtežu 3.14.-a. Razlog korištenja visokovrijednih čelika je namjera da se osigura linearno-elastično ponašanje sve do visoke razine naprezanja, velika vlačna čvrstoća koja omogućuje velika izduženja, dovoljna duktilnost, mali pad naprezanja zbog relaksacije, velika čvrstoća na zamor i dobra otpornost na koroziju.

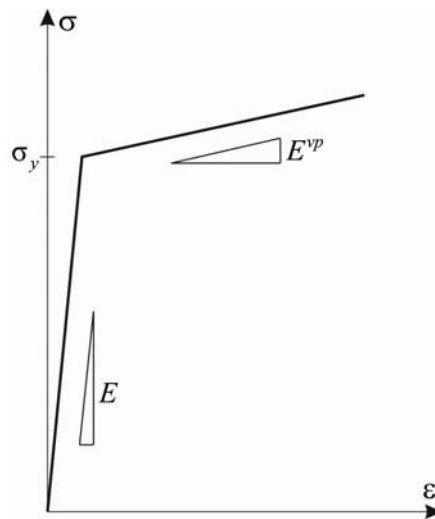


Crtež 3.14. a) Radni dijagram za visokovrijedne čelike i b) radni dijagram čelika korištenog kod klasičnih armirano betonskih konstrukcija [G.1, K.3]

Za opisivanje ponašanja čelika u preuzetom modelu [G.1, G.2] usvojen je elasto-viskoplastični model, koji uključuje mogućnost očvršćivanja i elastično rasterećenje (crtežu 3.15.). Ponašanje u elastičnom području opisano je Hookovim zakonom $\sigma^l = E \cdot \varepsilon^l$, gdje je E modul elastičnosti, ε^l elastična deformacija čelika. Viskoplastično popuštanje se kontrolira jednoosnim naprezanjem pri popuštanju σ_y , dok zakon očvršćivanja čelika ima oblik:

$$f^{1d} = \sigma_y + H' \cdot \varepsilon^{vp}, \quad (3.22)$$

gdje je H' parametar očvršćivanja čelika i ε^{vp} viskoplastična deformacija.



Crtež 3.15. Elasto-viskoplastični model čelika [G.1, K.3]

Inkrement naprezanja čelika može se zapisati u obliku:

$$\Delta\sigma^{1d} = E \cdot \Delta\varepsilon^{1d} - \gamma \cdot \left[\sigma^{1d} - (\sigma_y - H' \cdot \varepsilon^{vp}) \right] \cdot \Delta t, \quad (3.23)$$

gdje je γ plastični multiplikator, σ^{1d} trenutno naprezanje, trenutna deformacija ε^{1d} , ε^{vp} viskoplastična deformacija i Δt promatrani proizvoljno odabrani vremenski interval.

Parametar očvršćivanja može se izračunati iz slijedećeg izraza [H.9, O.2]:

$$H' = \frac{E^{vp}}{1 - E^{vp}/E}, \quad (3.24)$$

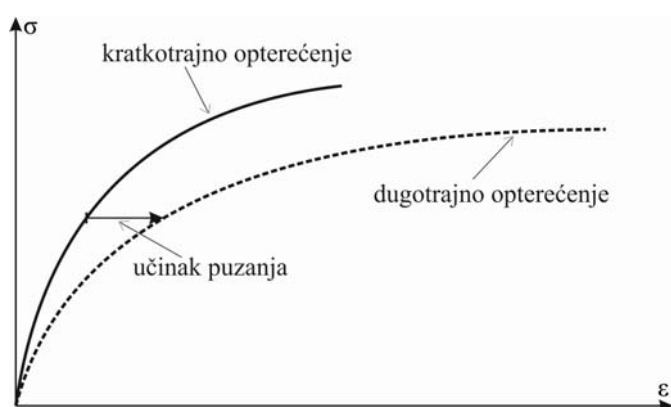
gdje je E početni modul elastičnosti, a E^{vp} tangenti modul elastičnosti u plastičnom području.

4. NUMERIČKI MODEL VREMENSKI OVISNOG PONAŠANJA BETONA

4.1. Općenito o problematici puzanja i skupljanja

Beton tijekom vremena mijenja stanje deformacija i naprezanja. Vremenski ovisno ponašanje betona najčešće ovisi o dvije pojave: puzanju i skupljanju betona. Puzanje predstavlja deformaciju betona u vremenu koja ovisi o dugotrajnom opterećenju konstrukcije, dok je skupljanje deformacija u vremenu, koja ne ovisi o opterećenju kome je izložena promatrana konstrukcija.

Puzanje i skupljanje ne utječu na kratkotrajnu deformaciju u betonu, tako da se prilikom proračuna konstrukcija na kratkotrajna opterećenja zanemaruju. Međutim, ako se promatra dugotrajno ponašanje konstrukcije, puzanje i skupljanje su glavni faktori koji povećaju početnu deformaciju armirano-betonskih, predgotovljenih i prednapetih konstrukcija [B.4]. Početna deformacija se može povećati i nekoliko puta (dugotrajne deformacije su znatno veće od kratkotrajnih), te je zbog toga danas besmisleno vršiti dugotrajna promatranja armirano-betonskih i prednapetih konstrukcija te njihova dimenzioniranja bez uzimanja u obzir puzanja i skupljanja [E.1, G.5, R.3, S.5] (crtež 4.1.). U novije vrijeme veliki broj radova, kao npr. [J.3, L.5, Z.1], posvećen je proučavanju vremenski ovisnog ponašanja betona ojačanih vlaknima ili umjetnim materijalima, poput materijala AFRP (*aramid fiber reinforced polymer*), CFRP (*carbon fiber reinforced polymer*) ili GFRP (*glass fiber reinforced polymer*), iako ni vremenski ovisno ponašanje „čistog“ betona nije do kraja ispitano i definirano.



Crtež 4.1. Utjecaj puzanja na konačnu deformaciju betona [K.3]

Prema Naamanu [N.3] puzanje je definirano kao vremenski ovisna deformacija veća od početne deformacije u betonu izloženom dugotrajnom djelovanju, dok ACI Committee 209 [A.3] definira puzanje kao vremenski ovisno povećanje deformacije u očvrslulom betonu izloženom

dugotrajnom djelovanju. Iz navedenih definicija može se konstatirati kako će puzanje dovesti do povećanja početne deformacije u vremenu, dok bi u slučaju nepostojanja puzanja početna deformacija s vremenom opadala kao funkcija starenja i skupljanja betona te relaksacije čelika [M.2]. S razvojem deformacije puzanja u armirano-betonskim i prednapetim konstrukcijama tijekom vremena može doći do preraspodjela naprezanja u samoj konstrukciji, čijim bi se zanemarivanjem, u kombinaciji s drugim nepovoljnim utjecajima, mogla bitno ugroziti nosivost i stabilnost promatranih konstrukcija. Time je još veća važnost i obaveza uzimanja puzanja u obzir pri projektiranju i dimenzioniranu armirano-betonskih i prednapetih konstrukcija.

Modeli koji promatraju puzanje većinom se odnose na određivanje uzdužnih deformacija betona pri jednoosnom tlačnom opterećenju, a potom se ti modeli proširuju na višeosna stanja analogijom s klasičnom teorijom elastičnosti, uzimajući u obzir Poissonov koeficijent pri puzanju [K.3]. Većina autora uzima Poissonov koeficijent puzanja konstantan i jednak elastičnom Poissonovom koeficijentu. Međutim, neke eksperimentalne studije puzanja betona pokazale su kako odgovarajući Poissonov koeficijent puzanja pri višeosnom tlaku nije konstantan tijekom vremena [A.5, G.5, S.5]. On ovisi o višeosnom karakteru stanja naprezanja te stoga nije izotropan, a njegova početna vrijednost je manja nego u elastičnom području materijala. Uzimajući da je Poissonov koeficijent konstanta, dovodi se do podcjenjivanja deformacije puzanja do 40 % [K.3]. Ipak, de France i ostali [C.2] u svome dvanaestogodišnjem istraživanju puzanja betona, pod jednoosnim i dvoosnim opterećenjem, došli su do rezultata kako Poissonov koeficijent pri puzanju, bilo da je riječ o autogenom puzanju ili puzanju sušenjem, ostaje približno konstantan. U njihovom istraživanju Poissonov koeficijent pri puzanju se kretao u granicama od 0,27 do 0,32 za autogeno puzanje, dok je za puzanje sušenjem ostao u granicama između 0,30 i 0,35.

Puzanje betona ima karakter viskoznih deformacija, te se pojavljuje u području i tlačnih i vlačnih naprezanja betona. Puzanje u vlaku je manje izraženo nego u tlaku zbog manje vlačne čvrstoće u odnosu na tlačnu. Međutim, puzanje u vlaku je zanimljivo u mnogim praktičnim situacijama [G.7], npr. u procjeni mogućnosti otvaranja pukotina zbog naprezanja izazvanih skupljanjem i temperaturnim djelovanjima [A.9]. Neki istraživači se upravo bave ovom problematikom, te se tako u radu [S.8] između ostalog govori i o utjecaju vodo-cementnog faktora na razvoj puzanja u vlaku. Međutim, istraživanja koja bi se bavila puzanjem u vlaku u budućnosti bi se trebala još više intenzivirati.

Skupljanje betona predstavlja ukupno vremenski ovisno smanjenje volumena izazvano promjenom vlažnosti betonske mješavine. Kod spriječenih deformacija betona skupljanje će dovesti do pojave dodatnih naprezanja u betonu, koje uglavnom preuzima armatura. Prema tome,

armatura može utjecati na smanjenje deformacije skupljanja [A.5, C.3, G.5, G.6, S.5, T.1]. Skupljanje umanjuje razvoj kontinuiranog vremenski ovisnog pomaka [M.2], te time smanjuje efekt puzanja.

4.2. Skupljanje betona

4.2.1. Općenito

Pri procesu očvršćivanja betona zbog hidratacije cementa, kao i procesa sušenja betona uslijed gubitka vlage prema okolišu dolazi do smanjenja volumena očvršnulog betona. To svojstvo betona da neovisno od vanjskog opterećenja mijenja volumen u vremenu naziva se skupljanje betona. Skupljanje je najveće na plohama elementa izloženim bržem gubitku vlage (sušenju) i opada prema unutrašnjosti elementa. Skupljanje se može pojaviti kao posljedica tri mehanizma [H.13, L.7, R.6, S.3]: (1) utjecaja kapilarne depresije (*capillary depression effect*), (2) utjecaja površinske napetosti (*surface tension effect*) i (3) utjecaja razdvajanja pritiska (*disjoining pressure effect*). Jedan ili više ovih utjecaja su dominantni u odnosu na druge, ovisno o relativnoj vlažnosti betonske mješavine. Na primjer, pri visokoj relativnoj vlažnosti (> 80 %) najvažniji je utjecaj kapilarne depresije, dok se druga dva mehanizma aktiviraju pri relativno niskoj vlažnosti (< 45 %) [S.3]. Glavni faktori koji utječu na skupljanje su [B.5, B.6, G.8, Š.1, V.3]: (1) mehanički utjecaji od temperaturnih promjena, (2) termički utjecaji hidratacije cementa, (3) hidrološki utjecaji vezani za hidrataciju, (4) hidrološki utjecaji vezani za klimu, (5) tlačna čvrstoća betona, (6) konzistencija svježe mješavine, (7) tip i sadržaj cementa, (8) w/c faktor, (9) odnos količine finog agregata prema ukupnoj količini agregata, (10) sadržaj zraka i (11) efektivna debljina elementa.

Vrste skupljanja betona prema [M.6] mogu se podijeliti:

- skupljanje koje se događa zbog isparavanja vode u razdoblju vezivanja cementa (plastično skupljanje),
- skupljanje uslijed kontrakcije sastojaka hidratacije (hidratacijsko skupljanje) i
- skupljanje koje se događa po završetku procesa vezivanja cementa, odnosno skupljanje očvršnulog betona kao posljedica sušenja (hidraulično skupljanje).

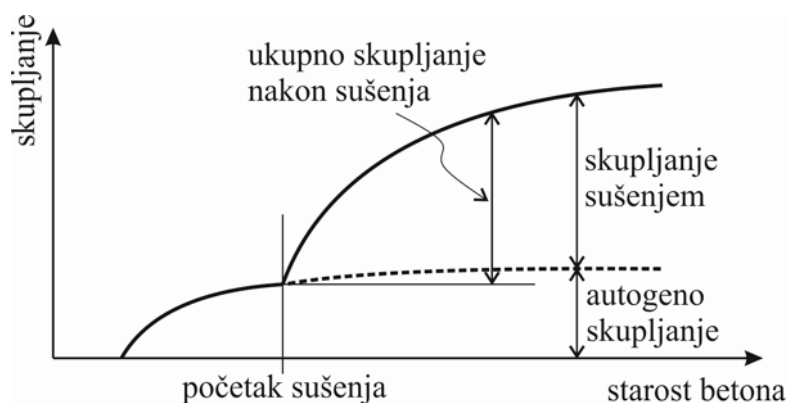
Prema literaturi [A.9, G.7, U.1] skupljanje se dijeli na:

- autogeno skupljanje – smanjenje volumena mješavine vode i cementa za vrijeme hidratacije. Autogeno skupljanje je linearna funkcija tlačne čvrstoće betona i kako se naprezanje od autogenog skupljanja razvija tijekom očvršćivanja betona ono se najvećim dijelom razvija u prvim danima nakon betoniranja.

- plastično skupljanje – kod isparavanja vode u porama kapilara nastaje podtlak (zato se naziva i kapilarno skupljanje). Plastično skupljanje nastaje u ugrađenom betonu i može se značajno smanjiti odgovarajućom njegom betona.
- skupljanje sušenjem – zbog gubitka vlažnosti iz betona, tj. opuštanja vode iz betona u okolinu. Događa se kod očvrstnuloj betonu.
- skupljanje karbonizacijom – smanjenje volumena karbonizacijom kao posljedica kemijskih reakcija u cementnom kamenu do kojih dovodi ugljikov dioksid iz okoline.

Deformacija skupljanja betona ε_{sh} obično se promatra kao zbroj deformacije komponente skupljanja sušenjem ε_{shd} i komponente autogenog skupljanja ε_{sha} (4.1) [G.7, S.2] (crtež 4.2.):

$$\varepsilon_{sh} = \varepsilon_{shd} + \varepsilon_{sha} \quad (4.1)$$

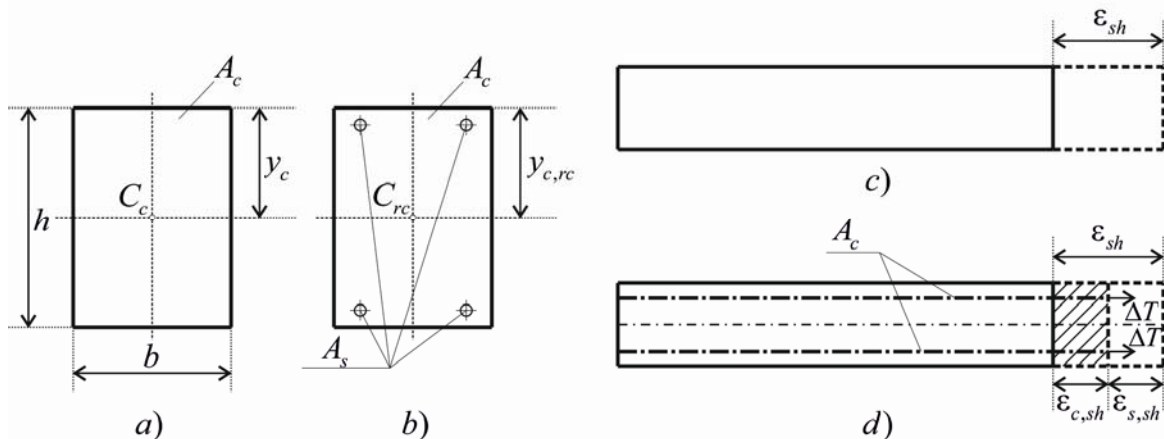


Crtež 4.2. Shematski prikaz skupljanja betona

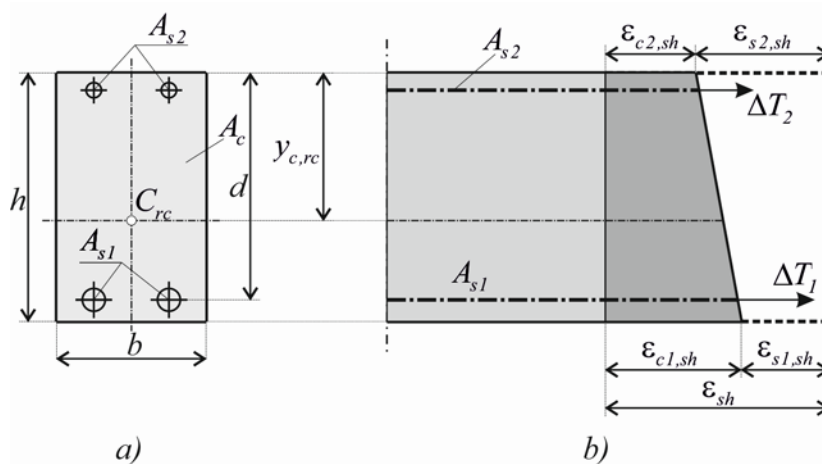
Deformacija skupljanja betona ε_{sh} , kod nearmiranih betonskih elemenata, izaziva samo skraćenje elementa ne uzrokujući pojavu progiba [G.10, G.12, G.13] (crtež 4.3. a i c). Za razliku od nearmiranih, kod armiranih elemenata armatura predstavlja prepreku za slobodan razvoj deformacije skupljanja, te skupljanje betona uzrokuje pojavu tlačnih naprezanja u armaturi. Kao umnožak tlačnog naprezanja i površine armaturene šipke dobiva se veličina tlačne sile u armaturi [G.9, G.10, G.12, G.13]. Ovako dobivena sila se u istoj veličini, samo suprotnog smjera prenosi na element betona, tako da se u betonu pojavljuju vlačne sile ΔT (crtež 4.3. b i d), odnosno vlačna naprezanja. Ukoliko ova naprezanja dosegnu vrijednost vlačne čvrstoće betona može doći do otvaranja pukotina u betonu [B.9]. Ove rane pukotine, koje su posljedica skupljanja betona, narušavaju trajnost konstrukcija jer mogu uzrokovati koroziju armature [K.2, S.1].

Ako je armatura postavljena nesimetrično po visini poprečnog presjeka doći će do neujednačene raspodjele naprezanja i deformacija po visini poprečnog presjeka, pri čemu se maksimalna vlačna naprezanja pojavljuju u dijelu betonskog presjeka gdje je skoncentrirana veća

količina armature (crtež 4.4.). Postupnim povećanjem veličine ovih vlačnih sila u betonu, koje djeluju na nekom ekscentricitetu u odnosu na središte poprečnog betonskog presjeka, dolazi do povećanja zakrivljenosti poprečnog presjeka, što uzrokuje povećanje progiba elementa neovisno o veličini vanjskih sila. Skupljanjem izazvana zakrivljenost poprečnog presjeka znatno je veća kod raspucanog nego neraspucanog betonskog elementa.

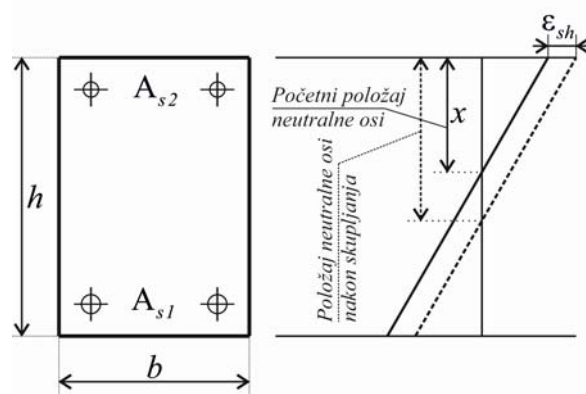


Crtež 4.3. a) Betonski nearmirani poprečni presjek, b) simetrični armiranobetonski poprečni presjek, c) deformacija skupljanja kod nearmiranog presjeka i d) deformacija skupljanja kod simetrično armiranog presjeka [G.12]



Crtež 4.4. a) Nesimetrično armirani betonski presjek i b) raspodjela deformacija po visini presjeka [G.13]

Skupljanje betona ne utječe samo na ovisnost između naprezanja i deformacija po visini poprečnog presjeka nego i na položaj neutralne osi [F.2], te se razvojem skupljanja neutralna os pomjera naniže po visini presjeka (crtež 4.5.).



Crtež 4.5. Utjecaj skupljanja na položaj neutralne osi [F.2]

Skupljanje, također, uzrokuje opadanje modula elastičnosti betona, pri tome ne uzrokujući znatne promjene tlačne čvrstoće, vlačne čvrstoće na cijepanje (*splitting tensile strength*) i energije loma betona [H.14]. Ovo opadanje modula elastičnosti može iznositi više od 18 %. Posljedica skupljanja je opadanja vlačne posmične čvrstoće betona (*shear tensile strength*) do 17 % u odnosu kada se skupljanje zanemari [H.14].

Svi negativni utjecaji skupljanja na ponašanje konstrukcija mogu se izbjeći ili bar značajno smanjiti smanjenjem same deformacije skupljanja. Zamjenom Portland cementa sa SCA (*sulfoaluminatni cement*) ostvaruje se znatno smanjenje deformacije skupljanja, koje je još izraženije ukoliko se SCA kombinira sa SRA (*shrinkage-reducing admixture*) [S.6]. Također, kod betona normalnih čvrstoća zamjena cementa s letećim pepelom (*fly ash*) dovodi do znatnog smanjenja autogenog skupljanja, s relativno malim smanjenjem čvrstoće betona u ranoj fazi [S.9]. Međutim, kod betona visokih čvrstoća skupljanje raste s rastom sadržaja letećeg pepela [G.14].

4.2.2. Modeli skupljanja betona

Prethodno je rečeno koji sve faktori utječu na skupljanje betona, te možda u tome leži razlog zašto ne postoji opće prihvaćeni model skupljanja betona. Postoji više različitih modela skupljanja betona i u najvećem slučaju oni su vezani uz nacionalne propise. Ti modeli uglavnom se razlikuju po broju i tipu parametara koje uzimaju u obzir pri promatranju skupljanja. U ovom radu koristit će se model skupljanja betona prema Fib Model Codeu 2010 [F.1, H.6].

Najjednostavniji i najpogodniji način za promatranje puzanja i skupljanja betona je kad se oni zasebno promatraju. Ovakav pristup nije u potpunosti blizak stvarnom ponašanju jer ovi fenomeni nisu neovisni [K.3] što je ranije i spominjano, a može se vidjeti i s crteža 4.7. i 4.8. Međutim, greška koja se njime dobiva je zanemariva s praktičnog stajališta.

4.3. Puzanje betona

4.3.1. Općenito

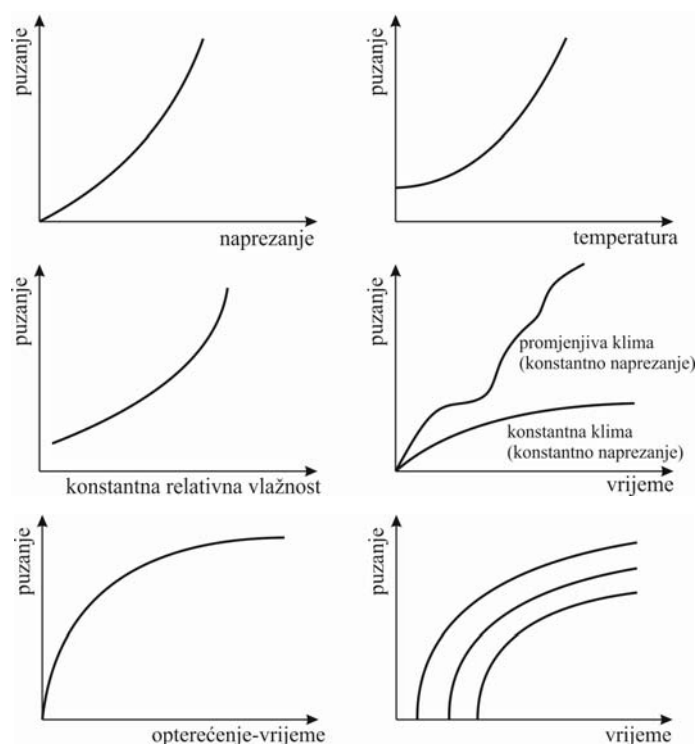
Već u uvodu u problematiku puzanja i skupljanja je rečeno kako puzanje predstavlja vremenski ovisnu deformaciju betona pod djelovanjem stalnog opterećenja, koja može biti nekoliko puta veća nego je početna deformacija [A.3, N.3]. Za jednostavne poprečne presjeke može se uzeti kako je porast deformacije u svakoj točki presjeka proporcionalan koeficijentu puzanja [G.9]. Uslijed tih deformacija može doći do preraspodjele naprezanja unutar armirano-betonskih i prednapetih konstrukcija koje bi mogle narušiti nosivost i stabilnost konstrukcija, te je iz toga razloga nedopustivo promatrati ponašanje konstrukcija zanemarujući deformaciju puzanja. Puzanje betona može se podijeliti u dvije komponente: (1) osnovno puzanje – koje se pojavljuje u uvjetima bez kretanja vlage iz, ili u okoliš i (2) puzanje sušenjem – dio puzanja koji se pojavljuje kada postoji kretanje vlage iz okoliša ili u okoliš. U svrhu praktičnog projektiranja nepotrebno je razlikovanje osnovnog puzanja i puzanja sušenjem [M.2]. Puzanje sušenjem, pored otvaranja pukotina, ima najznačajniji utjecaj na nelinearno ponašanje konstrukcija, dok je utjecaj osnovnog puzanja na nelinearnost gotovo zanemariv [H.5].

Prema [A.3] postoje tri glavne grupe faktora koje utječu na pojavu puzanja: (1) sastav mješavine betona, (2) utjecaj okoline u kojoj se promatrana konstrukcija nalazi i (3) konstrukcijsko rješenje sustava.

Iako mehanizam puzanja još uvijek nije u potpunosti poznat, općenito se može reći da puzanje ovisi o osobini i količini cementne paste, te o svojstava agregata unutar betonske mješavine. Generalno govoreći, betonska mješavina s većim volumenom agregata (i njemu odgovarajućim smanjenjem sadržaja cementne paste) dovest će do pojave manje deformacije puzanja nego u slučaju da je sadržaj cementne paste veći. Isto tako, „krući“ agregat će nastojati više „obuzdati“ vremenski ovisno deformacijsko ponašanje, te samim time smanjiti efekt puzanja. Ako se u sastavu agregata nalaze agregati dobiveni od recikliranih betona, povećanje njihovog sadržaja u betonskoj mješavini dovodi do povećanja puzanja i skupljanja [G.4, S.4]. Uočeno je i to kako je deformacija puzanja obrnuto proporcionalna stupnju očvršćivanja cementa [N.5]. Također je poznato kako povećanje sadržaja vode [N.5] i zraka u betonskoj mješavini uzrokuje povećanje deformacije puzanja. Može se reći da je deformacija puzanja približno proporcionalna kvadratu vodo-cementnog faktora [L.4, N.5]. Također je poznato kako svježiji beton s boljim svojstvima osigurava niži stupanj razvoja puzanja i skupljanja, te se literatura [L.3] bavi tom problematikom i predlaže novi numerički pristup za predviđanje vremenski ovisnog tečenja svježeg betona utemeljen na metodi diskretnih elemenata.

Sljedeću grupu faktora koji utječu na ponašanje puzanja čine uvjeti okoline u kojoj je beton pripremljen, ugrađen i opterećen. Veličina puzanja je osobito osjetljiva na uvjete relativne vlažnosti uzorka betona. Povećanje relativne vlažnosti uzrokuje sporiji razvoj puzanja (crtež 4.6.), te samim time i manje konačno puzanje. Razvoj puzanja betona u vremenu također je ovisan o trajanju i tipu njegovanja betona. Tako je s povećanjem perioda njegovanja betona vlaženjem izravno povezan niži razvoj puzanja, dok je poznato kako njegovanje betona zaparivanjem smanjuje veličinu konačne deformacije puzanja do 30 % [A.2]. Puzanje je, također, vrlo osjetljivo na temperaturne uvjete, te je s višom temperaturom općenito povezano povećanje stupnja razvoja puzanja (crtež 4.6.).

Bitan faktor koji također utječe na razvoj deformacije puzanja je usvojeno konstrukcijsko rješenje. Veličina naprezanja u betonskom elementu linearno je povezana s deformacijom puzanja za vrijednosti naprezanja do približno 40 do 60 % tlačne čvrstoće [A.2]. Isto tako može se kazati da je deformacija puzanja obrnuto proporcionalna čvrstoći betona u trenutku opterećivanja [N.5]. Veličina i oblik betonskog elementa je drugi ključni faktor. Tanji betonski elementi će lakše dopustiti gubitak vlage u okolinu, te samim time doživjet će veću deformaciju puzanja nego deblji betonski elementi [N.5]. Također, vrlo važno je vrijeme opterećivanja. Betoni opterećeni u kasnijem periodu izloženi su manjoj ukupnoj deformaciji puzanja (desni prikaz na crtežu 4.6.). Tako npr. isti beton opterećen prvi dan ima 18% veću deformaciju puzanja nego beton opterećen treći dan [P.4].



Crtež 4.6. Puzanje i neki faktori koji utječu na njega [B.12, G.7]

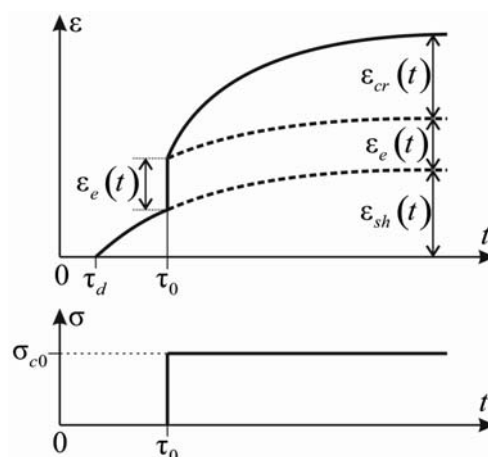
Kako je puzanje vremenska deformacija potrebno je uočiti da se približno 50 % od ukupne deformacije puzanja dogodi unutar 2 do 3 mjeseca od trenutka nanošenja opterećenja na konstrukciju, dok se oko 90 % ukupne deformacije puzanja dogodi nakon 2 do 3 godine od trenutka nanošenja opterećenja [G.7].

4.4. Ukupna dugotrajna deformacija betona

Ako se dugotrajno promatra neku proizvoljnu točku neke armirano-betonske ili prednapete konstrukcija pri konstantnoj temperaturi, njezina ukupna deformacija bit će jednaka zbroju početne deformacije $\varepsilon_e(t)$, deformacije puzanja $\varepsilon_{cr}(t)$ i deformacije skupljanja $\varepsilon_{sh}(t)$ (4.2):

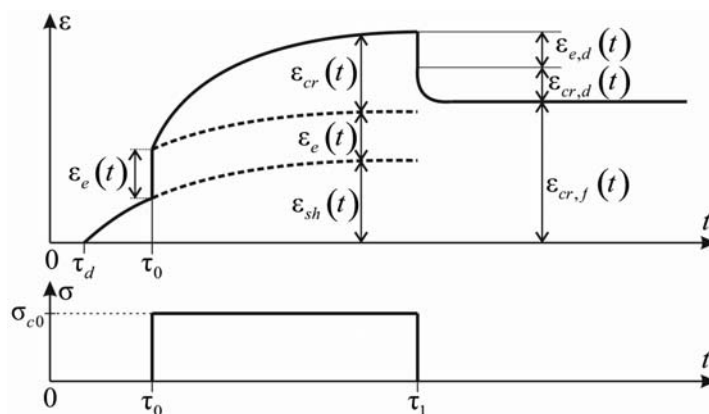
$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_{cr}(t) + \varepsilon_{sh}(t). \quad (4.2)$$

S crteža 4.7. vidljivo je kako se neposredno nakon očvršćivanja betona ili po završetku njegovanja betona (u trenutku $t = \tau_d$) započinje razvoj deformacije skupljanja, koja s vremenom konvergira nekoj konačnoj vrijednosti [G.7]. U trenutku $t = \tau_0$ na konstrukciju započinje djelovanje konstantnog dugotrajnog tlačnog naprezanja σ_{c0} i u tom trenutku događa se početna deformacija betona. Daljnjim promatranjem ponašanja u vremenu (trenutak $t > \tau_0$) uočava se postepeni rast deformacije puzanja.



Crtež 4.7. Komponente deformacije betona izloženog dugotrajnom naprezanju [G.7]

Ako bi se u nekom trenutku $t = \tau_1$ konstrukcija rasteretila u tom trenutku bi se dogodila trenutna povratna deformacija $\varepsilon_{e,d}(t)$, na koju bi se nastavila povratna deformacija puzanja $\varepsilon_{cr,d}(t)$ (trenutak $t > \tau_1$). Deformacija se ne vraća u potpunosti, nego i nakon rasterećenja ostaje dio nepovratne trajne (rezidualne) deformacije $\varepsilon_{cr,f}(t)$ (crtež 4.8.)

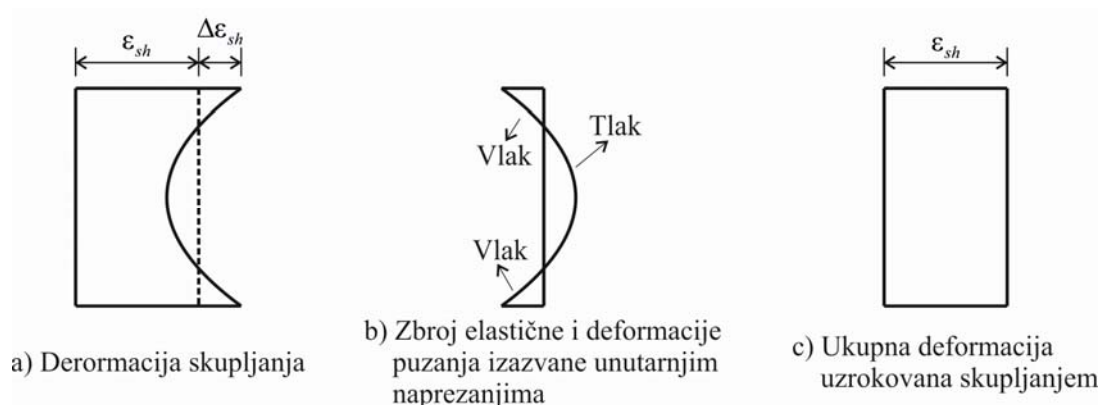


Crtež 4.8. Prikaz razvoja deformacije betona pri opterećivanju i rasterećivanju [G.7, I.2, K.3]

Početna deformacija se ne povraća u potpunosti ($\varepsilon_{e,d}(t) < \varepsilon_e(t)$) jer se modul elastičnosti betona povećava s vremenom, a time se povratni dio početne deformacija smanjuje [K.3].

Puzanje i skupljanje su nerazdvojna svojstva „zrelog“ betona, te se dosad govorilo o puzanju i skupljanju „zrelog“ betona. Međutim, puzanje betona može se dogoditi u „mladom“ i neopterećenom betonu, kao posljedica skupljanja betona [G.7, Z.4]. Na crtežu 4.9. prikazana je deformacija skupljanja po visini neopterećenog i nepridržanog poprečnog presjeka, gdje su sušenju izloženi gornji i donji rub presjeka [G.7]. Srednja veličina skupljanja ε_{sh} jednaka je prosječnom skraćenju (crtež 4.9.-a). Deformacija označena s $\Delta\varepsilon_{sh}$ predstavlja dio deformacije skupljanja koja uzrokuje unutrašnja naprezanja neophodna za uspostavljanje kompatibilnosti deformacija (crtež 4.9.-b). Ova unutrašnja samouravnotežavajuća naprezanja pojavljuju se u svim betonskim konstrukcijama, te su vlačnog karaktera u blizini plohe koja se suši, dok su tlačnog u unutrašnjosti elementa. Kako se skupljanjem izazvana unutrašnja naprezanja razvijaju vremenom, ona se neutraliziraju puzanjem. Štoviše, uskoro nakon započinjanja sušenja vlačna naprezanja u blizini plohe sušenja mogu premašiti vlačnu čvrstoću betona (pogotovo kod slabo njegovanih betona), što rezultira otvaranjem pukotina. Zbroj elastične i deformacije puzanja, uzrokovanih unutrašnjim naprezanjima, jednak je i suprotnog smjera deformaciji $\Delta\varepsilon_{sh}$ (crtež 4.9.-b). Ukupna raspodjela deformacija, dobivena zbrajanjem komponenti elastične deformacije, deformacije puzanja i deformacije skupljanja je linearna (crtež 4.9.-c), te zadovoljava kompatibilnost. Ako su uvjeti sušenja na gornjem i donjem rubu presjeka isti, ukupna deformacija je jednolična po visini poprečnog presjeka promatranog elementa i jednaka srednjoj vrijednosti deformacije skupljanja ε_{sh} . Ukoliko uvjeti sušenja nisu isti na gornjem i donjem rubu presjeka raspodjela ukupne deformacije po visini presjeka bit će neujednačena, te dolazi do pojave zakrivljenosti na presjeku.

Dvije najčešće veličine kojima se opisuje puzanje su koeficijent puzanja i funkcija puzanja.



Crtež 4.9. Komponente deformacije uzrokovane skupljanjem u betonskom presjeku [G.7]

4.4.1. Koeficijent puzanja i funkcija puzanja

Najčešći parametar kojim se prikazuje puzanje betona je koeficijent puzanja. On predstavlja odnos deformacije puzanja $\varepsilon_{cr}(t, \tau_0)$ u proizvoljnom trenutku t i početne deformacije $\varepsilon_e(\tau_0)$ u trenutku nanošenja vanjskog uporabnog opterećenja τ_0 (4.3). Na primjer, ako je koeficijent puzanja veličine 2 to znači da će konačni pomak neke točke konstrukcije biti 2 puta veći nego je početni pomak te točke.

$$\varphi(t, \tau_0) = \frac{\varepsilon_{cr}(t, \tau_0)}{\varepsilon_e(\tau_0)}. \quad (4.3)$$

Koeficijent puzanja može biti linearna funkcija $\varphi(t, \tau_0)$ ili neka nelinearna funkcija $\varphi_k(t, \tau_0)$. Kada naprezanja u betonu postanu prevelika, deformacija puzanja će se slabo opisati korištenjem linearnog koeficijenta puzanja $\varphi(t, \tau_0)$, te se u svrhu poboljšanja rezultata koristi nelinearni koeficijent puzanja $\varphi_k(t, \tau_0)$, koji se obično računa kao umnožak linearnog koeficijenta puzanja i nekog koeficijenta $F(\sigma_c, f_{cm})$ (prema izrazu 4.4), ovisnog o trenutnom naprezanju u betonu σ_c i tlačnoj čvrstoći betona f_{cm} :

$$\varphi_k(t, \tau_0) = \varphi(t, \tau_0) \cdot F(\sigma_c, f_{cm}). \quad (4.4)$$

O nelinearnom koeficijentu puzanja više riječi će biti u nastavku rada. Iz literature [V.2] vidljivo je kako puno bolje rezultate daje korištenje nelinearnog koeficijenta puzanja.

Funkcija puzanja je zbroj početne i deformacije puzanja u trenutku t izazvane djelovanjem jediničnog tlačnog naprezanja od vremena τ_0 . Funkcija puzanja jednaka je:

$$J(t, \tau) = \frac{1 + \varphi(t, \tau_0)}{E_c(\tau_0)} \quad (4.5)$$

Sređivanjem izraza (4.5) dobit će se koeficijent puzanja $\varphi(t, \tau_0)$ u ovisnosti od funkcije puzanja $J(t, \tau)$ i modula elastičnosti betona u trenutku nanošenja opterećenja $E_c(\tau_0)$:

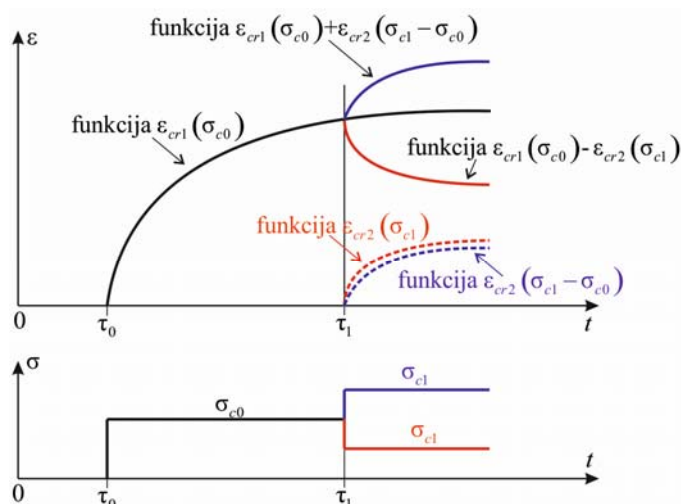
$$\varphi(t, \tau_0) = E_c(\tau_0) \cdot J(t, \tau) - 1. \quad (4.6)$$

Iz izraza (4.3) i (4.5) može se vidjeti kako su koeficijent puzanja i funkcija puzanja funkcije ovisne o vremenu promatranja i vremenu opterećivanja konstrukcije. Što se kasnije konstrukcija optereti i koeficijent puzanja i funkcija puzanja imat će manje vrijednosti (crtež 4.6.).

4.4.2. Načelo superpozicije

Načelo superpozicije koristi se za određivanje deformacije puzanja ako je naprezanje koje djeluje na promatranu konstrukciju promjenjivo. Ovim načelom se dva različita naprezanja u vremenu ponašaju kao dvije potpuno neovisne cjeline, tj. ako se promatra ponašanje deformacije pri trajanju nekog opterećenja σ_{c0} na nju nikakvog utjecaja nemaju naprezanja koja su trajala prije ili koja će se pojaviti nakon naprezanja σ_{c0} .

Ako u trenutku τ_0 počinje djelovanje tlačnog naprezanja σ_{c0} i traje do trenutka τ_1 , u kome dolazi do promjene tlačnog naprezanja na veličinu σ_{c1} onda će se ukupno ponašanje u bilo kome trenutku može odrediti zbrajanjem ili oduzimanjem (ovisno je li povećanje ili pad naprezanja koje djeluje na konstrukciju) nezavisno definiranih ponašanja uslijed jednog, odnosno drugog opterećenja (crtež 4.10.).



Crtež 4.10. Prikaz načela superpozicije

Načelo superpozicije daje dobro slaganje s eksperimentalnim rezultatima za slučaj rastućih i blago padajućih naprežanja, dok je kod potpunog rasterećenja povrat deformacije precijenjen [N.4]. Međutim, ovo se ne tretira kao ozbiljan nedostatak jer je u praksi rijedak slučaj iznenadnog potpunog rasterećenja [K.3].

4.5. Utjecaj puzanja i skupljanja na gubitak sile prednapinjanja

Ukupni gubitak sile prednapinjanja ΔP_{total} (4.7) čine komponente gubitka uslijed elastičnog skraćenja ΔP_e , klizanja u kotvi ΔP_{sl} , skupljanja betona ΔP_{sh} , puzanja betona ΔP_{cr} , relaksacije čelika ΔP_r i trenja $\Delta P_\mu(x)$:

$$\Delta P_{total} = \Delta P_e + \Delta P_{sl} + \Delta P_{sh} + \Delta P_{cr} + \Delta P_r + \Delta P_\mu(x). \quad (4.7)$$

Preuzeti numerički model ([G.2]) može obuhvatiti gubitke od elastičnog skraćenja (ΔP_e), klizanja u kotvi (ΔP_{sl}) i trenja $\Delta P_\mu(x)$. U ovom radu model je nadopunjen simulacijom gubitaka skupljanja ΔP_{sh} i puzanja ΔP_{cr} , dok gubici uslijed relaksacije čelika, ΔP_r , ostaju neobrađeni.

Gubici sile prednapinjanja uslijed skupljanja i puzanja u modelu Precon 3D dobit će se kao posljedica numeričkog postupka pri rješavanju osnove jednadžbe statike (4.76), dok će se ovdje prikazati postupak proračuna tih gubitaka i gubitaka uslijed relaksacije čelika prema pravilniku Eurocode 2 [E.1].

Zbrajanjem gubitaka sile prednapinjanja od skupljanja betona ΔP_{sh} , puzanja betona ΔP_{cr} i relaksacije čelika ΔP_r , dobije se ukupni gubitak sile prednapinjanja te tri komponente i on se označava s $\Delta P_t(t)$. Gubitak sile uzrokuje pad naprežanja u kablovima $\Delta \sigma_{p,c+s+r}$, koji se može izračunati formulom [E.1]:

$$\Delta \sigma_{p,c+s+r} = \frac{\varepsilon_s(t, \tau) \cdot E_s + \Delta \sigma_{pr} + \alpha \cdot \phi(t, \tau) \cdot (\sigma_{cg} + \sigma_{cpo})}{1 + \alpha \cdot \frac{A_p}{A_c} \cdot \left\{ \left(1 + \frac{A_c}{I_c} \cdot z_{cp}^2 \right) \cdot [1 + 0,8 \cdot \phi(t, \tau)] \right\}}, \quad (4.8)$$

gdje je:

$\Delta \sigma_{p,c+s+r}$ - ukupan pad naprežanja u kablovima uslijed skupljanja, puzanja i relaksacije u promatranom vremenskom intervalu $(t - \tau)$,

$$\alpha = \frac{E_s}{E_{cm}},$$

E_s - modul elastičnosti čelika za prethodno prednapinjanje,

E_{cm} - modul elastičnosti betona,

$\phi(t, \tau)$ - koeficijent puzanja,

σ_{cg} - naprezanje u betonu na kontaktu s kablovima, od vlastite težine i od drugih stalnih djelovanja,

σ_{cpo} - početno naprezanje u betonu na kontaktu s kablovima od prethodnog prednapinjanja,

A_p - površina svih kablova za prednapinjanje na lokaciji x,

A_c - površina betonskog presjeka,

I_c - moment tromosti površine poprečnog presjeka betona,

z_{cp} - udaljenost između težišta betonskog presjeka i težišta prednapetih kablova,

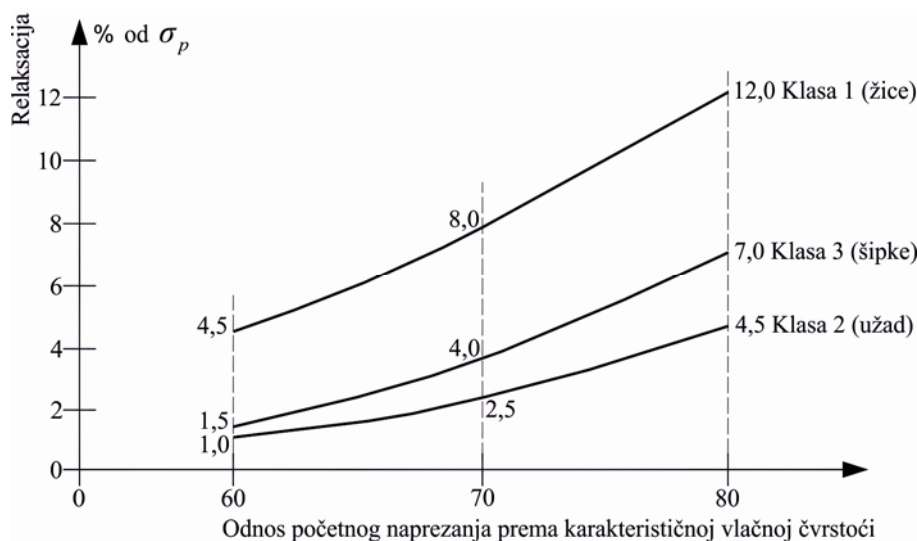
$\varepsilon_s(t, \tau)$ - procijenjena deformacija skupljanja, određena prema vrijednostima u tablici 4.1. za konačne vrijednosti deformacije skupljanja [E.1],

$\Delta\sigma_{pr}$ - promjena naprezanja u kablovima uslijed relaksacije u trenutku t. Ova promjena može se odrediti iz grafa na crtežu 4.11. [E.1]. Za odnos početno naprezanje/karakteristično

naprezanje zatezanja $\left(\frac{\sigma_p}{f_{pk}}\right)$ sračunava se prema izrazu:

$$\sigma_p = \sigma_{pgo} - 0,3 \cdot \Delta\sigma_{p,c+s+r}, \quad (4.9)$$

gdje je σ_{pgo} početno naprezanje u kablovima od prethodnog naprezanja i stalnih djelovanja. Radi pojednostavljenja u prethodnom izrazu se može zanemariti drugi član, što je na strani sigurnosti, a obično se može uzeti da je $\sigma_p = 0,85 \cdot \sigma_{pgo}$,



Crtež 4.11. Pad naprezanja uslijed relaksacije nakon 1000 sati, na temperaturi od 20°C [E.1]

Tablica 4.1. Konačne vrijednosti skupljanja $\varepsilon_{csoc}(u \text{ ‰})$ za beton normalne težine [E.1]

Sredina u kojoj je element	Relativna vlažnost RH (u ‰)	Karakteristična srednja debljina presjeka $2 \cdot A_c / u$ (u mm)	
		≤ 150	600
U zatvorenom prostoru	50	-0,60	-0,50
U otvorenom prostoru	80	-0,33	-0,28

U izrazu (4.8) na samom početku se mora pretpostaviti veličina ukupnog pada sile prednapinjanja $\Delta\sigma_{p,c+s+r}$ kako bi se mogao odrediti član $\Delta\sigma_{pr}$ na desnoj strani izraza (ovaj član ovisi od veličine konačne vrijednosti prethodnog prednapinjanja). Prema tome, potrebno je provesti iterativni postupak kojim bi se došlo do izjednačavanja obje strane izraza (4.8). Kada je određena veličina gubitka naprezanja uslijed puzanja, skupljanja i relaksacije $\Delta\sigma_{p,c+s+r}$, onda se može zapisati da je gubitak sile prednapinjanja uslijed istih efekata jednak (4.10):

$$\Delta P_t(t) = \Delta\sigma_{p,c+s+r} \cdot A_p. \quad (4.10)$$

4.6. Pregled modela puzanja betona iz literature

U literaturi postoji veliki broj modela kojima se simulira vremenski ovisno ponašanje betona. Općenito se ovi modeli mogu podijeliti u dvije grupe: mehanički i empirijski modeli. Mehaničke modele materijala čine modeli nastali povezivanjem u paralelnu ili serijsku vezu osnovnih reoloških modela (Hookov model ili model idealno elastičnog tijela, Newtonov model idealnog fluida i model idealno plastičnog Saint Venantovog materijala) [B.7, D.3, H.2, H.8, I.1, I.2, J.4, P.5]. Ovi modeli, nastali povezivanjem osnovnih reoloških modela, u mogućnosti su simulirati elastičnu, viskoznu i plastičnu deformaciju materijala. Modeli nastali najprostijim povezivanjem osnovnih reoloških modela dalje se mogu međusobno povezivati u paralelnu ili serijsku vezu, čineći time složenije modele.

Empirijski modeli su dobiveni kao rezultat znanstvenih laboratorijskih istraživanja, te daju empirijske izraze za određivanje koeficijenta puzanja i deformacije skupljanja. Ovi modeli su većinom vezani uz nacionalne propise i u nastavku je dan pregled jednog dijela tih modela.

4.6.1. AASHTO LRFD 2010

Američki državni ured za autoceste i transport daje izraz (4.11) za proračun koeficijenta puzanja [A.1]:

$$\psi(t, t_i) = 1,9 \cdot k_s \cdot k_{hc} \cdot k_f \cdot k_{td} \cdot t_i^{-0,118}, \quad (4.11)$$

gdje je:

$$k_s = 1,45 - 0,13 \cdot \frac{V}{S} \geq 1, \quad k_{hc} = 1,56 - 0,008 \cdot H, \quad k_f = \frac{5}{1 + f'_{ci}}, \quad k_{td} = \left(\frac{t}{61 - 4 \cdot f'_{ci} + t} \right). \quad (4.12)$$

U izrazima (4.11) i (4.12) je:

H - relativna vlažnost u %,

k_s - koeficijent kojim se daje utjecaj odnosa volumena i površine elementa,

k_f - koeficijent utjecaja čvrstoće betona,

k_{hc} - koeficijent vlažnosti za puzanje,

k_{td} - koeficijent vremenskog razvoja,

t - zrelost betona u danima, definirana kao starost betona između vremena opterećivanja betona za proračun puzanja, ili starost betona na kraju njegovanja betona za proračun skupljanja, i vremena promatranja pri proračunu puzanja ili skupljanja,

t_i - starost betona u danima pri opterećivanju,

$\frac{V}{S}$ - odnos volumena i površine i

f'_{ci} - specifična tlačna čvrstoća betona u psi (*pond on square inch*) u trenutku prednapinjanja kod prednapetih konstrukcija, odnosno u trenutku početnog opterećivanja kod armirano-betonskih konstrukcija. Ako je pri projektiranju nepoznata starost betona pri nanošenju početnoga opterećenja uzeti da je 80% od karakteristične tlačne čvrstoće betona koja se koristi pri projektiranju ($f'_{ci} = 0,8 \cdot f'_c$).

4.6.2. ACI 209R-92

ACI 209R-92 predstavlja modificirani empirijski model koji su razvili Branson i Christiason 1971. godine. Male modifikacije izvršene su u modelu ACI 209R-82 i posljednje u modelu koji se ovdje promatra. Ovaj model koeficijent puzanja računa prema izrazu (4.13) [A.3]:

$$\phi(t, t_0) = \frac{(t - t_0)^{\psi}}{d + (t - t_0)^{\psi}} \cdot \phi_u, \quad (4.13)$$

gdje je:

$\phi(t, t_0)$ - koeficijent puzanja betona starosti t zbog opterećivanja u trenutku t_0 ,

d (u danima) i ψ su konstantne veličine za određeni oblik i veličinu elementa koje definiraju promatrani vremenski korak,

$(t - t_0)$ - vrijeme prošlo od opterećivanja i

ϕ_u - konačni koeficijent puzanja.

Za uobičajene uvjete, u nedostatku podataka o lokalnim agregatima i uvjetima potrebnim za proračun puzanja, kao srednja predložena vrijednost za konačni koeficijent puzanja može se uzeti:

$$\phi_u = 2,35. \quad (4.14)$$

Za vremenski ovisne konstante d i ψ u izrazu (4.13) ACI 209R-92 predlaže slijedeće:

$$d = 10; \psi = 0,6. \quad (4.15)$$

Utjecaj oblika i veličine može biti potpuno uzet u obzir na promatrani vremenski korak promjenom konstantnih veličina na:

$$d = f; \psi = 1. \quad (4.16)$$

U izrazu (4.16) f je:

$$f = 2,6 \cdot e^{0,0142 \cdot \frac{V}{S}}. \quad (4.17)$$

U izrazu (4.17) V je volumen, a S površina.

Ako su uvjeti različiti od uobičajenih vrijednost konačnog koeficijenta puzanja treba korigirati prema izrazu (4.18):

$$\phi_u = 2,35 \cdot \gamma_c. \quad (4.18)$$

Iz izraza (4.18) veličina γ_c računa se prema slijedećem izrazu:

$$\gamma_c = \gamma_{c,t_0} \cdot \gamma_{c,RH} \cdot \gamma_{c,vs} \cdot \gamma_{c,s} \cdot \gamma_{c,\psi} \cdot \gamma_{c,\alpha}. \quad (4.19)$$

Koeficijenti iz izraza (4.19) računaju se prema izrazima (4.20) i (4.21):

$$\begin{aligned} \gamma_{c,t_0} &= 1,25 \cdot t_0^{-0,118} \text{ - za njegovanje vlaženjem,} \\ \gamma_{c,t_0} &= 1,13 \cdot t_0^{-0,094} \text{ - za njegovanje zaparivanjem,} \\ \gamma_{c,RH} &= 1,27 - 0,67 \cdot h \text{ za } h > 0,40, \\ \gamma_{c,vs} &= \frac{2}{3} \cdot \left(1 + 1,13 \cdot e^{-0,0213 \cdot \frac{V}{S}} \right), \\ \gamma_{c,s} &= 0,82 + 0,000264 \cdot s, \\ \gamma_{c,\psi} &= 0,88 + 0,0024 \cdot \psi, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{c,d} &= 1,14 - 0,00092 \cdot d \\ \gamma_{c,d} &= 1,14 - 0,00363 \cdot \frac{V}{S} \end{aligned} \right\} \text{ ako je } (t - t_0) \leq 1 \text{ godina,}$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{c,d} &= 1,10 - 0,00067 \cdot d \\ \gamma_{c,d} &= 1,10 - 0,00268 \cdot \frac{V}{S} \end{aligned} \right\} \text{ ako je } (t - t_0) > 1 \text{ godina,} \quad (4.21)$$

$$\gamma_{c,\alpha} = 0,46 + 0,09 \cdot \alpha \geq 1,$$

gdje je:

γ_c - ukupni korekcijski koeficijent,

γ_{c,t_0} - korekcijski koeficijent starosti betona,

$\gamma_{c,RH}$ - korekcijski koeficijent vlažnosti sredine,

h - relativna vlažnost prikazana kao decimalna veličina,

$\gamma_{c,vs}$ - korekcijski koeficijent ovisan o odnosu volumena i površine (volumen u mm³, površina u mm²),

$\gamma_{c,d}$ - korekcijski koeficijent ovisan o debljini presjeka ($d = 4 \cdot \frac{V}{S}$),

$\gamma_{c,s}$ - korekcijski koeficijent slijeganja - slump (gdje je s visina slijeganja betona u mm),

$\gamma_{c,\psi}$ - korekcijski koeficijent učešća finog agregata (gdje je ψ odnos finog agregata i ukupnog agregata) i

$\gamma_{c,\alpha}$ - korekcijski koeficijent sadržaja zraka (gdje je α sadržaj zraka u postotcima).

ACI 209R-92 funkciju puzanja $J(t, t_0)$ računa prema izrazu (4.22):

$$J(t, t_0) = \frac{1 + \phi(t, t_0)}{E_{cmto}}. \quad (4.22)$$

U izrazu (4.22) $\phi(t, t_0)$ predstavlja koeficijent puzanja, a E_{cmto} modul elastičnosti u trenutku opterećivanja t_0 (u MPa). Modu elastičnosti računa se prema izrazu (4.23):

$$E_{cmto} = 0,043 \cdot \gamma_c^{1,5} \cdot \sqrt{f_{cmto}}, \quad (4.23)$$

gdje je γ_c jedinična težina betona u $\frac{kg}{m^3}$, a f_{cmto} srednja tlačna čvrstoća betona u trenutku opterećivanja izražena u MPa. Opći izraz za pretpostavku tlačne čvrstoće betona u bilo kojem trenutku t dan je u izrazu:

$$f_{cmto} = \left(\frac{t}{a + b \cdot t} \right) \cdot f_{cm28}, \quad (4.24)$$

gdje je f_{cm28} srednja tlačna čvrstoća betona nakon 28 dana u MPa, t starost betona u promatranom trenutku, a a i b konstantne veličine. Ove konstantne veličine su u funkciji tipa ugrađenog cementa i tipa njege betona. Konstanta a kreće se u granicama od 0,05 do 9,25, a konstanta b od 0,67 do 0,98 [A.3].

4.6.3. AS 3600

AS 3600 je model puzanja betona iz australijskih propisa betonskih konstrukcija [A.8]. Osnovni koeficijent puzanja betona $\phi_{cc,b}$ predstavlja odnos deformacije puzanja betona i početne deformacije uzorka opterećenog nakon 28 dana konstantnim naprežanjem veličine $0,4 \cdot f'_c$. Osnovni koeficijent puzanja betona može biti određen:

- prema tablici 4.2.:

Tablica 4.2. Osnovni koeficijent puzanja [A.8]

Karakteristična tlačna čvrstoća betona (f'_c) u MPa	20	25	32	40	50	65	80	100
Osnovni koeficijent puzanja $\phi_{cc,b}$	4,5	3,8	3,0	2,4	2,0	1,7	1,5	1,3

- mjerenjima na sličnim lokalnim betonima i
- ispitivanjem u skladu s AS 1012.16 [A.8].

Projektni koeficijent puzanja ϕ_{cc} određuje se na temelju osnovnog koeficijenta puzanja $\phi_{cc,b}$ nekog prihvaćenog matematičkog modela puzanja prema izrazu:

$$\phi_{cc} = k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 \cdot k_5 \cdot \phi_{cc,b} \quad (4.25)$$

U izrazu (4.25) koeficijent k_2 i k_3 odrede se prema sljedećim izrazima:

$$k_2 = \frac{\alpha_2 \cdot t^{0,8}}{t^{0,8} + 0,15 \cdot t_h} \quad (4.26)$$

$$k_3 = \frac{2,7}{1 + \log(\tau)}$$

U izrazima (4.25) i (4.26) sadržane veličine su: t starost betona u trenutku promatranja, t_h hipotetska debljina promatranog presjeka $\left(t_h = \frac{2 \cdot A}{u_e} \right)$, A površina poprečnog presjeka elementa

u mm², u_e opseg elementa izloženog vanjskom zraku u mm, k_3 koeficijent ovisan starosti betona τ u trenutku prvog opterećivanja, koeficijent k_4 jednak je 0,70 za suhu okolinu, 0,65 za unutrašnji prostor, 0,60 za temperaturne uvjete u unutrašnjosti zemlje i 0,50 za tropska ili primorska područja i k_5 je korekcijski koeficijent za betone visoke čvrstoće i računa se prema izrazu (4.27):

$$\begin{aligned} k_5 &= 1 && \text{ako je } f'_c \leq 50 \text{ MPa}, \\ k_5 &= (2 - \alpha_3) - 0,02 \cdot (1 - \alpha_3) \cdot f'_c && \text{ako je } 50 \text{ MPa} < f'_c \leq 100 \text{ MPa}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Veličine α_2 i α_3 u izrazima (4.26) i (4.27) računaju se iz izraza (4.28):

$$\alpha_2 = 1 + 1,12 \cdot e^{-0,008 \cdot t_h}, \quad \alpha_3 = \frac{0,7}{\alpha_2 \cdot k_4}. \quad (4.28)$$

4.6.4. Puzanje betona prema EC-2

Koeficijent puzanja betona prema EC-2 računa se prema izrazu [E.1]:

$$\phi(t, t_0) = \phi_o \cdot \beta_c(t - t_0), \quad (4.29)$$

gdje je:

ϕ_o - osnovni koeficijent puzanja koji se računa iz izraza (4.30):

$$\phi_o = \phi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0), \quad (4.30)$$

$\beta_c(t - t_0)$ - koeficijent kojim se opisuje razvoj puzanja u vremenu nakon opterećivanja, te se on računa prema izrazu (4.31):

$$\beta_c(t - t_0) = \left[\frac{t - t_0}{\beta_H + t - t_0} \right]^{0,3}, \quad (4.31)$$

t - starost betona (u danima) u promatranom trenutku i

t_0 - starost betona (u danima) u trenutku opterećivanja.

Veličine koje se pojavljuju u (4.30) i (4.31) računaju se prema izrazima (4.32):

$$\begin{aligned} \phi_{RH} &= 1 + \frac{1 - RH}{0,10 \cdot \sqrt[3]{h_0}}, \quad \beta(f_{cm}) = \frac{16,8}{\sqrt{f_{cm}}}, \\ \beta(t_0) &= \frac{1}{0,1 + t_0^{0,20}}, \quad h_0 = \frac{2 \cdot A_c}{u}, \\ \beta_H &= 1,5 \cdot \left[1 + (0,012 \cdot RH)^{18} \right] \cdot h_0 + 250 \leq 1500. \end{aligned} \quad (4.32)$$

U izrazima (4.30), (4.31) i (4.32) pojavljuju se slijedeće veličine:

f_{cm} - srednja tlačna čvrstoća betona starog 28 dana u MPa,

RH - relativna vlažnost sredine u %,

h_0 - srednja debljina presjeka elementa u mm, gdje je A_c površina poprečnog presjeka u mm² a u opseg presjeka u dodiru s atmosferom u mm,

ϕ_{RH} - koeficijent kojim se u obzir uzima utjecaj relativne vlažnosti na osnovni koeficijent puzanja,

$\beta(f_{cm})$ - koeficijent kojim se uzima u obzir utjecaj čvrstoće betona na osnovni koeficijent puzanja,

$\beta(t_0)$ - koeficijent kojim se uzima u obzir utjecaj starosti betona u trenutku opterećivanja na osnovni koeficijent puzanja,

$(t - t_0)$ - stvarno trajanje opterećenja u danima i

β_H - koeficijent koji zavisi od relativne vlažnosti zraka.

Utjecaj vrste cementa na koeficijent puzanja betona može se uzeti u obzir korekcijom starosti betona u trenutku opterećivanja prema izrazu (4.33):

$$t_o = t_{0,T} \cdot \left(\frac{9}{2 + t_{0,T}^{1,2}} + 1 \right)^\alpha \geq 0,5, \quad (4.33)$$

gdje je:

$t_{0,T}$ - starost betona u trenutku opterećivanja (u danima) korigirana zbog promjena temperature u skladu s izrazom (4.34),

α - koeficijent koji zavisi od vrste cementa i može imati sljedeće vrijednosti:

$\alpha = -1$ → za cemente koji sporo očvršćivaju (S),

$\alpha = 0$ → za normalne cemente ili cemente koji brzo očvršćivaju (N i R) i

$\alpha = 1$ → za cemente visoke čvrstoće koji brzo očvršćivaju (RS).

Utjecaj povišenih ili sniženih temperatura u granicama od 0° do 80° na starenje betona može se uzeti u obzir korekcijom starosti betona prema izrazu (4.34):

$$t_T = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot e^{-\left(\frac{4000}{273+T(\Delta t_i)} - 13,65 \right)}, \quad (4.34)$$

gdje je:

t_T - starost betona (u danima) korigirana zbog promjene temperature kojom se zamjenjuje starost betona t u odgovarajućim izrazima,

$T(\Delta t_i)$ - temperatura u °C u vremenskom periodu Δt_i i

Δt_i - broj dana kada prevladava temperatura T .

Veličinu koeficijenta puzanja $\phi(t, t_0)$, danu u gornjem tekstu, treba koristiti s tangentnim modulom elastičnosti $E_{c28} = 1,05 \cdot E_{cm}$, gdje je E_{cm} srednja vrijednost sekantnog modula elastičnosti betona koja se odredi iz sljedećeg izraza:

$$E_{cm} = 9,5 \cdot \sqrt[3]{f_{ck} + 8}, \quad (4.35)$$

gdje je f_{ck} klasa čvrstoće betona koja odgovara čvrstoći betona pri starosti od 28 dana.

Srednja vrijednost promjene podataka o puzanju, danih u prethodnom tekstu, određena je iz banke podataka o rezultatima laboratorijskih ispitivanja, te iznosi oko 20%.

Kada je određen koeficijent puzanja $\phi(t, t_0)$ u ovisnosti o njemu može se izračunati i funkcija puzanja $J(t, t_0)$ prema izrazu:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\phi(t - t_0)}{E_{c28}}, \quad (4.36)$$

gdje je:

t_0 - vrijeme, odnosno starost betona, pri početnom opterećivanju (dani),

t - promatrani vremenski trenutak, odnosno starost betona u trenutku promatranja (dani),

$J(t, t_0)$ - funkcija puzanja u vremenu t ,

$E_c(t_0)$ - tangentni modul elastičnosti betona u trenutku opterećivanja t_0 ,

E_{c28} - tangentni modul elastičnosti betona pri starosti od 28 dana i

$\phi(t, t_0)$ - koeficijent puzanja, određen u odnosu na elastičnu deformaciju betona pri starosti od 28 dana dobivenu pomoću modula elastičnosti E_{c28} .

Ukupna deformacija betona, izloženog početnom naprezanju $\sigma(t_0)$ u trenutku t_0 i kasnijim promjenama naprezanja $\Delta\sigma(t_i)$ u trenucima t_i , može se prikazati izrazom [P.1]:

$$\varepsilon_{tot}(t, t_0) = \varepsilon_n(t) + \sigma(t_0) \cdot J(t, t_0) + \sum J(t, t_i) \cdot \Delta\sigma(t_i), \quad (4.37)$$

gdje je $\varepsilon_n(t)$ prisilna deformacija nezavisna od naprezanja (npr. skupljanje, temperaturni utjecaji).

Za potrebe analize konstrukcija izraz (4.37) može se napisati u obliku [P.1]:

$$\varepsilon_{tot}(t, t_0) = \varepsilon_n(t) + \sigma(t_0) \cdot J(t, t_0) + [\sigma(t) - \sigma(t_0)] \cdot \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\chi \cdot \phi(t, t_0)}{E_{c28}} \right], \quad (4.38)$$

gdje koeficijent starenja χ ovisi o razvoju deformacija tokom vremena. U uobičajenim slučajevima može se uzeti da je $\chi = 0,8$.

Ukoliko se naprezanja u betonu ne mijenjaju značajnije deformacije se mogu odrediti s pomoću efektivnog modula elastičnosti danog izrazom:

$$E_{c,eff} = \frac{E_c(t_0)}{1 + \phi(t, t_0)}. \quad (4.39)$$

4.6.5. Fib Model Code 2010

Fib Model Code 2010 predstavlja nastavak poboljšanja CEB/FIP Model Codea 1978 i CEB/FIP Model Codea 1990. Ovim modelom dana je nova i poboljšana formulacija dugotrajnog vremenski ovisnog ponašanja betona. CEB/FIP Model Code 1990 predstavljao je poboljšanje CEB/FIP Model Codea 1978, a fib Model Codeom 2010 uklonjene su sve nedosljednosti koje su postojale u CEB/FIP Model Codeu 1990. Fib Model Code 2010 puzanje betona promatra kroz dvije komponente puzanja: osnovno puzanje i puzanje nastalo sušenjem. Ovim modelom funkcija puzanja dana je izrazom [F.1, H.6, H.12, M.5]:

$$J(t, t') = \frac{1}{E(t')} + \frac{1}{E_{28}} \cdot [\varphi_{bc}(t, t') + \varphi_{dc}(t, t')], \quad (4.40)$$

gdje je:

$\varphi_{bc}(t, t')$ - dio koeficijenta puzanja koji se odnosi na osnovno puzanje,

$\varphi_{dc}(t, t')$ - dio koeficijenta puzanja koji se odnosi na puzanje sušenjem,

t - starost betona u trenutku promatranja,

$E(t')$ - modul elastičnosti betona u trenutku opterećivanja t' i

E_{28} - modul elastičnosti betona pri starosti 28 dana.

Ukupni koeficijent puzanja jednak je zbroju njegovih komponenti:

$$\varphi(t, t') = \varphi_{bc}(t, t') + \varphi_{dc}(t, t'). \quad (4.41)$$

Komponente koeficijenata puzanja, koje se pojavljuju u izrazima (4.40) i (4.41), određuju se prema izrazima (4.42) i (4.43):

$$\begin{aligned} \varphi_{bc}(t, t') &= \beta_{bc}(f_{cm}) \cdot \beta_{bc}(t, t'), \\ \beta_{bc}(f_{cm}) &= \frac{1,8}{(f_{cm})^{0,7}}, \quad \beta_{bc}(t, t') = \ln \left[\left(\frac{30}{t'_{adj}} + 0,035 \right)^2 \cdot (t - t') + 1 \right], \\ \varphi_{dc}(t, t') &= \beta_{dc}(f_{cm}) \cdot \beta(RH) \cdot \beta_{dc}(t') \cdot \beta_{dc}(t, t'), \\ \beta_{dc}(f_{cm}) &= \frac{412}{(f_{cm})^{1,4}}, \quad \beta(RH) = \frac{1 - \frac{RH}{100}}{\sqrt[3]{\frac{0,1 \cdot h}{100}}}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\beta_{dc}(t') = \frac{1}{0,1 + (t'_{adj})^{0,2}},$$

$$\beta_{dc}(t, t') = \left[\frac{(t - t')}{\beta_n + (t - t')} \right]^{\gamma(t')},$$

$$\gamma(t') = \frac{1}{2,3 + \frac{3,5}{\sqrt{t'_{adj}}}}, \quad (4.43)$$

$$\beta_n = 1,5 \cdot h + 250 \cdot \alpha_{f_{cm}} \leq 1500 \cdot \alpha_{f_{cm}},$$

$$\alpha_{f_{cm}} = \left(\frac{35}{f_{cm}} \right)^{0,5}, \quad h = \frac{2 \cdot A_c}{u}.$$

U izrazima (4.42) i (4.43) f_{cm} predstavlja srednju tlačnu čvrstoću betona u MPa nakon 28 dana, RH predstavlja relativnu vlažnost u %, u opseg presjeka elementa u dodiru sa zrakom u mm, A_c površina poprečnog presjeka elementa u mm² i t'_{adj} modificiranu starost pri opterećivanju prema sljedećem izrazu:

$$t'_{adj} = t'_T \cdot \left[\frac{9}{2 + (t'_T)^{1,2}} + 1 \right]^{\alpha_c} \geq 0,5 \text{ dana}, \quad (4.44)$$

gdje je t'_T temperaturno prilagođena starost betona koja se računa iz izraza u nastavku:

$$t'_T = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot e^{13,65 - \frac{4000}{273 + T(\Delta t_i)}}, \quad (4.45)$$

gdje je Δt_i broj dana do trenutka opterećivanja u kojima prevladava temperatura T (u °C), dok konstanta α_c u izrazu (4.44) ovisi o klasi cementa, te se za klasu cementa 32,5 N uzima $\alpha_c = -1$, za cimente klase 32,5 R i 42,5 N uzima se $\alpha_c = 0$ i za cimente klase 42,5 R, 52,5 N i 52,5 R uzima se $\alpha_c = 1$.

Funkcija osnovnog puzanja nije ograničena kada je $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_{bc}(t, t') = \infty$, dok za puzanje sušenjem postoji ograničenje $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_{dc}(t, t') = 1$.

Koeficijent puzanja dan izrazom (4.41) predstavlja linearni koeficijent puzanja i koristi se kada naprezanja u betonu iznose 40 % ili manje od tlačne čvrstoće betona u trenutku opterećivanja. U slučaju kada se naprezanja u betonu kreću u granicama $0,4 \cdot f_{cm}(t_0) \leq |\sigma_c| \leq 0,6 \cdot f_{cm}(t_0)$ proračun vremenski ovisnog ponašanja provodi se korištenjem nelinearnog koeficijenta puzanja, koji se dobije redukcijom koeficijenta puzanja iz izraza (4.41) prema sljedećem izrazu:

$$\varphi_k(t, t_0) = \varphi(t, t_0) \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{|\sigma_c|}{f_{cm}(t_0)} \right)^{2,7}}, \quad (4.46)$$

gdje su σ_c tlačno naprežanje u betonu i $f_{cm}(t_0)$ tlačna čvrstoća betona u trenutku opterećivanja. Koeficijenti nelinearnog puzanja predloženi u EC2 i Fib Model Codeu koriste se kada su naprežanja u nekoj točki veća od 40 % tlačne čvrstoće, dok se nelinearni koeficijent puzanja dan izrazom (4.46) može koristiti bez obzira na odnos trenutnog naprežanja naspram tlačne čvrstoće betona. Redukcijski koeficijent iskorišten u izrazu (4.46) predstavlja modifikaciju redukcijskog koeficijenta koga su predložili Radnić i Matešan [R.2].

4.7. Skupljanje betona prema Fib Model Code 2010

Za proračun skupljanja betona usvojen je model skupljanja prema Fib Model Codeu 2010 [F.1, M.2]. Ukupno skupljanje $\varepsilon_{cs}(t - t_s)$ dobije se kao zbroj komponenti autogenog skupljanja $\varepsilon_{cbs}(t)$ i skupljanja sušenjem $\varepsilon_{cds}(t, t_s)$ (crtež 4.12.):

$$\varepsilon_{cs}(t - t_s) = \varepsilon_{cbs}(t) + \varepsilon_{cds}(t, t_s). \quad (4.47)$$

Komponenta autogenog skupljanja određuje se prema izrazu:

$$\varepsilon_{cbs}(t) = \varepsilon_{cbs0}(f_{cm}) \cdot \beta_{bs}(t), \quad (4.48)$$

gdje $\varepsilon_{cbs0}(t)$ predstavlja koeficijent autogenog skupljanja i može se izračunati:

$$\varepsilon_{cbs0}(f_{cm}) = -\alpha_{bs} \cdot \left(\frac{0,1 \cdot f_{cm}}{6 + 0,1 \cdot f_{cm}} \right)^{2,5} \cdot 10^{-6}, \quad (4.49)$$

dok $\beta_{bs}(t)$ predstavlja vremensku funkciju koja se može prikazati:

$$\beta_{bs}(t) = 1 - e^{-0,2 \cdot \sqrt{t}}. \quad (4.50)$$

U prethodnim izrazima f_{cm} je tlačna čvrstoća betona starog 28 dana izražena u MPa, α_{bs} je koeficijent ovisan o tipu cementa (tablica 4.3.) i t je starost betona, odnosno promatrani vremenski period u danima.

Komponenta skupljanja sušenjem određuje se prema izrazu:

$$\varepsilon_{cds}(t, t_s) = \varepsilon_{cds0}(f_{cm}) \cdot \beta_{RH}(RH) \cdot \beta_{ds}(t - t_s), \quad (4.51)$$

gdje se koeficijent skupljanja sušenjem računa prema izrazu:

$$\varepsilon_{cds0}(f_{cm}) = \left[(220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \cdot e^{-\alpha_{ds2} \cdot f_{cm}} \right] \cdot 10^{-6}, \quad (4.52)$$

dok se koeficijentom $\beta_{RH}(RH)$ u obzir uzima utjecaj relativne vlažnosti okoline na pužanje. Koeficijent $\beta_{RH}(RH)$ računa se prema:

$$\beta_{RH}(RH) = \begin{cases} -1,55 \cdot \left[1 - \left(\frac{RH}{100} \right)^3 \right] & \rightarrow \text{za } 40 \leq RH < 99\% \cdot \beta_{s1}, \\ 0,25 & \rightarrow \text{za } RH \geq 99\% \cdot \beta_{s1}. \end{cases} \quad (4.53)$$

Vremenska funkcija $\beta_{ds}(t-t_s)$ opisuje razvoj skupljanja sušenjem u vremenu i dana je izrazom:

$$\beta_{ds}(t-t_s) = \left[\frac{(t-t_s)}{0,035 \cdot h^2 + (t-t_s)} \right]^{0,5} \quad (4.54)$$

Koeficijent β_{s1} u izrazu (4.53) jednak je:

$$\beta_{s1} = \left(\frac{35}{f_{cm}} \right)^{0,1} \leq 1. \quad (4.55)$$

U izrazima (4.51) do (4.55) pojavljuju se slijedeće veličine:

t - starost betona, odnosno vremenski promatrani period u danima,

t_s - starost betona na početku sušenja u danima,

$(t-t_s)$ - trajanje sušenja u danima,

α_{ds1} i α_{ds2} - koeficijenti ovisni o tipu cementa (tablica 4.3.),

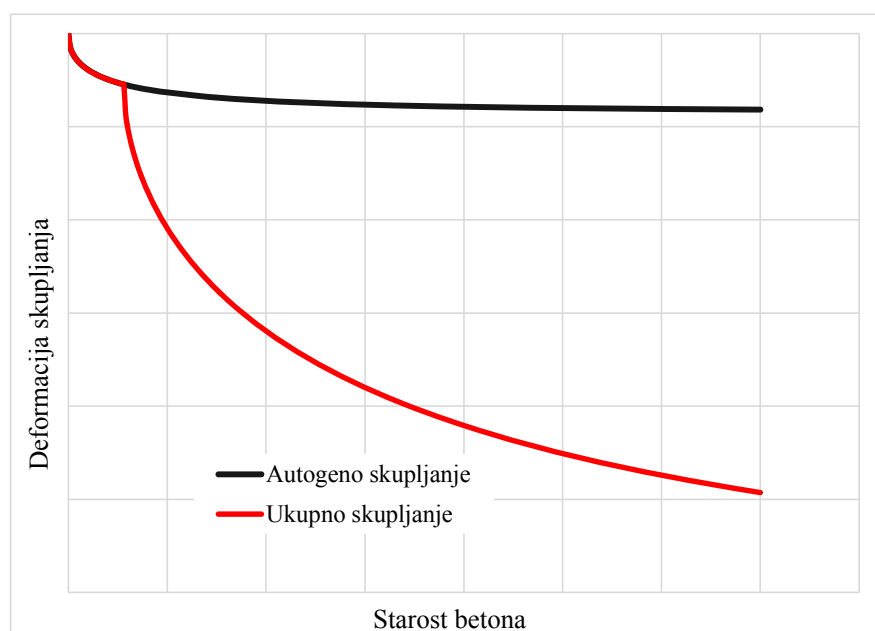
f_{cm} - tlačna čvrstoća betona nakon 28 dana izražena u MPa,

RH - relativna vlažnost okoline u %,

$h = \frac{2 \cdot A_c}{u}$, gdje je u opseg presjeka elementa u dodiru sa zrakom u mm, A_c površina poprečnog presjeka elementa u mm².

Tablica 4.3. Korišteni koeficijenti ovisni o tipu cementa [F.1]

Klasa cementa s obzirom na čvrstoću	α_{bs}	α_{ds1}	α_{ds2}
32,5 N	800	3	0,013
32,5 R; 42,5 N	700	4	0,012
42,5 R; 52,5 N; 52,5 R	600	6	0,012



Crtež 4.12. Razvoj deformacije skupljanja u vremenu, prema Fib Model Codeu

4.8. Numerički model puzanja betona

Kako je već više puta rečeno, u ovom radu nadograđen je postojeći numerički model Precon3D [G.1]. Postojeći model je omogućio nelinearnu 3D analizu armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija pod djelovanjem statičkih opterećenja bez uključenih dugotrajnih efekata. Cilj ovoga rada bio je nadograditi postojeći model, kako bi mogao simulirati i dugotrajno vremenski ovisno ponašanje armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija.

Kroz ovaj rad razvijen je numerički 3D model dugotrajnog vremenski ovisnog ponašanja betona zasnovan na korekciji trenutnih modula elastičnosti betona u pravcu glavnih naprezanja. Korekcija trenutnih modula elastičnosti betona dana je u ovisnosti od koeficijenta puzanja, a usvojen je proračun koeficijenta puzanja prema FIB Model Codeu 2010 [F.1, H.6, H.12, M.5]. Na osnovi izračunatog stanja glavnih naprezanja, koje odgovara vanjskim opterećenjima, i radnog dijagrama betona vrši se izračun trenutnog sekantnog modula elastičnosti za pravce glavnih tlačnih naprezanja i glavnih vlačnih naprezanja koja su manja od vlačne čvrstoće betona. Određivanje trenutnih sekantnih modula elastičnosti odnosi se na područje koje pripada određenoj Gauss točki. Kada su izračunati trenutni sekantni moduli elastičnosti betona pristupa se njihovoj korekciji s obzirom na usvojeni koeficijent puzanja, te se na taj način uvodi lokalna ortotropija betona u području svake Gauss točke. S dobivenim korigiranim modulima elastičnosti betona vrši se slaganje nove ortotropne matrice materijala, a koja dalje ulazi u matricu krutosti sustava. Kako bi se formirala matrica krutosti sustava neizbježno je prethodno izvršiti transformaciju ortotropne matrice materijala iz koordinatnog sustava glavnih naprezanja u

globalni koordinatni sustav konstrukcije. Kada je formirana nova matrica krutosti sustava vrši se analiza konstrukcije s novom matricom krutosti, te se dobiva novo stanje naprezanja i deformacija kao posljedica vremenski ovisnog ponašanja betona. Korekcija matrice materijala, a time i proračuna prirasta deformacije betona, vrši se u onim Gauss točkama u kojima postoji bar jedno tlačno naprezanje ili u Gauss točkama gdje su vlačna naprezanja manja od vlačne čvrstoće betona, tj. u onim Gauss točkama u kojima nije došlo do pojave pukotine.

4.8.1. Prostorno stanje naprezanja i deformacija

Kada se naprezanja, za određenu kombinaciju vanjskih sila, nalaze unutar početne površine tečenja pretpostavka je kako je beton homogen, linearan i izotropan materijal. Ako se beton promatra u tom području, vrijedi slijedeća veza između naprezanja i deformacija [H.19, L.6]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}, \quad (4.56)$$

gdje je E početni modul elastičnosti, ν Poissonov koeficijent i G modul posmika koji se, prema linearnoj teoriji, računa prema izrazu [H.19, L.6]:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}. \quad (4.57)$$

Najčešće se koristi inverzni oblik izraza (4.56) [H.19, L.6]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{E} \cdot (1 - \nu) & \hat{E} \cdot \nu & \hat{E} \cdot \nu & 0 & 0 & 0 \\ \hat{E} \cdot \nu & \hat{E} \cdot (1 - \nu) & \hat{E} \cdot \nu & 0 & 0 & 0 \\ \hat{E} \cdot \nu & \hat{E} \cdot \nu & \hat{E} \cdot (1 - \nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}, \quad (4.58)$$

gdje je \hat{E} „efektivni“ modul modificiran Poissonovim koeficijentom [H.19, L.6]:

$$\hat{E} = \frac{E}{(1 - 2 \cdot \nu) \cdot (1 + \nu)}. \quad (4.59)$$

Kako se korekcija modula elastičnosti vrši na razini svake Gauss točke u pravcima glavnih naprezanja, neophodno je uvesti ortotropni model materijala. Ortotropni model materijala podrazumijeva različita materijalna svojstva u tri glavna pravca. Ovi pravci se podudaraju s pravcima glavnih naprezanja i postaju glavni materijalni pravci.

Na osnovi izraza (4.56) za ortotropne materijale u prostornom stanju naprezanja može se napisati slijedeća veza [L.2]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix}, \quad (4.60)$$

ili skraćeno napisano:

$$\varepsilon = S_{ort} \cdot \sigma, \quad (4.61)$$

gdje su:

E_1 , E_2 i E_3 moduli elastičnosti u glavnim pravcima,

ν_{12} , ν_{21} , ν_{13} , ν_{31} , ν_{23} i ν_{32} Poissonovi koeficijenti u ravninama označenim brojevima u indeksu i

G_{12} , G_{23} i G_{31} moduli posmika u ravninama označenim brojevima u indeksu.

Poissonovi koeficijenti mogu se izračunati iz sljedećih izraza [L.2]:

$$\nu_{12} = \nu \cdot \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}, \quad \nu_{23} = \nu \cdot \sqrt{\frac{E_2}{E_3}} \quad \text{i} \quad \nu_{31} = \nu \cdot \sqrt{\frac{E_3}{E_1}}. \quad (4.62)$$

Kako bi se zadržala simetričnost matrice materijala, u slučaju kada je $i \neq j$, Poissonovi koeficijenti moraju zadovoljiti slijedeću relaciju [L.2]:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}. \quad (4.63)$$

Moduli posmika za ortotropni materijal računaju se prema slijedećem izrazu [L.2]:

$$G_{ij} = \frac{\sqrt{E_i \cdot E_j}}{2 \cdot (1 + \sqrt{\nu_{ij} \cdot \nu_{ji}})} \quad (4.64)$$

Inverzijom izraza (4.60) dobije se uobičajeni način izražavanja naprežavanja u ovisnosti od deformacija [L.2]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 \cdot (1 - \nu_{23} \cdot \nu_{32})}{\Delta} & \frac{E_2 \cdot (\nu_{12} + \nu_{32} \cdot \nu_{13})}{\Delta} & \frac{E_3 \cdot (\nu_{13} + \nu_{12} \cdot \nu_{23})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_1 \cdot (\nu_{21} + \nu_{31} \cdot \nu_{23})}{\Delta} & \frac{E_2 \cdot (1 - \nu_{13} \cdot \nu_{31})}{\Delta} & \frac{E_3 \cdot (\nu_{23} + \nu_{21} \cdot \nu_{13})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_1 \cdot (\nu_{31} + \nu_{21} \cdot \nu_{32})}{\Delta} & \frac{E_2 \cdot (\nu_{32} + \nu_{12} \cdot \nu_{31})}{\Delta} & \frac{E_3 \cdot (1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix}, \quad (4.65)$$

gdje je $\Delta = 1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21} - \nu_{23} \cdot \nu_{32} - \nu_{31} \cdot \nu_{13} - 2 \cdot \nu_{21} \cdot \nu_{32} \cdot \nu_{13}$.

Sada se može napisati matrica ortotropnog materijala za prostorno stanje naprežavanja [L.2]:

$$D_{ort} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 \cdot (1 - \nu_{23} \cdot \nu_{32})}{\Delta} & \frac{E_2 \cdot (\nu_{12} + \nu_{32} \cdot \nu_{13})}{\Delta} & \frac{E_3 \cdot (\nu_{13} + \nu_{12} \cdot \nu_{23})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_1 \cdot (\nu_{21} + \nu_{31} \cdot \nu_{23})}{\Delta} & \frac{E_2 \cdot (1 - \nu_{13} \cdot \nu_{31})}{\Delta} & \frac{E_3 \cdot (\nu_{23} + \nu_{21} \cdot \nu_{13})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_1 \cdot (\nu_{31} + \nu_{21} \cdot \nu_{32})}{\Delta} & \frac{E_2 \cdot (\nu_{32} + \nu_{12} \cdot \nu_{31})}{\Delta} & \frac{E_3 \cdot (1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} \end{bmatrix} = S_{ort}^{-1} \quad (4.66)$$

Poissonov koeficijent ν obično se kod betona kreće u granicama 0,15 do 0,22 [K.3]. Kada bi se pretpostavio porast Poissonova koeficijenta do gornje granice, onda bi za vrijednost

$\nu = 0,50$ modul stišljivosti $K = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}$ bio beskonačan, što nema fizikalno opravdanje.

Stoga se u numeričkoj analizi za gornju granicu Poissonova koeficijenta uzima veličina $\nu = 0,49$ [K.3].

4.8.2. Korekcija modula elastičnosti

Kada je riječ o ortotropnim materijalima teško je dobiti realne vrijednosti njihovih konstanti, te je neophodno zadovoljiti pozitivnost determinante matrice materijala D_{ort} kako bi materijal bio fizikalno moguć [K.3]. Pozitivnost determinante matrice materijala D_{ort} postiže se zadovoljavanjem sljedećih uvjeta [L.2]:

$$E_1 > 0, E_2 > 0, E_3 > 0, G_{12} > 0, G_{23} > 0, G_{31} > 0, \\ \nu_{12} \cdot \nu_{21} < 1, \nu_{23} \cdot \nu_{32} < 1, \nu_{31} \cdot \nu_{13} < 1 \text{ i } \Delta > 0.$$

Oblikom i sadržajem matrice D_{ort} potvrđuje se kako samo djelovanje naprezanja u smjeru ortotropnih osi ($\tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$) rezultira pojavom samo osnih deformacija, tj. ne pojavljuju se posmične deformacije, dok djelovanje samo posmičnih naprezanja izaziva pojavu samo posmičnih deformacija [K.3]. Konstatacija nepostojanja sprege između uzdužnih i posmičnih naprezanja/deformacija vrijedi uvijek kod izotropnih materijala, dok kod ortotropnih materijala vrijedi samo u slučaju kada je pravac djelovanja opterećenja paralelan materijalnim osima 1, 2 i 3 [K.3].

U općem slučaju, opterećenja na konstrukciju mogu djelovati pod bilo kojim kutom u odnosu na glavne osi, te je stoga neophodno izvršiti transformaciju matrice materijala D_{ort} iz materijalnog koordinatnog sustava u globalni koordinatni sustav. Transformacija se izvodi preko matrice transformacija dane u [G.1].

Numerički model Precon 3D, opisan u poglavljima 2 i 3, vrši iterativni proračun problema po inkrementima ili fazama opterećenja. Na kraju svake faze/inkrementa poznata su naprezanja i deformacije u svim Gauss točkama konstrukcije, odnosno poznata su i glavna naprezanja (koja se dobiju iz globalnih naprezanja) kao i njihovi pravci. Za ostvareno stanje naprezanja može se odrediti stanje deformacija u betonu, a na osnovi toga primjenjuje se odgovarajući postupak zavisno o tome je li beton u elastičnom području, području tečenja, vlačnog omekšavanja ili je došlo do otvaranja pukotina u pojedinim područjima.

S vremenom se povećava čvrstoća betona, a time se povećava i modul elastičnosti betona što je u literaturi poznato pod nazivom „starenje“ betona. Međutim, ako se vrši analiza konstrukcije pod djelovanjem kratkotrajnih opterećenja modul elastičnosti betona ovisi o stanju naprezanja. U dugotrajnoj analizi stanje naprezanja izazvano kratkotrajnim opterećenjem predstavljat će početno stanje naprezanja za dugotrajnu analizu. Stoga je neophodno poznavanje trenutnog modula elastičnosti $E^t(t_0)$, koji odgovara stanju naprezanja na početku promatranja dugotrajnog ponašanja. Trenutni modul elastičnosti $E^t(t_0)$ na početku promatranja dugotrajnog

ponašanja odredit će se na osnovi radnog dijagrama betona s crteža 2.1 u poglavlju 2. Na osnovi navedenog radnog dijagrama betona i poznatih glavnih naprezanja mogu se odrediti odgovarajuće trenutne deformacije. Kada je poznato glavno naprezanje u nekom pravcu i odgovarajuća mu trenutna deformacija dobivena iz radnog dijagrama betona, kao njihov odnos može se odrediti trenutni sekantni modul elastičnosti betona u tom pravcu. Ovakav proračun trenutnih sekantnih modula elastičnosti vrši se za svaku Gauss točku u pravcu sva tri glavna naprezanja. Za poznate pravce glavnih naprezanja u Gauss točkama, glavna naprežana (σ_1 , σ_2 i σ_3) i njima odgovarajuće deformacije (ε_1 , ε_2 i ε_3) određene iz radnog dijagrama betona, u određenom trenutku t , sada se mogu odrediti sekantni trenutni moduli elastičnosti $E_i^t(t)$ u pravcu glavnih naprezanja za svaku Gauss točku prema sljedećim izrazima:

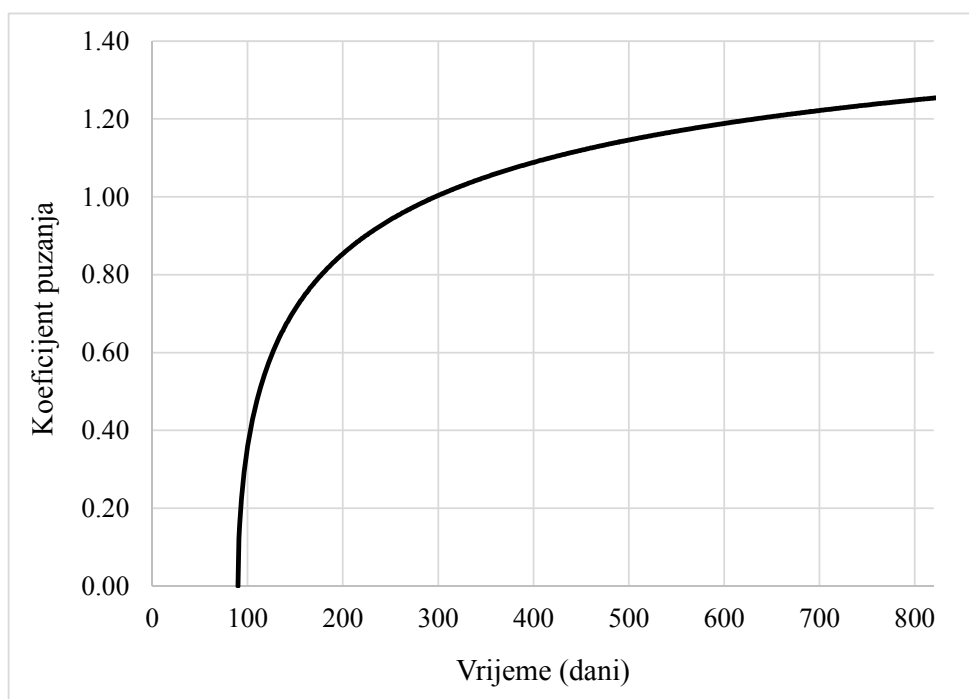
$$\begin{aligned} E_1^t(t_0) &= \frac{\sigma_1(t_0)}{\varepsilon_1(t_0)}; E_2^t(t_0) = \frac{\sigma_2(t_0)}{\varepsilon_2(t_0)}; E_3^t(t_0) = \frac{\sigma_3(t_0)}{\varepsilon_3(t_0)}; \\ E_1^t(t_1) &= \frac{\sigma_1(t_1)}{\varepsilon_1(t_1)}; E_2^t(t_1) = \frac{\sigma_2(t_1)}{\varepsilon_2(t_1)}; E_3^t(t_1) = \frac{\sigma_3(t_1)}{\varepsilon_3(t_1)}; \\ &\vdots \\ E_1^t(t_n) &= \frac{\sigma_1(t_n)}{\varepsilon_1(t_n)}; E_2^t(t_n) = \frac{\sigma_2(t_n)}{\varepsilon_2(t_n)}; E_3^t(t_n) = \frac{\sigma_3(t_n)}{\varepsilon_3(t_n)}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Veličina glavnih naprezanja [$\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ i $\sigma_3(t)$] dobije se u svakom trenutku t ($t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$) iz numeričke analize. Promjena glavnih naprezanja tijekom vremena u dugotrajnoj vremenskoj analizi deformacija, u odnosu na glavna naprežanja prije uključivanja dugotrajne vremenske analize deformacija, ne bi trebala biti velika niti bi trebalo doći do značajnije rotacije njihovih pravaca zbog utjecaja puzanja betona. Navedeno se u ovom modelu osigurava usvojenim modelom fiksnih ortogonalnih pukotina. Neka preraspodjela naprežanja će se sigurno dogoditi zbog utjecaja deformacije puzanja betona, i to ne samo na beton nego i na armaturu i kabele za prednapinjanje.

Prethodno je opisan postupak proračuna trenutnog sekantnog modula elastičnosti $E_i^t(t)$ u određenom trenutku t s obzirom na stanje naprežanja u betonu. Ovako proračunati modul elastičnosti odgovara stanju naprežanja u Gauss točkama za određeni trenutak t . Kako bi se simulirala pojava deformacija puzanja u betonu neophodno je, u svakoj Gauss točki u kojoj postoji bar jedno glavno tlačno naprežanje ili glavna vlačna naprežanja manja od vlačne čvrstoće betona, izvršiti korekciju trenutnog modula elastičnosti $E_i^t(t)$ u pravcu u kome postoji tlačno

naprezanje i vlačno naprezanje manje od vlačne čvrstoće betona. Na ovaj način se fiktivno uvodi ortotropija materijala na razini svake Gauss točke. Ako dođe do otvaranja pukotina u vlaklu onda se korigira modul elastičnosti uslijed pojave pukotina prema izrazima danim u poglavlju 2.

Po određivanju trenutnih sekantnih modula elastičnosti prema izrazima (4.67) vrši se njihova korekcija s obzirom na razvoj koeficijenta puzanja prema izrazu (4.39). Za proračun razvoja koeficijenta puzanja u vremenu usvojen je FIB Model Code 2010, gdje se koeficijent puzanja računa prema izrazima (4.41) do (4.46). Za usvojeni izraz proračuna koeficijenta puzanja u nastavku je prikazana promjena koeficijenta puzanja tijekom vremena (crtež 4.13.) za određena svojstva betona i ostalih faktora koji na njega utječu.



Crtež 4.13. Promjena koeficijenta puzanja tijekom vremena

Na osnovi izraza (4.39) sada se može računati korigirani modul elastičnosti $E_i^k(t)$ za pojedini glavni pravac i i pojedinu Gauss točku s tlačnim naprezanjima i vlačnim naprezanjima manjima od vlačne čvrstoće betona u proizvoljnom vremenskom trenutku t :

$$E_i^k(t) = \frac{E_i^t(t)}{1 + \varphi(t, t_0)} = E_i^t(t) \cdot B(t), \quad (4.68)$$

gdje je $i = 1, 2, 3$ promatrani pravac glavnih naprezanja, $E_i^k(t)$ korigirani modul elastičnosti betona u nekom trenutku t za neki glavni pravac i , $E_i^t(t)$ trenutni modul elastičnosti betona u promatranom trenutku t za isti glavni pravac i .

Vremenska funkcija $B(t) = \frac{I}{I + \varphi(t, t_0)}$ ovisi o koeficijentu puzanja i ista je za svaki glavni

pravac u određenom trenutku t .

Na ovakav način korigirani moduli elastičnosti betona ulaze u matricu materijala koja sada, za prostorno stanje naprezanja i određeni trenutak t , ima sljedeći oblik:

$$D_{ort} = \begin{bmatrix} \frac{E_1^k(t) \cdot (I - \nu_{23} \cdot \nu_{32})}{\Delta} & \frac{E_2^k(t) \cdot (\nu_{12} + \nu_{32} \cdot \nu_{13})}{\Delta} & \frac{E_3^k(t) \cdot (\nu_{13} + \nu_{12} \cdot \nu_{23})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_1^k(t) \cdot (\nu_{21} + \nu_{31} \cdot \nu_{23})}{\Delta} & \frac{E_2^k(t) \cdot (I - \nu_{13} \cdot \nu_{31})}{\Delta} & \frac{E_3^k(t) \cdot (\nu_{23} + \nu_{21} \cdot \nu_{13})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_1^k(t) \cdot (\nu_{31} + \nu_{21} \cdot \nu_{32})}{\Delta} & \frac{E_2^k(t) \cdot (\nu_{32} + \nu_{12} \cdot \nu_{31})}{\Delta} & \frac{E_3^k(t) \cdot (I - \nu_{12} \cdot \nu_{21})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} \end{bmatrix}. \quad (4.69)$$

Gornju matricu ortotropnog materijala treba transformirati iz materijalnog koordinatnog sustava u globalni koordinatni sustav koristeći matricu transformacija danu u [G.1]. Nakon transformacije matrica ortotropnog materijala u globalnom koordinatnom sustavu ima sljedeći oblik:

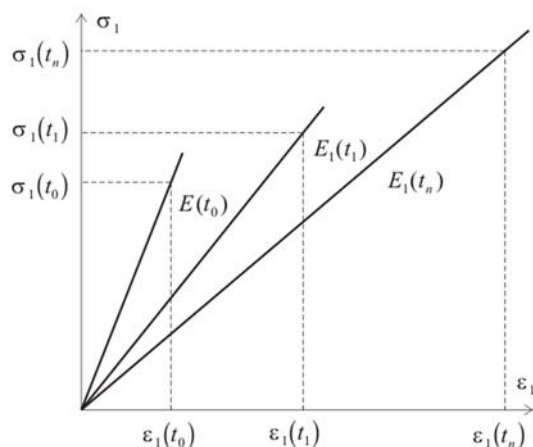
$$D = T \cdot D_{ort} \cdot T^T. \quad (4.70)$$

Ovako dobivena ortotropna matrica materijala za globalni koordinatni sustav ulazi u matricu krutosti konačnog elementa, s tim da ona vrijedi samo u području koje pripada određenoj Gauss točki u kojoj je bar jedno glavno naprezanje tlačno ili vlačno pri čemu je manje od vlačne čvrstoće betona. Ukoliko su u nekoj Gauss točki pojavljuju vlačna naprezanja koja su dosegla vrijednost vlačne čvrstoće betona, onda u njenom području treba koristiti matricu raspucanog betona. U tom slučaju redukcija modula elastičnosti betona vrši se prema modelu vlačnog omekšavanja [G.1] opisanog u poglavlju 2.

Sada se mogu izračunati deformacije puzanja u glavnim pravcima kako slijedi:

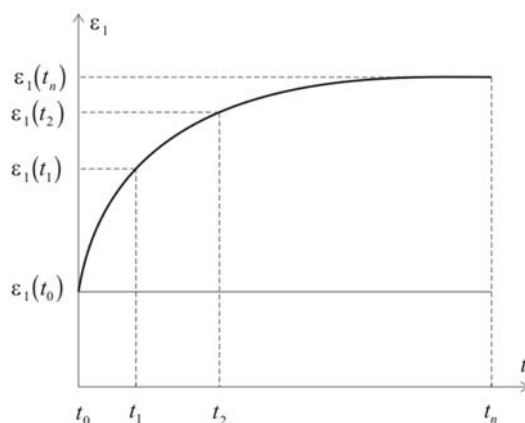
$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t_1) &= \sigma_1(t_1) \cdot \frac{\varphi(t_1, t_0)}{E_1^k(t_1)}; \quad \varepsilon_2(t_1) = \sigma_2(t_1) \cdot \frac{\varphi(t_1, t_0)}{E_2^k(t_1)}; \quad \varepsilon_3(t_1) = \sigma_3(t_1) \cdot \frac{\varphi(t_1, t_0)}{E_3^k(t_1)}; \\ \varepsilon_1(t_2) &= \sigma_1(t_2) \cdot \frac{\varphi(t_2, t_0)}{E_1^k(t_2)}; \quad \varepsilon_2(t_2) = \sigma_2(t_2) \cdot \frac{\varphi(t_2, t_0)}{E_2^k(t_2)}; \quad \varepsilon_3(t_2) = \sigma_3(t_2) \cdot \frac{\varphi(t_2, t_0)}{E_3^k(t_2)}; \\ \varepsilon_1(t_n) &= \sigma_1(t_n) \cdot \frac{\varphi(t_n, t_0)}{E_1^k(t_n)}; \quad \varepsilon_2(t_n) = \sigma_2(t_n) \cdot \frac{\varphi(t_n, t_0)}{E_2^k(t_n)}; \quad \varepsilon_3(t_n) = \sigma_3(t_n) \cdot \frac{\varphi(t_n, t_0)}{E_3^k(t_n)}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Trenutni moduli elastičnosti, u funkciji glavnih naprezanja i trenutnih deformacija dobivenih iz radnog dijagrama betona, u jednom glavnom pravcu (analogan oblik imaju i za druga dva glavna pravca) prikazani su na crtežu 4.14.

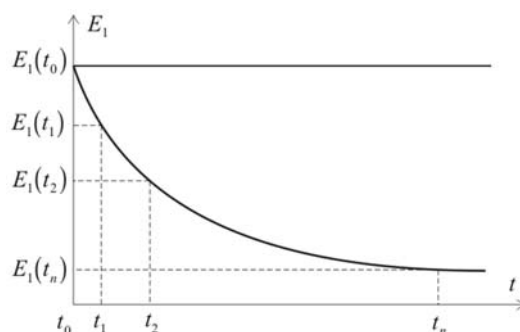


Crtež 4.14. Trenutni moduli elastičnosti u glavnom pravcu 1 [K.3]

Deformacija puzanja u glavnom pravcu 1 u funkciji vremena dana je na crtežu 4.15., dok je promjena korigiranog modula elastičnosti u pravcu 1 tijekom vremena dana na crtežu 4.16.



Crtež 4.15. Deformacija puzanja u glavnom pravcu 1 [K.3]



Crtež 4.16. Korigirani modul elastičnosti u glavnom pravcu 1 [K.3]

Na analogan način, ovakvi dijagrami se dobiju i za druga dva glavna pravca. Iz svega se može zaključiti kako je moguće izračunati korigirane module elastičnosti za bilo koji trenutak na osnovi poznatih glavnih naprezanja, radnog dijagrama betona u tlaku i koeficijenta puzanja u promatranom trenutku.

4.9. Numerički model skupljanja betona

Utjecaj skupljanja na ponašanje betonskih, armiranih i prednapetih konstrukcija zasniva se na simulaciji skupljanja pomoću temperaturnog opterećenja, tzv. termalnoj analogiji.

Dobro je poznato kako skupljanje betona i temperaturne promjene imaju vrlo sličan utjecaj na beton – uzrokuju pomake i deformacije ali ne i naprezanja na elementu koji se može slobodno deformirati [N.9, R.4]. Kod elemenata kojima su spriječeni pomaci pojavljuju se naprezanja bez pojave deformacija. Ova činjenica iskorištena je za razvoj numeričkog modela skupljanja koji se zasniva na termalnoj analogiji.

U prvom koraku izračuna se deformacija skupljanja promatrane armirane ili prednapete konstrukcije prema izrazu (4.47). Deformacija skupljanja dobivena na ovakav način predstavlja skalarnu veličinu i jednaka je u svim točkama za pravce svih glavnih naprezanja. Potom se računa temperaturna promjena T koja je potrebna za razvoj deformacije skupljanja iz izraza:

$$T = -\frac{\varepsilon_{cs}(t-t_s)}{\alpha}, \quad (4.72)$$

gdje je $\varepsilon_{cs}(t-t_s)$ veličina deformacije skupljanja u promatranom trenutku izračunata prema izrazu (4.47) a α je koeficijent linearnog temperaturnog istezanja betona. Temperaturno širenje i skupljanje betona varira ovisno o tipu agregata, sadržaju cementa, w/c odnosa, temperaturnoj promjeni, starosti betona i relativnoj ambijentalnoj vlažnosti. Od svih ovih faktora, najveći utjecaj na temperaturno širenje ili skupljanje betona ima tip agregata. Međutim, u praktične svrhe može se uzeti da je koeficijent linearnog temperaturnog istezanja betona konstantan i iznosi $1 \cdot 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$.

Za veličinu temperaturne promjene izračunate u izrazu (4.72) računa se stanje deformacija $\{\varepsilon_{sh}\}$ betonskog dijela konstrukcije, bez meke armature ili kablova za prednapinjanje (Crtež 4.3.–c). Deformacija skupljanja se zadaje u pravcu glavnih naprezanja, pri čemu su posmične deformacije jednake nuli [N.9].

$$\{\varepsilon_{sh}\} = [\alpha \cdot T \quad \alpha \cdot T \quad \alpha \cdot T \quad 0 \quad 0 \quad 0]. \quad (4.73)$$

Ovom stanju deformacija u promatranom trenutku odgovara stanje naprezanja koje se izračunava prema izrazu:

$$\{\sigma_{sh}\} = [D] \cdot \{\varepsilon_{sh}\}, \quad (4.74)$$

gdje je $[D]$ matrica materijala betona. Potrebno je napomenuti kako ova naprezanje ne postoje, te se koriste samo za izračun ekvivalentnih čvornih temperaturnih sila. Na temelju naprezanja izračunatih u izrazu (4.74) mogu se izračunati ekvivalentne čvorne temperaturne sile:

$$\{h_{sh}\} = \int_{V_e} B^T \sigma_{sh} dV_e, \quad (4.75)$$

gdje je B matrica deformacija, σ_{sh} vektor naprezanja izazvan razvojem deformacije skupljanja betona i V_e volumen po kojem se vrši integracija naprezanja. Ovako dobivene sile zadaju se kao vanjsko opterećenje (ekvivalentne temperaturne sile) na cjelovitu konstrukciju (uključujući meku armaturu ili kablove za prednapinjanje). Sile se zadaju u svim čvorovima konstrukcije.

Sada se može provesti analiza konstrukcije korištenjem standardne MKE-a, izraz (4.76):

$$[K] \cdot \{u\} = \{F\}, \quad (4.76)$$

gdje je $[K]$ matrica krutosti sustava koja može biti linearna ili nelinearna, $\{u\}$ vektor pomaka i $\{F\}$ vektor sila koje djeluju na sustav. Vektor sila $\{F\}$ je zbroj vektora svih vanjskih sila $\{p\}$ i ekvivalentnih čvornih temperaturnih sila $\{h_{sh}\}$:

$$\{F\} = \{p\} + \{h_{sh}\}. \quad (4.77)$$

Rješavanjem izraza (4.76) dobiva se vektor pomaka $\{u\}$ konstrukcije, iz kojega se onda izračunava vektor deformacija $\{\varepsilon\}$ konstrukcije. Vektor deformacija $\{\varepsilon\}$ predstavlja zbroj deformacija izazvanih djelovanjem vektora vanjskih opterećenja i deformacija izazvanih djelovanjem vektora ekvivalentnih temperaturnih čvornih sila (tj. deformacija izazvanih skupljanjem) – $\{\varepsilon_{s,sh}\}$ ako je riječ o simetrično armiranom presjeku ili $\{\varepsilon_{s1,sh}\}$ i $\{\varepsilon_{s2,sh}\}$ ako je riječ o nesimetrično armiranom presjeku (Crtež 4.3.–b i d). U daljnjem numeričkom postupku vektor deformacija skupljanja $\{\varepsilon_{s,sh}\}$, odnosno $\{\varepsilon_{s1,sh}\}$ i $\{\varepsilon_{s2,sh}\}$, zamjenjuje se s vektorom spriječenih deformacija skupljanja betona $\{\varepsilon_{c,sh}\}$, odnosno $\{\varepsilon_{c1,sh}\}$ i $\{\varepsilon_{c2,sh}\}$ (Crtež 4.3.–d i Crtež 4.3.–b). Za razliku od vektora deformacija skupljanja $\{\varepsilon_{s,sh}\}$ koji je vektor tlačnih deformacija, vektor spriječenih deformacija skupljanja $\{\varepsilon_{c,sh}\}$ predstavlja vektor vlačnih deformacija. Ova zamjena postiže se oduzimanjem vektora deformacija skupljanja $\{\varepsilon_{sh}\}$ izračunatog prema izrazu (4.73) od vektora ukupnih deformacija $\{\varepsilon\}$:

$$\{\varepsilon'\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon_{sh}\}. \quad (4.78)$$

Ovaj korak je vrlo važan jer vektor deformacija $\{\varepsilon'\}$ predstavlja stanje deformacija koje je jednako zbroju deformacija izazvanih djelovanjem vanjskog opterećenja i spriječenih deformacija skupljanja betona, te se preko njega vrši provjera otvaranja pukotine u odgovarajućem vremenskom trenutku. Ako bi se ta provjera vršila preko vektora deformacija $\{\varepsilon\}$, zbog veličine tlačne deformacije skupljanja $\{\varepsilon_{s,sh}\}$ ne bi se dobilo realno stanje pukotina.

Kada je poznat vektor deformacija sustava $\{\varepsilon\}$, iz njega se može izračunati vektor naprezanja $\{\sigma\}$. Ovako izračunata naprezanja ne predstavljaju stvarno stanje naprezanja. Skupljanje „čistog“ betona (bez meke armature ili kablova za prednapinjanje) uzrokuje samo razvoj deformacija bez prirasta naprezanja, tako se stvarno stanje naprezanja sustava $\{\sigma'\}$ dobije oduzimanjem naprezanja skupljanja $\{\sigma_{sh}\}$ izračunatih u izrazu (4.74) od naprezanja $\{\sigma\}$ dobivenih rješavanjem jednadžbe ravnoteže (4.76):

$$\{\sigma'\} = \{\sigma\} - \{\sigma_{sh}\}. \quad (4.79)$$

Vektori korigiranih deformacija $\{\varepsilon'\}$ i naprezanja $\{\sigma'\}$ betona moraju se koristiti kako bi se kontrolirala pojava i razvoj pukotina u vlaklu, odnosno tečenje betona u tlaku.

4.10. Korigirana matrica krutosti

Matrica krutosti konačnog elementa betona dana je općim izrazom:

$$k_{ij} = \int_{V_e} B_i^T D B_j dV_e, \quad (4.80)$$

ili u prirodnim koordinatama na jediničnom elementu:

$$k_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_i^T D B_j \det J d\xi d\eta d\zeta. \quad (4.81)$$

U matrici krutosti matrica materijala D je ortotropna na području koje pripada nekoj Gauss točki s najmanje jednim glavnim tlačnim naprezanjem ili vlačnim naprezanjem manjim od vlačne čvrstoće betona, a dana je izrazom (4.69). Ukoliko se u nekoj Gauss točki pojavi jedna, dvije ili tri pukotine onda se koristi matrica raspucanog betona.

4.11. Razvoj čvrstoće i modula elastičnosti betona tijekom vremena

Kako se analizira ponašanje betona tijekom vremena neophodno je poznavati razvoj čvrstoće i modula elastičnosti betona tijekom vremena. Za simulaciju razvoja čvrstoće i modula elastičnosti tijekom vremena u ovom radu iskorišteni su izrazi dani u literaturi [F.1].

Za srednju temperaturu 20°C i njegovanje betona u skladu s ISO 1920–3 tlačna čvrstoća betona u proizvoljnom vremenskom trenutku se računa prema izrazima (4.82) i (4.83):

$$f_{cm}(t) = \beta_{cc}(t) \cdot f_{cm}, \quad (4.82)$$

$$\beta_{cc}(t) = e^{s \left[1 - \left(\frac{28}{t} \right)^{0,5} \right]}, \quad (4.83)$$

gdje je $f_{cm}(t)$ srednja tlačna čvrstoća betona u proizvoljno promatranom trenutku t , f_{cm} srednja tlačna čvrstoća betona nakon 28 dana, $\beta_{cc}(t)$ funkcija kojom se opisuje vremenski razvoj tlačne čvrstoće tijekom vremena, t starost betona u proizvoljno promatranom trenutku i s koeficijent ovisan o klasi cementa, dan u tablici 4.4.

Razvoj vlačne čvrstoće betona tijekom vremena izračunava se prema istom izrazu.

Razvoj modula elastičnosti betona tijekom vremena računa se prema izrazima (4.84) i (4.85):

$$E_{ci}(t) = \beta_E(t) \cdot E_{ci}, \quad (4.84)$$

$$\beta_E = [\beta_{cc}(t)]^{0,5}, \quad (4.85)$$

gdje je $E_{ci}(t)$ modul elastičnosti betona u proizvoljno promatranom trenutku t , E_{ci} modul elastičnosti betona nakon 28 dana, $\beta_E(t)$ koeficijent kojim se opisuje razvoj modula elastičnosti betona tijekom vremena i t starost betona u proizvoljno promatranom trenutku.

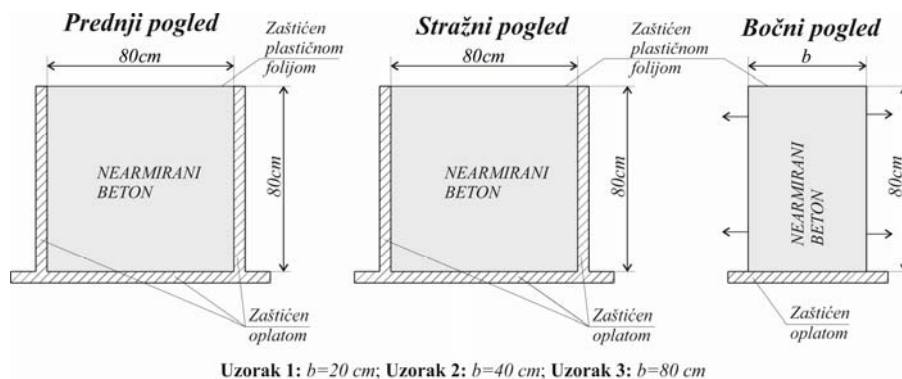
Tablica 4.4. Koeficijenti ovisni o tipu cementa korišten u izrazu (4.75) [F.1]

f_{cm} (MPa)	Klasa cementa s obzirom na čvrstoću	s
≤ 60	32,5 N	0,38
	32,5 R; 42,5 N	0,25
	42,5 R; 52,5 N; 52,5 R	0,20
> 60	sve klase cementa	0,20

5. PRIMJERI

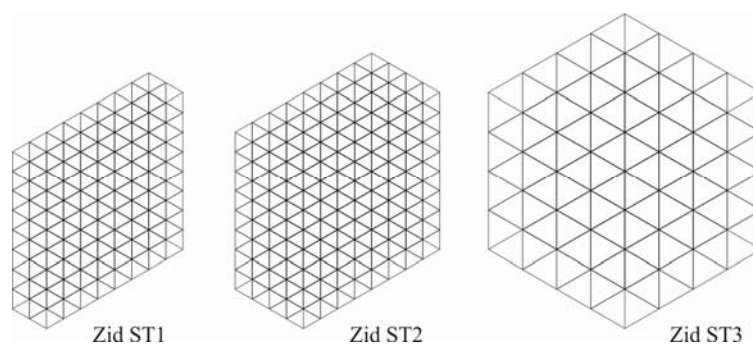
5.1. Primjer 1.

Eksperimentalni program, usredotočen na skupljanje betona sušenjem, započeo je 2012. godine na Građevinskom fakultetu CTU u Pragu. Dio rezultata spomenutog istraživanja objavljen je u literaturi [V.4, V.5]. U ovome radu preuzeti su rezultati istraživanja tri uzorka zida debljina (b) 200 mm, 400 mm i 800 mm, dok su visina i širina zida jednake, te iznose 800 mm (crtež 5.1.). Četiri strane zida su pridržane, te je time simulirano jednodimenzionalno skupljanje betona. Četiri vibrirajuće žice za mjerenje deformacija ugrađene su svaki uzorak zida za mjerenje skupljanja betona, te je mjerenje deformacija u betonu započelo tri sata nakon betoniranja. Zbog najčešće upotrebe korišten je beton C30/37, te su osnovni parametri betonske mješavine bili: vodo cementni faktor (w/c) 0,50; sadržaj cementa 360 kg/m^3 (Portland cement 42,5 R); sadržaj agregata 1760 kg/m^3 i maksimalna veličina agregata 16 mm. Tlačna čvrstoća betona, mjerena na valjku pri starosti 28 dana, iznosila je 55 MPa, dok je usvojen Youngov modul elastičnosti betona 35 GPa. U laboratoriju su pažljivo snimani ambijentalni uvjeti svakih pet minuta, te je srednja relativna vlažnost iznosila 39,1 %, dok je prosječna temperatura bila $21,5^\circ\text{C}$ za period od 552 dana.



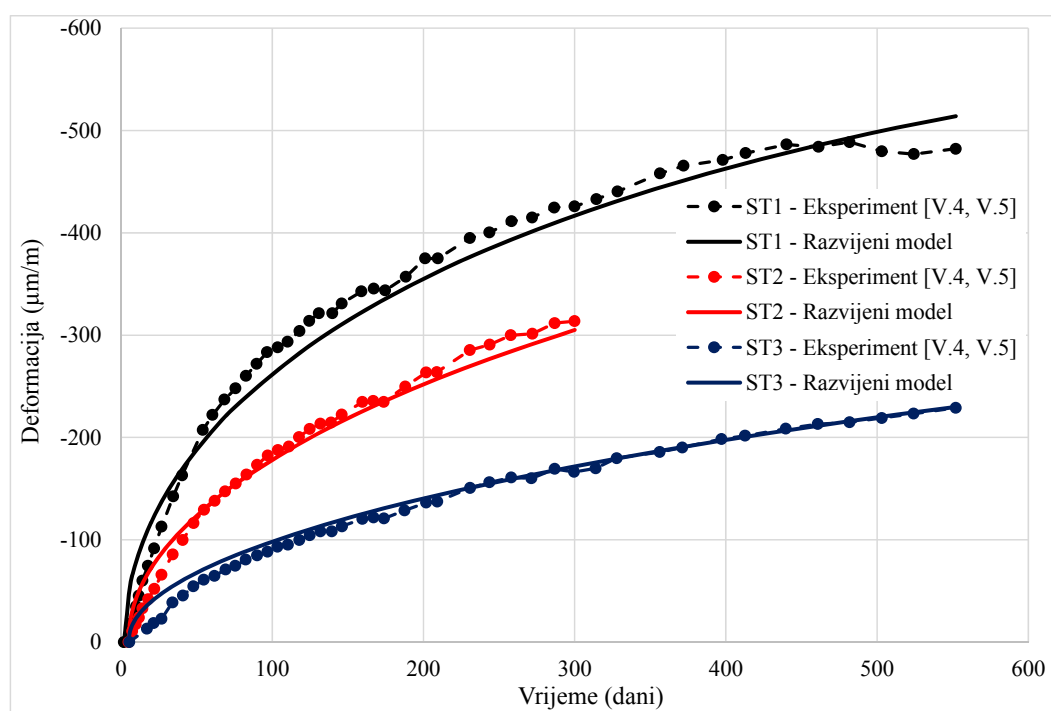
Crtež 5.1. Geometrijske karakteristike ispitivanih zidova

U literaturi [V.4, V.5] prikazani su eksperimentalni rezultati mjerenja deformacije skupljanja betona, koji su preuzeti u ovome radu za verifikaciju numeričkog modela Precon 3D. Uzorci zidova označeni su oznakama: ST1 (zid debljine 200 mm), ST2 (zid debljine 400 mm) i ST3 (zid debljine 800 mm). U navedenoj literaturi dani su rezultati skupljanja betona u trajanju 552 dana za zidove ST1 i ST3, te 300 dana za zid ST2. U numeričkom modelu Precon 3D zidovi ST1 i ST2 diskretizirani su mrežom prostorni 27-čvornih Lagrangeovih konačnih elemenata veličine $100 \times 100 \times 100 \text{ mm}$, dok je zid ST3 diskretiziran mrežom prostornih 27-čvornih konačnih elemenata veličine $200 \times 200 \times 200 \text{ mm}$ (crtež 5.2).



Crtež 5.2. Mreža konačnih elemenata analiziranih zidova

Usporedba rezultata dobivenih numeričkim modelom Precon 3D s eksperimentalnima, za sva tri tipa zida, dana je na crtežu 5.3.

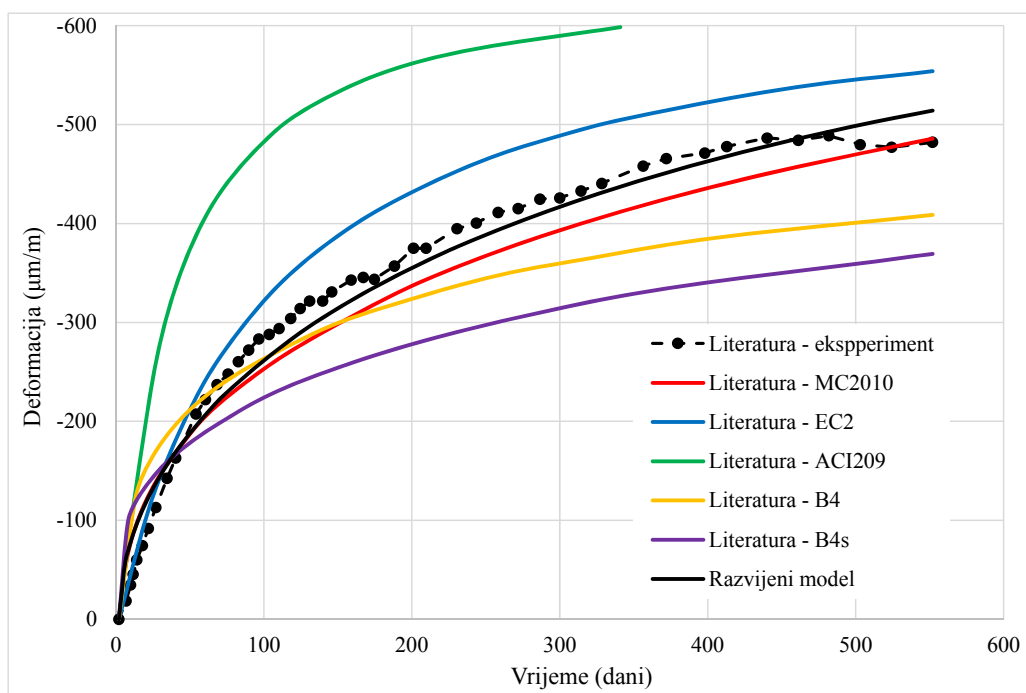


Crtež 5.3. Usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata

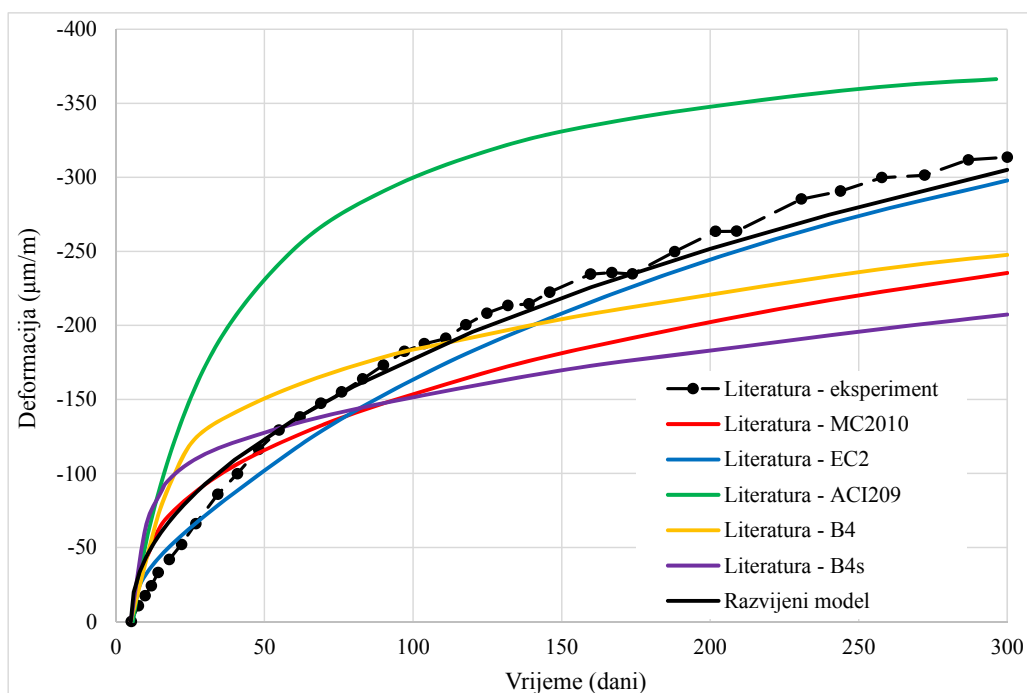
Na temelju rezultata prikazanih na crtežu 5.3. može se zaključiti kako numerički model Precon 3D daje vrlo dobro slaganje rezultata s eksperimentalnim. Najveća razlika rezultata dobije se u prvim danima skupljanja što se može prepisati činjenici kako model skupljanja Fib Model Code 2010 daje brži prirast deformacija u prvim danima, a potom on vremenom opada.

U literaturi [V.4, V.5] eksperimentalni rezultati su uspoređeni s rezultatima najvažnijih modela za predviđanje skupljanja betona: Model Code 2010, Eurocode 2, Model ACI 209 – R92, Model B4 i Model B4s. Postojanje rezultata drugih modela u ovome radu je iskorišteno kako bi se rezultati predviđanja deformacije skupljanja dobiveni numeričkim modelom Precon 3D

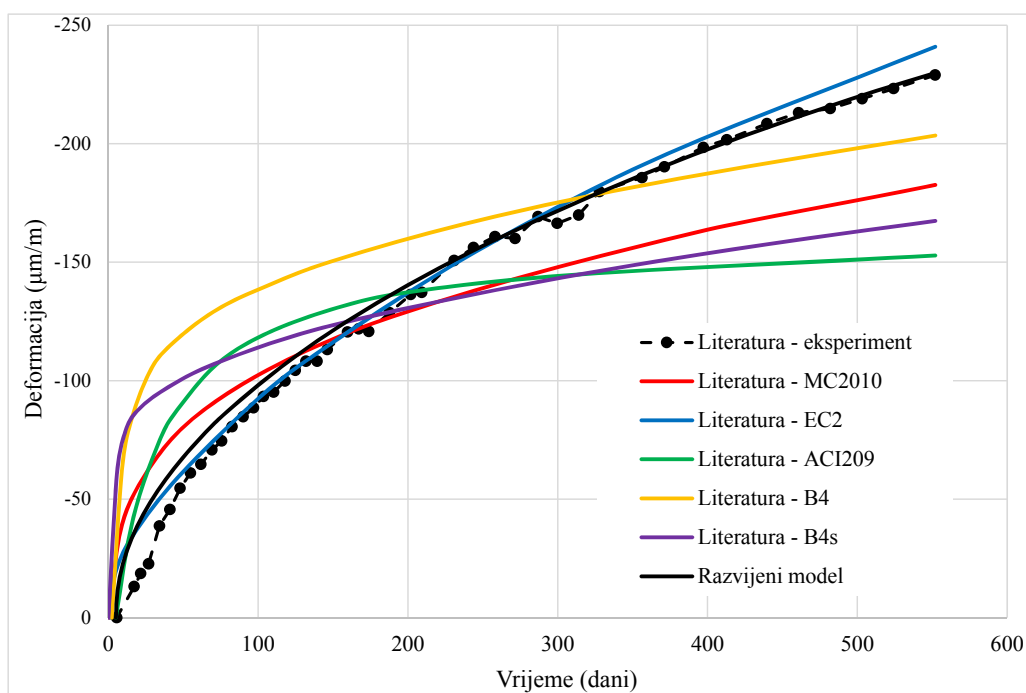
usporedili s rezultatima koje daju neki drugi modeli koji egzistiraju u literaturi. Tako se u nastavku daje usporedba rezultata, pojedinačno za svaki tip zida, dobivenih numeričkim modelom Precon 3D s eksperimentalnim rezultatima i rezultatima predviđenim modelima: Model Code 2010, Eurocode 2, Model ACI 209 – R92, Model B4 i Model B4s.



Crtež 5.4. Usporedba rezultata iz literature s onima dobivenim u Precon-u 3D za zid ST1



Crtež 5.5. Usporedba rezultata iz literature s onima dobivenim u Precon-u 3D za zid ST2



Crtež 5.6. Usporedba rezultata iz literature s onima dobivenim u Precon-u 3D za zid ST3

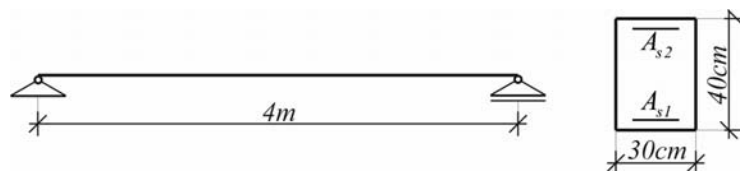
Iz prethodno prikazanih rezultata, pored toga što je zaključeno kako numerički model Precon 3D daje dobro slaganje rezultata s eksperimentalnima, evidentno je kako numerički model Precon 3D generalno daje bolje rezultate predviđanja deformacija skupljanja nego drugi modeli koji su prikazani u navedenoj literaturi. Ovdje se naglašava riječ „generalno“ jer neki drugi modeli daju bolje rezultate predviđanja u nekim periodima, pogotovo u ranoj fazi skupljanja. Međutim, jasno se može vidjeti kako u kasnijem periodu (recimo nakon 50 dana) razvijeni numerički model Precon 3D daje najbolje slaganje rezultata s eksperimentalnima.

Kako numerički model Precon 3D za proračun deformacije skupljanja koristi Model Code 2010, a daje bolje rezultate nego li su rezultati dobiveni Model Codeom u literaturi evidentno je kako pored modela skupljanja materijala utjecaj na razvoj deformacije ima i model ponašanja betona u tlaku, odnosno vlaknu. Može se zaključiti kako razvijeni model materijala prema literaturi [G.1] kojim se opisuje 3D nelinearno ponašanje betona i Model Code 2010 model skupljanja betona čine jednu izvrsnu kombinaciju za predviđanje deformacije skupljanja betona.

5.2. Primjer 2.

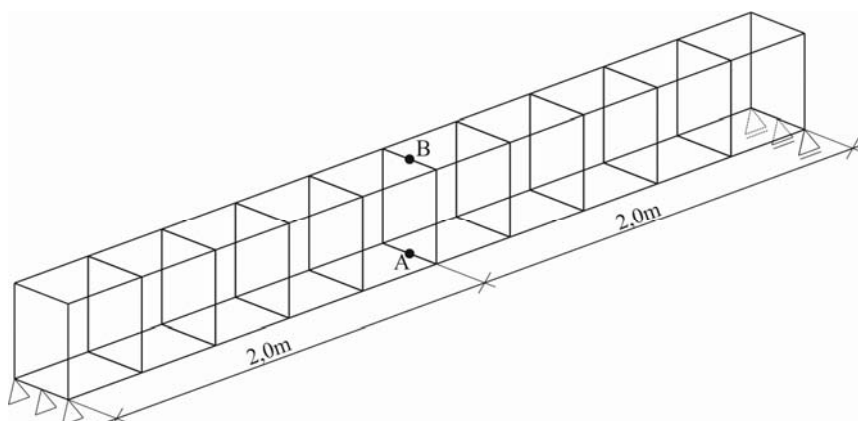
Da bi se dodatno testirale mogućnosti razvijenog programa u ovom primjeru analizirana je armirano betonska greda proizvoljno odabranih materijalno geometrijskih karakteristika (crtež 5.7.). Dimenzije grede su 400x30x40 cm, dok je usvojen Youngov modul elastičnosti betona 35 GPa, tlačna čvrstoća betona 50 MPa i vlačna čvrstoća betona 2,5 MPa. Usvojeni Youngov modul elastičnosti armature je 200 GPa, a usvojena granica popuštanja 450 MPa. Analiza ponašanja izvršena je za vremenski period od 360 dana, pri čemu je usvojena relativna ambijentalna vlažnost 85 % i starost betona na početku skupljanja 4 dana. Usvojen je cement klase 32,5 N. Analizirano je pet slučajeva armiranja grede:

- 1) Greda - B1 – Nearmirana betonska greda ($A_{s1}=A_{s2}=0,00\text{cm}^2$),
- 2) Greda - B2 – Simetrično armirana betonska greda ($A_{s1}=A_{s2}=24,8\text{cm}^2$),
- 3) Greda - B3 – Jednostruko armirana betonska greda ($A_{s1}=24,8\text{cm}^2$; $A_{s2}=0\text{cm}^2$),
- 4) Greda - B4 – Nesimetrično armirana betonska greda ($A_{s1}=24,8\text{cm}^2$; $A_{s2}=6,12\text{cm}^2$) i
- 5) Greda - B5 – Jednostruko armirana betonska greda ($A_{s1}=6,12\text{cm}^2$; $A_{s2}=0\text{cm}^2$).



Crtež 5.7. Usvojeni sustav za analizu

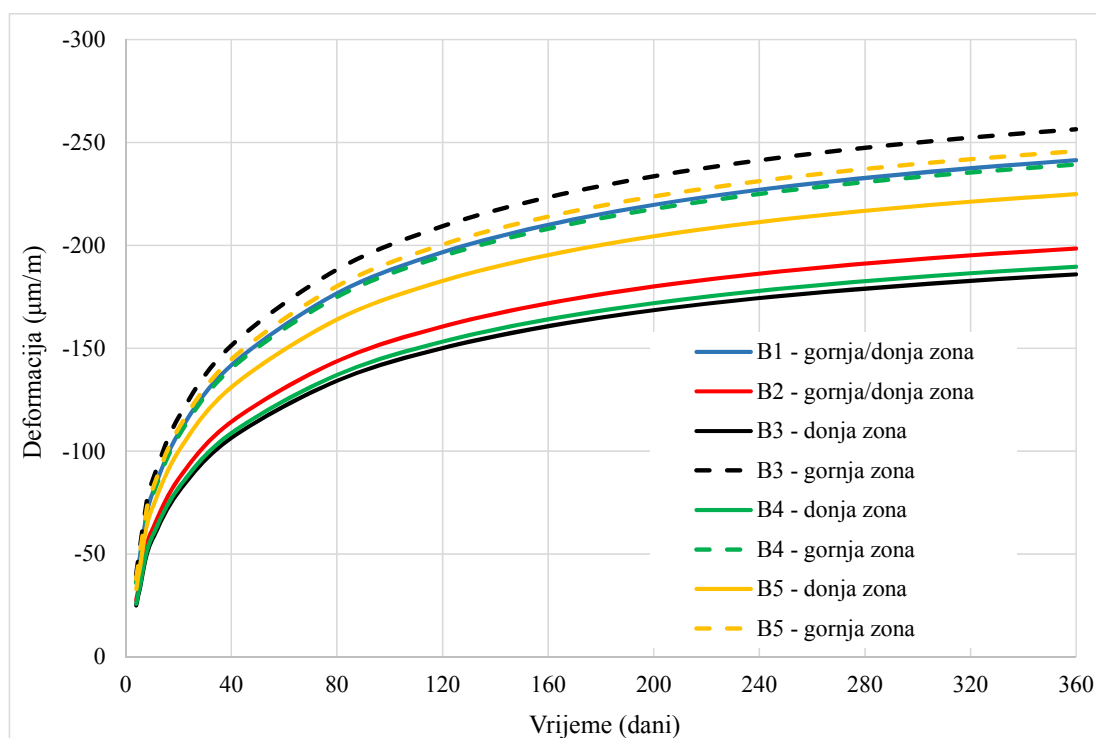
U numeričkom modelu Precon 3D greda je diskretizirana s 10 prostornih Lagrangeovih 27 – čvornih konačnih elemenata dimenzija 40x40x30 cm (crtež 5.8.).



Crtež 5.8. Diskretizacija grede mrežom konačnih elemenata

Za svih pet slučajeva armiranja analiziran je razvoj naprezanja i deformacija u Gauss točkama betona blizu polovice raspona grede, u gornjoj i donjoj zoni.

Na crtežu 5.9. dan je prikaz deformacija za svih pet slučajeva armiranja. S crteža je vidljivo kako su deformacije iste u gornjoj i donjoj zoni za slučaj simetrično armiranog ili nearmiranog betonskog presjeka, pri čemu su deformacije veće kod nearmiranog presjeka. To je zbog toga što armatura predstavlja ograničenje za razvoj deformacije skupljanja, odnosno u armaturi se pojavljuju tlačna naprezanja, koja se iste veličine, a suprotnog smjera (vlačnog), prenose na element betona (crtež 5.10.). Kod nearmiranog presjeka, za razliku od simetrično armiranog, razvoj deformacije skupljanja se odvija bez pojave ikakvih naprezanja u elementu betona. Kako su deformacije u obje zone iste tako nema pojave savijanja grede uslijed skupljanja.

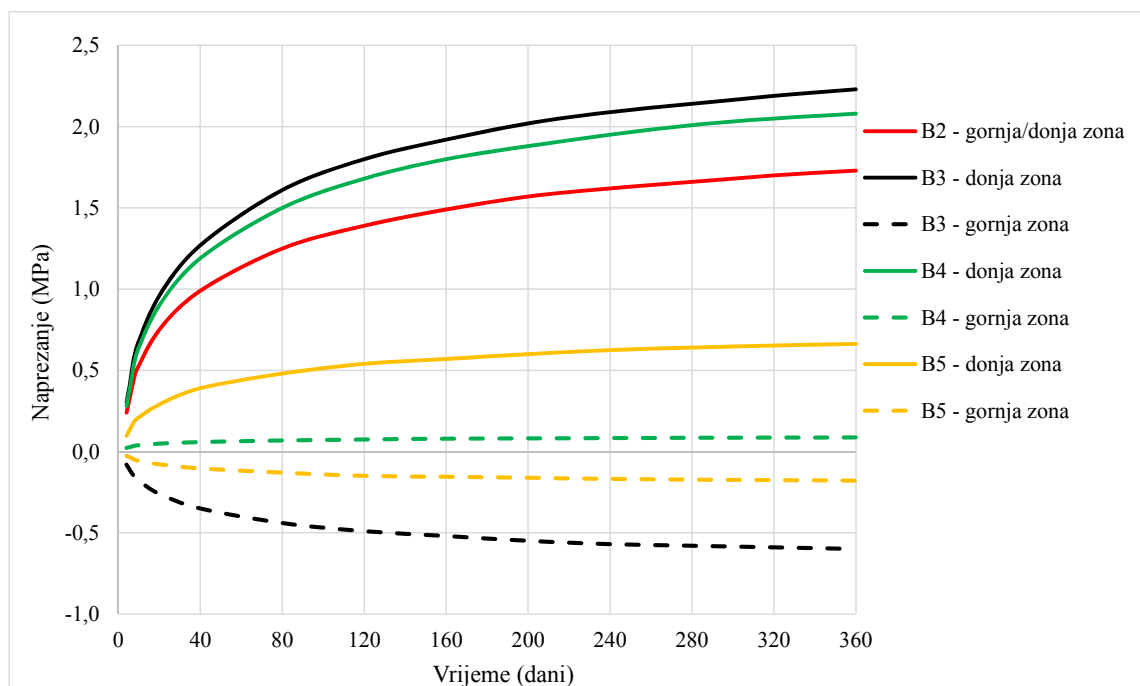


Crtež 5.9. Prikaz razvoja deformacije skupljanja kroz vrijeme

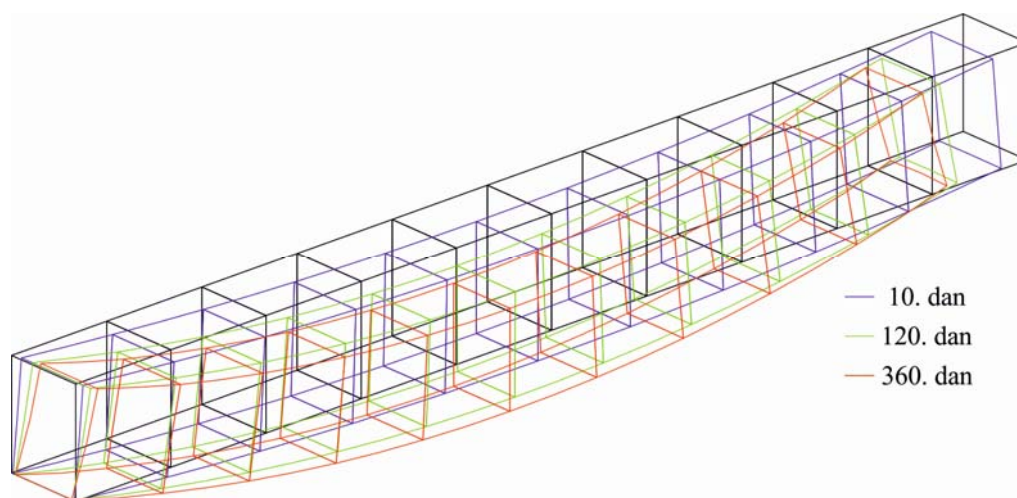
Kod jednostruko armiranog i nesimetrično armiranog betonskog presjeka pojavljuju se različite deformacije u gornjoj i donjoj zoni presjeka. Kod jednostruko armiranog presjeka, zbog postavljanja armature u donjoj zoni presjeka, razvija se manja deformacija skupljanja nego u gornjoj zoni presjeka (crtež 5.9.). Zbog skupljanja u armaturi donje zone pojavit će se tlačne sile koje će se na beton prenijeti kao vlačne sile, što dovodi do pojave momenta savijanja (oko težišta armiranobetonskog presjeka). Ovaj moment izaziva pojavu vlačnih naprezanja u donjoj zoni i tlačnih naprezanja u gornjoj zoni presjeka (crtež 5.10.).

Kod nesimetrično armiranog presjeka vlačna naprezanja se pojavljuju u obje zone betona, pri čemu su veća u onoj zoni u kojoj je skoncentrirana veća količina armature (crtež 5.10.). Isto tako su deformacije skupljanja manje u području veće koncentracije armature (crtež 5.9.). S crteža 5.10., također je vidljivo kako vlačna naprezanja betona, koja se pojavljuju kod armiranih presjeka, mogu doseći razinu vlačne čvrstoće betona te time dovesti do otvaranja pukotina u betonu. Vlačna naprezanja su veća što je veće ograničenje razvoja deformacije skupljanja, odnosno što je veća koncentracija armature u betonskom presjeku. Pojava razlike deformacija i naprezanja u gornjoj i donjoj zoni jednostruko i nesimetrično armiranih presjeka dovodi do savijanja grede, pri čemu se progib grede vremenom povećava (crtež 5.11.). Na crtežu je prikazan vremenski razvoj progiba grede tipa B3. Veličine progiba na polovici raspona grede su 0,18 mm za 10. dan, 0,38 mm za 120. dan i 0,47 mm za 360. dan. Iz navedenih veličina vidljivo je kako je prirast progiba znatno veći između 10. i 120. dana (oko 111 %) nego između 120. i 360. dana (oko 24 %).

Usporedbom rezultata jednostruko armiranih greda, B3 i B5, vidljivo je kako manja količina armature u armiranoj zoni predstavlja manje ograničenje za razvoj deformacije skupljanja, tj. razvija se veća deformacija skupljanja (crtež 5.9.), a posljedica toga je pojava manjih tlačnih sila u armaturi koje se na beton prenose kao vlačne sile (crtež 5.10.). Ovo će dovesti do manjeg momenta oko težišta armirano betonskog presjeka, a time će izazvati manja tlačna naprezanja u nearmiranoj i vlačna naprezanja u armiranoj zoni betona nego što su kod jače armiranih presjeka (crtež 5.10.).



Crtež 5.10. Prikaz razvoja naprezanja izazvanih skupljanjem kroz vrijeme



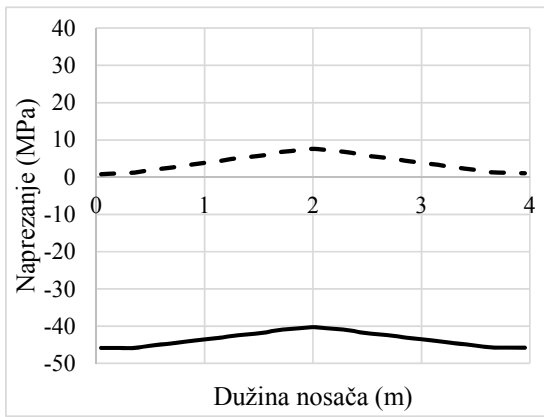
Crtež 5.11. Prikaz razvoja progiba jednostruko armirane grede (B3) tijekom vremena

Dalje se analizira greda B5 u slučaju da se 360. dan optereti kratkotrajnom vertikalnom silom na sredini raspona. Intenzitet sile se inkrementalno povećava od 0 kN do 180 kN. Utjecaji u armaturi i betonu dobiveni opterećivanjem nakon skupljanja uspoređuju se s onima koji se dobiju ako se zanemari utjecaj skupljanja.

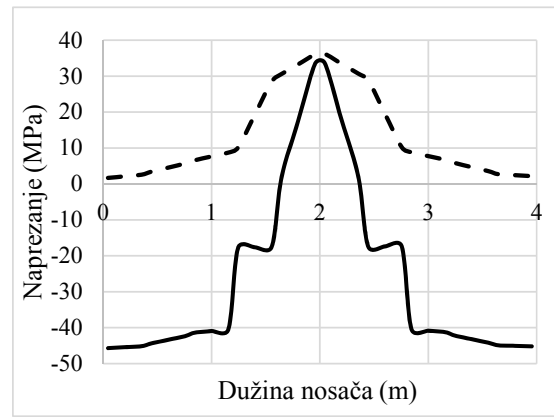
Na crtežu 5.12. prikazana je usporedba raspodjele naprezanja uzduž armaturne šipke za šest slučajeva vanjskog opterećenja: a) 15 kN, b) 30 kN, c) 45 kN, d) 90 kN, e) 135 kN i f) 180 kN.

Prije opterećivanja nosača, svakim danom skupljanja u armaturi će se povećavati tlačna naprezanja, koja će se potom smanjivati nanošenjem vanjskog opterećenja i u konačnici prijeći u vlačna naprezanja (crtež 5.12.). Dok se nosač nalazi u elastičnom području do tada će u armaturi biti tlačna naprezanja, pa se tako usporedbom rezultata pri vanjskoj sili od 15 kN (elastično područje ponašanja) može vidjeti kako su naprezanja u šipci vlačna ukoliko se zanemari skupljanje, odnosno tlačna ukoliko se skupljanje uzme u obzir (crtež 5.12.–a). Ova tlačna naprezanja su manja nego što su bila u trenutku neposredno pred opterećivanje nosača.

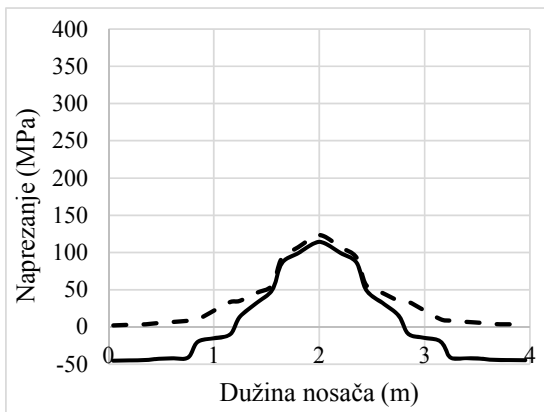
U AB nosaču prva pukotina se otvara na polovici raspona, tako da će i naprezanja u armaturi prijeći iz tlačnih u vlačna najprije na tome mjestu, dok će se uzduž šipke dalje od sredine raspona prema osloncima zadržati tlačna naprezanja (crtež 5.12.–b). Povećavanjem vanjskog opterećenja nelinearnost, odnosno raspucalost betona, postaje sve veća tako da se povećava i područje u kojem naprezanja prelaze iz tlačnih u vlačna. Ova vlačna naprezanja (za svaku veličinu vanjskog opterećenja) su manja ako se uzima skupljanje u odnosu na naprezanja koja se pojavljuju u armaturi na istom mjestu i za istu razinu vanjskog opterećenja, ukoliko se zanemari skupljanje (crteži 5.12. – c, d, e, f).



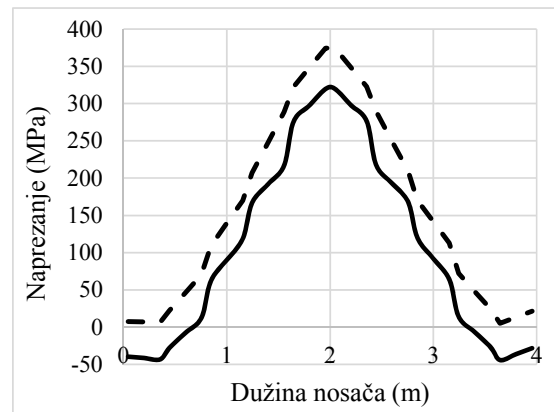
a) Sila 15 kN



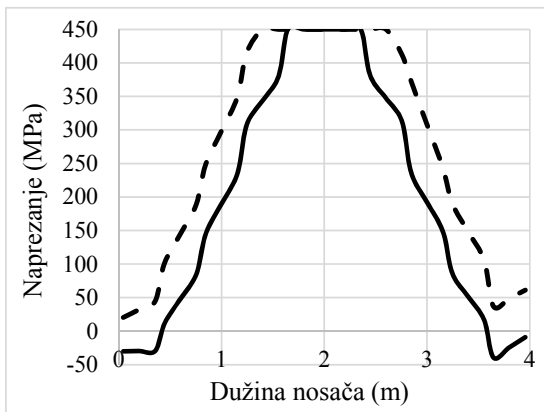
b) Sila 30 kN



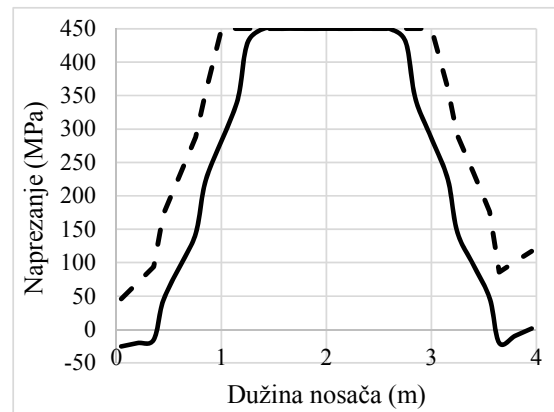
c) Sila 45 kN



d) Sila 90 kN



e) Sila 135 kN



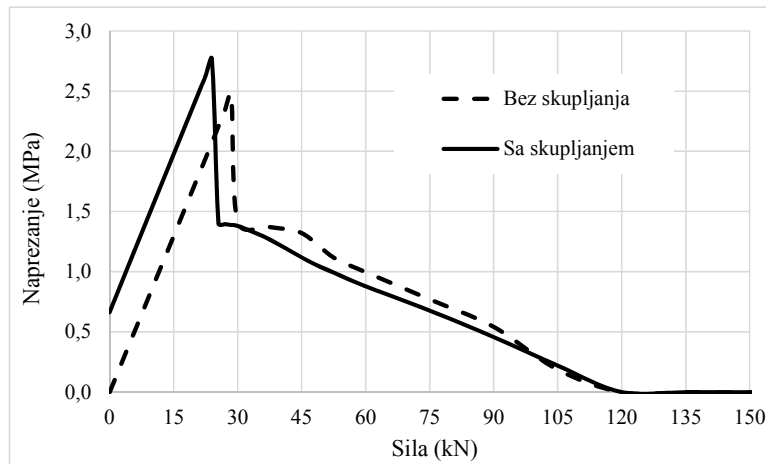
f) Sila 180 kN

----- Bez skupljanja — Sa skupljanjem

Crtež 5.12. Utjecaj skupljanja na razvoj naprezanja u armaturi uzduž nosača

Nadalje se promatrala promjena naprezanja u betonu s povećanjem sile, u dvije točke A i B na sredini raspona nosača, pri čemu je jedna u vlačnoj zoni (točka A) na dnu poprečnog presjeka a druga u tlačnoj zoni (točka B) na vrhu poprečnog presjeka (crteži 5.13. i 5.14.).

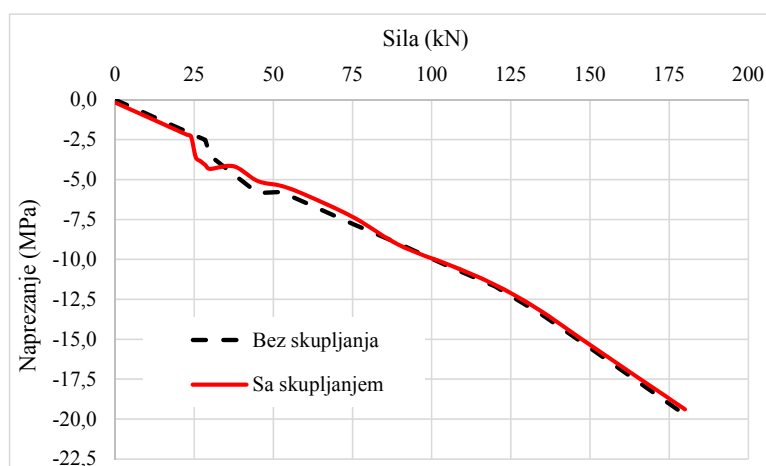
Na crtežu 5.13. dani su rezultati za točku A u vlačnom djelu presjeka.



Crtež 5.13. Vlačna naprezanja u betonu u točki A na dnu poprečnog presjeka

S crteža 5.13. vidljivo je kako su u betonu, neposredno pred nanošenje vanjskog opterećenja, postojala vlačna naprezanja uzrokovana skupljanjem. Ova naprezanja ne postoje kada je skupljanje zanemareno. Također je vidljivo kako vlačna naprezanja u betonu dosežu granicu vlačne čvrstoće betona za manju veličinu vanjskog opterećenja (oko 19 %) ako se skupljanje uzme u obzir. Veličina sile pri kojoj dolazi do otvaranja pukotine iznosi 28,5 kN ako se skupljanje zanemari, odnosno 24 kN ako se skupljanje uzme u obzir. S crteža 5.13. može se, također, vidjeti kako vlačna čvrstoća betona raste (oko 12 %) ako je skupljanje uzeto u obzir. Prethodno može biti posljedica smanjenja posmične vlačne čvrstoće (*shear tensile strength*) [H.14], numeričkog postupka [G.1, G.2, G.3] i smanjenja modula elastičnosti uslijed skupljanja [H.14].

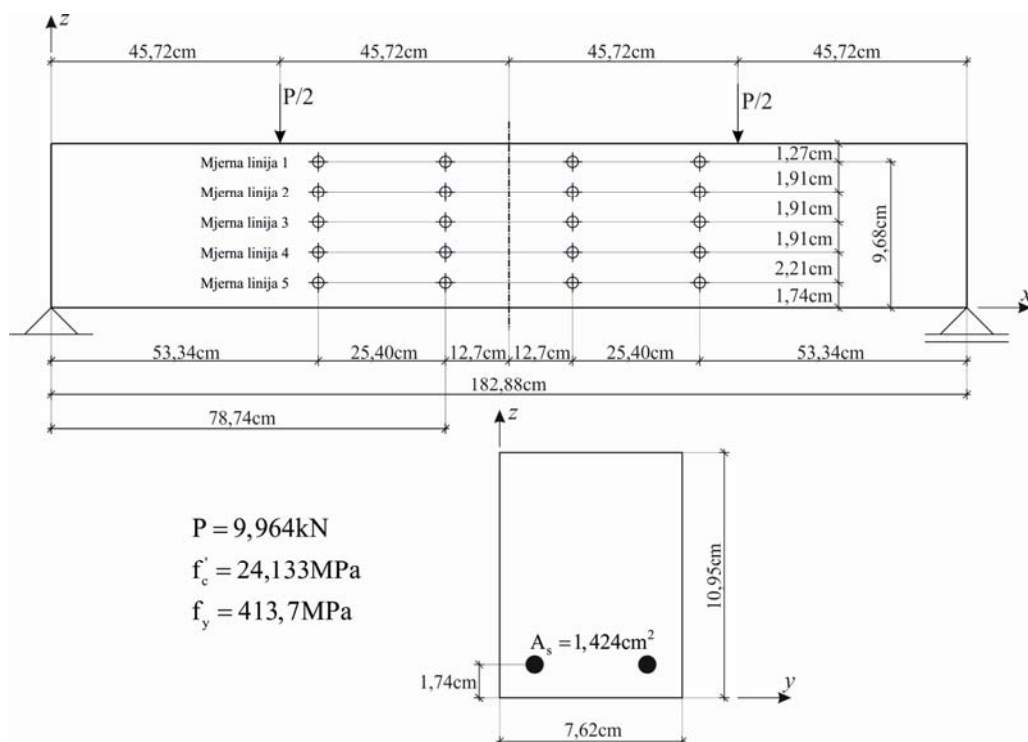
Crtež 5.14. prikazuje usporedbu tlačnih naprezanja u betonu, u točki B na vrhu poprečnog presjeka (u tlačnoj zoni). Iz crteža je vidljivo kako su tlačna naprezanja u betonu za isto vanjsko opterećenje malo veća u slučaju uzimanja skupljanja u obzir.



Crtež 5.14. Tlačna naprezanja u betonu u točki B na vrhu poprečnog presjeka

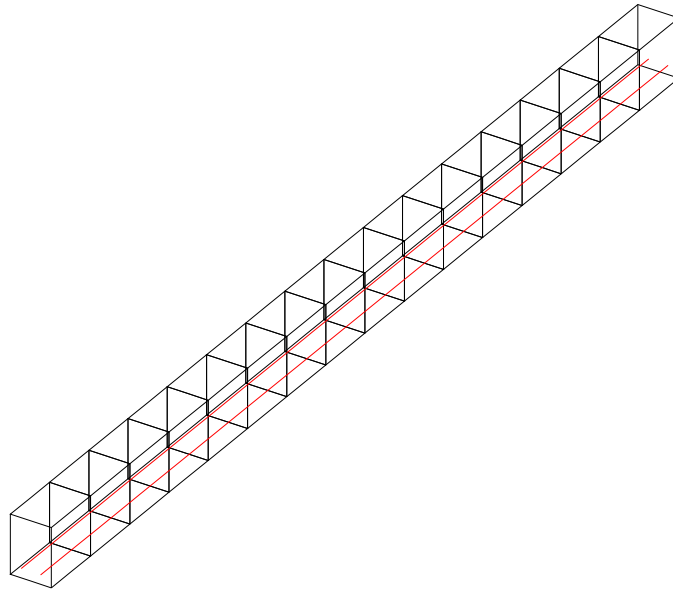
5.3. Primjer 3.

U ovom primjeru analizirana je armiranobetonska greda tipa C3 koju su u svome eksperimentu ispitivali Corley i Sozen [C.4, K.3]. Na crtežu 5.15. prikazani su geometrija i opterećenje grede, te položaj mjernih točaka. Ispitivanje je trajalo dvije godine, te je mjereno stanje progiba grede na polovici raspona i stanje deformacija u naznačenim mjernim točkama. Pri ispitivanju je vođeno računa o ambijentalnim uvjetima u kojima se greda nalazila, tako da su relativna vlažnost i temperatura održavani konstantnima tijekom vremena. Relativna vlažnost je iznosila 50 %, dok je temperatura iznosila 21°C. Tlačna čvrstoća betona pri starosti 28 dana iznosila je 24,133 MPa, dok je starost betona pri nanošenju opterećenja bila 30 dana. Youngov modul elastičnosti betona iznosi 25 GPa, Poisson-ov koeficijent $\nu = 0,166$, granična vlačna čvrstoća betona 2 MPa, deformacija drobljenja betona 0,0035 i vlačna deformacija pri kojoj dolazi do potpunog otvaranja pukotine 0,0012. Granica popuštanja armature iznosi 413,7 MPa, Youngov modul elastičnosti armature 200 GPa i granična deformacija armature 0,01.



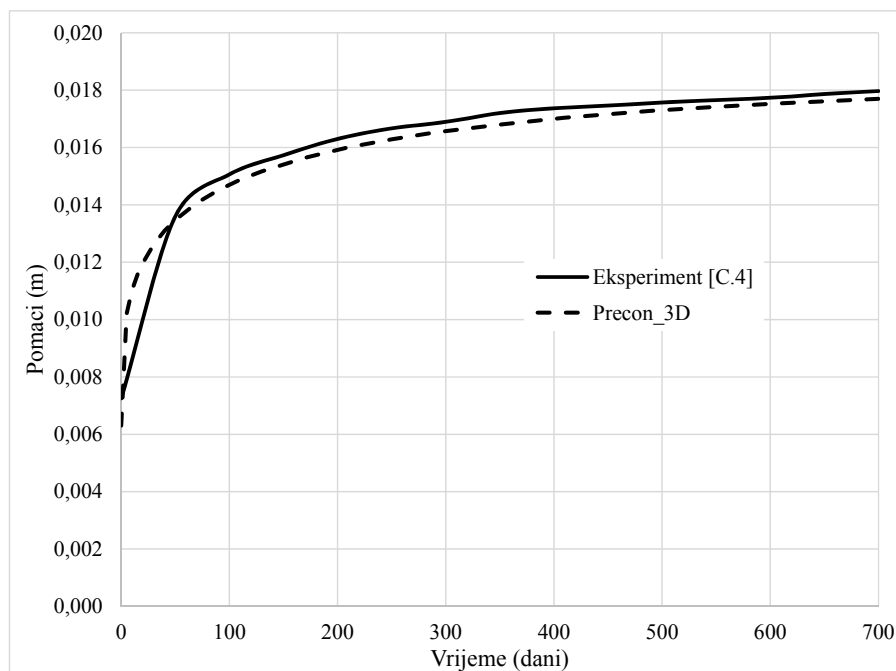
Crtež 5.15. Geometrijske karakteristike i opterećenje grede [K.3]

U numeričkom modelu Precon 3D analizirana greda je diskretizirana sa 16 Lagrangeovih prostornih konačnih elemenata (crtež 5.16.). Za ovakvu mrežu konačnih elemenata analizirani su pomaci na sredini raspona grede tijekom vremena, uzdužne deformacije po visini grede tijekom vremena i deformacije grede na polovini raspona tijekom vremena.



Crtež 5.16. Diskretizacija grede mrežom konačnih elemenata

Na crtežu 5.17. prikazana je usporedba progiba na polovici raspona grede dobivenih numeričkim modelom Precon 3D i eksperimentom.

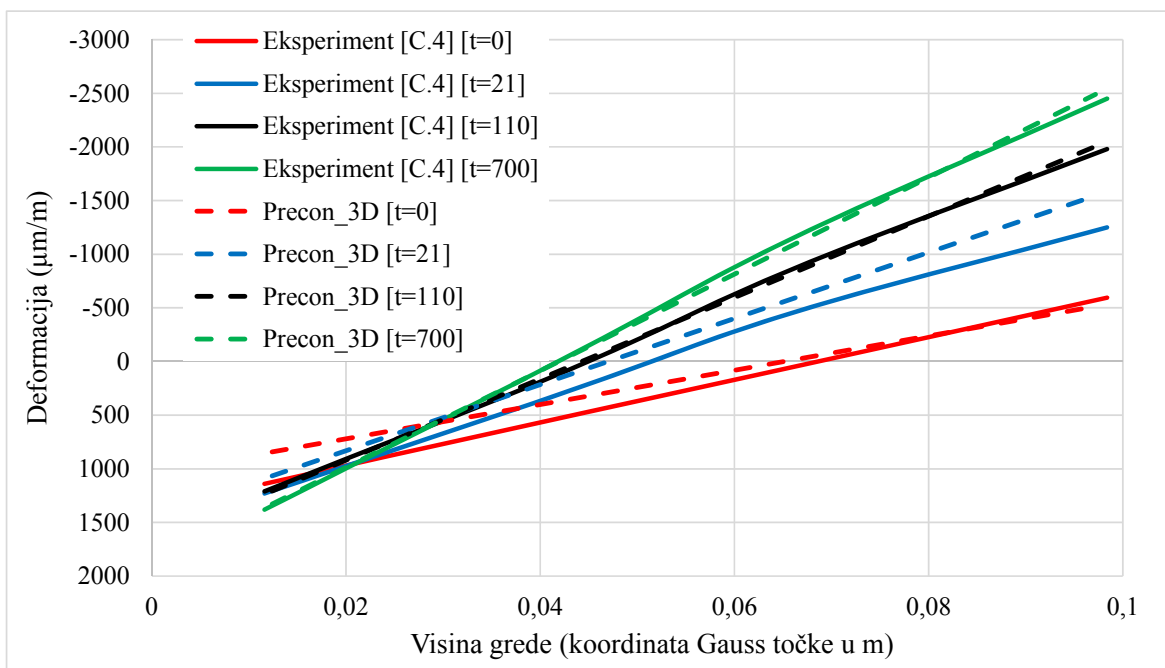


Crtež 5.17. Progibi sredine grede tijekom vremena

Pri numeričkoj analizi sila je nanošena inkrementalno do konačne vrijednosti od 9,964kN ($P=1,993; 3,986; 5,978; 7,971$ i 9,964 kN). Na crtežu 5.17. za nulto stanje je uzet trenutak nanošenja konačne veličine sile (30.–ti dan). S crteža je vidljivo dobro slaganje eksperimentalnih i numeričkih rezultata. Najslabije slaganje rezultata je u prvih cca. 50 dana.

Razlog tome može biti činjenica kako usvojeni model proračuna koeficijenta puzanja (Fib Model Code 2010) daje najveći rast vrijednosti koeficijenta puzanja u početnim danima promatranja. Pri numeričkoj analizi grede pretpostavljeno je da skupljanje betona nastupa 1 dan nakon betoniranja, dok se puzanje počinje razvijati nakon nanošenja opterećenja 30.–i dan. Analizom je dobiveno kako do otvaranje prve pukotine dolazi 20 dana od početka analize, dakle prije nanošenja vanjskog opterećenja. Ova pukotina je posljedica vlačnih naprezanja koja se pojavljuju u betonu izazvanih pojavom tlačnih sila u armaturi zbog spriječenosti deformacije skupljanja. Eksperimentom je, također, dobivena pojava prve pukotine pri maloj veličini vanjske sile, te se može zaključiti da je pojava prve pukotine posljedica skupljanja.

Eksperimentom su mjerene deformacije po visini grede na horizontalnoj udaljenosti $x = 0,7874$ m od oslonca, dok se u numeričkom modelu analiziraju deformacije po visini grede u Gauss točki s x koordinatom $x = 0,7872$ m. Na crtežu 5.18. dana je usporedba eksperimentalnih i numeričkih rezultata za različite vremenske trenutke.

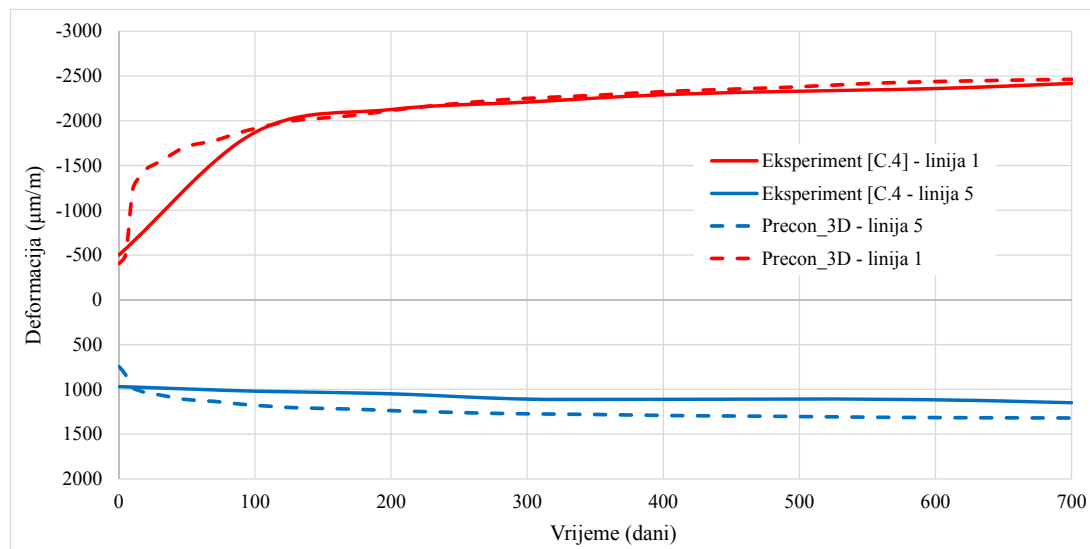


Crtež 5.18. Uzdužne deformacije po visini grede tijekom vremena

S crteža 5.18. uočljivo je dobro slaganje eksperimentalnih i numeričkih rezultata, što je posebno izraženo u kasnim vremenskim periodima.

Eksperimentom postavljene mjerne linije 1 i 5 najbliže su gornjem i donjem rubu presjeka. Vertikalna koordinata z mjerne linije 1 je $z = 0,0968$ m, a mjerne linije 5 $z = 0,0174$ m. Od eksperimentalnih rezultata za ove dvije mjerne linije dostupni su rezultati razvoja deformacija tijekom vremena za presjek najbliži polovici raspona grede. Iz numeričkog modela za usporedbu

rezultata su Gauss točke najbliže polovici raspona grede s koordinatama u pravcu osi z: $z = 0,0972$ m za gornju zonu (mjerna linija 1) i $z = 0,0124$ m za donju zonu (mjerna linija 5). Dobiveni rezultati dani su na crtežu 5.19.



Crtež 5.19. Deformacija grede po mjernim linijama na polovici raspona tijekom vremena

S crteža 5.19., kao i s prethodna dva, uočljiva je dobra točnost predviđanja ponašanja armiranobetonskog nosača izloženog dugotrajnim utjecajima puzanja i skupljanja. Dobiveni rezultati ukazuju na veći rast deformacija u prvih stotinjak dana, da bi potom nastupila faza blagog rasta deformacija, što u potpunosti odgovara logici dugotrajnog ponašanja betona. zamjetno je bolje poklapanje rezultata u tlaku nego vlaklu, što je posljedica odabira Gauss točaka za usporedbu rezultata s eksperimentalnima.

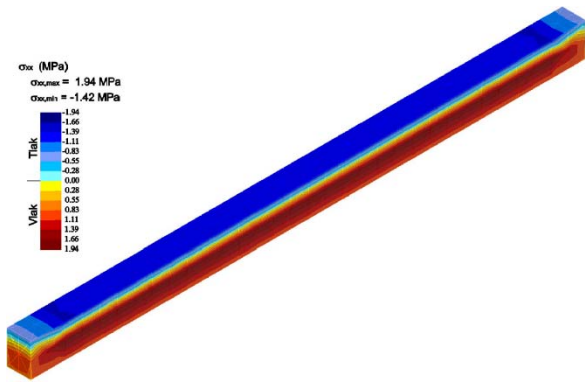
U nastavku je dana preraspodjela naprezanja u betonu. Analiza je izvršena za 7 vremenskih trenutaka, tj. u 29. danu (neposredno pred nanošenje vanjskog opterećenja), u 30. danu (za veličine vanjske sile 1,993 kN i 9,964 kN), te u 40., 70., 160., 380. i 730. danu. Na crtežu 5.20.–a – h prikazana je vremenska analiza normalnih naprezanja u pravcu osi x σ_{xx} za navedene vremenske trenutke. Stanje naprezanja prije nanošenja vanjskog opterećenja (29. dan) prikazano je na crtežu 5.20.–a, te su ova naprezanja posljedica skupljanja betona. S crteža je vidljivo kako se u zoni gdje je postavljena armatura pojavljuju vlačna naprezanja, dok se u zoni bez armature pojavljuju tlačna naprezanja. Vidljivo je kako su vlačna naprezanja u razini vlačne čvrstoće betona, a kako se prva pukotina pojavila još ranije (prije nanošenja opterećenja) u ovom trenutku dolazi do otvaranja novih pukotina. Tlačna naprezanja su znatno manja od tlačne čvrstoće betona. Na crtežu 5.20.–b prikazana su naprezanja kada je vanjsko opterećenje $P = 1,993$ kN (30. dan), te je vidljivo znatnije povećanje tlačnih naprezanja, dok su vlačna naprezanja i dalje u

razini vlačne čvrstoće betona, što upućuje na daljnje otvaranje novih pukotina i širenje starih pukotina. Stanje naprezanja koje odgovara maksimalnoj veličini vanjskog opterećenja $P = 9,964 \text{ kN}$ (30. dan) prikazano je na crtežu 5.20.–c. Ovdje su tlačna naprezanja dosegla svoju maksimalnu vrijednost od $13,42 \text{ MPa}$, dok je ispucalost betona u vlačnoj zoni znatna, što dovodi do gubitka nosivosti betona u vlaku tj. do vlačnog omekšavanja koje za posljedicu ima opadanje vlačnih naprezanja u betonu. Na crtežima 5.20.–d – e prikazuje se raspodjela naprezanja za trajno vanjskog opterećenje, tj. uslijed vremenskih deformacija puzanja i skupljanja betona. Vidljivo je kako dolazi do smanjenja i vlačnih i tlačnih naprezanja u betonu. Smanjenje tlačnih naprezanja posljedica je spuštanja neutralne osi prema vlačnoj zoni uslijed skupljanja betona, dok je smanjenje vlačnih naprezanja posljedica povećanja ispucalosti betona u vlačnom području zbog preraspodjele naprezanja nosača uslijed vremenskih deformacija betona. Smanjenje tlačnih naprezanja u konačnom trenutku (730. dan), u odnosu na tlačna naprezanja pri nanošenju konačne veličine vanjskog opterećenja (30. dan) iznosi oko 21 %, dok istovremeno smanjenje vlačnih naprezanja iznosi oko 56 %.

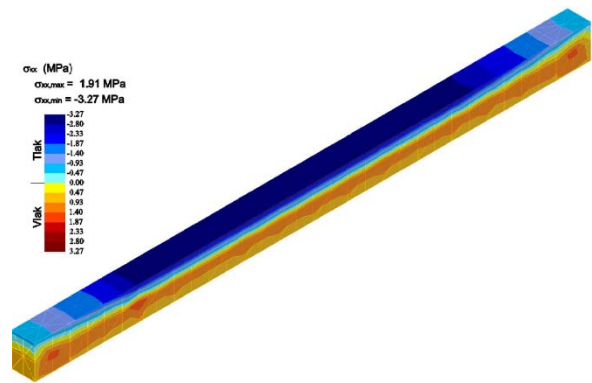
Na crtežu 5.21.–a – h prikazana je preraspodjela normalnih naprezanja u pravcu osi y σ_{yy} . Ova naprezanja posljedica su troosnog stanja naprezanja, te je vidljivo kako su ona zanemariva u odnosu na normalna naprezanja u pravcu osi x , te kako je njihova promjena u vremenu također zanemariva.

Na crtežu 5.22.–a – h prikazana je preraspodjela normalnih naprezanja u pravcu osi z σ_{zz} . Ova naprezanja također su posljedica troosnog stanja naprezanja, te su i ona zanemariva u odnosu na naprezanja u pravcu osi x , s tim da su nešto veća nego naprezanja u pravcu osi y . Razlog zbog koga su veća od onih u pravcu osi y jeste djelovanja vanjskog opterećenja u pravcu osi z . Ova naprezanja također opadaju u vremenu uslijed vremenskih deformacija betona, te su tlačna naprezanja na kraju perioda promatranja (730. dan) manja za oko 12 % nego u trenutku nanošenja konačne veličine sile (30. dan), dok su tlačna naprezanja 730. dan manja za oko 14 % nego u 30. danu.

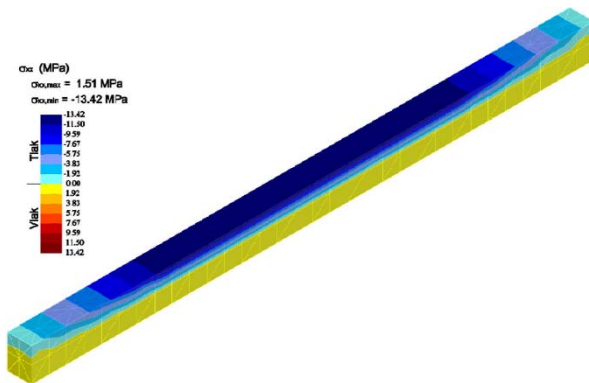
Na crtežima 5.23., 5.24. i 5.25.–a – h prikazana je preraspodjela posmičnih naprezanja τ_{xy} , τ_{yz} i τ_{xz} . Posmična naprezanja τ_{xy} i τ_{yz} su zanemariva u odnosu na veličine normalnih naprezanja, s tim da dolazi do rasta naprezanja τ_{xy} za oko 64 % 730. dan u odnosu na trenutak potpunog opterećivanja (30. dan), dok je vremenska promjena posmičnih naprezanja τ_{yz} zanemariva. Najveća posmična naprezanja su τ_{xz} , te dolazi do njihovog rasta u vremenu. Na kraju perioda promatranja ova naprezanja su do 24 % veća nego u trenutku opterećivanja.



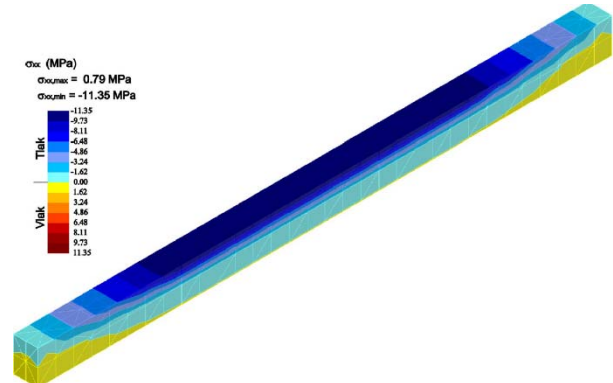
a) Vrijeme: 29. dan/Vanjsko opterećenje: P=0,000 kN



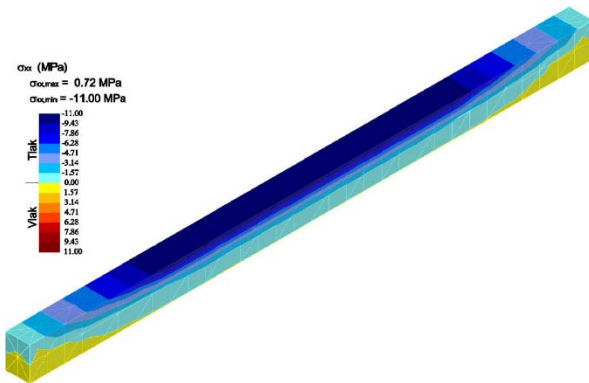
b) Vrijeme: 30. dan/Vanjsko opterećenje: P=1,993 kN



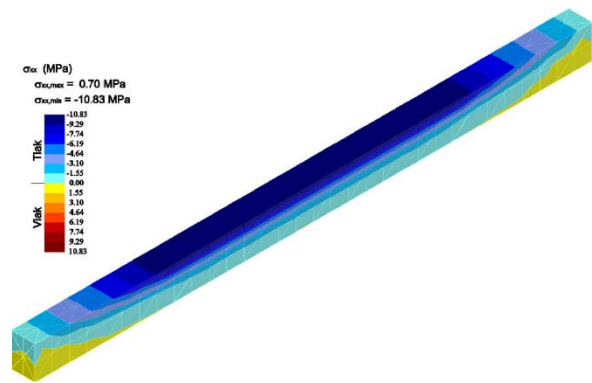
c) Vrijeme: 30. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN



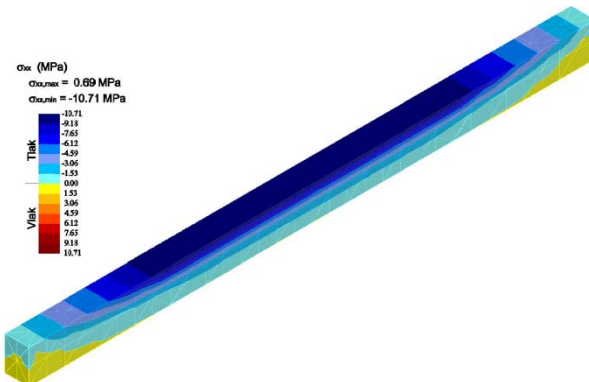
d) Vrijeme: 40. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN



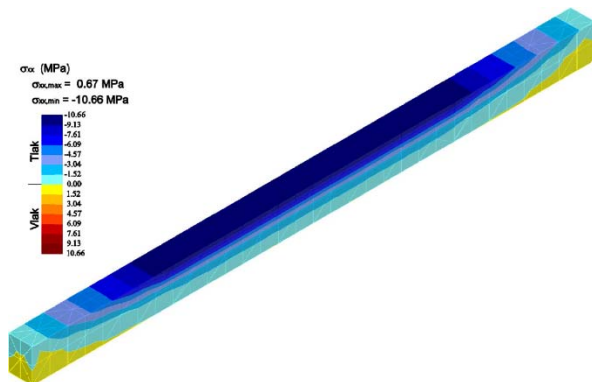
e) Vrijeme: 70. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN



f) Vrijeme: 160. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN

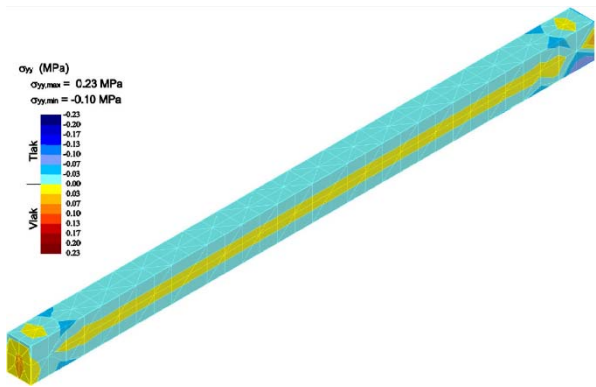


g) Vrijeme: 370. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN

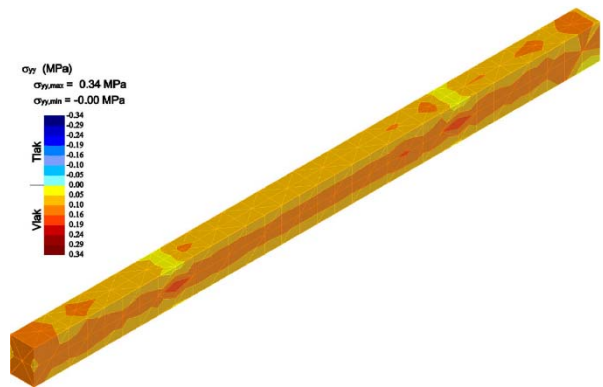


h) Vrijeme: 730. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN

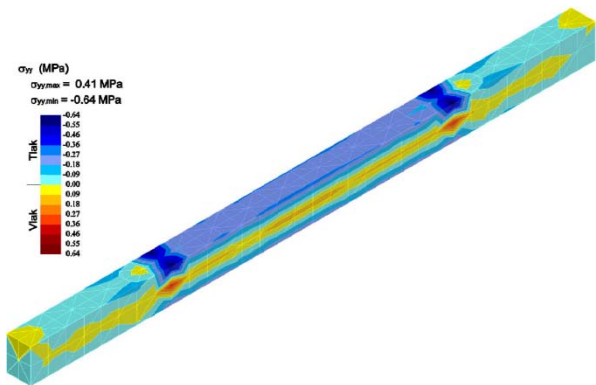
Crtež 5.20. Normalna naprezanja u pravcu osi x σ_{xx}



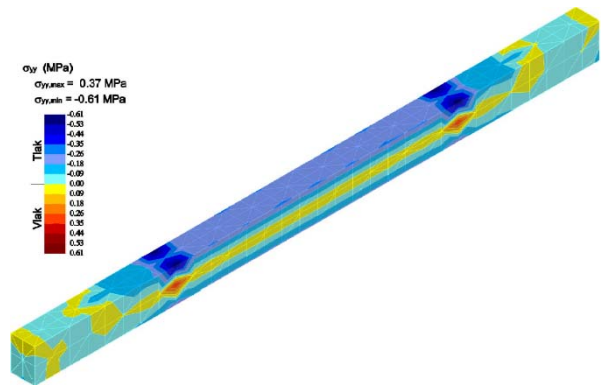
a) Vrijeme: 29. dan/Vanjsko opterećenje: P=0,000 kN



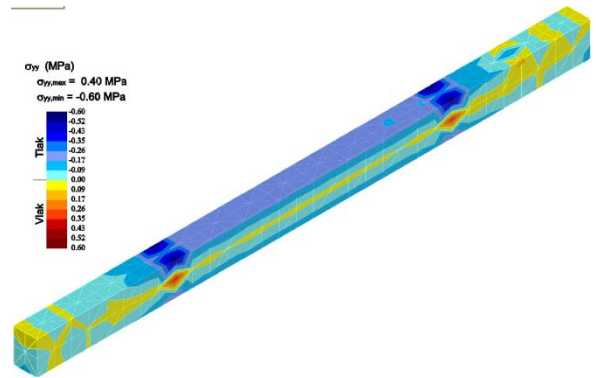
b) Vrijeme: 30. dan/Vanjsko opterećenje: P=1,993 kN



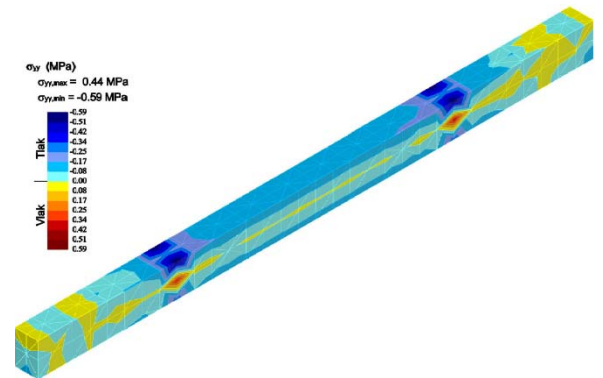
c) Vrijeme: 30. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN



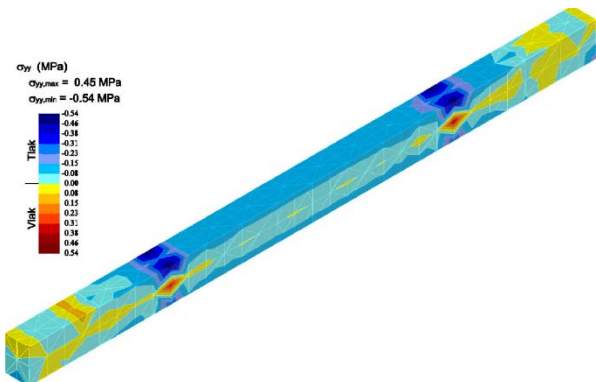
d) Vrijeme: 40. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN



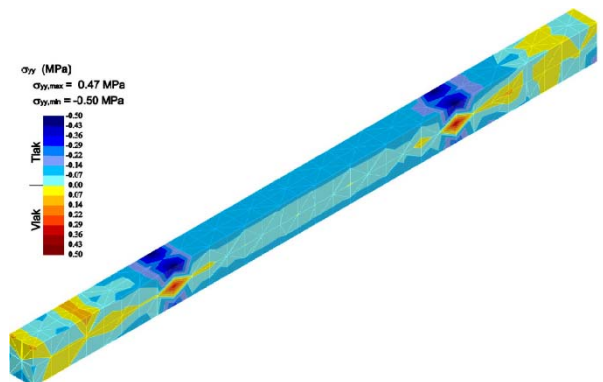
e) Vrijeme: 70. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN



f) Vrijeme: 160. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN

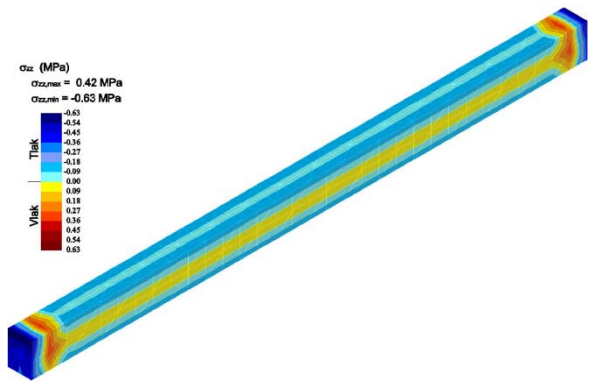


g) Vrijeme: 370. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN

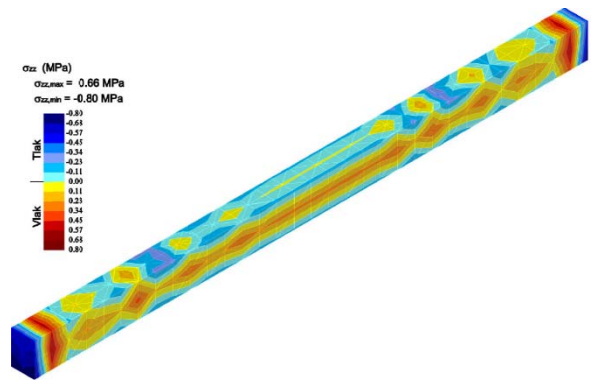


h) Vrijeme: 730. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN

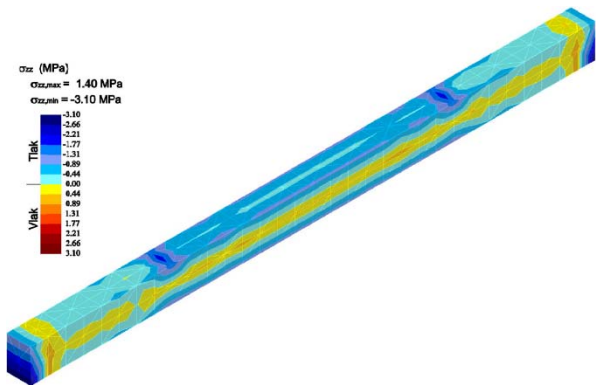
Crtež 5.21. Normalna naprezanja u pravcu osi y σ_{yy}



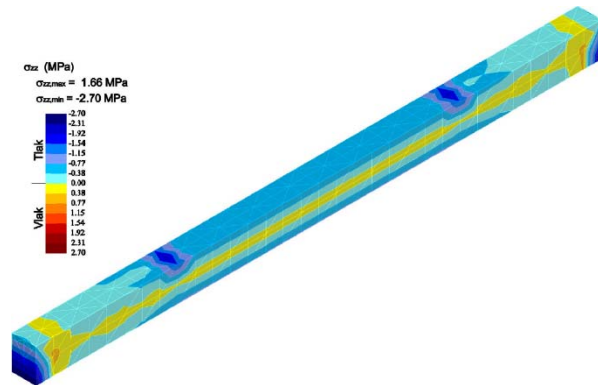
a) Vrijeme: 29. dan/Vanjsko opterećenje: P=0,000 kN



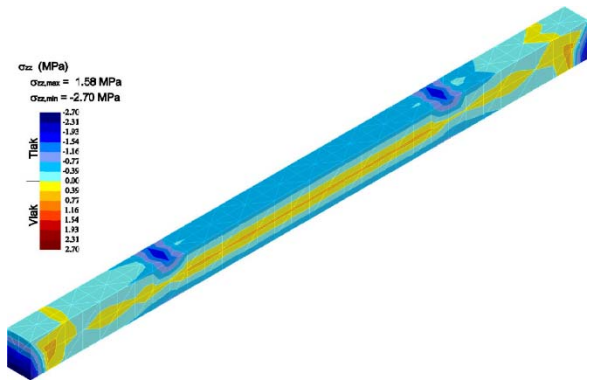
b) Vrijeme: 30. dan/Vanjsko opterećenje: P=1,993 kN



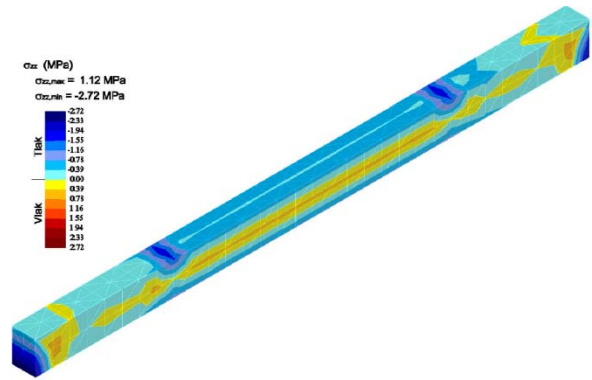
c) Vrijeme: 30. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN



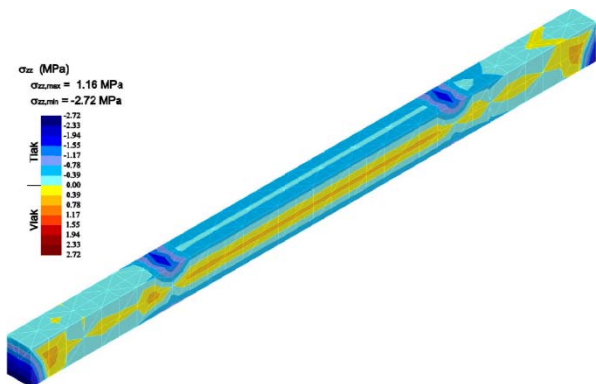
d) Vrijeme: 40. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN



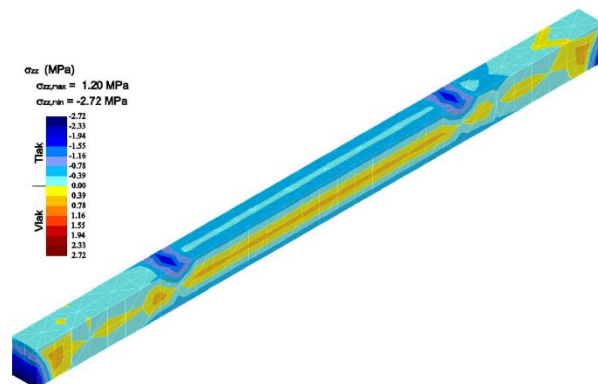
e) Vrijeme: 70. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN



f) Vrijeme: 160. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN

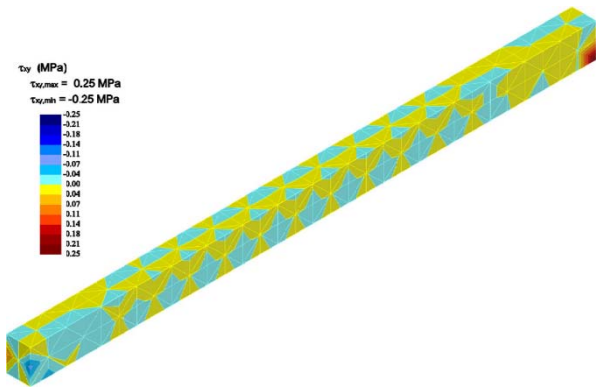


g) Vrijeme: 370. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN

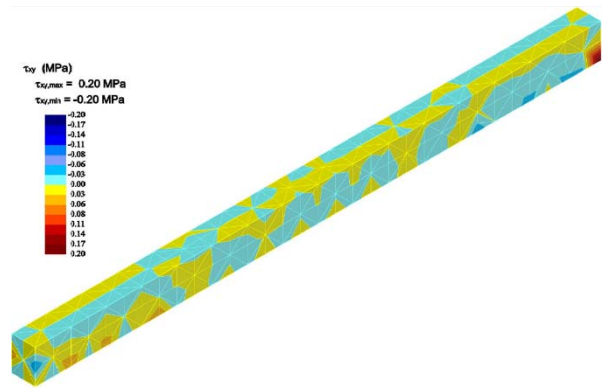


h) Vrijeme: 730. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN

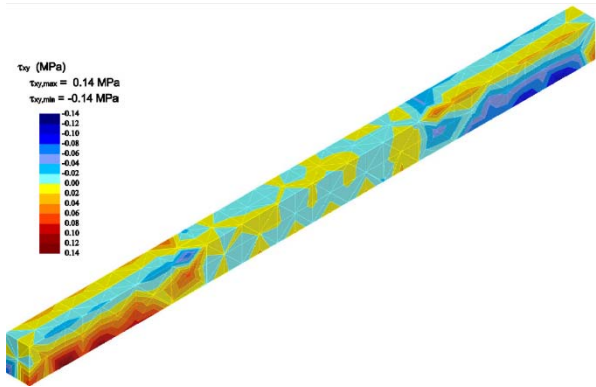
Crtež 5.22. Normalna naprezanja u pravcu osi z σ_{zz}



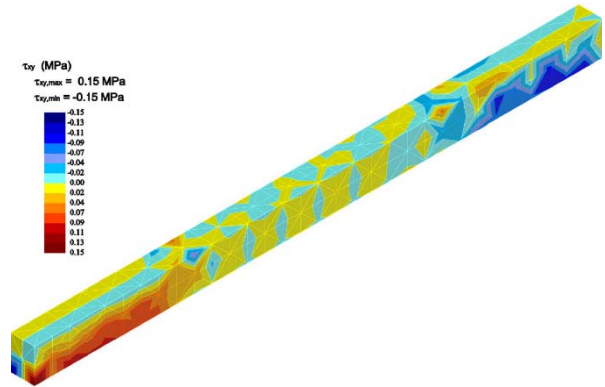
a) Vrijeme: 29. dan/Vanjsko opterećenje: P=0,000 kN



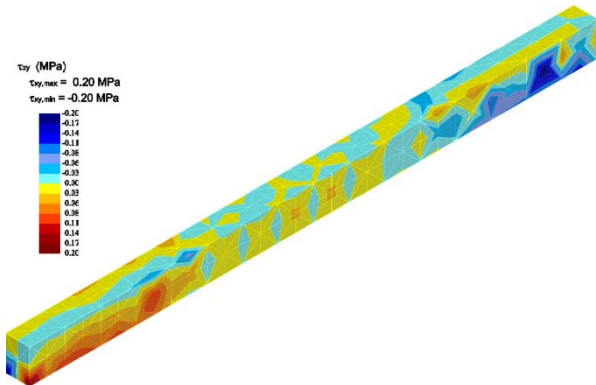
b) Vrijeme: 30. dan/Vanjsko opterećenje: P=1,993 kN



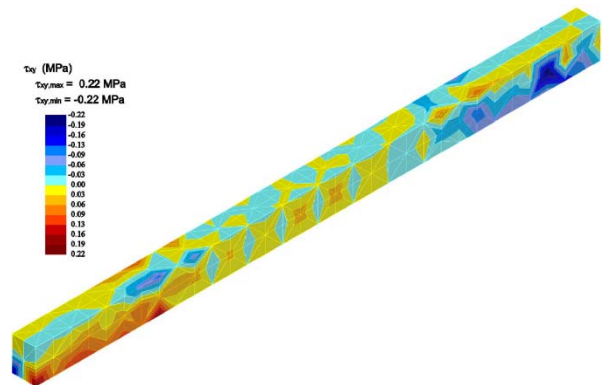
c) Vrijeme: 30. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN



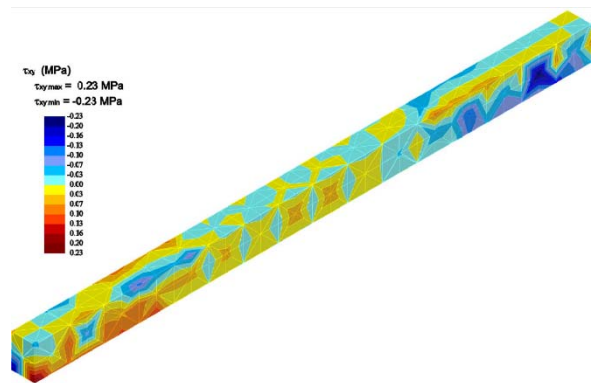
d) Vrijeme: 40. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN



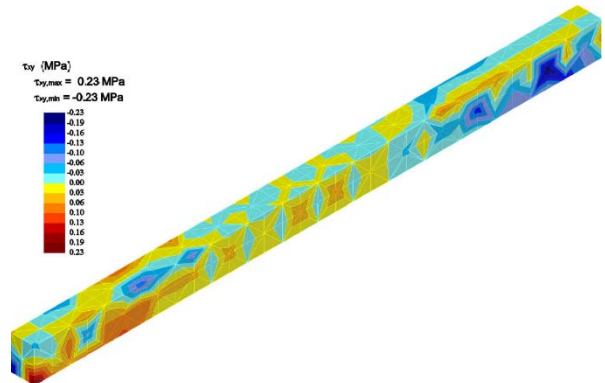
e) Vrijeme: 70. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN



f) Vrijeme: 160. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN

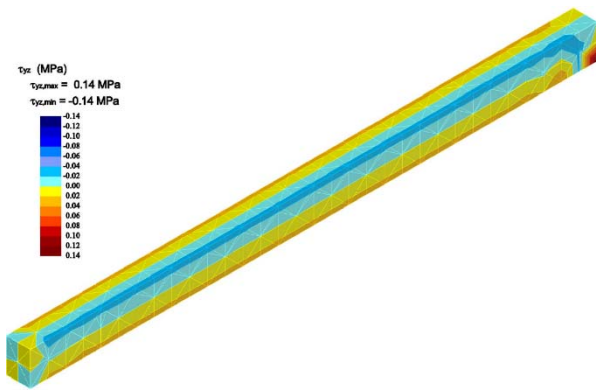


g) Vrijeme: 370. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN

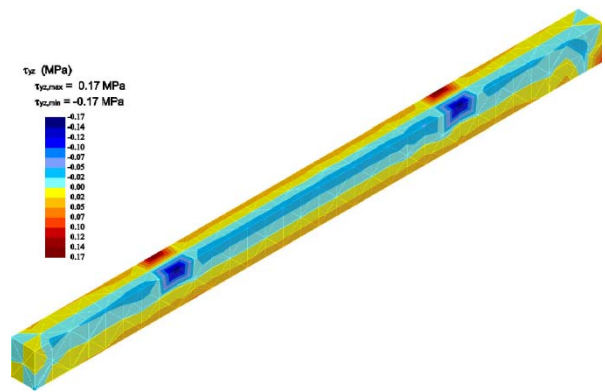


h) Vrijeme: 730. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN

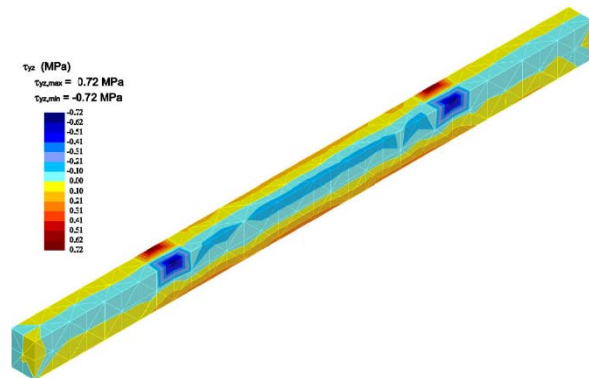
Crtež 5.23. Posmična naprezanja τ_{xy}



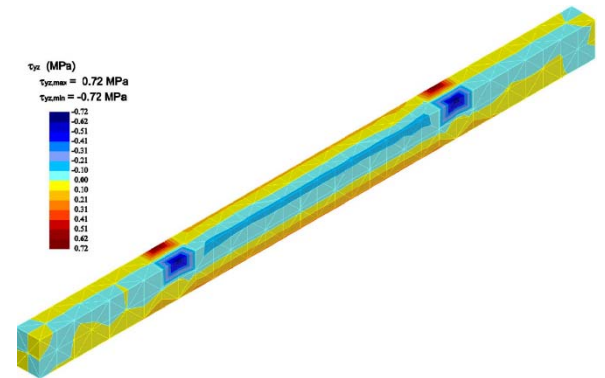
a) Vrijeme: 29. dan/Vanjsko opterećenje: P=0,000 kN



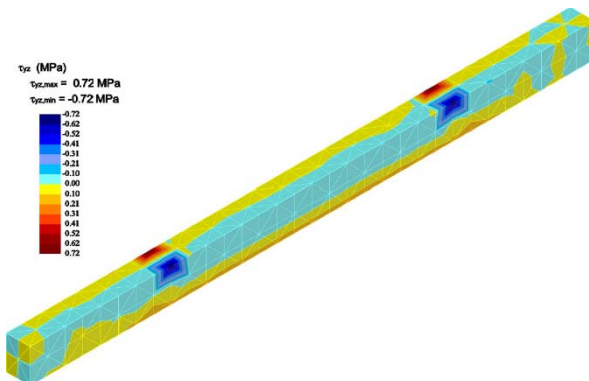
b) Vrijeme: 30. dan/Vanjsko opterećenje: P=1,993 kN



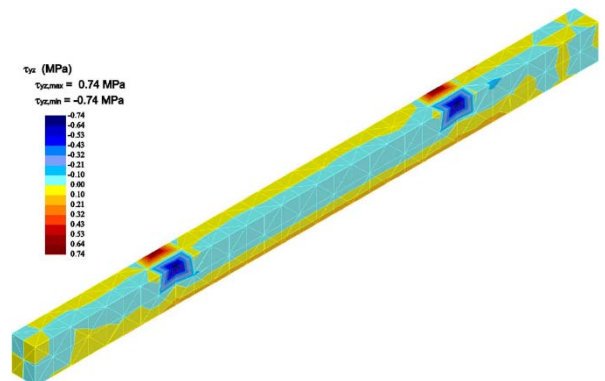
c) Vrijeme: 30. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN



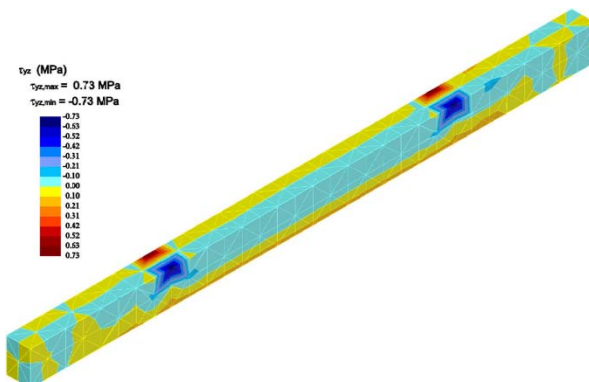
d) Vrijeme: 40. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN



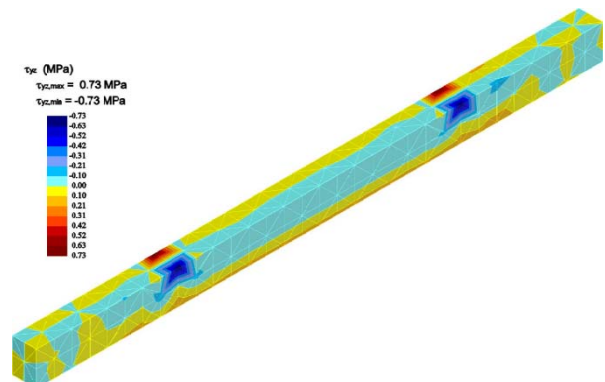
e) Vrijeme: 70. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN



f) Vrijeme: 160. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN

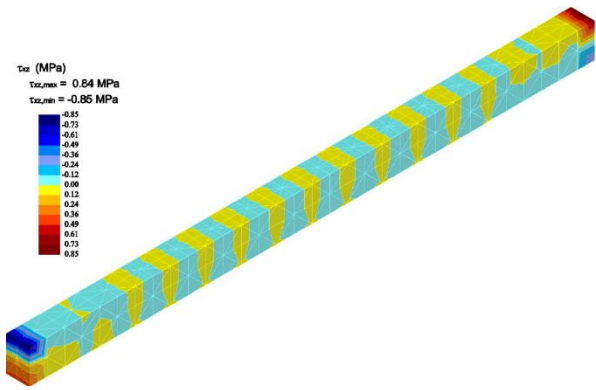


g) Vrijeme: 370. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN

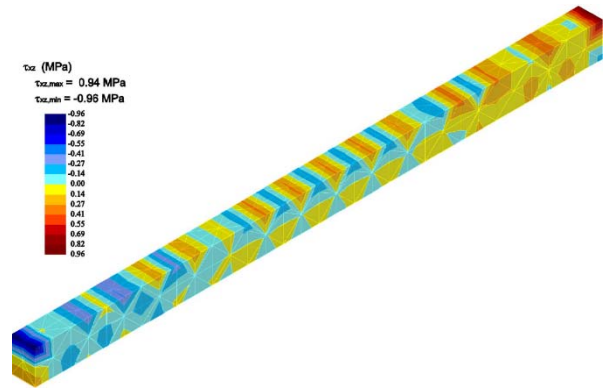


h) Vrijeme: 730. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN

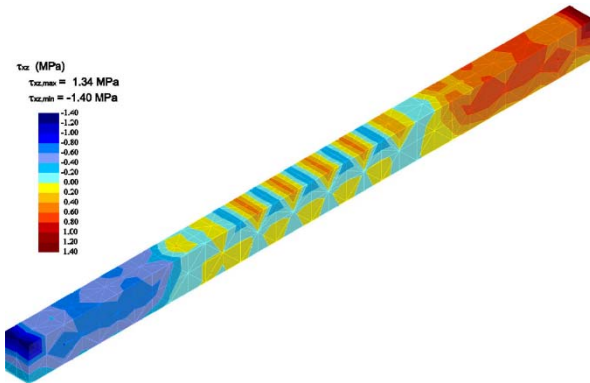
Crtež 5.24. Posmična naprezanja τ_{yz}



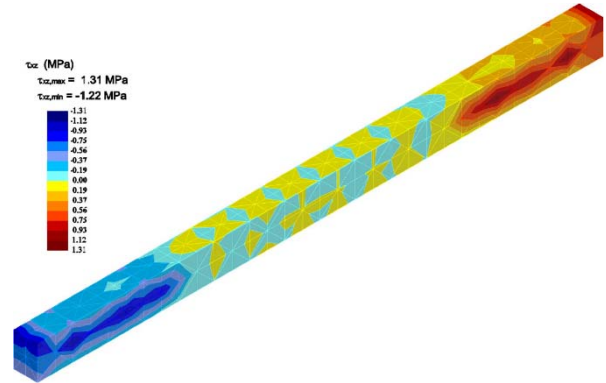
a) Vrijeme: 29. dan/Vanjsko opterećenje: P=0,000 kN



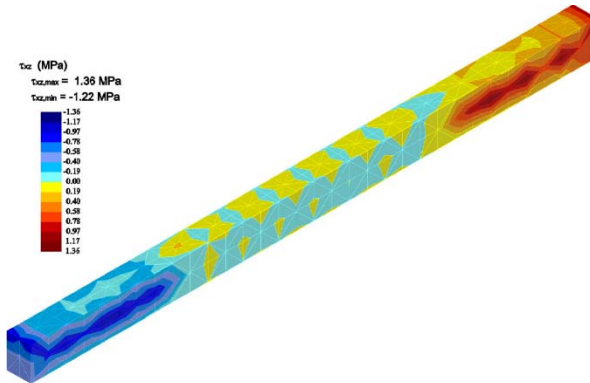
b) Vrijeme: 30. dan/Vanjsko opterećenje: P=1,993 kN



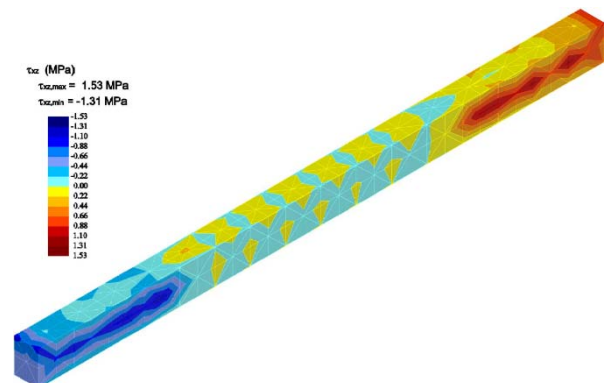
c) Vrijeme: 30. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN



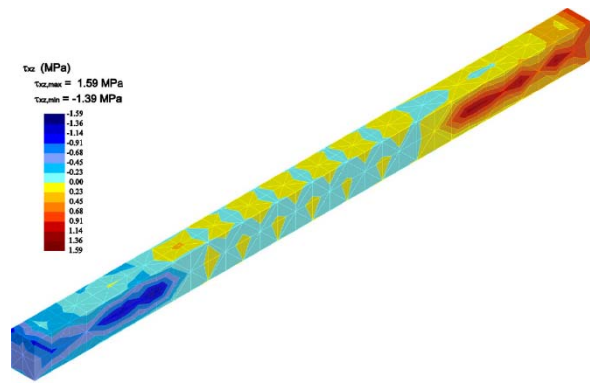
d) Vrijeme: 40. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN



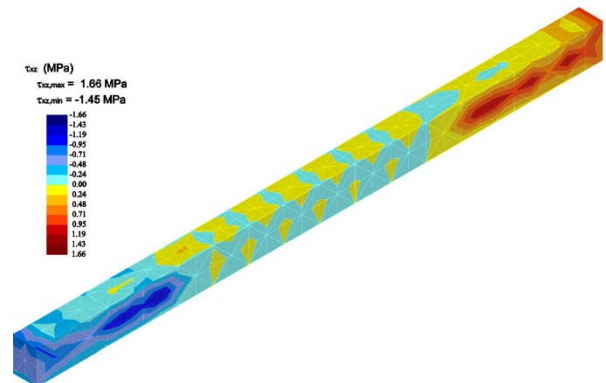
e) Vrijeme: 70. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN



f) Vrijeme: 160. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN



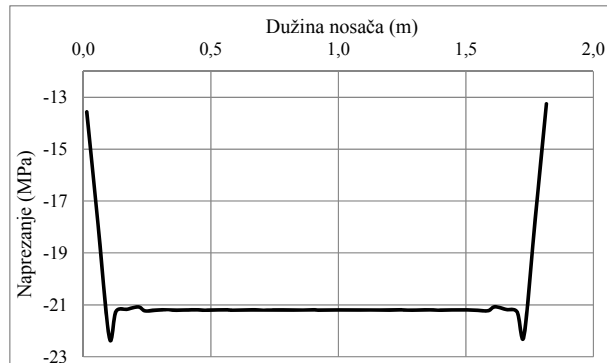
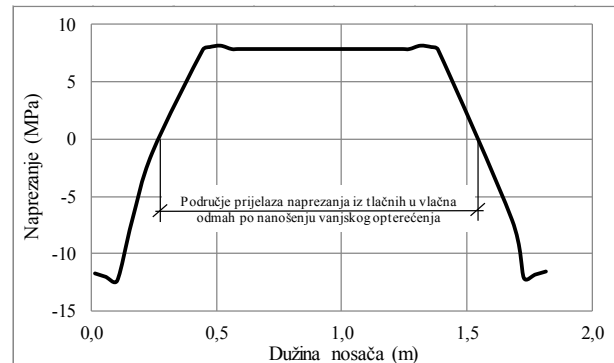
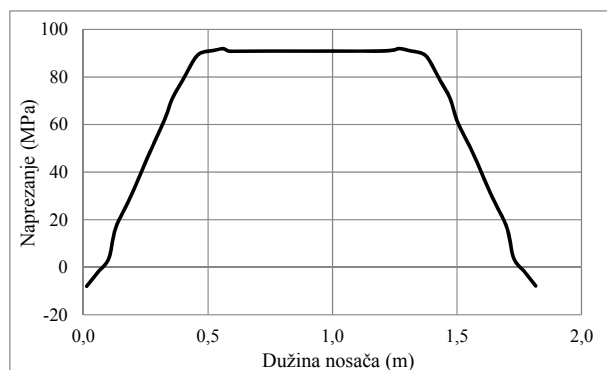
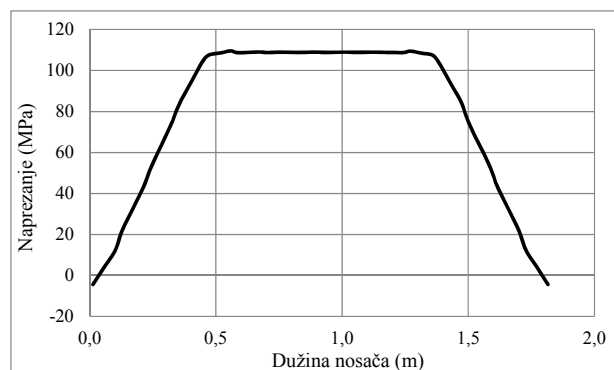
g) Vrijeme: 370. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN



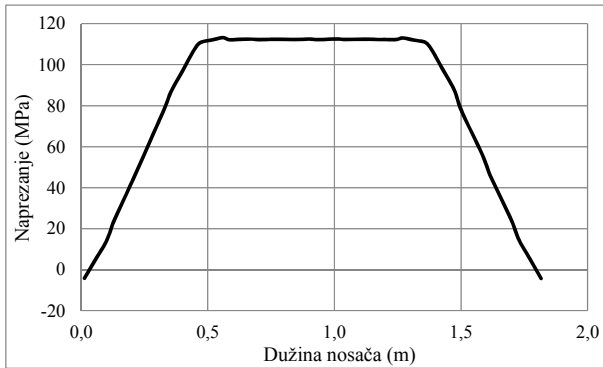
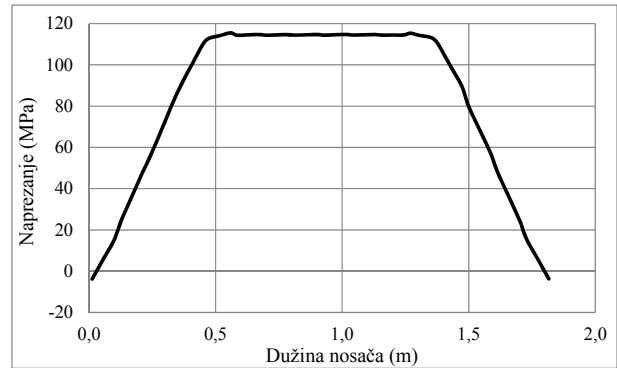
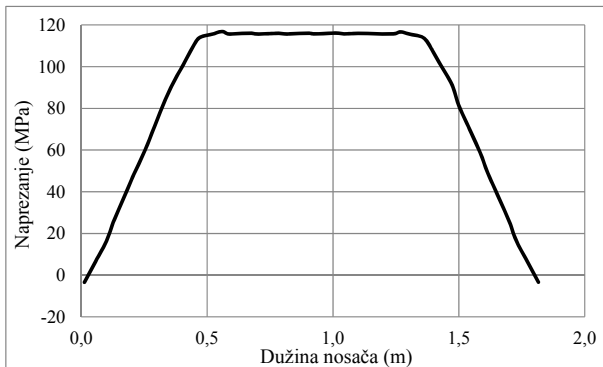
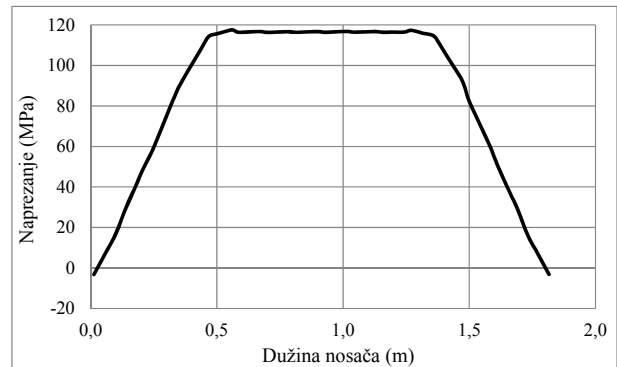
h) Vrijeme: 730. dan/Vanjsko opterećenje: P=9,964 kN

Crtež 5.25. Posmična naprezanja τ_{xz}

U nastavku se analiziraju naprezanja u armaturnoj šipci za iste vremenske trenutke za koje je dana analiza naprezanja u betonu. S crteža 5.26.–a vidljivo je kako se neposredno pred nanošenje vanjskog opterećenja u šipci pojavljuju samo tlačna naprezanja, koja su posljedica skupljanja. Ova naprezanja u šipci uzrokuju pojavu tlačnih sila, koje se na beton prenose kao vlačne sile, te uzrokuju stanja naprezanja u betonu prikazana na slikama 5.20. do 5.25.–a. Na crtežu 5.26.–b može se vidjeti kako odmah po nanošenju vanjskog opterećenja naprezanja u šipci prelaze iz tlačnih u vlačna. To upućuje kako je beton već bio ispucao uslijed skupljanja, te je po nanošenju opterećenja u vlačnoj zoni svu nosivost preuzela armatura. Na crtežu 5.26.–c prikazano je stanje naprezanja u armaturi u trenutku nanošenja maksimalne veličine vanjskog opterećenja, te je vidljiv znatan porast naprezanja u odnosu na ona koja su bila pri manjoj veličini sile. Ovo upućuje na otvaranje novih pukotina i širenje postojećih. Na ostalim crtežima 5.26.–d – h prikazana je promjena naprezanja u šipci kao posljedica vremenski ovisnih deformacija betona. Vidljivo je kako će širenje pukotina uslijed vremenskih deformacija betona prouzrokovati povećanje naprezanja u armaturnoj šipki. Maksimalno naprezanje u armaturnoj šipci 730. dan veće je za oko 28 % nego što je bilo 30. dan nakon nanošenja konačne veličine vanjskog opterećenja.

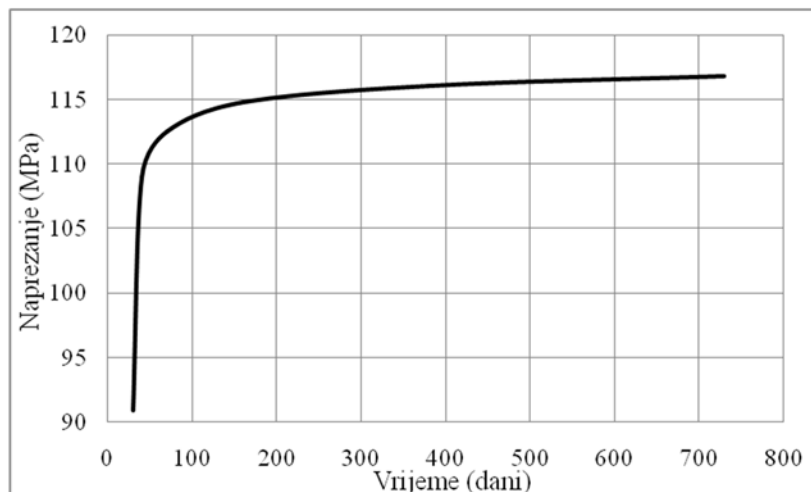
a) Vrijeme: 29. dan/Vanjsko opterećenje: $P=0,000$ kNb) Vrijeme: 30. dan/Vanjsko opterećenje: $P=1,993$ kNc) Vrijeme: 30. dan/Vanjsko opterećenje: $P=9,964$ kNd) Vrijeme: 40. dan/Vanjsko opterećenje: $P=9,964$ kN

Crtež 5.26.–a – d Naprezanja u armaturi duž nosača (– tlak, + vlak)

e) Vrijeme: 70. dan/Vanjsko opterećenje: $P=9,964$ kNf) Vrijeme: 160. dan/Vanjsko opterećenje: $P=9,964$ kNg) Vrijeme: 380. dan/Vanjsko opterećenje: $P=9,964$ kNh) Vrijeme: 730. dan/Vanjsko opterećenje: $P=9,964$ kN

Crtež 5.26. – e – h Naprezanja u armaturi duž nosača (– tlak, + vlak)

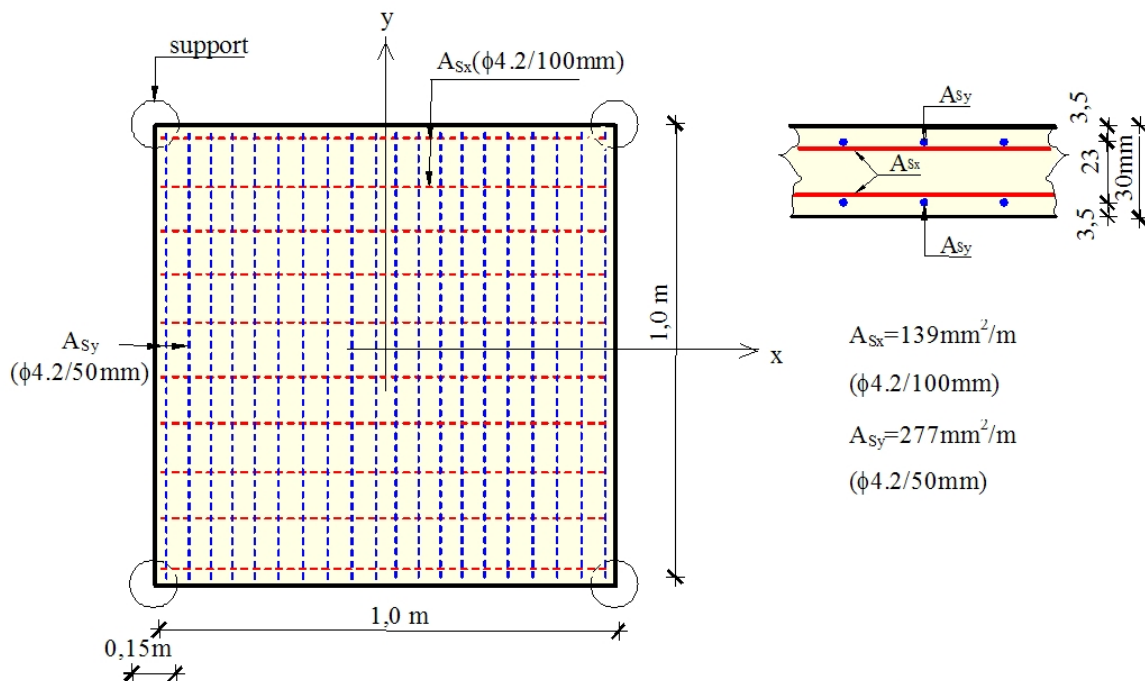
Ovaj prirast vlačnih naprezanja u armaturnoj šipci jasnije je prikazan na crtežu 5.27. Crtež prikazuje prirast naprezanja između 30. dana (nakon nanošenja konačne veličine vanjskog opterećenja) i 730. dana u jednoj točki na šipci, u blizini polovine raspona nosača. S crteža je vidljivo kako je prirast ovih naprezanja, uzrokovan puzanjem betona, najintenzivniji u nekoliko prvih dana puzanja (prvih 10 dana). U kasnijoj fazi puzanja on se stabilizira i znatno je manji, tako da u kasnim fazama naprezanja u armaturi uslijed puzanja dostižu neku konstantnu veličinu.



Crtež 5.27. Razvoj naprezanja u armaturi na polovici raspona nosača tijekom vremena (+ vlak)

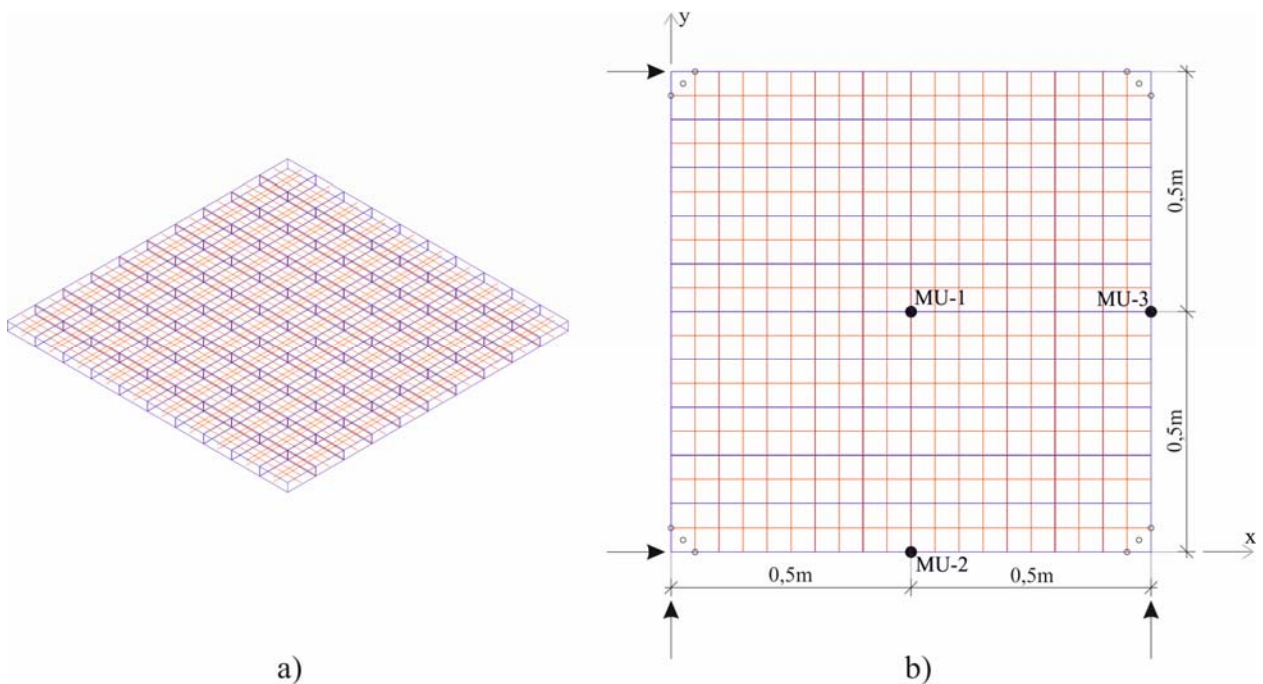
5.4. Primjer 4.

U ovome primjeru analizira se ponašanje klasično armirano betonske ploče pod djelovanjem dugotrajnih utjecaja. Program ispitivanja proveden na Fakultetu građevinarstva, arhitekture i geodezije Sveučilišta u Splitu [M.3]. Predmet ispitivanja je armirano betonska ploča tlocrtnih dimenzija 100x100 cm i debljine 3 cm, obostrano armirana mrežama promjera šipke 4.2 mm pri čemu je razmak šipki u smjeru osi x 10 cm, odnosno 5 cm u smjeru osi y. Ploča je slobodno oslonjena na 4 okrugla stuba dimenzija $\phi 15$ cm (crtež 5.28.). Ploča je 90 dana nakon betoniranja inkrementalno opterećena ukupnim jednoliko raspodijeljenim opterećenjem $q = 10 \text{ kN/m}^2$, te su tada započeta ostala ispitivanja pri čemu je zanemaren utjecaj skupljanja. Opterećenje je izvedeno u 5 inkremenata ($q = 2, 4, 6, 8$ i 10 kN/m^2). Kao gradivo korišten je beton klase C 50/60, čija je tlačna čvrstoća izmjerena 28 dan nakon betoniranja iznosila $f'_c = 55 \text{ MPa}$, dok je vlačna čvrstoća bila $f'_t = 6 \text{ MPa}$ i Youngov modul elastičnosti $E_c = 32 \text{ GPa}$. Korištena je klasa cementa 42,5 N. Armaturene mreže proizvedene su u željezari „Split“ s deklariranom kvalitetom proizvođača MAG 500/560, čija je granica tečenja $\sigma_y = 500 \text{ MPa}$, Youngov modul elastičnosti $E_s = 200 \text{ GPa}$ i čvrstoća $f_s = 560 \text{ MPa}$. Promjena temperature i relativna vlažnost zraka uzete su kao prosječne vrijednosti tijekom duljeg vremenskog perioda, pri čemu je prosječna temperatura $16,1^\circ\text{C}$ i prosječna relativna vlažnost 60 %.



Crtež 5.28. Geometrijske karakteristike ispitivanja ploče i raspored armaturnih šipki [M.3]

U razvijenom numeričkom modelu ploča je diskretizirana mrežom od 100 Lagrangeovih 27-čvornih konačnih elemenata, dimenzija 10x10x3 cm (crtež 5.29.–a). Radi stabilnosti numeričkog proračuna, ploča je oslonjena na 4 ruba kao i u eksperimentu, s tim da su u sva četiri oslonca ploči spriječeni vertikalni pomaci, u jednom osloncu horizontalni pomaci u pravcu obje osi (x i y), u jednom osloncu horizontalni pomak u pravcu osi x , u jednom horizontalni pomak u pravcu osi y i u četvrtom osloncu su dopušteni horizontalni pomaci u pravcu obje osi (x i y). Shema oslonaca je dana na crtežu 5.29.–b, pri čemu strelice označavaju pravac spriječenih horizontalnih pomaka.



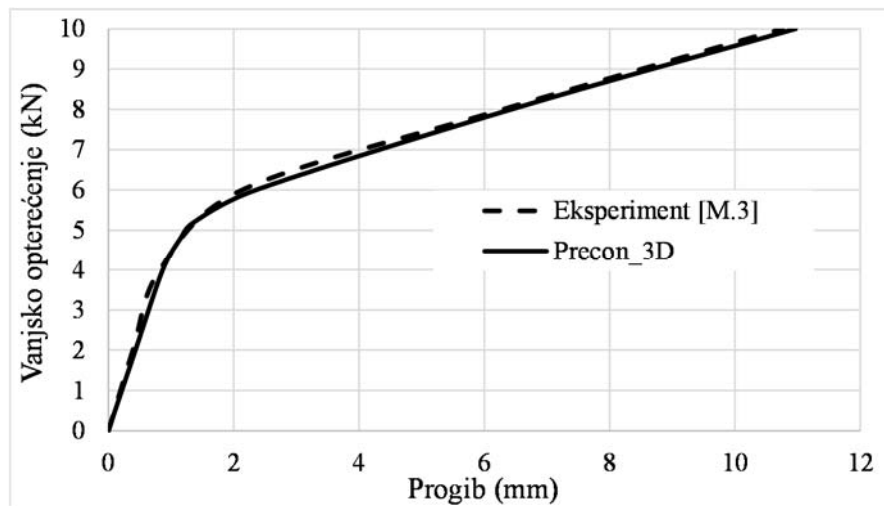
Crtež 5.29. Mreža konačnih elemenata (a) i shema oslanjana u numeričkom modelu i položaj analiziranih točaka (b)

Eksperimentalno i numerički su analizirani progibi ploče u mjernim točkama MU–1, MU–2 i MU–3 (crtež 5.29.), te je izvršena usporedba rezultata.

Numerička analiza je provedena na način da razvoj skupljanja započinje jedan dan nakon betoniranja, te se ploča opterećuje 90 dana nakon betoniranja. Opterećivanje je izvršeno u 5 inkremenata kao i u eksperimentalnom programu ispitivanja.

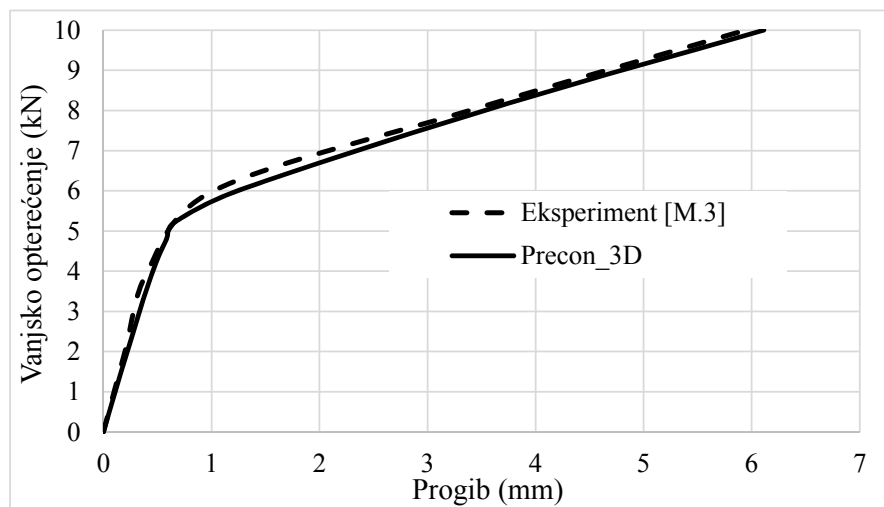
U nastavku su dani rezultati stanja progiba u 90. danu, kao posljedica skupljanja i statičkog opterećenja.

Na crtežu 5.30. prikazana je usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata u mjernoj točki MU–1. Usporedbom rezultata vidljivo je dobro slaganje numeričkih i eksperimentalnih rezultata.



Crtež 5.30. Usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata u mjernoj točki MU-1

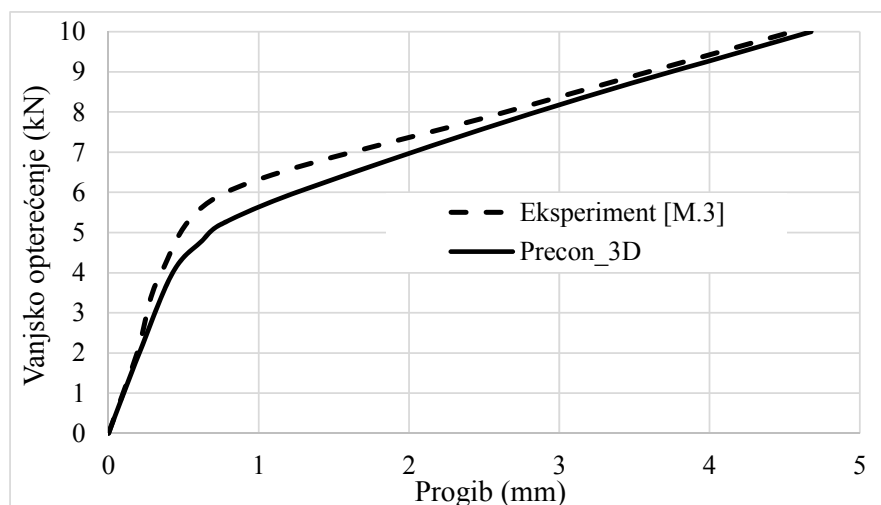
Na crtežu 5.31. prikazana je usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata u mjernoj točki MU-2. Usporedbom rezultata vidljivo je dobro slaganje numeričkih i eksperimentalnih rezultata, kao i za mjernu točku MU-1.



Crtež 5.31. Usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata u mjernoj točki MU-2

Na crtežu 5.32. prikazana je usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata u mjernoj točki MU-3. Usporedbom rezultata vidljivo je kako do pojave nelinearnosti dolazi za manju veličinu vanjskog opterećenja nego kod mjernih točaka MU-1 i MU-2, te se u ovome području rezultati znatnije razlikuju od eksperimentalnih. Razlozi ovoj razlici rezultata mogu biti brojni. Jedan od razloga je veća količina armature postavljena u pravcu osi y, što dovodi do veće spriječenosti razvoja deformacije skupljanja u tome pravcu, odnosno do većih vlačnih naprezanja betona u pravcu osi y nego li u pravcu osi x. Očito ova vlačna naprezanja izazivaju raniju pojavu

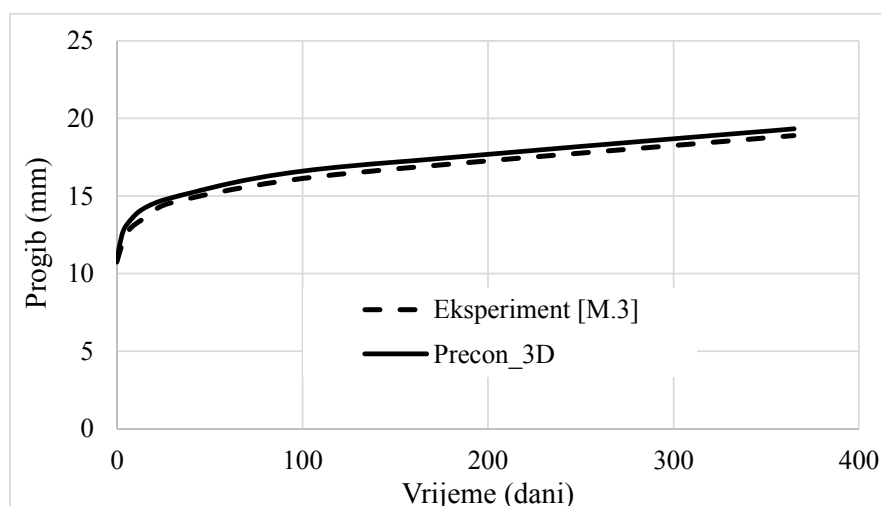
pukotine u betonu, a samim time i nelinearnosti. Za konačnu veličinu opterećenja progib dobiven numeričkim proračunom neznatno se razlikuje od eksperimentalnoga.



Crtež 5.32. Usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata u mjernoj točki MU-3

Trenutak nanošenja konačne sile od 10 kN predstavlja početak puzanja betona pod djelovanjem stalnog opterećenja. Razvoj progiba analiziran je u narednih 365 dana, te je u nastavku dana usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata, uslijed puzanja betona.

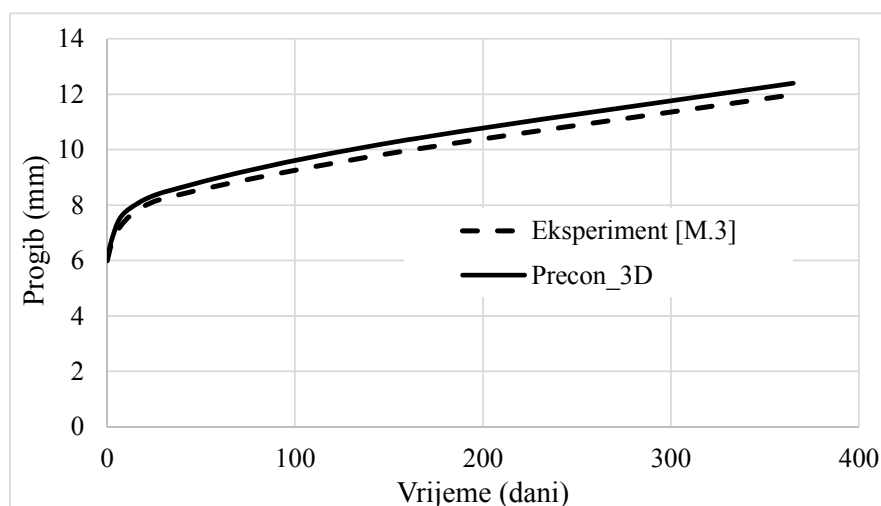
Na crtežu 5.33. prikazani su rezultati razvoja progiba tijekom vremena u mjernoj točki MU-1. Usporedbom rezultata očigledno je dobro slaganje numeričkih i eksperimentalnih rezultata.



Crtež 5.33. Usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata u mjernoj točki MU-1

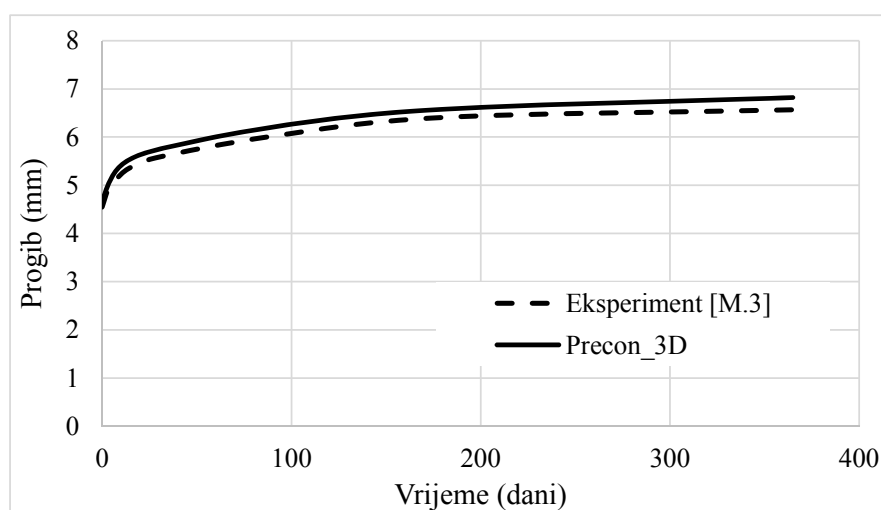
Na crtežu 5.34. prikazani su rezultati razvoja progiba tijekom vremena u mjernoj točki MU-2. Kao i za mjernu točku MU-1, tako je i za mjernu točku MU-2 vidljivo dobro slaganje

numeričkih i eksperimentalnih rezultata. Kod obje točke numerički dobivene vrijednosti su malo veće nego eksperimentalno dobivene, a to je i razumljivo s obzirom da je početni progib, kao posljedica skupljanja i statičkog opterećenja, bio nešto malo veći numerički dobiveni nego li eksperimentalno dobiveni.



Crtež 5.34. Usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata u mjernoj točki MU-2

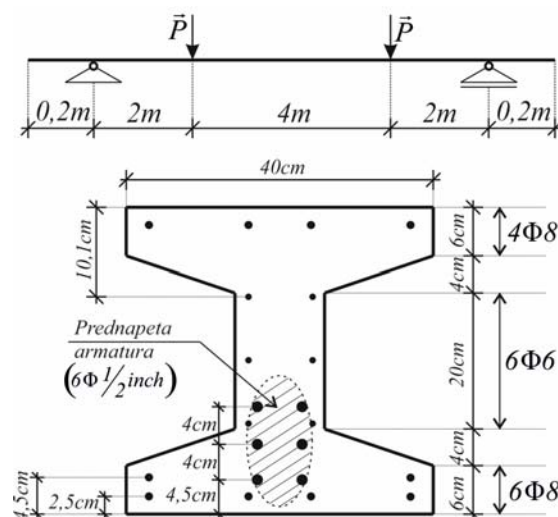
Konačno, na crtežu 5.35. prikazana je usporedba razvoja progiba kroz vrijeme u mjernoj točki MU-3. S crteža je vidljivo kako su razlike numeričkih i eksperimentalnih rezultata slične kao kod mjernih točaka MU-1 i MU-2. Usporedbom sva tri dijagrama (crteži 5.33., 5.34. i 5.35.) vidljivo kako su najbolji rezultati dobiveni za mjernu točku MU-1. Ovo može biti posljedica različitih uvjeta oslanjanja kod eksperimentalnog i numeričkog ispitivanja. Kako se točka MU-1 nalazi u središtu ploče, onda je utjecaj promjene uvjeta oslanjanja najmanji na nju.



Crtež 5.35. Usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata u mjernoj točki MU-3

5.5. Primjer 5.

Sveučilišta u Gentu, Brusselsu, Leuveni i Liegeu surađivala su na velikom istraživanju, čiji cilj je bio istražiti vremenski ovisno ponašanje armiranih i prednapetih greda izloženih različitim razinama opterećenja. Svako od navedenih Sveučilišta fokusiralo se na određeni tip greda s obzirom na geometrijske karakteristike poprečnog presjeka, stupanj armiranja ili stupanj prednapinjanja. Dio rezultata ovog istraživanja objavljen je u literaturi [V.2]. U ovom radu analizirana je prethodno prednapeta greda poprečnog I presjeka. Ukupna dužina grede, geometrijske karakteristike poprečnog presjeka, detalji armiranja i način opterećivanja prikazani su na crtežu 5.36. Za dobivanje betonske mješavine korišten je cement klase CEM I 52,5 N, a prosječna tlačna čvrstoća betona izmjerena 28. dan iznosila je 50 MPa. Usvojen je Youngov modul elastičnosti betona 35 GPa, vlačna čvrstoća betona 4 MPa, deformacija drobljenja betona 0,0035 i vlačna deformacija pri kojoj dolazi do potpunog otvaranja pukotine 0,0025. Granica popuštanja meke armature je 400 MPa, dok je Youngov modul elastičnosti 210 GPa i granična deformacija armature 0,09. Prednapinjanje presjeka izvedeno je sa 6 pravolinijskih prednapetih natega promjera pola inča (1,27 cm), tipa 12,7 S T.B.R. granice popuštanja 1900 MPa. Ukupna sila prednapinjanja u svih 6 kabela iznosila je 757 kN. Tijekom cijelog perioda ispitivanja grede su se nalazile u klimatiziranoj prostoriji s temperaturom $20^{\circ}\text{C} \pm 0,5^{\circ}\text{C}$ i relativnom vlažnošću $60\% \pm 3\%$.

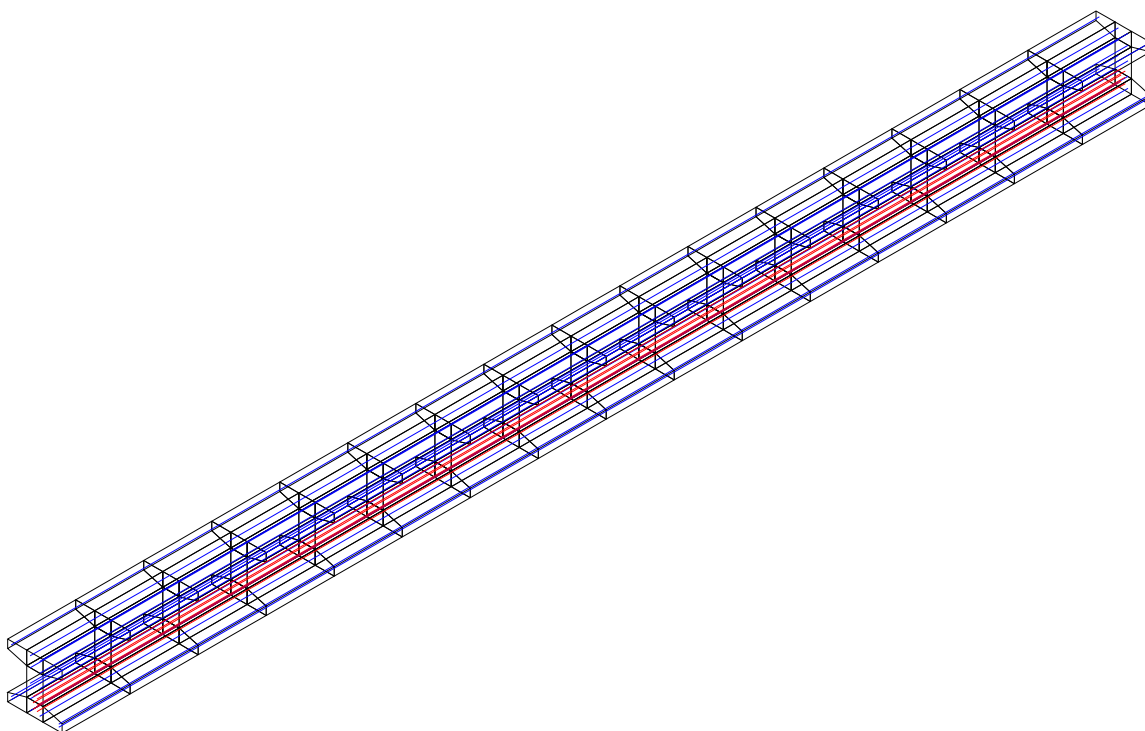


Crtež 5.36. Geometrija i opterećenje grede [V.2]

Vršeno je ispitivanje ovog tipa greda prednapetih u različitim trenucima. Tako je jedan dio greda prednapet 7, a drugi 14 dana nakon betoniranja. Zatim su grede različito opterećivane. Jedan dio greda analiziran je bez vanjskog opterećivanja, dok je jedan dio greda opterećen

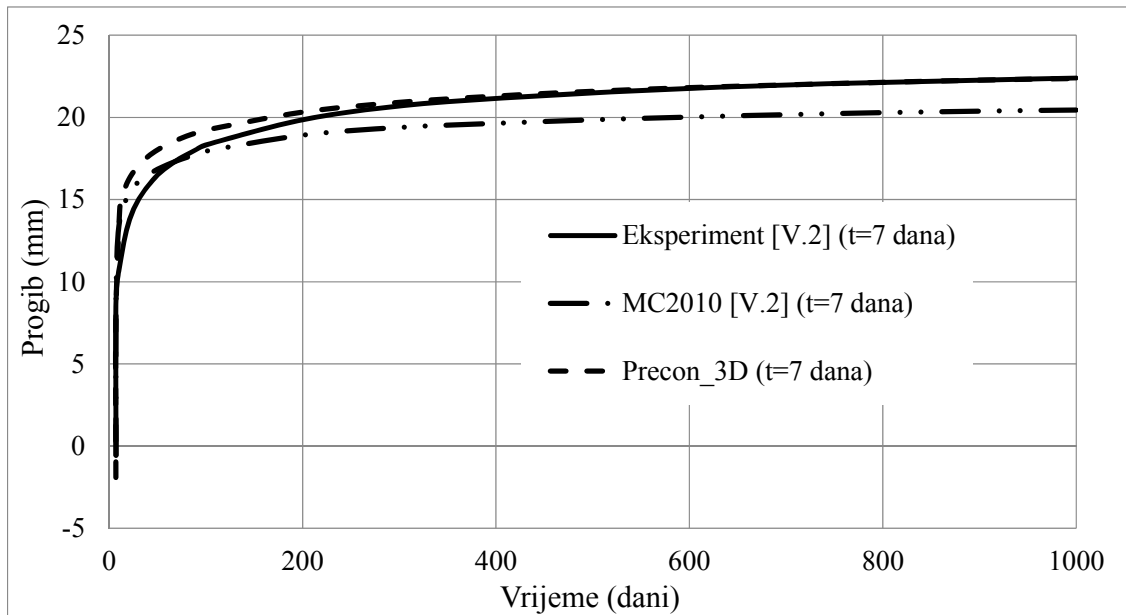
maksimalnom silom, a drugi silom koja iznosi 50 % maksimalne veličine sile. Opterećivanje greda vršeno je 28 dana nakon betoniranja. Maksimalna sila opterećivanja iznosila je $P = 54,90 \text{ kN}$. U literaturi [V.2] postoji dio eksperimentalnih rezultata koji je uspoređivan s rezultatima različitih numeričkih modela puzanja i dio rezultata koji se predviđa numeričkim modelima bez eksperimentalne potvrde rezultata. U ovom radu su iz literature [V.2] preuzeti eksperimentalni rezultati i rezultati dobiveni korištenjem Fib Model Code-a 2010.

U numeričkom modelu Precon 3D analizirana greda je diskretizirana s 112 Lagrangeovih konačnih elemenata (crtež 5.37.), pri čemu su modelirane sve uzdužne šipke meke armature i svih šest prednapetih kablova, prema crtežu 5.36. Zanimaren je utjecaj vilica.



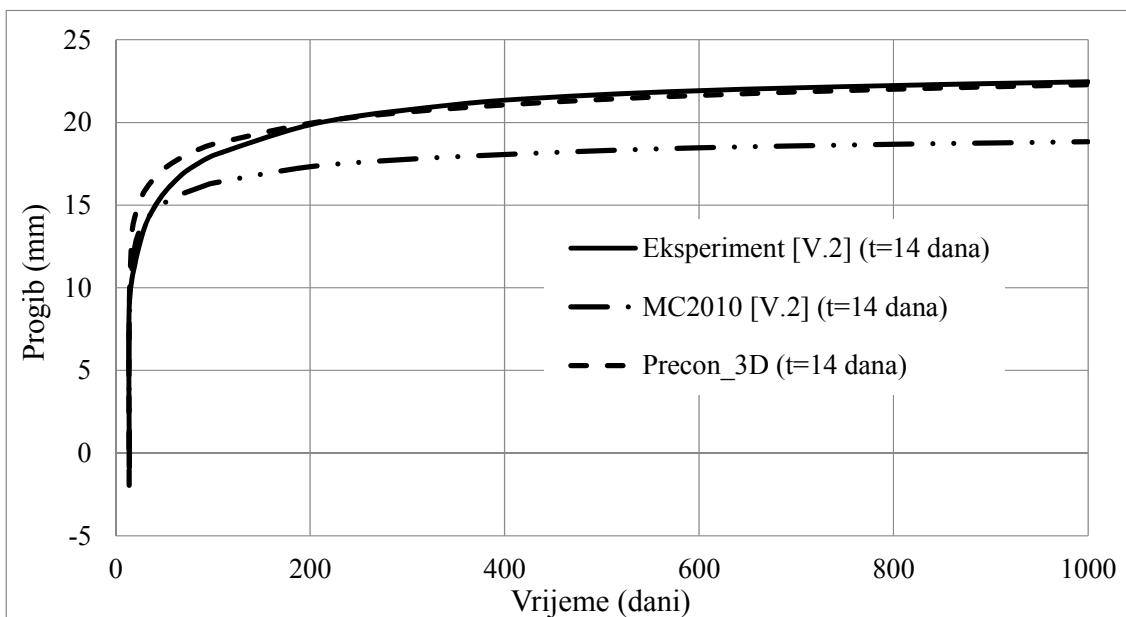
Crtež 5.37. Diskretizacija grede mrežom konačnih elemenata

U nastavku se daje usporedba rezultata dobivenih numeričkim modelom Precon 3D s rezultatima iz literature. Na crtežu 5.38. prikazani su rezultati grede prednapete 7 dana nakon betoniranja bez vanjskog opterećenja. Početak puzanja poklapa se s unosom sile prednapinjanja, dok se početak skupljanja pretpostavio jedan dan nakon betoniranja. Analiziraju se rezultati razvoja kontra progiba tijekom vremena, izazvanog unosom sile prednapinjana. Na temelju ovako postavljenih parametara dobiveno je dobro slaganje numeričkih rezultata iz Precona 3D s eksperimentalnim. Vidljivo je kako Precon 3D daje bolje slaganje rezultata nego li model korišten u literaturi. Malo odstupanje numeričkih i eksperimentalnih rezultata postoji u prvih 200 dana, dok je nakon toga savršeno slaganje rezultata.



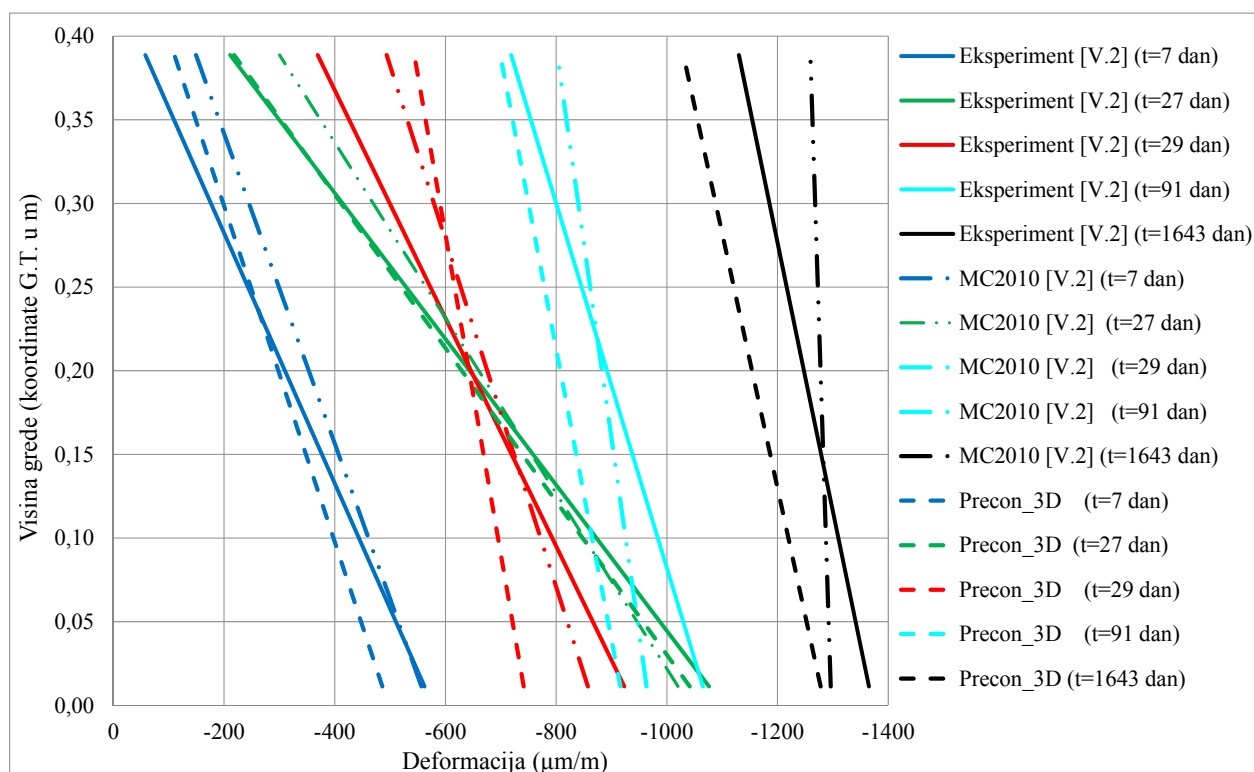
Crtež 5.38. Razvoj kontra progiba tijekom vremena za gredu prednapetu 7.-dan

Na crtežu 5.39. dana je usporedba rezultata za gredu prednapetu 14 dana nakon betoniranja bez vanjskog opterećenja. Pretpostavljeno je kako se skupljanje počinje razvijati jedan dan nakon betoniranja, dok se trenutak početka razvoja puzanja poklapa s trenutkom unosa sile prednapinjanja. S crteža 5.39. može se ustanoviti savršeno slaganje numeričkih i eksperimentalnih rezultata, kao što je bio slučaj s gredom prednapetom 7 dana nakon betoniranja.



Crtež 5.39. Razvoj kontra progiba tijekom vremena za gredu prednapetu 14.-dan

U nastavku se analizira razvoj deformacija tijekom vremena po visini grede, na polovici raspona. Rezultati odgovaraju gredi prednapetoj 7 dana nakon betoniranja i opterećenoj s 50 % maksimalne veličine sile 28 dana nakon betoniranja. Za analizu su, iz numeričkog modela, uzete Gauss točke s koordinatom $x = 4,0564$ m u pravcu osi x gledano u odnosu na nepomični oslonac (crtež 5.36.), jer su one najbliže polovici raspona grede. Početak skupljanja je pretpostavljen jedan dan nakon betoniranja, a početak razvoja deformacije puzanja poklapa se s trenutkom unosa sile prednapinjanja u gredu. Analizirani rezultati su dani na crtežu 5.40.

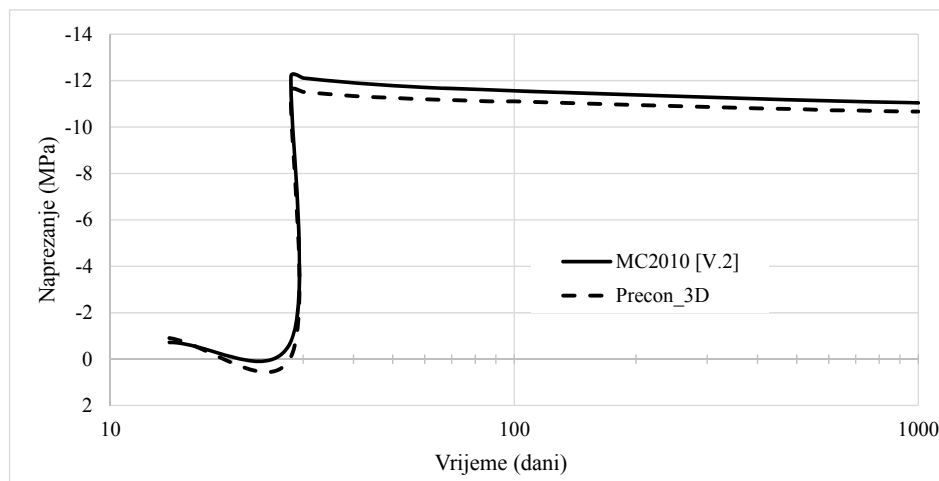


Crtež 5.40. Uzdužne deformacije po visini grede tijekom vremena

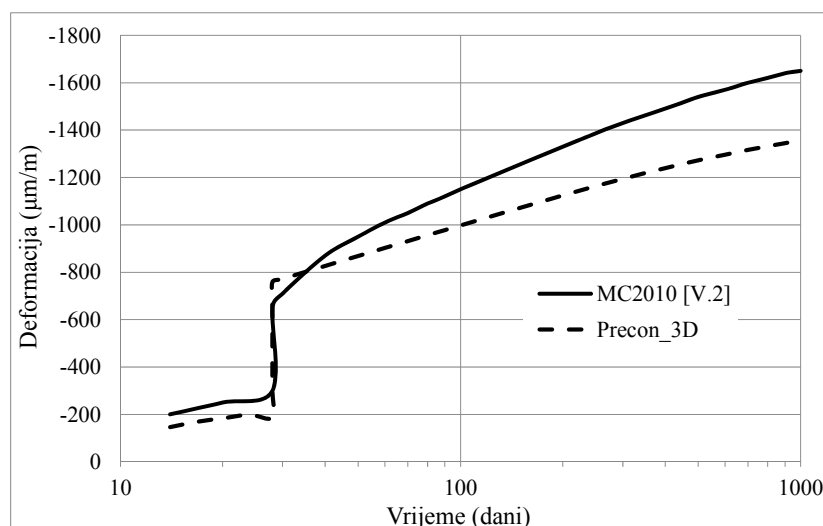
S crteža 5.40. uočljivo je dobro slaganje numeričkih i eksperimentalnih rezultata u 7. i 27. danu, pri čemu je bolje slaganje eksperimentalnih i rezultata dobivenih numeričkim modelom Precon 3D, nego li je slaganje eksperimentalnih i numeričkih rezultata iz literature. U 29., 91. i 1643. danu slaganje numeričkih rezultata dobivenih modelom Precon 3D, kao i numeričkih rezultata iz literature, s eksperimentalnima je nešto lošije. Razlog tome je što postoji opterećivanje grede u dva trenutka. Jedan trenutak je pri unošenju sile prednapinjanja i drugi 28 dana nakon betoniranja pri nanosu vanjskog opterećenja. Za ovakav slučaj opterećivanja trebalo bi modelirati razvoj dva koeficijenta puzanja, pri čemu bi jedan vrijedio za područje između dva trenutka, a drugi za područje nakon nanošenja drugog opterećenja. U numeričkom modelu Precon 3D puzanje se može razvijati samo za jedan trenutak opterećivanja. Kako je za taj

trenutak odabran trenutak prednapinjanja, onda on dobro opisuje područje između trenutaka opterećivanja, a nakon 28. dana daje manje puzanje nego što bi bio slučaj da je modeliran i razvoj puzanja nakon trenutka ponovnog opterećivanja.

Na crtežima 5.41. i 5.42. prikazani su rezultati analize grede koja je prednapeta 14 dana nakon betoniranja, te opterećena vanjskim opterećenjem 28 dana nakon betoniranja maksimalnom silom. Pretpostavljen je početak razvoja skupljanja jedan dan nakon betoniranja, dok je za početak razvoja deformacije puzanja uzet trenutak prednapinjanja grede. Crtež 5.41. daje usporedbu rezultata razvoja naprezanja gornje zone na polovici raspona tijekom vremena, dok je na crtežu 5.42. prikazana usporedba razvoja deformacije gornje zone tijekom vremena. U literaturi ne postoje eksperimentalni rezultati, nego samo rezultati numeričkih modela, tako da se uspoređuju rezultati numeričkog modela Precon 3D i Fib Model Code 2010 korištenog u literaturi.



Crtež 5.41. Naprezanja gornje zone na polovici raspona tijekom vremena

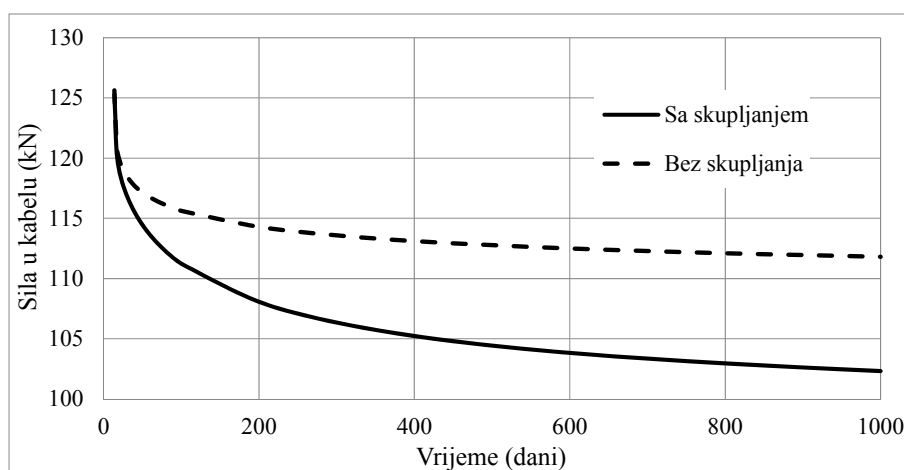


Crtež 5.42. Deformacija gornje zone na polovici raspona tijekom vremena

Na crtežima 5.41. i 5.42. uočeno je dobro slaganje numeričkih rezultata iz literature i onih dobivenih numeričkim modelom Precon 3D, pri čemu je vidljivo da je analiza naprezanja preciznija.

Rezultati prate logiku ponašanja betona u vremenu, odnosno u vremenu postoji prirast deformacije, pri čemu dolazi do relaksacije betona. Međutim, kako je riječ o opterećivanju u dva trenutka vjerojatno rezultati dobiveni za područje između 14. i 28. dana daju dobro predviđanje ponašanja betona, dok bi razvoj deformacije nakon 28. dana trebao biti nešto veći.

Na crtežu 5.43. dana je analiza utjecaja skupljanja i puzanja na gubitak sile prednapinjanja tijekom vremena. U literaturi ne postoji analiza sile prednapinjanja, tako da su dani samo rezultati dobiveni numeričkim modelom Precon 3D. Rezultati su dani za gredu prednapetu 14 dana nakon betoniranja bez vanjskog opterećenja. Za početak razvoja deformacije skupljanja usvojen je jedan dan nakon betoniranja, dok puzanje započinje s unosom sile prednapinjanja u gredu.



Crtež 5.43. Vremenski gubitci sile prednapinjanja

Unesena sila prednapinjanja po jednom kabelu iznosila je 126 kN. Analiziran je slučaj da se u obzir uzimaju obje deformacije, skupljanja i puzanja, i slučaj ako se zanemari skupljanja. Ako se u obzir uzmu obje deformacije, nakon 1000 dana sila prednapinjanja u kabelu iznosi 102,32 kN tako da je gubitak sile prednapinjanja izazvan vremenskim deformacijama betona 18,80 %.

Ukoliko se zanemari skupljanje, nakon 1000 dana sila u kabelu bi iznosila 111,82 kN, tako da je gubitak sile prednapinjanja izazvan puzanjem betona 11,30 %. Prema tome, od ukupnog gubitka sile prednapinjanja od 18,80 % na skupljanje otpada 7,50 % i na puzanje 11,30 % gubitka sile prednapinjanja.

6. ZAKLJUČCI I PRAVCI DALJNJIH ISTRAŽIVANJA

U literaturi [G.1] razvijen je nelinearni 3D numerički model za kratkotrajnu analizu armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija (Precon 3D). Razvijeni model koristi modificirani Mohr-Coulombov materijalni model za opisivanje ponašanja betona u tlaku i modificirani Rankinov materijalni model za opisivanje ponašanja betona u vlaku, dok se za opisivanje ponašanja čelika koristi elasto-viskoplastični model ponašanja materijala. Razvijeni model je verificiran usporedbom rezultata modela s eksperimentalnim rezultatima iz literature, te je dao dobro slaganje numeričkih i eksperimentalnih rezultata. Dobiveni rezultati su potvrda kako je numerički model Precon 3D pouzdan za nelinearnu analizu armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija, bez obzira da li je riječ o popuštanju betona u tlaku ili vlaku.

Zbog činjenice da postoji jedan ovakav trodimenzionalni numerički model, koji je u stanju kvalitetno opisati ponašanje betona u tlaku i vlaku, pojavila se ideja njegova daljnjeg razvoja. Tako je numerički model Precon 3D preuzet iz literature [G.1] dalje razvijan u ovom radu. Cilj ovog rada bio je razviti model kako bi bio u stanju predvidjeti dugotrajno ponašanje betona izazvano utjecajima puzanja i skupljanja betona.

Za proračun dugotrajnih utjecaja u betonu izazvanih puzanjem i skupljanjem odabrani su modeli puzanja i skupljanja prema Fib Model Code-u 2010 [F.1, H.6, H.12, M.2, M.5]. Analiza utjecaja skupljanja na armirane i prednapete konstrukcije izvršena je korištenjem ekvivalentnog temperaturnog opterećenja. Naime, za promatrani tip konstrukcije odgovarajućih materijalno-geometrijskih karakteristika, korištenjem usvojenog modela skupljanja, izračunavaju se deformacije skupljanja čistog betona (bez meke ili prednapete armature) za pravce glavnih naprezanja. Kao odnos ovako dobivenih deformacija i koeficijenta toplinske provodljivosti betona dobiju se ekvivalentne čvorne temperaturne sile, s kojima se potom optereti stvarni sustav (uzimajući u obzir meku ili prednapetu armaturu). Ekvivalentne sile se zadaju u svim čvorovima konstrukcije i one su jednake po visini i širini poprečnog presjeka.

Za razliku od skupljanja pri analizi utjecaja puzanja na ponašanje betona koristi se model korekcije modula elastičnosti betona u pravcu glavnih naprezanja. Trenutak nanošenja vanjskog opterećenja predstavlja trenutak početka proračuna koeficijenta puzanja. Za svaki trenutak računa se stanje naprezanja i deformacija u svakoj Gauss točki za pravac glavnih naprezanja, te je na osnovi bilinearnog dijagrama ponašanja betona poznat modul elastičnosti betona u svakom promatranom trenutku. U slučaju da je neko od glavnih naprezanja tlačno ili vlačno manje od vlačne čvrstoće betona, u pravcu tog naprezanja vrši se korekcija modula elastičnosti s obzirom na veličinu koeficijenta puzanja u tom trenutku. Ovaj proračun provodi se za svaku Gauss točku, tako da se korekcijom modula elastičnosti postiže ortotropija materijala na razini pojedine Gauss

točke. S ovako korigiranim modulima elastičnosti ulazi se u matricu krutosti betona, te se dobiva nova ortotropna matrica krutosti betona. Korištenjem ovako dobivene ortotropne matrice krutosti dobiju se deformacije betona izazvane puzanjem.

Pri vremenskoj analizi veličina vremenskog koraka ne mora biti konstantna. Međutim, kako je prirast deformacija puzanja i skupljanja veći u početku, a s vremenom opada, onda je u početku promatranja uzeta manja veličina vremenskog koraka, koja se onda u kasnijim fazama proračuna povećava.

Ovakvom interpretacijom puzanja i skupljanja kroz numerički model Precon 3D dobiven je model koji je u stanju provesti vremensku analizu ponašanja armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija. Kroz ovaj rad numerički rezultati vremenskog ponašanja armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija uspoređivani su s eksperimentalnim rezultatima iz literature. U prvom primjeru analizirana su tri tipa neopterećenih zidova od čistog betona i mjerena je deformacija skupljanja. Kroz treći primjer analizirana je armiranobetonska greda koja je u određenom trenutku opterećena vanjskim opterećenjem i snimano je njeno ponašanje kroz duži vremenski period. U četvrtom primjeru analizirana je armiranobetonska ploča koja je opterećena 90 dan nakon betoniranja, te je praćeno njeno ponašanje kroz idućih 365 dana. Peti primjer daje rezultate vremenske analize četiri djelomično prethodno prednapete betonske grede. Prva greda je prednapeta 7 dana nakon betoniranja i nije opterećivana vanjskim opterećenjem, dok je druga greda prednapeta 7 dana nakon betoniranja te 28 dana nakon betoniranja opterećena vanjskim opterećenjem. Treća i četvrta greda su prednapete 14 dana nakon betoniranja, pri čemu treća greda nije opterećivana vanjskim opterećenjem dok je četvrta opterećena 28 dana nakon betoniranja. Rezultati dobiveni numeričkom analizom uspoređeni su s onima iz literature, te su dali izvrsno slaganje numeričkih i eksperimentalnih rezultata. Na osnovi dobivenih rezultata može se zaključiti kako je opravdan razvoj numeričkog modela Precon 3D proveden kroz ovaj rad. Drugi primjer prikazan u ovome radu analizira ponašanje proizvoljno odabrane armirano betonske grede, pri čemu je analiziran utjecaj skupljanja na ponašanje betona i armature. Rezultati dobiveni u numeričkoj simulaciji slažu se s teorijskom logikom utjecaja skupljanja na ponašanje betona i armature. Kroz drugi, treći, četvrti i peti primjer uočeno je kako skupljanje daje izvjestan utjecaj na ponašanje meke armature i prednapetih kablova, te se ono pri dugotrajnoj analizi ne bi trebalo zanemarivati. Kao rezultat analize numeričkih rezultata zaključeno je kako deformacija skupljanja betona zapravo predstavlja prirodu ponašanja betona, te se ona ne može tretirati kao „klasična“ deformacija (ne izaziva promjenu naprezanja u betonu), npr. kao deformacije izazvane vanjskim djelovanjima. Međutim, problem predstavljaju spriječene deformacije skupljanja koje se pojavljuju kod armiranih i prednapetih betonski

konstrukcija. Ove deformacije dovode do pojave vlačnih naprezanja u betonu koja mogu doseći granicu vlačne čvrstoće betona, a samim time uzrokovati pojavu pukotina u betonu, tj. dovesti do nelinearnosti u betonu. Ove spriječene deformacije skupljanja potrebno je pridodati deformacijama izazvanim vanjskim djelovanjima, te s takvim stanjem deformacija analizirati ponašanje konstrukcija.

Bitno je napomenuti kako je numerički model Precon 3D koncipiran tako da korisniku ostavlja mogućnost slobodnog izbora provođenja kratkotrajne ili dugotrajne analize. Ako je riječ o dugotrajnoj analizi, onda postoji mogućnost analize samo skupljanja, samo puzanja ili i puzanja i skupljanja betona. Kod analize skupljanja betona moguće je provesti analizu ukupnog skupljanja kao zbroj autogenog i skupljanja sušenjem ili samo analizu skupljanja sušenjem.

Na osnovi svega prethodno navedenoga može se zaključiti kako numerički model Precon 3D predstavlja jedan pouzdan model za provođenje kratkotrajne i dugotrajne analize armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija. Osim što je Precon 3D pouzdan model, on je također jednostavan i lako primjenjiv model, te njegov daljnji razvoj ne samo da je preporučljiv nego i neophodan.

Neke od mogućnosti daljnjeg razvoja numeričkog modela Precon 3D, kao i mogućnosti daljnjih istraživanja u ovome području sažeto su prikazane kroz nekoliko točaka u nastavku.

- U razvijenom modelu skupljanje je simulirano na način da je razvoj deformacije skupljanja jednolik po visini poprečnog presjeka. Daljnjim razvojem modela preporučuje se simulacija nejednolikog razvoja deformacije skupljanja po visini poprečnog presjeka, te usporedba rezultata dobivenih za slučaj jednolikog i nejednolikog razvoja deformacije kako bi se utvrdila veličina greške dobivene korištenjem jednolikog razvoja deformacije.
- Potrebno je nadograditi numerički model kako bi bio u mogućnosti računati razvoj deformacije puzanja za slučaj više različitih trenutaka opterećivanja konstrukcije.
- U ovom radu nije modeliran niti analiziran slučaj rasterećenja konstrukcije, te bi daljnji razvoj modela trebao uključivati modeliranje povratne deformacije puzanja betona.
- Ako se govori o konstrukcijama izvedenim u područjima podložnim velikim temperaturnim promjenama, temperaturne promjene će utjecati na ponašanje konstrukcija te je neophodna analiza tih utjecaja na ponašanje konstrukcija. Stoga se preporučuje modeliranje utjecaja temperaturnih promjena na armirane i prednapete konstrukcije.
- Trenutni model čelika ne omogućava proračun utjecaja relaksacije čelika na gubitke sile prednapinjanja, tako da bi se daljnjim razvojem i to trebalo uključiti u model.

- Numerički model Precon 3D nije u stanju pratiti ponašanje konstrukcija pri faznom građenju. Ukoliko bi se u model uključila mogućnost analize faznog građenja model bi se mogao koristiti za analizu širokog spektra konstruktivnih rješenja.
- Uključivanjem modela ponašanja tla i stijene u numerički model Precon 3D omogućio bi se proračun realnih konstrukcija u prostoru.
- Kako bi model mogao simulirati sva ponašanja koja mogu zadesiti neku konstrukciju, neophodno je njegovo proširenje na analizu dinamičkog ponašanja armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija.

7. LITERATURA

- [A.1] AASHTO LRFD Bridge Design Specifications, 6th ed., Washington, DC: American Association of State Highway and Transportation Officials, 2012.
- [A.2] ACI Committee 209, Factors Affecting Shrinkage and Creep of Hardened Concrete (ACI 209.1R), Farmington Hills, MI: American Concrete Institute, 2005.
- [A.3] ACI Committee 209, Guide for Modeling and Calculating Shrinkage and Creep of Concrete (ACI 209.2R-08), Farmington Hills, MI: American Concrete Institute, 2008.
- [A.4] Alendar, V., Prethodno napregnuti beton, Vežbe na IX-om semestru odseka za konstrukcije školske 2003./2004. godine, Građevinski fakultet u Beogradu, Institut za materijale i konstrukcije, Beograd, 2003.
- [A.5] Altoubat, S.A., Lange, D.A., Early Age Shrinkage and Creep of Fiber Reinforced Concrete for Airfield Pavement, Aircraft Pavement Technology, 2001.
- [A.6] Antoniak, D., Konderla, P., Physical modelling of prestressed structures, Proc of the XII Polish Conference on Computer Methods in Mechanics, 99-106, 1997.
- [A.7] Aparicio, A.C., and Ramos, G., Flexural strength of externally prestressed concrete bridges, ACI Structural Journal, Vol. 93, Issue 5, 512-523, 1996.
- [A.8] AS 3600, Australian Standard™ for Concrete Structures, Standards Australia, Sydney, 2009.
- [A.9] Aslani, F., Experimental and Numerical Study of Time Dependet Behaviour of Reinforced Self-Compacting Concrete Slabs, PhD Thesis, School of Civil and Environmental Engineering, University of Technology Sydney, Sydney, 2014.
- [B.1] Bathe, K.J., Walczak, J., Welch, A., Mistry, N., Nonlinear analysis of concrete structures, Computers and Structures, Vol. 32, No. 3/4, 1989.
- [B.2] Bažant, Z.P., Shieh, C.L., Endochronic model for nonlinear triaxial behavior of concrete, Nuclear Engineering and Design, 47, 1978.
- [B.3] Bažant, Z.P., Bhat, P.D., Endochronic Theory of Inelasticity and Failure of Concrete, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 102, Issue 4, 701-722, 1976.
- [B.4] Bažant, Z.P., Panula, L., Creep and Shrinkage for Analyzing Prestressed Concrete Structures, PCI Journal, Vol. 25, Issue 3, 68-117, 1980.

- [B.5] Bažant, Z.P., Theory of creep and shrinkage in concrete structures: a precise of recent developments, Mechanics Today, Vol. 2, edited by Nemat-Nasser, S., Pergamon Press, New York, USA, 1975.
- [B.6] Bažant, Z.P., Mathematical models for creep and shrinkage of concrete, Creep and Shrinkage in Concrete Structures, edited by Bazant, Z.P. and Wittmann, F.H., John Wiley and Sons, New York, USA, 1982.
- [B.7] Bažant, Z.P., Baweja, S., Creep and Shrinkage Prediction Model for Analysis and Design of Concrete Structures: Model B3, Adam Neville Symposium: Creep and Shrinkage-Structural Design Effects, ACI SP-194, A. Al-Manaseer, ed., Am. Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 1-83, 2000.
- [B.8] Bićanić N, Metoda plastičnosti u nelinearnom području inženjerskih konstrukcija, Građevni godišnjak '01/'02, Hrvatski savez građevinskih inženjera, Zagreb, str. 161-217, 2002.
- [B.9] Biolzi, L., Cattaneo, S., Crespi, P., Giordano, N., Damage in glass-concrete composite panels, Construction and Building Materials, Vol. 116, 235-244, 2016.
- [B.10] Boresi, A. P., Schmidt, R. J., Advanced Mechanics of Materials, Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, Inc., 2003.
- [B.11] Brzović, D., Doprinos numeričkom modeliranju dinamičkog međudjelovanja tekućine i konstrukcija, Magistarski rad, Građevinsko-arhitektonski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 2008.
- [B.12] Byfors, J., Plain concrete at early ages, Swedish Cement and Concrete Institute, Stockholm, 1980.
- [C.1] Cervera, M., Nonlinear analysis of reinforced concrete structures using three dimensional and shell finite element models, Ph.D. Thesis, University of Wales, Swansea, 2006.
- [C.2] Charpin, L., Le Pape, Y., Coustabeau, E., Toppani, E., Heingling, G., Le Bellego, C., Masson, B., Montalvo, J., Courtois, A., Sanahuja, J., Reviron, N., A 12 year EDF study of concrete creep under uniaxial and biaxial loading, Cement and Concrete Research, 103: 140-159, 2018.
- [C.3] Chow, C.O., Hinton E., Abdel Rahman, H.H., Analysis of Creep and Shrinkage Effect in Reinforced Concrete Beams, Proceedings of the International Conference on Computer-Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Split, 1984.

- [C.4] Corley, W.G., Sozen, M.A., Time – Dependent Deflection of Reinforced Concrete Beams, *ACI Journal*, Vol. 63., No. 3, 373-386, 1966.
- [D.1] D'Addeta, G., Kun, F., Ramm, E., Hermann, H., From solids to granulates-discrete element simulations of fracture and fragmentation processes in geomaterials, *Continuous and discontinuous modelling of cohesive-frictional materials*, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 568, 231-258, Berlin, 2001.
- [D.2] Damjanić, F., A finite element technique for analysis of reinforced concrete structures, *Finite Element Methods for Nonlinear Problems*, Eds. Bergan P. et al. Springer, 623-637, 1986.
- [D.3] Di Luizo, G., Numerical model for Time-Dependent Fracturing of Concrete, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 135, Issue 7, 632-640, 2009.
- [E.1] EUROCODE 2: Design of Concrete Structures, Part 1: General Rules and Rules for Buildings, Brussels, 1990.
- [F.1] Federation Internationale du Beton, Model Code 2010, Number vol. 65 in *fib Bulletin*, International Federation for Structural Concrete (fib), 2012.
- [F.2] Forth, J.P., Ru, M., Scott, R.H., Jones, A.E.K., Beeby, A.W., Verification of cracked section shrinkage curvature models, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* (<http://dx.doi.org/10.1680/stbu.12.00046>), Vol. 167, Issue 5, 274-284, 2014.
- [G.1] Galić, M., Razvoj nelinearnog 3D numeričkog modela armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija, *Disertacija*, Građevinsk-arhitektonski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 2006.
- [G.2] Galić M., Numerički trodimenzionalni model prednapetih i betonskih konstrukcija, *Magistarski rad*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 2002.
- [G.3] Galić, M., Marović, P., Nikolić, Ž., Modified Mohr–Coulomb – Rankine Material Model for Concrete, *Engineering Computations*, Vol. 28, Issue 7, 853-887, 2011.
- [G.4] Geng, Y., Wang, Y., Chen, J., Creep behaviour of concrete using recycled coarse aggregates obtained from source concrete with different strengths, *Construction and Buildings Materials*, Vol. 128, 199-213, 2016.
- [G.5] Ghali, A., Favre, R., *Concrete Structures: Stresses and Deformations*, Chapman and Hall Ltd, New York, 1986.

- [G.6] Ghali, A., Favre, R., Elbadry, M., Concrete Structures: Stresses and Deformations, Third Edition, Spon Press, London, UK, 2002.
- [G.7] Gilbert, R.I., Ranzi, G., Time-Dependent Behaviour of Concrete Structures, Spon Press, London and New York, 2011.
- [G.8] Gilbert, R.I., Time Effects in Concrete Structures, The International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete, Vol. 11, 60-61, 1989.
- [G.9] Gilbert, R.I., Time-dependent Stiffness of Cracked Reinforced and Composite Concrete Slabs, 11th International Conference on Modern Building Materials, Structures and Techniques, MBMST 2013, Procedia Engineering, Vol. 57, 19-34, 2013.
- [G.10] Gilbert, R.I., Shrinkage and early-age temperature induced cracking and crack control in concrete structures, International Conference on Performance-based and Life-cycle Structural Engineering, Brisbane, QLD, Australia, 9-11 December 2015
- [G.11] Grassl, P., Xenos, D., Nystroem, U., Rempling, R., Gylltoft, K., CDPM2: A damage-plasticity approach to modelling the failure of concrete, Science Direct, 2013.
- [G.12] Gribniak, V., Kaklauskas, G., Bacinskas, D., Shrinkage in reinforced concrete structures: A computational aspect, Journal of Civil Engineering and Management, Vol. 14, No. 1, 49-60, 2008.
- [G.13] Gribniak, V., Kaklauskas, G., Kliukas, R., Jakubovskis, R., Shrinkage effect on short-term deformation behavior of reinforced concrete – When it should not be neglected, Materials and Design, Vol. 51, 1060-1070, 2013.
- [G.14] Gunavant, K.K., Pranesh, B.M., Effect of Addition of Fly Ash on Shrinkage Characteristics in High Strength Concrete, International Journal of Advanced Technology in Civil Engineering, Vol. 2, Issue 1, 11-16, 2013.
- [H.1] Han, A.L., Sukamata, Indriyantho, B.R., A Finite Element Approach to the Mohr-Coulomb and Kupfer-Hilsdorf-Rush Concrete Failure Criteria in Tension, Journal of Engineering Technology, Vol. 3, No. 1, 2014.
- [H.2] Han, B., Xian, T.Y., Xie, U.B., A Bayesian inference framework for predicting the long-term deflection of concrete structures caused by creep and shrinkage, Engineering Structures, Vol. 142, 46-55, 2017.
- [H.3] Harajli, M. H., Strengthening of concrete beams by external prestressing. PCI Journal, Vol. 38, Issue 6, 76–88, 1993.

- [H.4] Hasanović, V., Zlatar, M., *Betonske konstrukcije I - Predavanja*, Građevinski fakultet Sarajevo, Sarajevo, 1997.
- [H.5] Havlasek, P., Jirasek, M., *Multiscale modeling of drying shrinkage and creep of concrete*, *Cement and Concrete Research*, Vol. 85, 55-74, 2016.
- [H.6] Havlasek, P., *Creep and Shrinkage of Concrete Subjected to Variable Environmental Conditions*, Doctoral Thesis, Faculty of Civil Engineering, Department of Mechanics, Czech Technical University in Prague, Prague, 2014.
- [H.7] Hibbeler, R.C., *Structural Analysis*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2006.
- [H.8] Hilaire, A., Benboudjema, F., Darquennes, A., Berthaud, Y., Nahas, G., *Modeling basic creep in concrete at early-age under compressive and tensile loading*, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 269, 222-230, 2014.
- [H.9] Hinton E., Owen D.R.J., *Finite Element Programming*, Academic Press, London, 1977.
- [H.10] Hofstetter, G, Mang, H. A., *Nonlinear finite element analysis of prestressed concrete shells*, *Proceedings of the 3rd International Conference Numerical Methods for Nonlinear problems*, Dubrovnik, Eds. C. Taylor, D. R. J. Owen, E. Hinton, F. B. Damjanić, Pineridge Press, 344-362, 1986.
- [H.11] Hofstetter, G., Mang H.A., *Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures*, Vieweg Verlag, Braunschweig, Wisbaden, 1995.
- [H.12] Holowaty, J. *New Formula for Creep of Concrete in fib Model Code 2010*, *American Journal of Materials Science and Application*, Vol. 3, No. 5, 59-69, 2015.
- [H.13] Hua, C., Acker, P., Ehrlicher, A., *Analyses and models of the autogenous shrinkage of hardening cement paste. I. Modeling at macroscopic scale*, *Cement and Concrete Research*, Vol. 25, No. 7, 1457-1468, 1995.
- [H.14] Hyodo, H., Sato, R., Kawai, K., Nakayama, H., *Effects of drying shrinkage on shear tension strength of reinforced concrete beams*, 8th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures, Toledo, Spain, March 10 – 14, 2013.
- [H.15] <http://www.engineerstandpoint.blogspot.ba/2010/09/services.html>
- [H.16] <http://www.helpdesk.uniri.hr/gradri/kolegiji/30>
- [H.17] <http://www.thoughtco.com/history-of-concrete-and-cement-1991653>
- [H.18] <http://www.youtube.com/watch?v=nRlzAuojqeU>

- [H.19] <https://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/Structures.d/IAST.Lect05.d/IAS T.Lect05.pdf>
- [I.1] Improving the Accuracy of Camber Predictions for Precast Pretensioned Concrete Beams, Bridge Engineering Centre, Sponsored by Iowa Highway Research Board, Iowa Department of Transportation, Iowa State University, 2015.
- [I.2] Ivković, M., *Betonske konstrukcije II*, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Institut za materijale i konstrukcije, Beograd, 1981.
- [J.1] Jankoviak, T., Lodygowski, T., Identification of parameters of concrete damage plasticity constitutive model, *Foundations of Civil and Environmental Engineering*, No. 5, 2005.
- [J.2] Jayaseelan, H., Russell, B. W., *Prestress Losses and the Estimation of Long-Term Deflections and Camber for Prestressed Concrete Bridges*, Final Report, Stillwater, OK: Oklahoma State University, 2007.
- [J.3] Jeong, Y., Lee, J., Kim, W.S., Modeling and Measurement of Sustained Loading and Temperature-Dependent Deformation of Carbon Fiber-Reinforced Polymer Bonded to Concrete, *Materials*, Vol. 8, 435-450, 2015.
- [J.4] Jirasek, M., Havlasek, P., Microprestress-solidification theory of concrete creep: Reformulation and improvement, *Journal Cement and Concrete Research*, No. 60, 51-62, 2014.
- [J.5] Jović V., *Uvod u inženjersko numeričko modeliranje*, Aquarius engineering, Split, 1993.
- [K.1] Kang, Y. J., *Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced and Presstressed Concrete Frames*, Ph. D. Thesis, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley, UC-SESM Report No. 77-1, 1977.
- [K.2] Klemczak, B., Knoppik-Wrobel, A., Early age thermal and shrinkage cracks in concrete structures – Description of the problem, *Architecture Civil Engineering Environment*, Vol. 4, No. 2, 35-48, 2011.
- [K.3] Kožul, M., *Numerička simulacija vremenski ovisnih deformacija betona*, Disertacija, Građevinski fakultet Sveučilišta u Mostaru, Mostar, 2011.
- [K.4] Kraezig, W. B., Mang, H. A., de Borst R., *Computational mechanics of nonlinear solids*, Lectures of summer school of computational mechanics, Pula, 1985.

- [K.5] Ktsovos, M. D., Pavlović M.: Structural Concrete, Thomas Telford Publications, London, 1995.
- [L.1] Leonhart, F., Prednapregnuti beton u praksi, Građevinska knjiga, Beograd, 1968.
- [L.2] Li, Y., Barbič, J., Stable Orthotropic Materials, Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation, Editors: Koltun, V. and Sifakis, E., 2014.
- [L.3] Li, Z., Cao, G., Tan, Y., Prediction of time-dependent flow behaviors of fresh concrete, Construction and Building Materials, Vol. 125, 510-519, 2016.
- [L.4] Lorman, W.R., The theory of concrete creep. ASTM, Proc. 40, 1082-1102, 1940.
- [L.5] Lou, T., Lopes, S.M.R., Lopes, A.V., Time-dependent behavior of concrete beams prestressed with bonded AFRP tendons, Composites Part B: Engineering, Vol. 97, 1-8, 2016.
- [L.6] Lubarda, V., Otpornost materijala (Uvod u mehaniku deformabilnog tijela), Drugo izdanje, NIO „Univerzitetska riječ“, Titograd, 1989.
- [L.7] Lura, P., Jensen, O.M., Van Breugel, K., Autogenous shrinkage in high-performance cement paste: An evaluation of basic mechanism, Cement and Concrete Research, Vol. 33, No. 2, 223-232, 2003.
- [M.1] Manisekar, R., and Senthil, R., Stress at ultimate in unbonded post-tensioning tendons for simply supported beams-A state of-the-art-review, Advances in Structural Engineering, Vol. 9, Issue 3, 321-335., 2006.
- [M.2] Mante, D. M., Improving Camber Predictions for Precast, Prestressed Concrete Bridge Girders, PhD Thesis, Faculty of Auburn University, Alabama, 2016.
- [M.3] Matešan, D., Vremenska analiza prednapetih betonskih ljustica, Disertacija, Građevinsko-arhitektonski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 2007.
- [M.4] Mihanović, A., Marović, P., Dvornik, J., Nelinearni proračuni armirano betonskih konstrukcija, Društvo hrvatskih građevinskih konstruktora, Serija priručnici, knjiga 7, Zagreb, 1993.
- [M.5] Mola, F., Pellegrini, L.M., The New Model for Creep of Concrete in FIP Model Code 2010, 37th Conference on Our World in Concrete and Structures, Singapore, 2012.
- [M.6] Muravljov, M., Građevinski materijali, Građevinska knjiga, Beograd, 2007.

- [N.1] Naaman, A.E., and Alkhairi, F.M., Stress at ultimate in unbonded post-tensioning tendons: Part 1 - Evaluation of the state-of-the-art, *ACI Structural Journal*, 88(5), 641-651, 1991.
- [N.2] Naaman, A.E., and Alkhairi, F.M., Stress at ultimate in unbonded post-tensioning tendons: Part 2 - Proposed methodology, *ACI Structural Journal*, Vol. 88, Issue 5, 683-692, 1991.
- [N.3] Naaman, A.E., *Prestressed Concrete Analysis and Design: Fundamentals*. 2nd ed. Ann Arbor, MI: Techno Press 3000, 2004.
- [N.4] Neville, A.M., Dilger, W.H., Brooks, J.J., *Creep of plain and structural concrete*, Construction Press, London and New York, 1982.
- [N.5] Neville, A.M., Time-Dependent behaviour of Cemsave concrete, *Concrete*, Volume 9, No. 3, 36-39, 1975.
- [N.6] Ng, C.K., Tan, K., H., Flexural behaviour of externally prestressed beams. Part I: Analytical model, *Engineering Structures*, Vol. 28, Issue 4, 609-621, 2006.
- [N.7] Ng, C.K., Tan, K., H., Flexural behaviour of externally prestressed beams. Part II: Experimental investigation, *Engineering Structures*, Vol. 28, Issue 4, 622-633, 2006.
- [N.8] Ng, C.K., Tendon stress and flexural strength of externally prestressed beams, *ACI Structural Journal*, Vol. 100, Issue 5, 644-653, 2003.
- [N.9] Nikishkov, G.P., *Introduction to the Finite Element Method*, University of Aizu, Aizu-Wakamatsu 965-8580, Japan, 2004.
- [N.10] Nikolić, Ž., *Razvoj numeričkog modela za naknadno prednapinjanje armirano betonskih konstrukcija u ravnini*, Magistarski rad, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 1993.
- [O.1] Odendaal, D., *Repair of Prestressed Concrete Bridges - Stress Distribution and Prestressing Losses*, Rapport TVBK - 5183, Department of Structural Engineering, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 2010.
- [O.2] Owen, D. R. J., Hinton, E., *Finite Elements in Plasticity, Theory and Practice*, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K., 1986.
- [P.1] Partov, D., Kantchev, V. Time-Dependent Analysis of Composite Steel-Concrete Beams Using Integral Equation of Volterra According Eurocode-4, *Engineering Mechanics*, Vol. 16, No. 5, 367-392, 2009.

- [P.2] PCI, Precast Prestressed Concrete Bridge Design Manual 3rd ed. Chicago, IL: Precast/Prestressed Concrete Institute, 2011.
- [P.3] Pisani, M.A., Numerical analysis of continuous beams prestressed with external tendons, *Journal of Bridge Engineering*, ASCE, Vol. 14, Issue 2, 93-101, 2009.
- [P.4] Polivka, M.P., Studies of creep in mass concrete, Paper 12, Symposium on Mass Concrete, ACI Special Publication, No. 6, 30, 1964.
- [P.5] Pui Lam, N.G., Constitutive Modelling and Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures, PhD Thesis, The University of Hong Kong, Hong Kong, 2007.
- [R.1] Radnić, J., Harapin, A., Matešan, D., Statička i dinamička analiza betonskih ljsaka - element ljske i modeli, *Građevinar*, Vol. 53, 2001.
- [R.2] Radnić, J., Matešan, D., Model nelinearnog puzanja betona, *Građevinar*, Vol. 63, 2011.
- [R.3] Ražanicin, A.R., Teorija puženja materijala, Građevinska knjiga, Beograd, 1974.
- [R.4] Rebello, K.J., Analysis for Creep, Shrinkage and Temperature Effects on Expansion Joint Movements in Composite Prestressed Concrete Bridges, PhD Thesis, Louisiana State University and Agricultural and Mechanical College, Louisiana, 1990.
- [R.5] Reed, P., Schoonees, K., Salmond, J., Historic concrete structures in New Zealand - Overview, maintenance and management, New Zealand Department of Conservation, Wellington, 2008.
- [R.6] Rougelot, T., Skoczylas, F., Burlion, N., Water desorption and shrinkage in mortars and cement paste: Experimental study and poromechanical model, *Cement and Concrete Research*, Vol. 39, No. 1, 36-44, 2009.
- [S.1] Safiuddin, Md., Amrul Kaish, A.B.M., Woon, C.O., Raman, S.N., Early-Age Cracking in Concrete: Causes, Consequence, Remedial Measures, and Recommendations, *Applied Science*, Vol. 8, 2018.
- [S.2] Sakata, K., Shimomura, T., Recent progress in research on and code evaluation of concrete creep and shrinkage in Japan, *Journal of Advanced Concrete Technology* 2, 2004.
- [S.3] Sasaki, T., Soga, K., Abuhaikal, M., Water absorption and shrinkage behaviour of early age cement in wellbore annulus, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Vol. 169, 205-219, 2018.

- [S.4] Seara-Paz, S., Gonzales-Fonteboa, B., Martinez-Abella, F., Gonzales-Taboada, I., Time-dependent behaviour of structural concrete made with recycled coarse aggregates. Creep and shrinkage, *Construction and Building Materials*, Vol. 122, 95-109, 2016.
- [S.5] Selna, L.G., Time Dependent Behaviour of Reinforced Concrete Structures, UC-SESM Report No. 67-19, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley, 1967.
- [S.6] Seok-Joon, J, Sun-Woo, K., Wan-Shin, P., Koichi, K., Hyun-Do, Y., Effects of Shrinkage-Compensation on Mechanical Properties and Repair Performance of Strain-Hardening Cement Composite Materials, *Advances in Civil Engineering*, Vol. 2018, 1-12, 2018.
- [S.7] Shekarbeigi, M., Sharafi, H., Constitutive Model for Concrete: An Overview, *Current World Environment*, Vol. 10, Special Issue 1, 2015.
- [S.8] Shen, D., Jiang, J., Wang, W., et al., Tensile creep and cracking resistance of concrete with different water-to-cement ratios at early age, *Construction and Building Materials*, Vol. 146, 410-418, 2017.
- [S.9] Souptik, S., Aritra, H., Shashank, B., Shrinkage in Concretes Containing Fly Ash, UKIERI Concrete Congress, 1 – 11, Jalandahar, India, March 5 – 8, 2013.
- [S.10] Sun, W., Huang, Y., Anisotropic Nonlinear Elastic Model of Concrete and Secondary Development in ABAQUS, *The Open Civil Engineering Journal*, Vol. 10, 2016.
- [Š.1] Šahinagić-Isović, M., Markovski, G., Čećez, M., Shrinkage strain of concrete - causes and types, *Građevinar*, Vol. 64, No. 9, 727-734, 2012.
- [Š.2] Šunjić, G., Numeričko modeliranje ponašanja betonskih brana pod utjecajem seizmičkih opterećenja, *Disertacija*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Mostaru, Mostar, 2016.
- [T.1] The Adam Neville Symposium: Creep and Shrinkage-Structural Design Effects, SP-194, Eds. A. Al-Manaseer, ACI, 2000.
- [T.2] Tomičić, I., *Betonske konstrukcije - odabrana poglavlja*, Društvo hrvatskih građevinskih konstruktora, serija Priručnici, knjiga 4, Zagreb, 1990.
- [U.1] Ukrainczyk, V., *Beton - Struktura, Svojstva, Tehnologija*, Udžbenik Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1994.
- [V.1] Valanis, K.C., *Archiwum Mechaniki Stosowanej* 23, 517, 1971.

- [V.2] Van Mullem, T., Analysis and numerical simulation of long-term creep tests on concrete beams, Master's dissertation, Department of Structural Engineering, Faculty of Engineering and Architecture, University Gent, Gent, 2016.
- [V.3] Van Zijl, G.P.A.G., A Numerical Formulation for Masonry Creep, Shrinkage and Cracking, Series 11: Engineering Mechanisms 01, Delft University Press, 1999.
- [V.4] Vinkler, M., Vitek, J.L., Drying shrinkage of concrete elements, Structural Concrete – Journal of the fib, Vol. 18, Issue 1, 92-103, 2017.
- [V.5] Vinkler, M., Vitek, J.L., Drying Shrinkage of Concrete: Experiments and Numerical Models, Solid State Phenomena, Vol. 259, 46-51, 2017.
- [W.1] Wyffels, T.A., French, C. E., Shield, C. K., Effects of Pre-Release Cracks in High-Strength Prestressed Concrete. Final Project Report, University of Minnesota, St. Paul, MN: Minnesota Department of Transportation Office of Research Administration, Minnesota, 2000.
- [X.1] Xiang, Y., Lou, T., Finite element modeling of concrete beams prestressed with external tendons, Engineering Structures, Vol. 28, 1919-1926, 2006.
- [Z.1] Zawam, M., Soudki, K., West, J.S., Effect of Prestressing Level on the Time-Dependent Behavior of GFRP Prestressed Concrete Beams; Journal of Composites for Construction, Vol. 21, Issue 4, 2017.
- [Z.2] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., The Finite Element Method, Butterworth Heinman, Oxford, 2000.
- [Z.3] Zienkiewicz, O. C., Taylor R. L., Zhu, J. Z., The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals-Sixth Edition, Elsevier Butterworth Heinman, Oxford, 2005.
- [Z.4] Zvolanek, L., Terzijski, I., Methods Considering the Concrete Creep due to Shrinkage, Solid State Phenomena, Vol. 259, 3-8, 2017.