

# Diskretni numerički model s ugrađenim diskontinuitetom za analizu armirano betonskih konstrukcija

---

Čarija, Jadran

Doctoral thesis / Disertacija

2022

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:*

**University of Split, Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy / Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije**

<https://doi.org/10.31534/DocT.054.Carj>

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:123:696305>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-20**



*Repository / Repozitorij:*

[FCEAG Repository - Repository of the Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy, University of Split](#)





**SVEUČILIŠTE U SPLITU**

**FAKULTET GRAĐEVINARSTVA, ARHITEKTURE  
I GEODEZIJE**

**Jadran Čarija, mag.ing.aedif.**

**DISKRETNI NUMERIČKI MODEL S  
UGRAĐENIM  
DISKONTINUITETOM ZA  
ANALIZU ARMIRANO BETONSKIH  
KONSTRUKCIJA**

**Disertacija**

**Split, 2022.**

Jadran Čarija, mag.ing.aedif.

Redni broj: 054

**Ova disertacija predana je na ocjenu  
Sveučilištu u Splitu,  
Fakultetu građevinarstva, arhitekture i geodezije  
u svrhu stjecanja akademskog stupnja  
doktora tehničkih znanosti u  
znanstvenom polju temeljne tehničke znanosti**

**Mentorica:** prof. dr. sc. Željana Nikolić

**Komentor:** doc. dr. sc. Mijo Nikolić

**Povjerenstvo za ocjenu:**

prof. dr. sc. Pavao Marović

prof. dr. sc. Vedrana Cvitanić

prof. dr. sc. Ivica Kožar

**Povjerenstvo za obranu:**

prof. dr. sc. Pavao Marović \_\_\_\_\_

prof. dr. sc. Vedrana Cvitanić \_\_\_\_\_

prof. dr. sc. Ivica Kožar \_\_\_\_\_

Rad je obranjen dana 08. veljače 2022.

Tajnica:

Saša Delić, dipl. iur.

**Rad sadrži:**

95 stranica teksta

65 crteža

9 tablica

102 citirane reference



*Izradu ove doktorske disertacije financirala je Hrvatska zaklada za znanost u okviru projekta „Razvoj numeričkih modela armirano betonskih i kamenih zidanih konstrukcija izloženih potresnom opterećenju zasnovanih na diskretnim pukotinama”, IP-2014-09-2319*

*Mišljenja, nalazi i zaključci ili preporuke navedene u ovom materijalu odnose se na autora i ne odražavaju nužno stajališta Hrvatske zaklade za znanost.*

*Posvećeno mojoj obitelji*

*Ovom prigodom izražavam iskrenu zahvalnost:*

*voditeljima prof.dr.sc. Željani Nikolić i doc.dr.sc. Miji Nikoliću za pomoć i razumijevanje koju su mi pružili od početne ideje do završetka izrade ovog rada*

*članovima povjerenstva prof.dr.sc. Pavlu Maroviću, prof.dr.sc. Vedrani Cvitanić i prof.dr.sc. Ivici Kožaru za pregled rada i korisne savjete*

*dragim prijateljima na podršci*

*i na kraju najveću zahvalnost dugujem roditeljima Dobrili i Tonču, sestri Tončici i djevojci Doris jer, bez njihovog razumijevanja, ovog rada ne bi ni bilo*



Jadran Čarija, mag.ing.aedif.

## **Diskretni numerički model s ugrađenim diskontinuitetom za analizu armirano betonskih konstrukcija**

### **Sažetak:**

U ovom radu predstavljen je novi diskretni numerički model s ugrađenim diskontinuitetom za analizu armirano betonskih konstrukcija izloženih statičkom i dinamičkom opterećenju. Unutar diskretnog modela koji se koristi za simulaciju ponašanja betonske konstrukcije zasnovanog na Voronoi poligonima, koji su povezani kohezivnim vezama modeliranim pomoću Timoshenkovih greda, implementirana je armatura koja se postavlja neovisno o postojećoj mreži diskretnih elemenata betona. Modeliranjem međudjelovanja između armature i betona omogućen je prijenos sila između betonskih i armaturnih elemenata te simuliranje klizanja armature. Sve materijalne komponente armiranog betona (beton, armaturne šipke i međudjelovanje betona i armature) modelirane su s istim elementima, Timoshenkovim gredama s ugrađenim diskontinuitetom, koje omogućuju opis heterogenosti u materijalu, nelinearno deformiranje i pucanje betona i armature, kao i klizanje i izvlačenje armaturnih šipki. Kako bi se opisalo ponašanje pojedinih komponenti materijala implementirani su modeli ponašanja materijala i to model oštećenja za opisivanje ponašanja krtih i kvazi-krtih materijala poput betona, te model plastičnosti za opisivanje ponašanja čelika i međudjelovanja između armature i betona. Za modele oštećenja i plastičnosti detaljno je prikazan postupak dobivanja lokalnih/unutarnjih varijabli. Za analizu dinamičkog opterećenja razvijen je dinamički model dodavanjem utjecaja inercijalnih sila. Integracija u vremenu se provodi primjenom Newmarkove metode, koristeći sve prethodno razvijene formulacije za statički model. U sklopu dinamičkog modela prikazana je analiza energija u diskontinuitetu za model oštećenja te za model plastičnosti.

Validacija novog modela oštećenja-omekšavanja izvršena je na testovima sa statičkim i dinamičkim opterećenjem. Verifikacija i validacija modela za analizu armirano betonske konstrukcije napravljena je za nekoliko statičkih i dinamičkih testova te su dobiveni rezultati uspoređeni s rezultatima dobivenim poznatim analitičkim i numeričkim metodama te dostupnim eksperimentalnim ispitivanjima.

**Ključne riječi:** diskretni model, Timoshenkova greda, ugrađeni diskontinuitet, armirani beton, međudjelovanje armature i betona, model oštećenja, model plastičnosti

Jadran Čarija, mag.ing.aedif.

## **Discrete numerical modelling of reinforced concrete structures by embedded discontinuity approach**

### **Abstract:**

In this paper a novel discrete lattice numerical model with embedded discontinuity was presented for modelling of reinforced concrete structures exposed to static and dynamic load. Into discrete lattice model which is used for concrete behaviour and was represented here by Voronoi cells and Timoshenko beams as cohesive links between them, reinforcement bars were implemented and positioned in the concrete domain irrespective of the Voronoi cells. In order to provide force transfer between concrete and reinforcement and to represent bond-slip, the bond between concrete and reinforcement was modelled. All material components of reinforced concrete (concrete, steel bars and bond between concrete and reinforcement) were modelled with the same elements, Timoshenko's beams with embedded discontinuities which enable the representation of heterogeneity of material, nonlinear deformation, cracking of concrete, rupture of reinforcement, bond-slip and pulling out of the reinforcement. In order to describe each material component behaviour, a damage constitutive model was implemented for brittle and quasi-brittle materials like concrete, and a plasticity constitutive model was implemented for steel and bond between concrete and reinforcement. For the damage model and the plasticity model computation of internal variables was presented in detail. For dynamic analysis, dynamic model was developed by adding inertial contributions. Newmark algorithm is used for time integration, with existing formulation for static model. Also, energy analysis for discontinuity for the damage and the plasticity model was presented.

Validation of novel softening-damage model was performed for static and dynamic tests. Verification and validation of model for the analysis of reinforced concrete structure was performed for several of static and dynamic tests and results of numerical simulations of this model were compared with results obtained by analytical and numerical methods and results obtained by experiments.

**Keywords:** discrete model, Timoshenko beam, embedded discontinuity, reinforced concrete, bond between concrete and reinforcement, damage model, plasticity model

# SADRŽAJ

<b>1. UVODNI DIO .....</b>	<b>1</b>
1.1. Općenito .....	1
1.2. Kratki pregled sadržaja rada.....	3
<b>2. PREGLED DOSADAŠNJIH ISTRAŽIVANJA.....</b>	<b>5</b>
2.1. Modeli pukotina .....	5
2.2. Diskretizacija područja betona .....	7
2.3. Ugradnja armature.....	8
2.3.1. Kontinuum modeli.....	8
2.3.2. Diskretni modeli.....	8
<b>3. DISKRETNI MODEL ARMIRANOG BETONA.....</b>	<b>10</b>
3.1. Modeliranje betona.....	10
3.2. Modeliranje armature .....	11
3.3. Modeliranje međudjelovanja između armature i betona .....	12
3.4. Model armiranog betona .....	13
3.4.1. Kinematika Timoshenkove grede s ugrađenim jakim diskontinuitetom.....	14
3.4.2. Lokalne jednačbe ravnoteže .....	18
<b>4. NELINEARNI MATERIJALNI MODELI .....</b>	<b>20</b>
4.1. Model oštećenja.....	20
4.1.1. Konstitutivni zakon modela oštećenja – očvršćivanja .....	21
4.1.2. Konstitutivni zakon modela oštećenja – omekšavanja.....	22
4.1.3. Model oštećenja – postupak za izračun unutarnjih varijabli .....	23
4.1.3.1 Postupak proračuna lokalnih varijabli za očvršćivanje.....	24
4.1.3.2 Postupak za proračun lokalnih varijabli za omekšavanje .....	25
4.2. Model plastičnosti .....	29
4.2.1. Konstitutivni zakon modela plastičnosti – očvršćivanja .....	29

4.2.2.	Konstitutivni zakon modela plastičnosti – omekšavanja .....	30
4.2.3.	Model plastičnosti – postupak za izračun unutarnjih varijabli.....	32
4.2.3.1	Postupak za proračun lokalnih varijabli za očvršćivanje .....	32
4.2.3.2	Postupak proračuna lokalnih varijabli za omekšavanje .....	33
4.2.4.	Model međudjelovanja armature i betona .....	35
4.3.	Postupak izračuna globalnih varijabli .....	36
<b>5.</b>	<b>MODEL ZA DINAMIČKU ANALIZU ARMIRANO BETONSKE</b>	
	<b>KONSTRUKCIJE.....</b>	<b>38</b>
5.1.	Analiza gubitka energije.....	40
5.1.1.	Proračun energija za model plastičnosti.....	40
5.1.2.	Proračun energija za model oštećenja .....	42
<b>6.</b>	<b>NUMERIČKA VERIFIKACIJA, VALIDACIJA I PRIMJENA MODELA .....</b>	<b>44</b>
6.1.	Tlačni test za prikaz svojstava kontinuuma diskretnim modelom zasnovanim na Voronoi poligonima.....	44
6.2.	Primjena novog modela oštećenja – omekšavanja za analizu raspucavanja .....	46
6.2.1.	Vlačni test za tri različite diskretizacije .....	46
6.2.2.	Vlačni i tlačni test za heterogeni materijal .....	49
6.2.2.1	Cikličko opterećenje u vlaku .....	49
6.2.2.2	Cikličko opterećenje u tlaku .....	52
6.2.2.3	Tlačni test za različite kuteve unutarnjeg trenja .....	54
6.2.3.	Fragmentacija valjka s debelom stijenkom .....	56
6.3.	Linearna analiza armirano betonskih konstrukcija.....	60
6.3.1.	Vlačni test betonske konzolne grede.....	60
6.3.2.	Vlačni test armirano betonske konzolne grede .....	62
6.3.3.	Betonska konzola opterećena na savijanje .....	65
6.3.4.	Armirano betonska konzola opterećena na savijanje .....	67
6.4.	Nelinearna analiza armirano betonskih konstrukcija .....	70
6.4.1.	Vlačno opterećeni armirano betonski štap .....	70

6.4.1.1	Vlačno opterećen armirano betonski štap – monotono opterećenje .....	72
6.4.1.2	Vlačno opterećeni armirano betonski štap – cikličko opterećenje.....	74
6.4.2.	Ispitivanje armirano betonske grede na savijanje opterećene u četiri točke pod kontrolom pomaka.....	75
6.4.2.1	Ispitivanje armirano betonske grede na savijanje u četiri točke pod kontrolom pomaka – kvazi–statički test .....	77
6.4.2.2	Ispitivanje armirano betonske grede na savijanje u četiri točke pod kontrolom pomaka – dinamički test.....	79
<b>7.</b>	<b>ZAKLJUČCI I SMJERNICE ZA DALJNJA ISTRAŽIVANJA .....</b>	<b>84</b>
7.1.	Zaključci.....	84
7.2.	Smjernice za daljnja istraživanja.....	85
<b>8.</b>	<b>LITERATURA .....</b>	<b>87</b>

# POPIS CRTEŽA

1.1	Razorni potres u Ciudad de México 2017.godine .....	2
3.1	Diskretni model zasnovan na Voronoi poligonima i Timoshenkovim gredama kao kohezivnim vezama između njih.....	10
3.2	Povezanost visine poprečnog presjeka grede i dužine stranice dva susjedna Voronoi poligona.....	11
3.3	Diskretni model s Voronoi poligonima i Timoshenkovim gredama kao kohezivnim vezama s implementiranom armaturom i veznim elementima.....	12
3.4	Diskretni model s Voronoi poligonima i obogaćenim Timoshenkovim gredama kao kohezivnim vezama s implementiranom armaturom i veznim elementima s pripadajućim poprečnim presjecima elemenata .....	13
3.5	Diskontinuitet između Voronoi poligona uslijed pucanja kohezivnih veza.....	14
3.6	Diskontinuitet između elementa betona i armature uslijed pucanja veznog elementa.....	14
3.7	Timoshenkova greda s 6 standardnih stupnjeva slobode i dodatna dva koji prikazuju diskontinuitet u polju pomaka.....	15
3.8	Bazne funkcije $N_1(x)$ i $N_2(x)$ .....	16
3.9	Interpolacijska funkcija $M(x)$ .....	16
3.10	Derivacije baznih funkcija $B_1(x)$ i $B_2(x)$ te derivacija interpolacijske funkcije $G(x)$ ...	17
4.1	Odnos naprezanje deformacija za model oštećenja – očvršćivanja .....	21
4.2	Odnos naprezanja u diskontinuitetu i skoka u polju pomaka za model oštećenja – omekšavanja .....	22
4.3	Odnos naprezanja u diskontinuitetu i skoka u polju pomaka (lijevo) i odnos naprezanja u diskontinuitetu i ukupnog oštećenja u omekšavanju (desno).....	28
4.4	Odnos naprezanje deformacija za model plastičnosti – očvršćivanja .....	29
4.5	Odnos naprezanja u diskontinuitetu i skoka u polju pomaka za model plastičnosti – omekšavanja .....	31
4.6	Model međudjelovanja između armature i betona .....	35
5.1	Izračun udjela volumena elementa koji sudjeluje u matrici masa.....	39

6.1	Tlačni test – uzorak s mjernim točkama.....	45
6.2	Tlačni test – odnos između omjera modula posmika i modula elastičnosti grede te dobivenih vrijednosti za Poissonov koeficijent i modul elastičnosti .....	46
6.3	Vlačni test: a) Mreža 1 – 811el b) Mreža 1 – 1210 el c) Mreža 3 – 2570 el.....	47
6.4	Položaj makropukotina na kraju testa: a) Mreža 1 – 811el b) Mreža 1 – 1210 el c) Mreža 3 – 2570 el.....	48
6.5	Vlačni test – dijagram sila – pomak – usporedba rezultata za tri mreže .....	48
6.6	Vlačni test: a) heterogeni uzorak – materijal I (smeđe) i materijal II (sivo), b) program opterećenja .....	50
6.7	Vlačni test – dijagram sila – pomak .....	51
6.8	Vlačni test – prikaz oštećenja uzorka na kraju testa.....	51
6.9	Tlačni test: a) heterogeni uzorak – materijal I (smeđe) i materijal II (sivo), b) program opterećenja .....	52
6.10	Tlačni test – dijagram sila – pomak .....	53
6.11	Tlačni test – prikaz oštećenja uzorka na kraju testa .....	53
6.12	Usporedba rezultata sila – pomak dobivenih za monotono vlačno opterećeni heterogeni uzorak s rezultatima dobivenim za monotono tlačno opterećeni heterogeni uzorak .....	54
6.13	Ovisnost sila – pomak za tlačni test za tri različita kuta unutarnjeg trenja .....	55
6.14	Prikaz pukotina na kraju tlačnog testa za tri različita kuta unutarnjeg trenja – a) $\phi = 0^\circ$ , b) $\phi = 15^\circ$ , c) $\phi = 30^\circ$ .....	55
6.15	Fragmentacija valjka s debelom stijenkom – geometrija i opterećenje .....	56
6.16	Fragmentacija valjka s debelom stijenkom – pukotine valjka na kraju testa za diskretizaciju s a) 22616 el, b) 33388 el, c) 50720 el .....	57
6.17	Fragmentacija valjka s debelom stijenkom – disipacijska energija loma .....	58
6.18	Fragmentacija valjka s debelom stijenkom – elastična energija .....	58
6.19	Fragmentacija valjka s debelom stijenkom – kinetička energija.....	59
6.20	Fragmentacija valjka s debelom stijenkom – ukupna energija .....	59
6.21	Vlačni test betonske konzolne grede – geometrija i opterećenje .....	60

6.22	Vlačni test – diskretizacija betonske grede: a) mreža 1 (189 el) b) mreža 2 (394 el) c) mreža 3 (608 el) .....	61
6.23	Vlačni test betonska greda – sila – produljenje.....	62
6.24	Vlačni test armirano betonske konzolne grede – geometrija i opterećenje.....	62
6.25	Vlačni test – diskretizacija armirano betonske grede: a) mreža 1 (255 el) b) mreža 2 (526 el) c) mreža 3 (840 el) .....	63
6.26	Vlačni test armirano betonska greda – sila – produljenje .....	64
6.27	Vlačni test betonska i armirano betonska greda – sila – produljenje .....	65
6.28	Test savijanjem betonska greda – geometrija i opterećenje.....	65
6.29	Test savijanjem betonska greda – diskretizacija grede: a) mreža 1 (186 el) b) mreža 2 (380 el) c) mreža 3 (655 el) .....	66
6.30	Test savijanjem betonske grede – sila – progib.....	67
6.31	Test savijanjem armirano betonska greda – geometrija i opterećenje .....	68
6.32	Test savijanjem armirano betonska greda – diskretizacija grede: a) mreža 1 (243 el) b) mreža 2 (429 el) c) mreža 3 (724 el) .....	69
6.33	Test savijanjem armirano betonska greda – sila – progib .....	69
6.34	Test savijanjem za betonsku i armirano betonsku gredu – sila – progib.....	70
6.35	Vlačni test armirano betonski štap – geometrija i opterećenje.....	71
6.36	Vlačni test armirano betonski štap – diskretizacija štapa (755 elemenata).....	71
6.37	Vlačni test armirano betonski štap (monotono opterećenje) – dijagram sila – pomak .....	72
6.38	Prikaz pukotina za različite pomake šipke (monotono opterećenje): a) 0.4 mm b) 0.53 mm c) 1 mm.....	73
6.39	Vlačni test armirano betonski štap (cikličko opterećenje) – program opterećenja .....	74
6.40	Vlačni test armirano betonski štap (cikličko opterećenje) – dijagram sila – pomak.....	75
6.41	Prikaz pukotina na kraju testa (cikličko opterećenje) .....	75
6.42	Armirano betonska greda opterećena s dvije simetrične sile – geometrija i opterećenje .	76
6.43	Diskretizacija armirano betonske grede (2512 elemenata) .....	76
6.44	Armirano betonska greda – test savijanjem (kvazi–statički test) – dijagram sila – pomak na sredini grede .....	78



6.45	Prikaz pukotina za različite progibe grede dobivene diskretnim modelom te prikaz pukotina dobivenih eksperimentalnim ispitivanjem (kvazi–statički test): a) 0.7 mm b) 1.8 mm c) 4.9 mm d) 6.8 mm e) eksperimentalno .....	79
6.46	Armirano betonska greda – test savijanjem (dinamički test) – dijagram sila – pomak na sredini grede .....	82
6.47	Prikaz pukotina za različite progibe grede dobivene diskretnim modelom te prikaz pukotina dobivenih eksperimentalnim ispitivanjem (dinamički test): a) 1 mm b) 3 mm c) 6 mm d) 12 mm e) eksperimentalno .....	83

## POPIS TABLICA

6.1	Materijalne i geometrijske karakteristike te parametri modela za uzorak .....	47
6.2	Materijalne i geometrijske karakteristike te parametri modela za heterogeni uzorak.....	49
6.3	Materijalne karakteristike te parametri modela za valjak s debelom stijenkom .....	56
6.4	Vlačni test: materijalne karakteristike te parametri modela betonske grede.....	60
6.5	Vlačni test: materijalne karakteristike te parametri modela za armirano betonsku gredu	63
6.6	Test savijanjem: materijalne karakteristike te parametri modela za betonsku gredu.....	66
6.7	Test savijanjem: materijalne karakteristike te parametri modela za armirano betonsku gredu .....	68
6.8	Materijalne karakteristike te parametri modela za armirano betonski štap.....	71
6.9	Materijalne karakteristike te parametri modela za armirano betonsku gredu .....	77

# 1. UVODNI DIO

## 1.1. Općenito

Brojni stambeni, infrastrukturni i energetska objekti građeni su od armiranog betona te su izloženi vanjskom djelovanju uslijed kojeg može doći do pojave oštećenja, odnosno sloma. Stoga u svrhu sigurnijeg projektiranja novih te ocjenjivanja kapaciteta nosivosti i obnove postojećih građevina potrebno je što preciznije analizirati i prikazati procese loma unutar konstrukcije. Do sloma unutar armirano betonskih konstrukcija dolazi uslijed raspucavanja betona popraćenog izvijanjem i izvlačenjem armature (slika 1.1). Kako bi se što bolje opisali mehanizmi prijenosa sila te loma unutar armirano betonskih konstrukcija, potrebno je modelirati vezu između betona i armature kao funkciju klizanja armature koju dobivamo iz testa izvlačenja [1, 2]. Općenito gledajući, veza je interaktivni mehanizam koji omogućuje prijenos sile između armaturnih šipaka i okolnog betona što osigurava kompozitno djelovanje između ta dva materijala. Mehanizam veze ima značajan utjecaj na nastanak i širenje pukotina u konstrukciji, kao i na samu duktilnost konstrukcije [3]. Stoga modeliranje veze između armature i betona predstavlja važnu komponentu u dobivanju pouzdanog numeričkog modela za simulaciju armirano betonske konstrukcije izložene statičkom i dinamičkom opterećenju. Razumijevanje i modeliranje nastanka pukotina, tečenja armature te klizanja armature u betonu važan je preduvjet za održavanje i produžavanje vijeka trajanja postojećih konstrukcija, samim time i projektiranje sve sigurnijih i pouzdanijih novih konstrukcija [4]. Zbog nelinearnosti i disipacijskih mehanizama koji prate te pojave, modeliranje gore navedenih procesa i mehanizama predstavlja složenu zadaću. Za što bolje opisivanje navedenih nelinearnosti, stalna je potreba u inženjerstvu za razvijanjem što bržih, ali i sve preciznijih numeričkih modela za rješavanje nelinearnih problema ponašanja armirano betonskih konstrukcija. Stoga se neprestano radi na razvoju i implementaciji praktičnijih i pouzdanijih modela za opis pukotina, diskretizaciji betona i armature te zakona koji opisuju ponašanje u materijalu izloženom nelinearnim deformacijama.

Preciznost u modeliranju mehanizama ponašanja armirano betonskih konstrukcija u najvećoj mjeri ovisi o načinu modeliranja betona, armature i njihovog međudjelovanja. Armirani beton je heterogeni kompozitni materijal sa složenim načinom ponašanja, koji se do otvaranja prvih pukotina ponaša kao kontinuum, a zatim kao diskontinuum. Svaki numerički model, bilo da je zasnovan na kontinuum ili diskretnom modelu, ima svoje prednosti i nedostatke. Pokazalo se da je pri djelovanju dinamičkog i potresnog opterećenja, dominantni efekt nelinearnosti sadržan u otvaranju i zatvaranju pukotina tijekom procesa cikličkog opterećenja i rasterećenja te pripadnoj deformaciji i izvijanju armature, što utječe na gubitak energije i preciznu simulaciju mehanizma sloma. Zbog toga se u posljednje vrijeme razvijaju diskretni modeli za analizu armirano betonskih

konstrukcija, kako bi se što realističnije modeliralo ponašanje konstrukcije u cijelom nelinearnom području sve do sloma.



Slika 1.1 Razorni potres u Ciudad de México 2017. godine

Cilj ovoga rada je razvoj novog diskretnog numeričkog modela koji će opisati ponašanje raspucavanja armirano betonskih konstrukcija uslijed statičkog ili dinamičkog opterećenja. Stoga je unutar postojećeg diskretnog modela zasnovanog na Voronoi poligonima koji se koristi za simulaciju ponašanja betonske konstrukcije implementirana armatura. Kako bi se omogućilo kompozitno djelovanje armiranog betona dodana je nova komponenta koja povezuje beton i armaturu te opisuje njihovo međudjelovanje. Sve materijalne komponente armiranog betona (beton, armaturne šipke i međudjelovanje betona i armature) modelirane su s istim elementima – (Timoshenkovim gredama s ugrađenim diskontinuitetom) koje omogućuju opis nelinearnog ponašanja i pucanja betona i armature, kao i klizanje i izvlačenje armaturnih šipki što ovaj model čini novim i originalnim za analizu ponašanja armirano betonskih konstrukcija. Pored toga, simulacija stvaranja pukotina u betonu, plastično popuštanje i kidanje armature te odvajanje (pucanje veze) armature i betona modelirane su konačnim elementima (Timoshenkovim gredama) s ugrađenim diskontinuitetom koji omogućuju opisivanje svih mehanizama nelinearnog ponašanja uključujući popuštanje i slom te se ne povećava globalna matrica krutosti sustava. Kako bi se opisao mehanizam otvaranja/zatvaranja pukotina, kao i smanjenje krutosti karakteristično za beton izložen dinamičkom i cikličkom opterećenju, implementirana je formulacija za konstitutivni zakon modela oštećenja s eksponencijalnim omekšavanjem u diskretni model čime je razvijen novi diskretni model oštećenja-omekšavanja s ugrađenim jakim diskontinuitetom. Za opis nelinearnog ponašanja armature i međudjelovanja između armature i betona implementiran je model plastičnosti s očvršćivanjem i omekšavanjem. Prednost ovakvih modela je u realističnom prikazu procesa raspucavanja, kao i manjem broju globalnih nepoznanica u odnosu na modele kontinuuma i neke postojeće diskretne modele.

## 1.2. Kratki pregled sadržaja rada

S uvodnim dijelom gdje je prikazana motivacija i ciljevi rada, rad se sastoji od ukupno sedam poglavlja te je dan njihov kratak pregled.

U drugom poglavlju iznosi se pregled stanja područja istraživanja u području modeliranja armirano betonskih konstrukcija koje je podijeljeno s obzirom na način modeliranja pukotina, diskretizacije područja betona te ugradnje armature. Opisane su prednosti i nedostaci pojedinih pristupa.

U trećem poglavlju opisan je originalni diskretni model za analizu armirano betonskih konstrukcija, razvijen u ovom doktorskom radu, zasnovan na Voronoi poligonima s ugrađenom armaturom. Model se sastoji od tri komponente: betona, armaturnih šipki te međudjelovanja između armature i betona. U ovom poglavlju opisan je način diskretizacije i modeliranja svake komponente. Kako u svakoj od ovih komponenti može doći do stvaranja diskontinuiteta uzrokovanog raspucavanjem betona, kidanjem armature ili odvajanjem betona i armature, prethodno popraćenog nelinearnim ponašanjem, sve komponente modelirane su na isti način, Timoshenkovim gredama s ugrađenim diskontinuitetom. Simuliranje diskontinuiteta postignuto je obogaćivanjem polja pomaka Timoshenkove grede koristeći metodu konačnih elemenata s ugrađenim jakim diskontinuitetom (ED-FEM) čiji razvoj je detaljno prikazan..

U četvrtom poglavlju prikazan je razvoj nelinearnih materijalnih modela koji se koriste za opisivanje ponašanja betona, armature i njihovog međudjelovanja nakon dosezanja granice elastičnosti. Za beton se koristi model oštećenja s očvršćivanjem i omekšavanjem, dok je za ponašanje armature i međudjelovanja odabran model plastičnosti s očvršćivanjem i omekšavanjem. Model oštećenja s očvršćivanjem te model plastičnosti s očvršćivanjem i omekšavanjem implementirani su u diskretni model. Za opisivanje ponašanje betona u diskontinuitetu implementirana je formulacija za konstitutivni zakon modela oštećenja s eksponencijalnim omekšavanjem u diskretni model čime je razvijen novi diskretni model oštećenja-omekšavanja s ugrađenim jakim diskontinuitetom. Za model oštećenja kao i za model plastičnosti prikazan je detaljni opis dobivanja lokalnih/unutarnjih varijabli. Pri razvoju modela međudjelovanja između armature i betona vodilo se računa o prilagodbi postojećim modelima za opisivanje međudjelovanja između armature i betona. Na kraju je prikazan postupak izračuna globalnih varijabli.

U petom poglavlju prikazan je dinamički model koji predstavlja proširenje statičkog modela razvijenog u četvrtom poglavlju primjenom D'Alembertovog principa uz dodavanje utjecaja inercijalnih sila. Integracija u vremenu se provodi primjenom Newmarkove metode, koristeći sve prethodno razvijene formulacije za statički model. Uz razvoj dinamičkog modela prikazan je i način izračuna gubitka energije u diskontinuitetu za model plastičnosti te za model oštećenja.

U šestom poglavlju prvo su prikazani rezultati dobiveni s novim modelom oštećenja s omekšavanjem implementiranim unutar diskretnog modela, a potom je provedena verifikacija i validacija novog diskretnog modela za analizu armirano betonskih konstrukcija izloženih statičkom i dinamičkom opterećenju na nekoliko primjera. Rezultati dobiveni novim diskretnim modelom uspoređeni su s postojećim numeričkim i eksperimentalnim rezultatima preuzetim iz literature.

U sedmom poglavlju izneseni su glavni zaključci te su dane smjernice za buduće istraživanje.

## **2. PREGLED DOSADAŠNJIH ISTRAŽIVANJA**

Pregled područja istraživanja u razvoju numeričkih modela armirano betonskih konstrukcija može se podijeliti s obzirom na način modeliranja pukotina, diskretizacije područja betona te ugradnje armature.

### **2.1. Modeli pukotina**

U razvoju numeričkih modela betonskih i armirano betonskih konstrukcija poseban naglasak je na modeliranju pukotina koje su glavni razlog zbog kojeg dolazi do sloma unutar konstrukcije te imaju najveći utjecaj na trajnost konstrukcije. Metoda razmazanih pukotina (pukotine se smatraju fiktivnima) i metoda diskretnih pukotina (pukotine se smatraju pravim diskontinuitetima) ugrađene unutar metode konačnih elemenata te diskretni modeli, najviše se koriste za opisivanje procesa stvaranja pukotina nastalih unutar konstrukcije.

Modeli razmazanih pukotina [5] zasnivaju se na ideji da u betonu, uslijed njegove materijalne heterogenosti i utjecaja armature, nastaju mnoge male pukotine koje u kasnijoj fazi opterećivanja poprimaju oblik jedne ili više glavnih pukotina te se pri pojavi pukotine elementu smanjuje krutost u smjeru okomitome na smjer pukotine. U modelu razmazanih pukotina se oslabljenje betona opisuje konstitutivnim vezama i lokalni diskontinuitet se raspodjeljuje na pripadnu površinu, odnosno, prikazuje se preko kontinuuma. Modeli razmazanih pukotina mogu se podijeliti na modele fiksnih pukotina, gdje je orijentacija pukotina nepromijenjena tijekom proračuna [6, 7] i na modele rotirajućih pukotina gdje se normala na pukotinu usklađuje s glavnom deformacijom tijekom čitavog procesa nastajanja pukotina [8, 9]. Bažant [10, 11] je razvio mikroravninski model za analizu raspucavanja betona koristeći model razmazanih pukotina, gdje je konstitutivni zakon ponašanja materijala definiran komponentom naprezanja i deformacije na ravninama različitih orijentacija. Mikroravninski model se razvijao tokom vremena doživljavajući modifikacije te se uspješno koristi za analizu betonskih i armirano betonskih konstrukcija pri pojavi pukotina [12–14]. Glavni nedostatak razmazanih pukotina je što rješenje ovisi o diskretizaciji, tj. o veličini mreže konačnih elemenata.

Modeli diskretnih pukotina razvijaju se paralelno s razvojem numeričkih modela armirano betonskih konstrukcija 1960-tih godina [15]. Kod tih modela pukotine se modeliraju odvajanjem elemenata po rubovima, pomoću dvostrukih čvorova koje se u neopterećenom stanju poklapaju. Do odvajanja, odnosno širenja pukotine, dolazi kada čvorna sila prekorači vlačnu čvrstoću betona te se čvor razdvaja na dva čvora [16]. Zbog nastanka dvostrukih čvorova potrebno je redefiniranje mreže tijekom propagacije pukotine, stoga su kasnije razvijeni postupci za automatsko redefiniranje mreže [17, 18].

Koristeći standardnu metodu konačnih elemenata pri simuliranju nastanka pukotina, rješenje ovisi o veličini mreže konačnih elemenata [19–21]. Kako bi se izbjegao taj problem te se dobili rezultati koji su neovisni o veličini mreže, najviše se koriste sljedeća dva pristupa. Prvi pristup je u sklopu metode pukotinskih traka (eng. crack band method) [22]. Drugi pristup predstavlja grupu metoda/formulacija koje ograničavaju područje u kojem su lokalizirane pukotine, a u literaturi često imaju zajednički naziv „limitatori lokalizacije“. Prema [19] ova skupinu može se podijeliti u tri grupe. Prvu grupu predstavljaju metode koje ne zahtijevaju nikakvu promjenu formulacija unutar standardne teorije mehanike kontinuuma. Drugu grupu predstavljaju metode koje zahtijevaju promjenu formulacija te koje više ne pripadaju teoriji mehanike kontinuuma poput nelokalne teorije plastičnosti te nelokalne formulacije oštećenja. Treća grupa su metode koje poboljšavaju formulacije unutar teorije mehanike kontinuuma ugrađivanjem diskontinuiteta i obogaćivanjem polja pomaka/deformacija kao što su proširena metoda konačnih elemenata (X-FEM) [23] i metoda konačnih elemenata s ugrađenim jakim diskontinuitetom (ED-FEM) [24].

Glavna razlika između X-FEM i ED-FEM metoda je što se X-FEM smatra metodom obogaćivanja čvorova koje se postiže obogaćivanjem polja pomaka u čvorovima, a ED-FEM metodom obogaćivanja elemenata kod kojeg se vrši obogaćivanje polja pomaka u elementu [25]. Kod X-FEM [26] metode diskontinuitet se uključuje globalno dodavanjem obogaćenog polja pomaka u čvorove te nije moguće dobiti kondenziranu matricu krutosti za element koji slažemo u globalni sustav jednadžbi ravnoteže. U globalnom sustavu su dodatne nepoznanice, za razliku od ED-FEM-a [27] gdje se diskontinuitet promatra lokalno te je obogaćivanjem polja pomaka unutar samog elementa moguće dobiti kondenziranu matricu krutosti, koja se slaže u globalni sustav jednadžbi ravnoteže. Time se eliminiraju dodatne nepoznanice unutar globalnog sustava. Kod X-FEM-a pukotina ima kontinuirani put, što može predstavljati problem pri simuliranju problema diskontinuma kada dolazi do grananja i srastanja pukotina, stoga su potrebna dodatna poboljšanja same metode za prikaz složenijih pukotina [28].

Kod ED-FEM diskontinuitet je implementiran u ED-FEM formulaciju, što omogućava da skok u polju pomaka ostaje lokaliziran unutar elementa, stoga nisu potrebni algoritmi praćenja te je moguć prikaz složenih pukotina, bez dodatnih intervencija unutar same metode [29].

Kod diskretnih modela pri odabiru kriterija loma provjerava se je li kohezivna veza dosegla maksimalnu vrijednost naprezanja za određenu vrstu materijala. U slučaju da je, uklanjaju se elementi koji su dosegli kritičnu vrijednost ili se njihovo ponašanje opisuje koristeći model omekšavanja [30, 31]. Kako se u diskretnim modelima ispituje kriterij loma za svaki element, time se omogućava nastanak (simuliranje) mnogo malih pukotina, koje se povezuju, srastaju i u konačnici čine veliku pukotinu, čime je sami prikaz geometrije složenih pukotina olakšan.



Također, implementirajući ED-FEM unutar diskretnog modela, dobivaju se rješenja u omekšavanju koja su neovisna o veličini mreže [32–37].

Pored gore navedenih metoda treba spomenuti metodu konačno-diskretnih elemenata (FEM/DEM) koja objedinjuje metodu konačnih i diskretnih elemenata te se u posljednje vrijeme koristi za modeliranje armiranog betona izloženog dinamičkom i cikličkom opterećenju [38]. Kod FEM/DEM metode, ponašanje materijala do trenutka pojave pukotine modelirano je kao u metodi konačnih elemenata, dok u trenutku prekoračenja vlačne čvrstoće nastaje diskretna pukotina. Pojava pukotina i fragmentacija diskretnih elemenata obuhvaćena je kontaktnim elementima, koji su umetnuti između konačnih elemenata [39].

## 2.2. Diskretizacija područja betona

Za diskretizaciju betona mogu se koristiti modeli kontinuuma zasnovani na 2D ili 3D konačnim elementima, ali i diskretni modeli.

Glavna prednost diskretnih modela je u adekvatnom prikazivanju heterogenosti materijala na mezo skali, što omogućuje simulaciju nastanka i širenja pukotina. Modeli ovakvog tipa su prikladni za prikazivanje lomova kod heterogenih materijala, kao što je beton uz veliku efikasnost proračuna [40, 41].

Diskretni modeli se mogu podijeliti na modele zasnovane na Voronoi poligonima i modele čestica. Modeli čestica su pogodniji za opisivanje velikih pomaka, jer kod modela čestica raspored samih čvorova može se mijenjati, odnosno tijekom nanošenja opterećenja može doći do promjene položaja susjednih čvorova. Za razliku od njih, u modelu zasnovanom na Voronoi poligonima čvorovi zadržavaju svoje pozicije te nema promjene pozicija susjednih čvorova unutar samog modela. Uzimajući to u obzir, model zasnovan na Voronoi poligonima je prikladniji za analizu malih deformacija [42].

Model zasnovan na Voronoi poligonima može se definirati kao diskretni model gdje se slaganjem 1D elemenata može prikazati neko čvrsto tijelo [43]. Opisujući interakciju između poligona, diskretni model s Voronoi poligonima može se podijeliti na model opruga i model greda. U modelu opruga kohezivne veze između poligona se modeliraju pomoću opruga, dok se kod modela greda, kohezivne veze modeliraju pomoću greda te se mogu koristiti Bernoullijeve grede ili Timoshenkove grede. Kada su elementi u diskretnom modelu kraći i veće debljine prikladnije je koristiti Timoshenkove grede. Diskretizacija područja se vrši koristeći Voronoi poligone. Mijenjajući materijalna svojstva kohezivnim vezama između različitih Voronoi poligona, postiže se heterogenost materijala.

## 2.3. Ugradnja armature

### 2.3.1. Kontinuum modeli

U kontinuum modelima s obzirom na način modeliranja (ugradnje) armature, numerički modeli armiranog betona mogu se podijeliti na tri grupe: model razmazane armature, model diskretne armature i model ugrađene armature.

U modelu razmazane armature [44, 45] armatura je jednoliko raspoređena (razmazana) s određenim kutom nagiba naspram elementa betona unutar kojeg se ugrađuje. Ovakvi modeli mogu biti pogodni za kompleksni raspored armature ili ojačanja vlaknima unutar betona. Nedostatak ovog modela je što se veza između armature i betona smatra idealnom, te se ne može prikazati klizanje armature u betonu.

U modelu diskretne armature, unutar 2D ili 3D betonskih elemenata, ugrađuje se 1D element armature. Kod diskretnih modela štapni modeli armature poklapaju se s čvorovima betonskih elemenata [46]. Ovakvo modeliranje predstavlja problem u inženjerskoj praksi, jer se mreža konačnih elemenata betona mora prilagoditi položaju armature.

Kod diskretnih modela armature za opisivanje klizanja armature mogu se koristiti zasebni kontaktni elementi, koji sadrže karakteristike posmične veze između armature i betona [47].

U modelu ugrađene armature [48–50], unutar betona, može se ugraditi armatura neovisno o mreži konačnih elemenata. Za diskretizaciju armature koriste se 1D elementi ugrađujući ih unutar 2D ili 3D betonskih elemenata. Da bi se dobila krutost elementa betona s ukomponiranom armaturom, potrebno je superponirati matricu krutosti betona i matricu krutosti armature koja se dobiva koristeći matrice transformacije. Kod ovih modela moguće je modeliranje klizanja armature u betonu [51]. Također je moguće ugraditi i krivolinijsku armaturu koja omogućuje modeliranje prednapetih kablova u betonskoj konstrukciji [48, 52–54].

Uz ovu osnovnu podjelu postoji i kombinacija diskretnog i ugrađenog modela armature, gdje se armatura postavlja neovisno o čvorovima konačnog elementa betona kao kod ugrađenog modela armature, a koristeći zasebne kontaktne elemente može se direktno opisati klizanje između armature i betona kao kod diskretnog modela armature [55].

### 2.3.2. Diskretni modeli

U nastavku dan je prijedlog nekih postojećih primjera diskretnih modela armiranog betona ili betona ojačanog vlaknima iz literature.

Za analizu pojave i širenja pukotina u armirano betonskim konstrukcijama Bolander [56], Saito [31] koristili su mrežni model opruga krutih tijela, RBS (eng. rigid body spring), s ugrađenom armaturom. Armatura šipka može se pozicionirati neovisno o definiranoj mreži za diskretizaciju betonske konstrukcije. Svaka armatura šipka modelira se nizom štapnih ili grednih elemenata. U postupku generiranja štapni (gredni) elementi i čvorovi se automatski određuju kao sjecišta s oprugama. Veza između armature i betona modelirana je preko opruga u kontaktima, tzv. spojnim elementima koji su modelirani u smjeru tangente na armaturnu šipku te sadrže karakteristike posmične veze između armature i betona.

Schlangen [57] koristi diskretni model za opisivanje betonskih konstrukcija ojačanih vlaknima. U diskretni model betona ugrađena su vlakna koja su povezana sa čvorovima betona preko veznih elemenata. Vlakna su modelirana pomoću grednih ili štapnih elemenata. Svojstva veznih elemenata dobivena su iz eksperimentalnih ispitivanja koristeći test izvlačenja te predstavljaju interakciju između vlakana za ojačanje i betona.

Gerstle i drugi [58] koriste mikropolarni peridinamčki model MPLM (eng. micropolar peridynamic lattice model) za modeliranje armiranog betona. Kod ovog modela svaka čestica betona udaljena je od susjedne čestice za određenu udaljenost koja se uzima kao veličina zrna agregata. Za modeliranje armature koristi se 1D mikropolarni peridinamički model s pripadajućim poprečnim presjekom. Čestice armature i betona povezane su unutar zone međudjelovanja te je njihova interakcija (međudjelovanje) linearno elastično, dok je međudjelovanje između čestica betona opisano nelinearnim ponašanjem materijala koristeći model oštećenja.

Aydin i drugi [59] u svom radu koriste diskretni model ćelija za modeliranje armirano betonskog elementa. Mreža je napravljena od jednoliko raspodijeljenih čvorova međusobno udaljenih na zadanu udaljenost. Svaki čvor je u interakciji s ostalim točkama s unaprijed određenom udaljenošću međudjelovanja. Armatura unutar modela također je napravljena kao model ćelija. Unutar utjecaja djelovanja čvora armature, dolazi do povezivanja čvorova armature sa čvorovima betona.

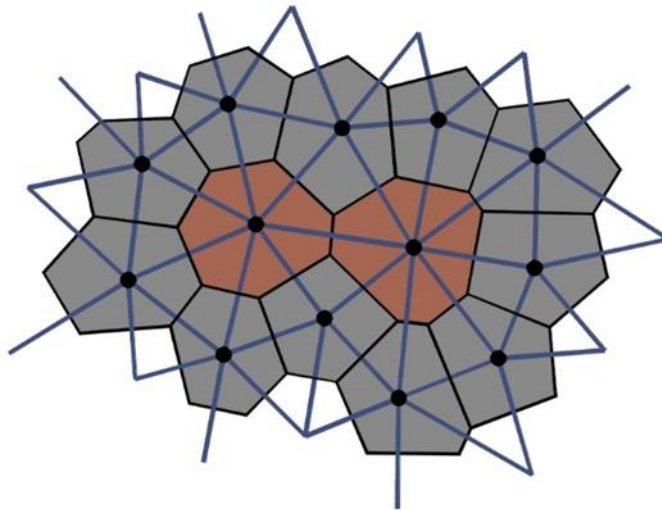
Diskretni modeli sve se više koriste i za modeliranje ojačanja betona s vlaknima od različitih materijala poput drva ili PVA (polivinil alkohol) [60, 61] te ojačanja drugih materijala poput plastike ojačane staklenim vlaknima [62]. Također, diskretni modeli omogućavaju modeliranje popravaka oštećenih materijala, ubacujući novi materijal u postojeći materijal modeliranjem veza (veznih elemenata) između novog i starog materijala [61].

### 3. DISKRETNI MODEL ARMIRANOG BETONA

Diskretni numerički model za analizu armirano betonskih konstrukcija koji je predložen (razvijen) u ovoj disertaciji sastavljen je kao trokomponentni sustav i to od betona kao matrične faze, armature i međudjelovanja između armature i betona. Sve navedene komponente modelirane su koristeći Timoshenkove grede s ugrađenim jakim diskontinuitetom.

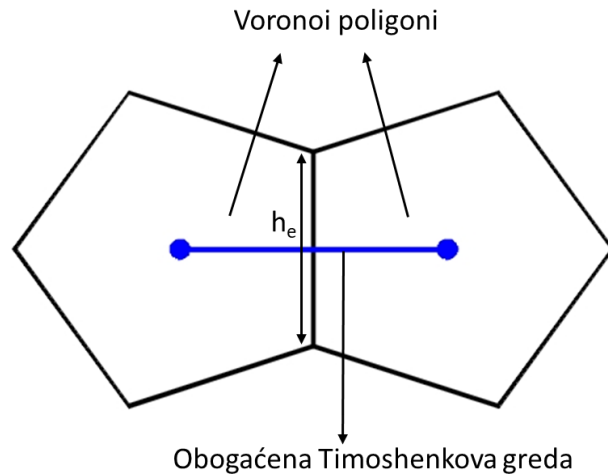
#### 3.1. Modeliranje betona

Područje betona diskretizirano je s Voronoi poligonima i Timoshenkovim gredama kao kohezivnim vezama između njih koristeći postojeći diskretni model [32–35]. Mijenjajući materijalna svojstva kohezivnim vezama između različitih Voronoi poligona, postiže se heterogenost materijala (crtež 3.1).



Crtež 3.1 Diskretni model zasnovan na Voronoi poligonima i Timoshenkovim gredama kao kohezivnim vezama između njih

Koristeći Delaunayevu triangulaciju diskretizira se zadana domena trokutima čije stranice predstavljaju Timoshenkove grede. Važno je istaknuti dualnost Voronoi poligona i Delaunayevu triangulacije što omogućava da se iz diskretizacije područja Delaunayevom triangulacijom može dobiti diskretizacija područja Voronoi poligonima i obrnuto. To je vrlo važno svojstvo za ovakve diskretne modele, jer se mogu dobiti geometrijska svojstva kao što je poprečni presjek Timoshenkovih greda (Delaunayevu stranice trokuta) koristeći Voronoi poligone. Tako dužina zajedničke stranice dva susjedna Voronoi poligona predstavlja visinu poprečnog presjeka Timoshenko grede (crtež 3.2). Kako bi se izbjegao utjecaj geometrije mreže na širenje pukotina u ovom radu koriste se nepravilne mreže.



Crtež 3.2 Povezanost visine poprečnog presjeka grede i dužine stranice dva susjedna Voronoi poligona

Poznato je da diskretni modeli zasnovani na Voronoi poligonima imaju ograničenja u prikazivanju globalnih svojstava kontinuuma kao što su Youngov modul elastičnosti i Poissonov koeficijent [56, 63]. S odabirom krutosti elemenata (greda) diskretnog modela moguće je postići odgovarajuće globalne vrijednosti Youngova modula elastičnosti i Poissonova koeficijenta za kontinuum što je prikazano u poglavlju 6.1.

### 3.2. Modeliranje armature

U ovom radu razvijen je geometrijski model armaturnih šipki kao 1D elemenata koji je implementiran unutar postojećeg diskretnog modela s Timoshenkovim gredama te se može pozicionirati neovisno o geometriji postojeće mreže betona [64, 65]. Ugradnjom armature neovisno o geometriji postojeće mreže betona omogućeno je simuliranje ponašanja složenih armirano betonskih konstrukcija. Armatura (čelične šipke) diskretizirane su u niz elemenata koji su modelirani Timoshenkovim gredama s ugrađenim jakim diskontinuitetom. Za zadavanje armature dovoljne su dvije točke, početna i krajna koordinata šipke. Potom algoritam napravljen u Matlabu napravi diskretizaciju šipke s pripadajućim poprečnim presjekom. Diskretizacija je napravljena na sljedeći način. Na mjestima gdje šipka siječe Voronoi poligon traži se najbliža točka na šipci u odnosu na Voronoi čvor (čvor betona) te se na tom mjestu generira novi čvor armature. Kada se dobiju svi čvorovi armature za tu šipku, susjedni čvorovi se spoje i dobiju se armaturni gredni elementi (crtež 3.3).

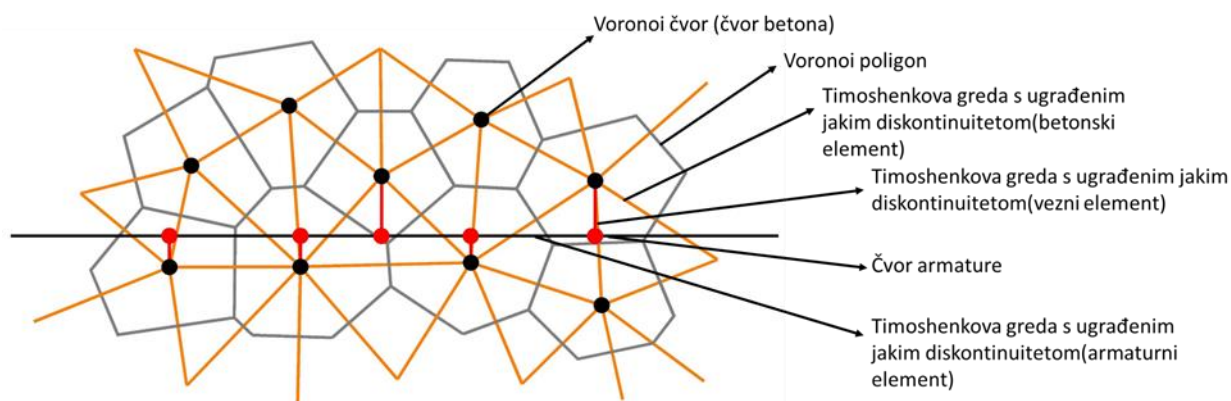
### 3.3. Modeliranje međudjelovanja između armature i betona

Kako bi se omogućio prijenos sila između betona i armature i omogućilo klizanje armature u betonu potrebno je modelirati međudjelovanje (vezu) između ta dva materijala. U literaturi za analiziranje ponašanja armirano betonskih konstrukcija koriste se različiti diskretni modeli. S obzirom na opisivanje međudjelovanja između Voronoi poligona, diskretni modeli mogu se podijeliti na model opruge krutih tijela (eng. rigid body spring) i na model grednih elemenata (eng. lattice beam model). Jednima i drugima zajednička je implementacija specijalnih veznih elemenata za povezivanja čvorova betona i armature i opisivanje klizanja armature. Ovi vezni elementi mogu se modelirati preko opruga u modelu opruga ili preko grednih elemenata u grednom modelu.

U modelu opruga [31, 66] opruga položena u smjeru armature (tangencijalnom smjeru) kontrolira relativni pomak (klizanje armature) između dva materijala. Za krutost opruge u smjeru okomitom na armaturu i za rotaciju uzimaju se velike vrijednosti kako bi se izbjegao relativni pomak u tim smjerovima.

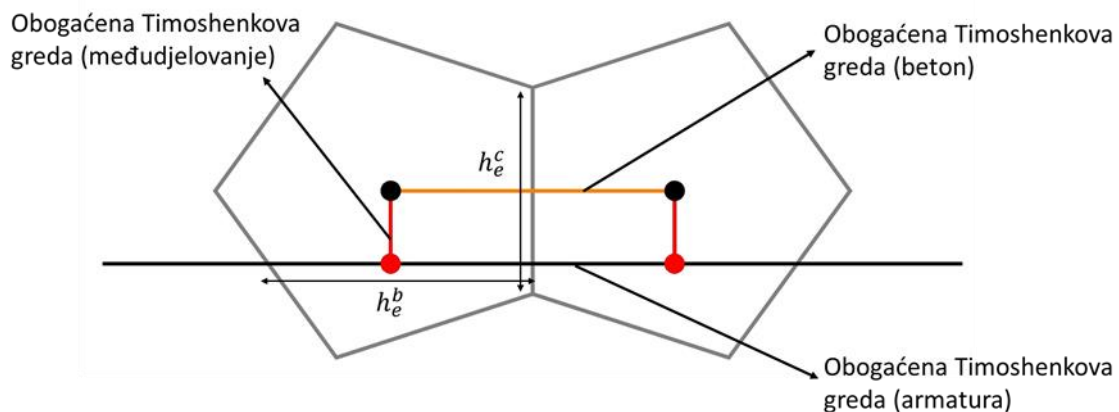
Kod grednih modela Schlangen i drugi [57] za vezne elemente koriste gredne elemente koji su položeni pod različitim kutem u odnosu na armaturu. Za određivanje krutosti veznih elemenata upotrebljavaju modul elastičnosti grede.

U modelu razvijenom u ovom istraživanju, međudjelovanje između betona i armature modelirano je s novim veznim elementima za što se koriste Timoshenko grede s ugrađenim jakim diskontinuitetom. Vezni elementi povezuju Voronoi čvorove (čvorove betona) i čvorove armature te omogućavaju prijenos sila između armature i betona te omogućavaju klizanje armature. Vezni elementi postavljeni su okomito na armaturne šipke (crtež 3.3).



Crtež 3.3 Diskretni model s Voronoi poligonima i Timoshenkovim gredama kao kohezivnim vezama s implementiranom armaturom i veznim elementima

Poprečni presjek veznog elementa izračunat je kao udaljenost dvaju susjednih sjecišta između Voronoi poligona i armature (crtež 3.4). Ulazni parametri za modeliranje veznih elemenata koji predstavljaju posmičnu vezu između armature i betona uzimaju se direktno iz testa izvlačenja ili iz postojećih grafova odnosa posmičnog napreznja i klizanja armature. Modul posmika Timoshenkove grede koja predstavlja vezni element koristi se za opisivanje odnosa posmičnog napreznja i klizanja armature. Za Youngov modul elastičnosti grede uzima se velika vrijednost kako ne bi došlo do pomaka u uzdužnom smjeru grede i do rotacije.

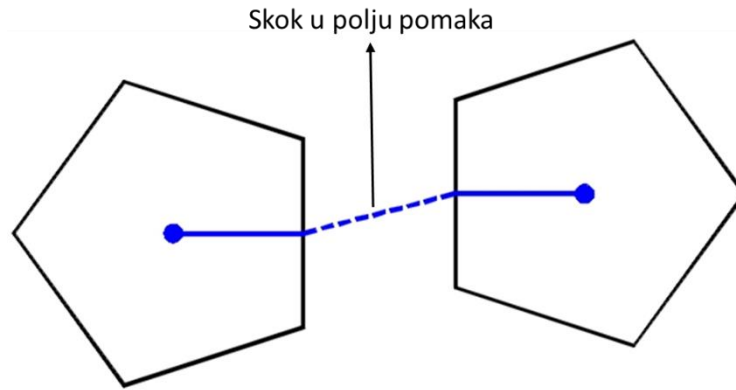


Crtež 3.4 Diskretni model s Voronoi poligonima i obogaćenim Timoshenkovim gredama kao kohezivnim vezama s implementiranom armaturom i veznim elementima s pripadajućim poprečnim presjecima elemenata

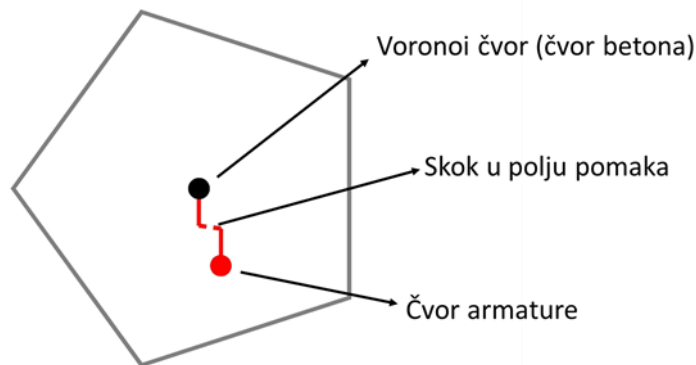
### 3.4. Model armiranog betona

Kako bi se pravilno opisale nelinearnosti u armirano betonskoj konstrukciji poput nastanka i širenja pukotina u betonu, klizanja armature koje nastaje nakon odvajanja armature i betona, te pojave pukotina u armaturi, potrebno je obogatiti kinematiku Timoshenkovih greda koje modeliraju navedene komponente.

Sve gore navedene nelinearnosti karakterizira pojava diskontinuiteta, što znači da je potrebno uvesti diskontinuitet u opće polje pomaka Timoshenkove grede. Obogaćivanjem polja pomaka Timoshenkove grede bit će omogućeno simuliranje oba moda sloma za beton (mod I-aksijalni slom i mod II-slom u posmiku) (crtež 3.5), gubitka veze između armature i betona slom u modu II (crtež 3.6) kada posmično napreznje veze prekorači maksimalnu čvrstoću prijanjanja te kidanje armature.



Crtež 3.5 Diskontinuitet između Voronoi poligona uslijed pucanja kohezivnih veza



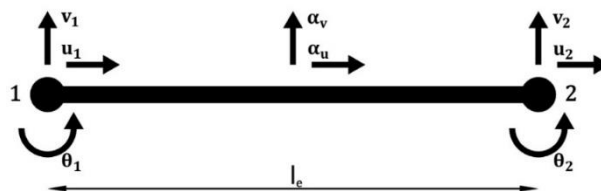
Crtež 3.6 Diskontinuitet između elementa betona i armature uslijed pucanja veznog elementa

S obzirom da se za modeliranje svih komponenti diskretnog modela koriste Timoshenkove grede, u daljnjem dijelu rada prikazano je poboljšanje kinematike Timoshenkove grede korištenjem metode konačnih elemenata s ugrađenim jakim diskontinuitetom (ED-FEM) [33, 35, 37] samo za jednu komponentu (betonski element) koje ujedno vrijedi i za preostale dvije komponente modela (armaturni i vezni element).

#### 3.4.1. Kinematika Timoshenkove grede s ugrađenim jakim diskontinuitetom

Timoshenkova greda kao betonski element  $e$  duljine  $l_e$  i poprečnog presjeka  $A_e = h_e \cdot 1$  (gdje je 1 debljina/širina modela) prikazana je na crtežu 3.7. Greda ima tri stupnja slobode u svakom čvoru: dvije translacije ( $u, v$ ) i rotaciju ( $\theta$ ).





Crtež 3.7 Timoshenkova greda s 6 standardnih stupnjeva slobode i dodatna dva koji prikazuju diskontinuitet u polju pomaka

Odabrana Timoshenkova greda ima dva interpolacijska čvora i jednu točku Gaussove integracije tako da su sve deformacije konstantne. Standardna kinematička jednadžba za Timoshenkovu gredu iz koje se dobije vektor deformacija dana je izrazom:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon = \frac{du}{dx} \\ \gamma = \frac{dv}{dx} - \theta \\ \kappa = \frac{d\theta}{dx} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Vektor  $\mathbf{u} = [u \ v \ \theta]^T$  predstavlja pomake grede, a  $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon \ \gamma \ \kappa]^T$  odgovarajući vektor deformacija.

Kako bi se omogućilo stvaranje pukotina u modu I i modu II između Voronoi poligona, potrebno je uvesti diskontinuitet u opće polje pomaka 2D Timoshenkove grede. Takvo poboljšanje standardnog polja pomaka grede postignuto je s Heaviside funkcijom za koju vrijedi

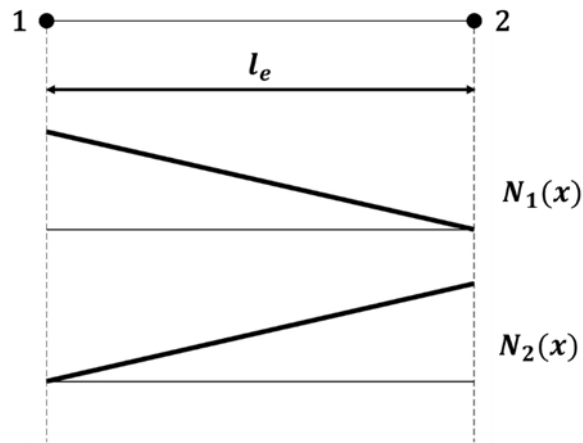
$H_{x_c} = 0$  za  $x \leq x_c$  i  $H_{x_c} = 1$  za  $x > x_c$  i vektorom  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_u \ \alpha_v \ 0]^T$  koji predstavlja vektor skoka u polju pomaka na mjestu diskontinuiteta  $x_c$  koje se nalazi na sredini grede. Poboljšano polje pomaka može se zapisati kao zbroj regularnog i lokaliziranog diskontinuiranog (singularnog) dijela:

$$\mathbf{u}(x) = \bar{\mathbf{u}}(x) + \boldsymbol{\alpha}H_{x_c} = \begin{bmatrix} \bar{u}(x) \\ \bar{v}(x) \\ \bar{\theta}(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_u \\ \alpha_v \\ 0 \end{bmatrix} H_{x_c} \quad (3.2)$$

Polje pomaka dano izrazom (3.2) može se napisati u interpolacijskom obliku:

$$\mathbf{u}(x) = N_1(x)\bar{\mathbf{u}}_1 + N_2(x)\bar{\mathbf{u}}_2 + \boldsymbol{\alpha}H_{x_c} \quad (3.3)$$

gdje je regularni dio polja pomaka Timoshenkove grede aproksimiran s baznim funkcijama kao linearnim polinomima  $N_1(x) = 1 - \frac{x}{l_e}$ ,  $N_2(x) = \frac{x}{l_e}$  (crtež 3.8). Vektori  $\bar{\mathbf{u}}_1$  i  $\bar{\mathbf{u}}_2$  su vektori pomaka u čvorovima regularnog dijela izraza (3.3).

Crtež 3.8 Bazne funkcije  $N_1(x)$  i  $N_2(x)$ 

Ukupni pomaci za čvorove 1 i 2 mogu se napisati kao regularno polje pomaka u obliku:

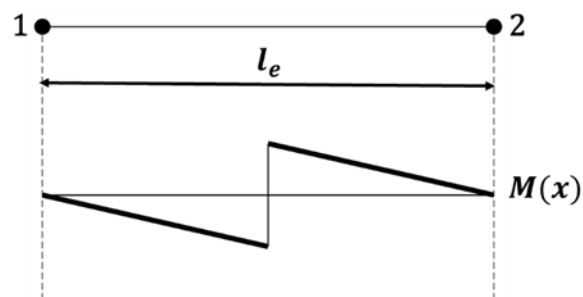
$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x_1) &= \mathbf{u}_1 = \bar{\mathbf{u}}_1 \\ \mathbf{u}(x_2) &= \mathbf{u}_2 = \bar{\mathbf{u}}_2 + \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Kombinirajući izraze (3.4) i (3.3), izraz (3.3) može se zapisati u obliku:

$$\mathbf{u}(x) = N_1(x)\mathbf{u}_1 + N_2(x)\mathbf{u}_2 + \boldsymbol{\alpha} \underbrace{(H_{x_c} - N_2(x))}_{M(x)} \quad (3.5)$$

gdje  $(H_{x_c} - N_2(x))$  predstavlja interpolacijsku funkciju  $M(x)$  (crtež 3.9) koja poništava utjecaj skoka u polju pomaka  $\boldsymbol{\alpha}$  na rubovima elementa:

$$M(x) = \begin{cases} -\frac{x}{l_e}; & x \in [0, x_c) \\ 1 - \frac{x}{l_e}; & x \in \langle x_c, l_e \end{cases} \quad (3.6)$$

Crtež 3.9 Interpolacijska funkcija  $M(x)$

Parametar diskontinuiteta  $\alpha$  izračunat je unutar samog elementa, čime su dodatne globalne nepoznanice u sustavu izbjegnute. Interpolacija obogaćenog polja pomaka (3.5) može se zapisati u matričnom obliku:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}_a + \mathbf{M}\alpha \quad (3.7)$$

gdje je  $\mathbf{N}$  matrica baznih funkcija  $N_1(x)$  i  $N_2(x)$  dimenzija  $3 \times 6$ ,  $\mathbf{u}_a = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2]^T$  je vektor ukupnih pomaka u čvorovima, a  $\mathbf{M}$  je matrica interpolacijske funkcije  $M(x)$  koja se nalazi na prva dva dijagonalna mjesta matrice  $\mathbf{M}$  koja su povezana s translacijskim pomacima.

Iz izraza (3.2) za polje deformacija dobije se regularni i singularni dio:

$$\epsilon(x) = \bar{\epsilon}(x) + \alpha\delta_{x_c} = \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}(x) \\ \bar{\gamma}(x) \\ \bar{\kappa}(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_u \\ \alpha_v \\ 0 \end{bmatrix} \delta_{x_c} \quad (3.8)$$

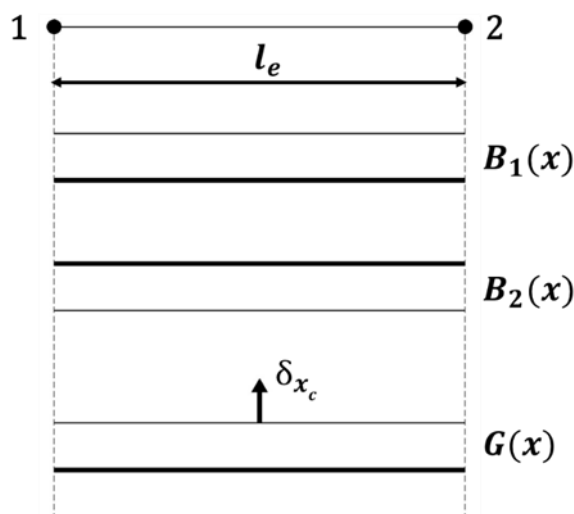
U izrazu (3.8)  $\bar{\epsilon}(x)$  predstavlja regularni dio, a  $\alpha\delta_{x_c}$  singularni dio ukupnog polja deformacija. Dirac delta funkcija  $\delta_{x_c}$  za vrijednost  $x = x_c$  ide u beskonačnost, dok za ostale vrijednosti  $x$  je jednaka nuli.

Derivacijom izraza (3.5) dobije se obogaćeno polje deformacija:

$$\epsilon(x) = B_1(x)\mathbf{u}_1 + B_2(x)\mathbf{u}_2 + G(x)\alpha \quad (3.9)$$

gdje su  $B_1(x) = -\frac{1}{l_e}$  i  $B_2(x) = \frac{1}{l_e}$  derivacije baznih funkcija  $N_1(x)$  i  $N_2(x)$ , a  $G(x)$  predstavlja derivaciju interpolacijske funkcije diskontinuiteta  $M(x)$  (crtež 3.10).

$$G(x) = \bar{G}(x) + \delta_{x_c}, \quad \bar{G}(x) = -\frac{1}{l_e} \quad (3.10)$$



Crtež 3.10 Derivacije baznih funkcija  $B_1(x)$  i  $B_2(x)$  te derivacija interpolacijske funkcije  $G(x)$

Izraz (3.9) može se zapisati u matičnom obliku kao:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}_a + \bar{\mathbf{G}}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha} \delta_{x_c} \quad (3.11)$$

gdje je  $\mathbf{B}$  matrica koja povezuje pomake u čvorovima i deformaciju u elementu preko derivacija baznih funkcija za Timoshenkovu gredu:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -N_1 & 0 & B_2 & -N_2 \\ 0 & 0 & B_1 & 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

a  $\bar{\mathbf{G}}$  je  $3 \times 3$  matrica derivacija interpolacijske funkcije diskontinuiteta  $\bar{G}$  napisana u poglavlju 4.

### 3.4.2. Lokalne jednadžbe ravnoteže

Virtualno polje deformacija interpolirano je na jednak način kao i stvarno polje deformacija:

$$\delta\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\delta\mathbf{u}_a + \bar{\mathbf{G}}\delta\boldsymbol{\alpha} + \delta\boldsymbol{\alpha} \delta_{x_c} \quad (3.13)$$

gdje  $\delta\boldsymbol{\epsilon}$ ,  $\delta\mathbf{u}_a$  i  $\delta\boldsymbol{\alpha}$  označavaju opće virtualno polje deformacija, virtualno regularno polje pomaka i virtualni skok (diskontinuitet) u polju pomaka. Poboľjšani dio polja deformacija mora biti ortogonalan konstantnom naprežanju unutar elementa kako bi se osigurala konvergencija u skladu s patch-testom [67]:

$$\mathbf{G}_v = \mathbf{G} - \frac{1}{l_e} \int_0^{l_e} \mathbf{G} dx \quad (3.14)$$

Za razmatrani element za koji se koristi jedna točka Gaussove točke integracije vrijedi  $\mathbf{G}_v = \mathbf{G}$ .

Jednažba virtualnog rada sila za element dana je izrazom:

$$G^{int,(e)} - G^{ext,(e)} = 0 \quad (3.15)$$

gdje je  $G^{int,(e)}$  rad unutarnjih sila, a  $G^{ext,(e)}$  je rad vanjskih sila. Rad unutarnjih sila dan je izrazom:

$$G^{int,(e)} = \int_0^{l_e} (\delta\boldsymbol{\epsilon})^T \boldsymbol{\sigma} dx = \int_0^{l_e} (\mathbf{B}\delta\mathbf{u}_a)^T \boldsymbol{\sigma} dx + \underbrace{\int_0^{l_e} (\delta\boldsymbol{\alpha})^T (\bar{\mathbf{G}} + \delta_{x_c}) \boldsymbol{\sigma} dx}_{=0} \quad (3.16)$$

Iz izraza (3.16) dobije se vektor unutarnjih sila i vektor lokalnog reziduala u diskontinuitetu kao posljedica diskontinuiteta:

$$\mathbf{f}^{int,(e)} = \int_0^{l_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dx$$

$$\mathbf{h}^{(e)} = \int_0^{l_e} (\bar{\mathbf{G}} + \delta_{x_c}) \boldsymbol{\sigma} dx = \int_0^{l_e} \bar{\mathbf{G}} \boldsymbol{\sigma} dx + \mathbf{t}$$
(3.17)

Iz uvjeta da je lokalni rezidual u diskontinuitetu  $\mathbf{h}^{(e)}$  jednak nuli iz izraza (3.17) dobije se da je vektor unutarnjih sila u diskontinuitetu  $\mathbf{t}$ :

$$\mathbf{t} = - \int_0^{l_e} \bar{\mathbf{G}} \boldsymbol{\sigma} dx$$
(3.18)

gdje je  $\boldsymbol{\sigma}$  vektor rezultante sila u gredi. Izraz (3.18) može se interpretirati kao ravnoteža sile u diskontinuitetu sa silama iz stanja prije pojave diskontinuiteta.

## 4. NELINEARNI MATERIJALNI MODELI

Nelinearnosti u materijalu mogu se opisati konstitutivnim zakonima koji vrijede za model oštećenja te za model plastičnosti. Model oštećenja više se koristi za opisivanje ponašanja krtih i kvazi krtih materijala kao što su beton, stijene, keramika i ostali kompozitni materijali, dok model se plastičnosti koristi za opisivanje ponašanja duktilnih materijala kao što su razni metali poput čelika, bakra, zlata, platine.

U ovom poglavlju za opis ponašanja betona prije pojave diskontinuiteta implementiran je model oštećenja-očvršćivanja u diskretni model, dok je za opisivanje ponašanja betona kada dolazi do pojave diskontinuiteta predstavljen novi model oštećenja-omekšavanja implementiran unutar diskretnog modela.

Za opisivanje nelinearnog ponašanja čelika i međudjelovanja između armature i betona koristi se model plastičnosti.

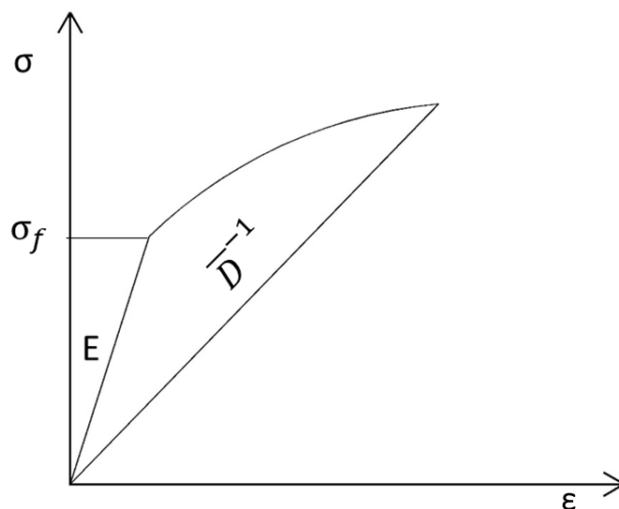
Diskretni model s implementiranom armaturom zasnovan je na rezultirajućim silama grednog elementa te se izračun vektora rezultirajućih sila  $\sigma = [N \quad V \quad M]^T$  ( $N$  predstavlja uzdužnu silu,  $V$  je poprečna sila, a  $M$  je moment savijanja) može podijeliti na skalarne jednačbe, u kojem se svaka nelinearna komponenta deformacija (za očvršćivanje) ili diskontinuitet (za omekšavanje) razmatra zasebno. Kako bi se olakšao prikaz razvoja modela oštećenja i modela plastičnosti, koriste se skalarne varijable, imajući u vidu da je svaki korak razvoja jednak za uzdužni i poprečni smjer. Formulacija za ugrađeni jaki diskontinuitet implementirana je u uzdužni smjer i poprečni smjer grede kako bi se opisao diskontinuitet u ta dva smjera. Kada se prekorače granična naprezanja nakon kojih dolazi do pojave nelinearnosti, uzdužna i poprečna rezultanta naprezanja ulaze u nelinearno područje, dok je rotacija 2D Timoshenkove grede uvijek linearno elastična te kod nje nema smanjenja krutosti ili pojave plastičnih deformacija.

### 4.1. Model oštećenja

Kachanov je prvi predstavio model oštećenja za probleme puzanja 1958 [68]. Lemaitre i Chaboche [69] nastavili su razvijati model oštećenja koristeći koncept efektivnih naprezanja za definiranje varijable oštećenja. Ortiz [70] je razvio model oštećenja, gdje je za varijablu oštećenja uzeo modul popustljivosti  $\bar{D}$ , što predstavlja inverznu vrijednost modula elastičnosti  $E$  za neoštećeni materijal. Mehanika oštećenja kontinuuma bavi se razvojem mikro pukotina, što se manifestira očvršćivanjem i smanjenjem krutosti materijala. Kod modela oštećenja dolazi do smanjenja krutosti materijala u rasterećenju, kada je materijal u nelinearnom području, ali nema trajnih deformacija nakon totalnog rasterećenja [19, 71].

## 4.1.1. Konstitutivni zakon modela oštećenja – očvršćivanja

Do pojave diskontinuiteta ponašanje betona opisano je 1D modelom koji kombinira elastično ponašanje materijala s modelom oštećenja i izotropnim očvršćivanjem (model oštećenja s očvršćivanjem). Beton se modelira kao elastični materijal do granice elastičnosti  $\sigma_f$ , nakon prekoračenja te granice, povećanjem napreznja dolazi do pojave mikropukotina, što rezultira smanjenjem modula elastičnosti betona (crtež 4.1).



Crtež 4.1 Odnos napreznja i deformacija za model oštećenja – očvršćivanja

Model oštećenja s očvršćivanjem formuliran je unutar okvira termodinamike s Helmholtzovom slobodnom energijom za oštećenje s očvršćivanjem  $\psi$  prema izrazu:

$$\psi(\bar{\epsilon}, \bar{D}, \bar{\xi}) = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \cdot \bar{D}^{-1} \bar{\epsilon} + \Xi(\bar{\xi}), \quad \Xi(\xi) = \frac{1}{2} \bar{K}_d \bar{\xi}^2 \quad (4.1)$$

gdje su  $\bar{D}$  i  $\bar{\epsilon}$  modul popustljivosti za očvršćivanje i ukupna deformacija,  $\bar{K}_d$  je modul očvršćivanja za oštećenje, dok je  $\bar{\xi}$  unutarnja varijabla očvršćivanja u oštećenju koja predstavlja ukupno oštećenje materijala u očvršćivanju. Funkcija oštećenja za očvršćivanje  $\bar{\phi}$  definirana je sljedećim izrazom:

$$0 \geq \bar{\phi}(\sigma, \bar{q}) = |\sigma| - (\sigma_f - \bar{q}) \quad (4.2)$$

gdje je  $\sigma$  napreznja,  $\sigma_f$  predstavlja granično napreznja nakon kojeg se pojavljuju prve mikro pukotine, a  $\bar{q}$  je funkcija modula očvršćivanja  $\bar{K}_d$  i varijable očvršćivanja materijala  $\bar{\xi}$  dana izrazom:

$$\bar{q} = -\bar{K}_d \bar{\xi} \quad (4.3)$$

Prirast varijable očvršćivanja materijala dan je sljedećim izrazom:

$$d\bar{\xi} = d\bar{\gamma} \quad (4.4)$$

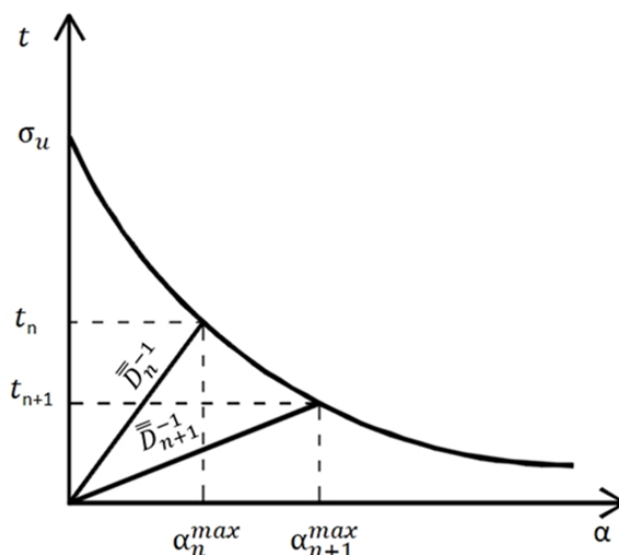
gdje je  $d\bar{\gamma}$  multiplikator oštećenja u očvršćivanju.

Odnos naprezanje deformacija za model oštećenja s očvršćivanjem zadan je u obliku:

$$\sigma = \bar{D}^{-1} \bar{\varepsilon}, \quad \bar{D} \in [E^{-1}, \infty) \quad (4.5)$$

#### 4.1.2. Konstitutivni zakon modela oštećenja – omekšavanja

Za opisivanje gubitka energije u betonu koristi se zakon oštećenja za omekšavanje koji povezuje naprezanje u diskontinuitetu i skok u polju pomaka. U trenutku kada naprezanje u betonu prijeđe granicu čvrstoće betona  $\sigma_u$  dolazi do pojave diskontinuiteta odnosno pukotina te do aktivacije skoka u polju pomaka unutar Timoshenkove grede. Povećanjem skoka u polju pomaka, što se manifestira otvaranjem pukotine, smanjuje se nosivost što uzrokuje smanjenje naprezanja  $t$  u diskontinuitetu te dolazi do smanjenja krutosti betona. Rasterećenjem betona dolazi do smanjenja pukotine i smanjenja skoka u polju pomaka  $\alpha$ , ali akumulirana oštećenja betona i smanjena krutost i dalje ostaju. Kod potpunog rasterećenja pukotina se zatvara, a skok u polju pomaka je jednak nuli. Ponovno opterećenje ovisno je o smanjenoj krutosti materijala te prati inverznu vrijednost modula popustljivosti za omekšavanje  $\bar{D}$  (crtež 4.2).



Crtež 4.2 Odnos naprezanja u diskontinuitetu i skoka u polju pomaka za model oštećenja – omekšavanja



Model oštećenja-omekšavanja formuliran je unutar okvira termodinamike s Helmholtzovom slobodnom energijom za oštećenje s omeškavanjem  $\psi$  prema izrazu:

$$\psi(\bar{D}, \alpha, \bar{\xi}) = \frac{1}{2} \bar{D}^{-1} \alpha^2 + \Xi(\bar{\xi}), \quad \Xi(\xi) = -\bar{q} \bar{\xi} \quad (4.6)$$

gdje su  $\bar{D}$  i  $\alpha$  modul popustljivosti za omeškavanje i skok u polju pomaka, dok je  $\bar{\xi}$  unutarnja varijabla omeškavanja u oštećenju koja predstavlja ukupno oštećenje materijala za omeškavanje.

Funkcija loma za omeškavanje  $\bar{\phi}$  definirana je izrazom:

$$\bar{\phi}(t, \bar{q}) = |t| - (\sigma_u - \bar{q}) \leq 0 \quad (4.7)$$

gdje je  $t$  naprezanje u diskontinuitetu,  $\sigma_u$  je granično naprezanje nakon kojega dolazi do pojave diskontinuiteta, tj. čvrstoća materijala, a  $\bar{q}$  predstavlja funkciju ponašanja materijala u omeškavanju koja se može zapisati u eksponencijalnom obliku:

$$\bar{q} = \sigma_u \left( 1 - \exp\left(-\bar{\xi} \frac{\sigma_u}{G_f}\right) \right) \quad (4.8)$$

gdje je  $G_f$  energija loma za odgovarajući materijal (beton).

Prirast varijable omeškavanja materijala dan je sljedećim izrazom:

$$d\bar{\xi} = d\bar{\gamma} \quad (4.9)$$

gdje je  $d\bar{\gamma}$  multiplikator oštećenja u omeškavanju.

Naprezanje u diskontinuitetu dano je izrazom:

$$t = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = \bar{D}^{-1} \alpha, \quad \bar{D} \in [0, \infty) \quad (4.10)$$

#### 4.1.3. Model oštećenja – postupak za izračun unutarnjih varijabli

U ovom potpoglavlju prikazan je postupak za izračun unutarnjih varijabli oštećenja za očvršćivanje i omeškavanje. Algoritam za pronalaženje numeričkih rješenja u pseudo vremenu  $t_{n+1}$  korišten je za izračun unutarnjih/lokalnih varijabli. Rješenja se dobivaju za diskretna pseudo vremena  $0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$  pomoću inkrementalno-iterativne metode. Konstitutivne jednadžbe s nelinearnim zakonom omeškavanja su linearizirane te se za proračun unutarnjih varijabli koristi iterativni postupak.

### 4.1.3.1 Postupak proračuna lokalnih varijabli za očvršćivanje

Ponašanje materijala opisano u ovom potpoglavlju karakterizira prijelaz materijala iz elastičnog stanja u stanje oštećenja s očvršćivanjem.

Zadane varijable su pomak  $u_{n+1}$  u trenutku  $t_{n+1}$  te unutarnje varijable  $\bar{\xi}_n, \bar{D}_n$  u trenutku  $t_n$ , a treba izračunati unutarnje varijable oštećenja za očvršćivanje  $\bar{\xi}_{n+1}, \bar{D}_{n+1}$  u trenutku  $t_{n+1}$ .

Postupak započinje s pretpostavkom elastičnog probnog rješenja, što znači da nema promjene unutarnjih varijabli za oštećenje-očvršćivanje, već su varijable zadržane iz prethodnog koraka.

Prema tome za probnu vrijednost naprezanja iz izraza (4.5) dobiva se:

$$\sigma_{n+1}^{probno} = \bar{D}_{n+1}^{probno} \bar{\varepsilon}_{n+1}, \quad \bar{D}_{n+1}^{probno} = \bar{D}_n, \quad \bar{\xi}_{n+1}^{probno} = \bar{\xi}_n \quad (4.11)$$

Pripadajuća funkcija oštećenja računa se u skladu s izrazima (4.2) i (4.3) na sljedeći način:

$$\bar{\phi}_{n+1}^{probno} = |\sigma_{n+1}^{probno}| - (\sigma_f - \bar{q}_{n+1}^{probno}) \quad (4.12)$$

gdje je:

$$\bar{q}_{n+1}^{probno} = -K_d \bar{\xi}_{n+1}^{probno} = -K_d \bar{\xi}_n \quad (4.13)$$

Kada je funkcija oštećenja  $\bar{\phi}_{n+1}^{probno} \leq 0$ , unutarnje varijable oštećenja za očvršćivanje ostaju nepromijenjene:

$$\bar{D}_{n+1} = \bar{D}_{n+1}^{probno}, \quad \bar{\xi}_{n+1} = \bar{\xi}_{n+1}^{probno} \quad (4.14)$$

a probno naprezanje se prihvaća kao rješenje:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{probno} \quad (4.15)$$

U slučaju kada je funkcija oštećenja  $\bar{\phi}_{n+1}^{probno} > 0$  dolazi do promjene vrijednosti unutarnjih varijabli:

$$\bar{D}_{n+1} = \bar{D}_n + \bar{\gamma}_{n+1} \frac{1}{|\sigma_{n+1}|}, \quad \bar{\xi}_{n+1} = \bar{\xi}_n + \bar{\gamma}_{n+1} \quad (4.16)$$

Također se mijenja i vrijednost naprezanja.

Vrijednost multiplikatora oštećenja u očvršćivanju  $\bar{\gamma}_{n+1}$  za linearni zakon očvršćivanja dobiva se iz izraza:

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_{n+1} &= |\sigma_{n+1}| - (\sigma_f - \bar{q}_{n+1}) \\
&= |\sigma_{n+1}^{probno}| - \bar{D}_n^{-1} \bar{\gamma}_{n+1} - (\sigma_f - \bar{q}_{n+1}^{probno}) - K_d \bar{\gamma}_{n+1} \\
&= \bar{\phi}_{n+1}^{probno} - (\bar{D}_n^{-1} + K_d) \bar{\gamma}_{n+1} \\
\bar{\phi}_{n+1} = 0 &\Rightarrow \bar{\gamma}_{n+1} = \frac{\bar{\phi}_{n+1}^{probno}}{\bar{D}_n^{-1} + K_d}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Konačna vrijednost naprezanja računa se prema sljedećem izrazu:

$$\begin{aligned}
\sigma_{n+1} &= \bar{D}_{n+1}^{-1} \bar{\varepsilon}_{n+1} \\
\sigma_{n+1} &= \bar{D}_{n+1}^{probno^{-1}} \bar{\varepsilon}_{n+1} - \bar{D}_n^{-1} \bar{\gamma}_{n+1} \text{sign}(\sigma_{n+1}^{probno}) \\
\sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^{probno} - \bar{D}_n^{-1} \bar{\gamma}_{n+1} \text{sign}(\sigma_{n+1}^{probno})
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Tangentni modul elasto-oštećenja  $C^d$  koji se koristi u lineariziranim jednadžbama ravnoteže definira se kao derivacija naprezanja po deformaciji:

$$C_{n+1}^d := \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \begin{cases} \bar{D}_n^{-1}; \bar{\gamma}_{n+1} = 0 \\ \frac{K_d / \bar{D}_n}{\bar{D}_n^{-1} + K_d}; \bar{\gamma}_{n+1} > 0 \end{cases} \tag{4.19}$$

#### 4.1.3.2 Postupak za proračun lokalnih varijabli za omekšavanje

Zadane varijable su pomak  $u_{n+1}$  u trenutku  $t_{n+1}$  te unutarnje varijable  $\alpha_n, \bar{\xi}_n, \bar{D}_n$  u trenutku  $t_n$ . Potrebno je izračunati unutarnje varijable oštećenja za omekšavanje  $\alpha_{n+1}, \bar{\xi}_{n+1}, \bar{D}_{n+1}$  u trenutku  $t_{n+1}$ .

Postupak započinje s aproksimativnim/probnim rješenjem naprezanja u diskontinuitetu ( $t_{n+1}^{probno}$ ) te se  $t_{n+1}^{probno}$  izračunava na sljedeći način. U početnom koraku pretpostavlja se da je naprezanje u diskontinuitetu opisano elastičnom funkcijom. Prema (4.10) naprezanje u diskontinuitetu je proporcionalno skoku u polju pomaka:

$$\alpha_{n+1}^{probno} = \bar{D}_n t_{n+1}^{probno} \tag{4.20}$$

Probni iznos naprezanja u diskontinuitetu računa se kao:

$$\sigma_{n+1}^{probno} = \bar{D}_n^{-1} (B u_{n+1} + \bar{G} \alpha_{n+1}^{probno}) \tag{4.21}$$

gdje je iterativna vrijednost pomaka  $u_{n+1}$  dobivena iz globalnog sustava, a  $\bar{D}_n$  je modul popustljivosti betona prije pojave diskontinuiteta. Izraz:

$$\sigma_{n+1}^{probno} \bar{D}_n = Bu_{n+1} + \bar{G} \bar{D}_n t_{n+1}^{probno} \quad (4.22)$$

dobiven je množenjem izraza (4.21) s  $\bar{D}_n$  i zamjenom  $\alpha_{n+1}^{probno}$  s izrazom (4.20). Iz jednadžbi (4.20) i (4.21),  $t_{n+1}^{probno}$  može se zapisati u sljedećem obliku:

$$t_{n+1}^{probno} = \sigma_{n+1}^{probno} = \frac{Bu_{n+1}}{\underbrace{\bar{D}_n - \bar{G} \bar{D}_n}_{\text{modul popustljivosti}}} \quad (4.23)$$

Nadalje, probna vrijednost funkcije sloma računa se na sljedeći način:

$$\bar{\phi}_{n+1}^{probno} = |t_{n+1}^{probno}| - (\sigma_u - \bar{q}_{n+1}^{probno}) \quad (4.24)$$

Ako je probna vrijednost funkcije sloma  $\bar{\phi}_{n+1}^{probno} \leq 0$ , probne vrijednosti  $\bar{\xi}_{n+1} = \bar{\xi}_{n+1}^{probno} = \bar{\xi}_n$ ,  $\bar{D}_n = \bar{D}_{n+1}^{probno} = \bar{D}_{n+1}$ ,  $t_{n+1} = t_{n+1}^{probno} = t_n$  prihvaćaju se kao konačno rješenje, a skok u polju pomaka koji označava veličinu otvaranja (širinu) pukotine je:

$$\alpha_{n+1} = \bar{D}_n t_{n+1} \quad (4.25)$$

Ako je  $\bar{\phi}_{n+1}^{probno} > 0$ , probne vrijednosti moraju se ispraviti računanjem inkrementa multiplikatora oštećenja u omekšavanju  $\bar{\gamma}_{n+1}$ . To se postiže izjednačavanjem funkcije sloma  $\bar{\phi}_{n+1}$  s nulom.

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{n+1} &= (t_{n+1}) \text{sign}(t_{n+1}) - (\sigma_u - \bar{q}_{n+1}) \\ &= \bar{D}_n^{-1} (Bu_{n+1} + \bar{G} \alpha_{n+1}) \text{sign}(t_{n+1}) - (\sigma_u - K_s \bar{\xi}_{n+1}) \\ &= \bar{D}_n^{-1} \left( Bu_{n+1} + \bar{G} \underbrace{(\bar{D}_n (\sigma_u + K_s \bar{\xi}_n) + \bar{\gamma}_{n+1})}_{\alpha_{n+1}} \text{sign}(t_{n+1}) \right) \text{sign}(t_{n+1}) \\ &\quad - \left( \sigma_u - K_s \underbrace{(\bar{\xi}_n + \bar{\gamma}_{n+1})}_{\bar{\xi}_{n+1}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Iz izraza (4.26) dobiva se:

$$\underbrace{\frac{Bu_{n+1}}{\bar{D}_n - \bar{G} \bar{D}_n} \text{sign}(t_{n+1}) - (\sigma_u + K_s \bar{\xi}_n)}_{\bar{\phi}_{n+1}^{probno}} = \frac{K_s \bar{D}_n - \bar{G}}{\bar{D}_n - \bar{G} \bar{D}_n} \bar{\gamma}_{n+1} \quad (4.27)$$

Krajnja vrijednost multiplikatora oštećenja u omekšavanju  $\bar{\gamma}_{n+1}$  dobivena je iz izraza (4.27):

$$\bar{\gamma}_{n+1} = \frac{\bar{\Phi}_{n+1}^{probno} (\bar{D}_n - \bar{G} \bar{D}_n)}{K_s \bar{D}_n - \bar{G}} \quad (4.28)$$

gdje je  $K_s$  modul omekšavanja. Prikazana procedura za izračun multiplikatora oštećenja u omekšavanju  $\bar{\gamma}_{n+1}$  vrijedi za linearni zakon omekšavanja. Za nelinearni zakon omekšavanja, koji se koristi u ovom radu za opis ponašanja betona pri pojavi diskontinuiteta, rezultat ekvivalentan (4.28) dobiven je iterativno koristeći Newton-Raphsonovu metodu:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{n+1}^{(j)} &= \bar{\Phi}_{n+1}^{probno} - \frac{K_s (\bar{\xi}_{n+1}^{(j)}) \bar{D}_n - \bar{G}}{\bar{D}_n - \bar{G} \bar{D}_n} \bar{\gamma}_{n+1}^{(j)} < tol \\ \Rightarrow \bar{\gamma}_{n+1}^{(j+1)} &= \bar{\gamma}_{n+1}^{(j)} + \Delta \bar{\gamma}_{n+1}^{(j)} \end{aligned} \quad (4.29)$$

gdje je  $j$  iterativni brojač, a  $K_s$  je modul omekšavanja dobiven derivacijom izraza (4.8) za eksponencijalni zakona omekšavanja u odnosu na unutarnju varijablu omekšavanja  $\bar{\xi}$ . Nove vrijednosti za skok u polju pomaka koji mjeri otvaranje pukotine  $\alpha_{n+1}$  i unutarnju varijablu  $\bar{\xi}_{n+1}$  su:

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= (\alpha_n^{max} + \bar{\gamma}_{n+1}) sign(t_{n+1}) \\ \bar{\xi}_{n+1} &= \bar{\xi}_n + \bar{\gamma}_{n+1} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Konačna vrijednost naprezanja u diskontinuitetu izračuna se s novoizračunatim varijablama:

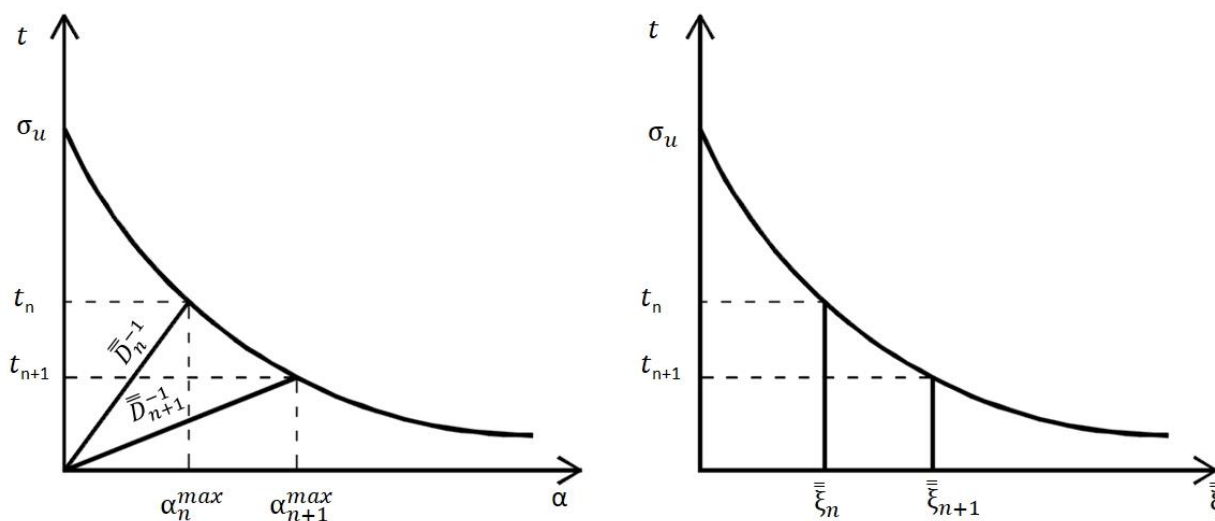
$$t_{n+1} = \sigma_{n+1} = \bar{D}_n^{-1} (B u_{n+1} + \bar{G} \alpha_{n+1}) \quad (4.31)$$

Nova vrijednost za modul popustljivosti u omekšavanju iznosi:

$$\bar{D}_{n+1} = \frac{\alpha_{n+1}}{t_{n+1}} = \frac{\alpha_n^{max} + \bar{\gamma}_{n+1}}{\sigma_u + K_s \bar{\xi}_{n+1}} \quad (4.32)$$

gdje je  $\alpha_n^{max} = \bar{D}_n t_n^{max} = \bar{D}_n (\sigma_u + K_s \bar{\xi}_n)$  maksimalna elastična vrijednost  $\alpha$  iz zadnjeg koraka u omekšavanju (crtež 4.3). Razlika između dvije varijable omekšavanja, skoka u polju pomaka (otvaranja pukotine)  $\alpha$  i varijable  $\bar{\xi}$  koja kontrolira oštećenje u omekšavanju prikazana je na crtežu 4.3. Otvaranje pukotine  $\alpha$  prikazuje veličinu (širinu) pukotine i može se povećavati ili smanjivati ovisno o tome je li se materijal opterećuje ili rasterećuje. Točnije rečeno, varijabla  $\alpha$  može simulirati mehanizam otvaranja i zatvaranja pukotina. Varijabla omekšavanja  $\bar{\xi}$  akumulira ukupno

oštećenje materijala (betona) i kontrolira stupanj njegovog oštećenja i povećava se za opterećenje, a tijekom rasterećenja ostaje nepromijenjena.



Crtež 4.3 Odnos naprezanja u diskontinuitetu i skoka u polju pomaka (lijevo) i odnos naprezanja u diskontinuitetu i ukupnog oštećenja u omekšavanju (desno)

Skok u polju pomaka u uzdužnom smjeru pozitivan je kada se slom u modu I aktivira zadovoljavajući kriterij iz izraza (4.24) za vlačno stanje naprezanja. Čvrstoća materijala (betona) u vlaklu označena je s  $\sigma_{u,t}$ . Ekvivalentna funkcija sloma za mod II implementirana je u model, gdje se uspoređuju posmična naprezanja s posmičnom čvrstoćom označenom s  $\tau_f$ . Ove dvije funkcije mogu se aktivirati odvojeno ili istovremeno ovisno o stanju naprezanja. Utjecaj tlačnog naprezanja na granicu sloma u posmiku prikazana je s Mohr-Coulombvim zakonom;

$$\tau_f = \tau_u + \sigma_c \tan(\phi) \quad (4.33)$$

Na posmičnu čvrstoću  $\tau_f$  utječe unutarnji kut trenja  $\phi$  i pripadno naprezanje u tlaku  $\sigma_c$ , dok je  $\tau_u$  posmična čvrstoća kada je tlačno naprezanje jednako nuli.

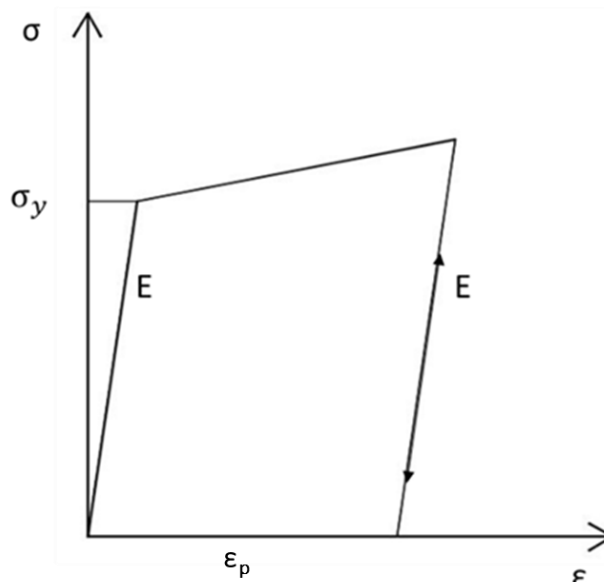
U predloženom modelu naprezanje u tlaku ograničeno je tlačnom čvrstoćom materijala (betona)  $\sigma_{u,c}$ . Kada je uzorak izložen tlačnom opterećenju najčešće dolazi do stvaranja dijagonalne pukotine, odnosno do klizanja u posmiku. Iako će se većina elementa slomiti u modu II, neki elementi mogu dosegnuti velika tlačna naprezanja koja prekoračuju postojeću čvrstoću materijala (betona) što vodi do drobljenja materijala. Tada, kao i za vlačno opterećenje, uslijed zadovoljavanja kriterija za funkciju sloma iz izraza (4.24) dolazi do eksponencijalnog omekšavanja i smanjenja krutosti elementa. U tom slučaju skok u polju pomaka postaje negativan.

## 4.2. Model plastičnosti

Model plastičnosti karakterizira pojava trajnih deformacija (plastične deformacije), kada je materijal izložen opterećenju većim od granice tečenja karakterističnim za taj materijal. Do pojave trajnih deformacija dolazi uslijed promjena unutar kristala na mikrorazini, tj. pomicanja kristala duž dislokacijskih ravnina. Grana mehanike kontinuuma koja se bavi trajnim, nereverzibilnim deformacijama zove se teorija plastičnosti. Za razliku od modela oštećenja, kod totalnog rasterećenja u modelu plastičnosti i dalje su prisutne deformacije u materijalu izazvane nelinearnim ponašanjem materijala i nema smanjenja krutosti materijala.

### 4.2.1. Konstitutivni zakon modela plastičnosti – očvršćivanja

Za opisivanje ponašanja čelika nakon što dosegne granicu tečenja  $\sigma_y$  i za opisivanje međudjelovanja nakon što dosegne granicu posmičnog naprezanja  $\tau_0$  koristi se bilinearni plastični konstitutivni model materijala s izotropnim očvršćivanjem. Ovaj model nadogradnja je idealnog plastičnog modela, koji uzima u obzir povećanje granice tečenja  $\sigma_y$  kao funkciju akumulirane plastične deformacije. U trenutku prekoračenja granice tečenja nastaju ireverzibilne plastične deformacije, dok krutost materijala ostaje nepromijenjena (crtež 4.4).



Crtež 4.4 Odnos naprezanje deformacija za model plastičnosti – očvršćivanja

Model plastičnosti s očvršćivanjem formuliran je unutar okvira termodinamike s Helmholtzovom slobodnom energijom za plastičnost s očvršćivanjem  $\psi$  prema izrazu:

$$\psi(\epsilon, \bar{\epsilon}^p, \bar{\xi}) = \frac{1}{2}E(\epsilon - \bar{\epsilon}^p)^2 + \frac{1}{2}\bar{K}_p\bar{\xi}^2 \quad (4.34)$$

gdje je  $E$  modul elastičnosti materijala,  $\bar{K}_p$  je modul očvršćivanja za plastičnost,  $\bar{\xi}$  unutarnja varijabla očvršćivanja za plastičnost koja predstavlja trajne plastične deformacije. Ukupna deformacija  $\epsilon$  sastoji se od elastične  $\bar{\epsilon}^e$  i plastične deformacije  $\bar{\epsilon}^p$ :

$$\epsilon = \bar{\epsilon}^e + \bar{\epsilon}^p \quad (4.35)$$

Funkcija tečenja  $\bar{\phi}$  definirana je sljedećim izrazom:

$$0 \geq \bar{\phi}(\sigma, \bar{q}) = |\sigma| - (\sigma_y - \bar{q}) \quad (4.36)$$

gdje je  $\sigma$  naprezanje,  $\sigma_y$  predstavlja granicu tečenja nakon koje se pojavljuju prve plastične deformacije, a  $\bar{q}$  je funkcija modula plastičnosti  $\bar{K}_p$  i unutarnje varijable očvršćivanja za plastičnost materijala  $\bar{\xi}$  dana izrazom:

$$\bar{q} = -\bar{K}_p\bar{\xi} \quad (4.37)$$

Prirast varijable očvršćivanja za plastičnost te prirast plastične deformacije dana je izrazom:

$$d\bar{\xi} = d\bar{\gamma}, \quad d\bar{\epsilon}^p = d\bar{\gamma} \text{sign}(\sigma) \quad (4.38)$$

gdje je  $d\bar{\gamma}$  multiplikator plastičnosti u očvršćivanju.

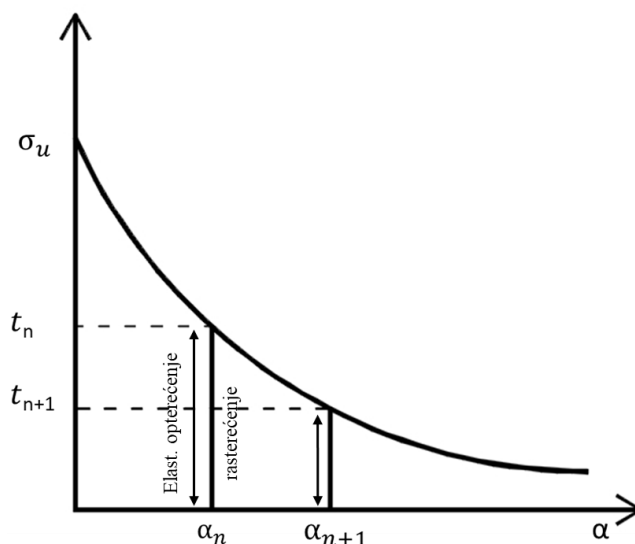
Odnos naprezanja i deformacija za model plastičnosti za očvršćivanje zadan je u obliku:

$$\sigma = E(\epsilon - \bar{\epsilon}^p) \quad (4.39)$$

#### 4.2.2. Konstitutivni zakon modela plastičnosti – omekšavanja

Ponašanje čelika u diskontinuitetu, odnosno pri pojavi pukotina, i ponašanje međudjelovanja između armature i betona kada dođe do pucanja veze opisano je modelom plastičnosti za omekšavanje. Kao i za model oštećenja za omekšavanje, i kod ovoga modela ima aktivacija skoka u polju pomaka (diskontinuiteta) za elemente gdje je prijeđena granica čvrstoće. Povećanjem diskontinuiteta (skoka u polju pomaka) smanjuje se naprezanje u diskontinuitetu. Za skok u polju pomaka može se reći da se ponaša ekvivalentno plastičnoj deformaciji što znači da pri rasterećenju nema zatvaranja pukotina, diskontinuitet je trajan, ali nema ni smanjenja krutosti materijala. U ovom radu odnos između naprezanja u diskontinuitetu i skoka u polju pomaka opisan je eksponencijalnom padajućom funkcijom (crtež 4.5).





Crtež 4.5 Odnos napreznja u diskontinuitetu i skoka u polju pomaka za model plastičnosti – omeškavanja

Kao i model plastičnosti-očvršćivanja, i model plastičnosti-omeškavanja razvijen je unutar okvira termodinamike s Helmholtzovom slobodnom energijom za plastičnost s omeškavanjem  $\psi$  prema izrazu:

$$\psi(\sigma, \bar{q}) = \underbrace{\frac{1}{2} \sigma \varepsilon^e}_{\psi^{el}} + \underbrace{\mathcal{E}(\bar{\xi})}_{\psi^{pl}}, \quad \mathcal{E}(\xi) = -\bar{q} \bar{\xi} \quad (4.40)$$

gdje unutarnja varijabla omeškavanja za plastičnost  $\bar{\xi}$  predstavlja otvaranje pukotine,  $\varepsilon^e$  je elastična deformacija, a  $\bar{q}$  je funkcija koja opisuje eksponencijalno omeškavanje materijala, te ima oblik:

$$\bar{q} = \sigma_u \left( 1 - \exp\left(-\bar{\xi} \frac{\sigma_u}{G_f}\right) \right) \quad (4.41)$$

$G_f$  je odgovarajuća energija loma materijala, a  $\sigma_u$  je granica čvrstoće materijala.

Prirast varijable omeškavanja za plastičnost dana je izrazom:

$$d\bar{\xi} = d\bar{\gamma} \quad (4.42)$$

gdje je  $d\bar{\gamma}$  multiplikator plastičnosti u omeškavanju.

Funkcija sloma za omeškavanje  $\bar{\phi}$  definirana je izrazom:

$$\bar{\phi}(t, \bar{q}) = |t| - (\sigma_u - \bar{q}) \leq 0 \quad (4.43)$$

gdje je  $t$  naprezanje u diskontinuitetu dobiveno iz jednažbe ravnoteže (3.18).

### 4.2.3. Model plastičnosti – postupak za izračun unutarnjih varijabli

Postupak za izračun unutarnjih varijabli plastičnosti za očvršćivanje i omekšavanje prikazan je u ovom potpoglavlju. Rješenja za unutarnje/lokalne varijable dobivaju se za diskretna pseudo vremena  $0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$  pomoću inkrementalno-iterativne metode. Konstitutivne jednažbe s nelinearnim zakonom omekšavanja su linearizirane te se za proračun unutarnjih varijabli koristi iterativni postupak.

#### 4.2.3.1 Postupak za proračun lokalnih varijabli za očvršćivanje

Ovdje je opisan prijelaz stanja materijala koji opisuje čelik i međudjelovanje iz elastičnog u stanje plastičnosti/tečenja s očvršćivanjem te je detaljno opisan postupak dobivanja lokalnih varijabli. Zadane varijable su pomak  $u_{n+1}$  u trenutku  $t_{n+1}$  te unutarnje varijable  $\bar{\xi}_n, \bar{\varepsilon}_n^p$  u trenutku  $t_n$ , treba izračunati unutarnje varijable plastičnosti za očvršćivanje  $\bar{\xi}_{n+1}, \bar{\varepsilon}_{n+1}^p$  u trenutku  $t_{n+1}$ .

Postupak se započne s pretpostavkom elastičnog ponašanja, što znači da nema promjene unutarnjih varijabli za plastičnost-očvršćivanje, već su varijable zadržane iz prethodnog koraka. Prema tome za probnu vrijednost naprezanja iz izraza (4.39) dobiva se:

$$\sigma_{n+1}^{probno} = E(\bar{\varepsilon}_{n+1} - \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p,probno}), \quad \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p,probno} = \bar{\varepsilon}_n^p, \quad \bar{\xi}_{n+1}^{probno} = \bar{\xi}_n \quad (4.44)$$

Pripadajuću funkciju tečenja izračuna se na sljedeći način u skladu s izrazima (4.36) i (4.37):

$$\bar{\phi}_{n+1}^{probno} = |\sigma_{n+1}^{probno}| - (\sigma_y - \bar{q}_{n+1}^{probno}) \quad (4.45)$$

gdje je:

$$\bar{q}_{n+1}^{probno} = -K_p \bar{\xi}_{n+1}^{probno} = -K_p \bar{\xi}_n \quad (4.46)$$

Kada je funkcija tečenja  $\bar{\phi}_{n+1}^{probno} \leq 0$ , probne vrijednosti varijabli plastičnosti za očvršćivanje se ne mijenjaju:

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p,probno}, \quad \bar{\xi}_{n+1} = \bar{\xi}_{n+1}^{probno} \quad (4.47)$$

te u tom slučaju vrijednost probnog naprezanja postaje rješenje:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{probno} \quad (4.48)$$

Ako je funkcija tečenja  $\bar{\phi}_{n+1}^{probno} > 0$ , vrijednosti unutarnjih varijabli se mijenjaju te je potrebno promijeniti vrijednosti unutarnjih varijabli kao i naprezanja:

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \bar{\gamma}_{n+1}, \quad \bar{\xi}_{n+1} = \bar{\xi}_n + \bar{\gamma}_{n+1} \quad (4.49)$$

Vrijednost multiplikatora plastičnosti u očvršćivanju  $\bar{\gamma}_{n+1}$  dobiva se iz izraza:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{n+1} &= |\sigma_{n+1}| - (\sigma_y - \bar{q}_{n+1}) \\ &= |\sigma_{n+1}^{probno}| - E\bar{\gamma}_{n+1} - (\sigma_y - \bar{q}_{n+1}^{probno}) - K_p\bar{\gamma}_{n+1} \\ &= \bar{\phi}_{n+1}^{probno} - (E + K_p)\bar{\gamma}_{n+1} \\ \bar{\phi}_{n+1} = 0 &\Rightarrow \bar{\gamma}_{n+1} = \frac{\bar{\phi}_{n+1}^{probno}}{E + K_p} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Nova vrijednost naprezanja koja se dobije za  $\bar{\phi}_{n+1}^{probno} > 0$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= E(\bar{\varepsilon}_{n+1} - \bar{\varepsilon}_{n+1}^p) \\ \sigma_{n+1} &= E(\bar{\varepsilon}_{n+1} - \bar{\varepsilon}_n^p) - E\bar{\gamma}_{n+1} \text{sign}(\sigma_{n+1}^{probno}) \\ \sigma_{n+1} &= (\sigma_{n+1}^{probno}) - E\bar{\gamma}_{n+1} \text{sign}(\sigma_{n+1}^{probno}) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Tangentni modul elasto-plastičnosti koji se koristi u lineariziranim jednadžbama ravnoteže definira se kao derivacija naprezanja po deformaciji:

$$C_{n+1}^p := \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \begin{cases} E; & \bar{\gamma}_{n+1} = 0 \\ \frac{EK_p}{E + K_p}; & \bar{\gamma}_{n+1} > 0 \end{cases} \quad (4.52)$$

#### 4.2.3.2 Postupak proračuna lokalnih varijabli za omekšavanje

Ovdje je prikazan postupak izračuna lokalnih varijabli za model plastičnosti-omekšavanja kada dođe do prekoračenja čvrstoće materijala. Zadane varijable su: pomak  $u_{n+1}$  u trenutku  $t_{n+1}$  i unutarnje varijable  $\alpha_n, \bar{\xi}_n$  u trenutku  $t_n$ . Treba izračunati unutarnje varijable plastičnosti za omekšavanje  $\alpha_{n+1}, \bar{\xi}_{n+1}$  u trenutku  $t_{n+1}$ .

Izračun unutarnjih varijabli započinje se s probnim rješenjem naprezanja u diskontinuitetu  $t_{n+1}^{probno}$ . Iz izraza (3.18) dobije se naprezanje u diskontinuitetu. Probno naprezanje u diskontinuitetu može se zapisati na sljedeći način:

$$t_{n+1}^{probno} = E(\bar{\varepsilon}_{n+1} - \bar{\varepsilon}^p + \bar{G}\alpha_{n+1}^{probno}) \quad (4.53)$$

gdje je  $\bar{\varepsilon}^p$  konačna vrijednost plastične deformacije dobivena iz očvršćivanja i ona ostaje nepromijenjena tijekom proračuna,  $\alpha_{n+1}^{probno}$  je probni skok u polja pomaka te za ovaj korak vrijedi:

$$\alpha_{n+1}^{probno} = \alpha_n, \quad \bar{\xi}_{n+1}^{probno} = \bar{\xi}_n \quad (4.54)$$

Pripadajuća vrijednost funkcije sloma izračuna se na sljedeći način u skladu s izrazima (4.40) i (4.41):

$$\bar{\phi}_{n+1}^{probno} = |t_{n+1}^{probno}| - (\sigma_u - \bar{q}_{n+1}^{probno}) \quad (4.55)$$

gdje je:

$$\bar{q}_{n+1}^{probno} = \sigma_u \left( 1 - \exp\left(-\bar{\xi}_{n+1}^{probno} \frac{\sigma_u}{G_f}\right) \right) \quad (4.56)$$

Kao i kod očvršćivanja, vrijedi ako je funkcija sloma  $\bar{\phi}_{n+1}^{probno} \leq 0$ , tada se probne vrijednosti varijabli plastičnosti za omekšavanje ne mijenjaju:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}^{probno}, \quad \bar{\xi}_{n+1} = \bar{\xi}_{n+1}^{probno} \quad (4.57)$$

U tom slučaju vrijednost probnog naprezanja u diskontinuitetu postaje pravo naprezanje:

$$t_{n+1} = t_{n+1}^{probno} \quad (4.58)$$

U slučaju  $\bar{\phi}_{n+1}^{probno} > 0$ , potrebno je ispraviti probne vrijednosti računanjem inkrementa multiplikatora plastičnosti u omekšavanju  $\bar{\gamma}_{n+1}$ . Izjednačavanjem funkcije sloma  $\bar{\phi}_{n+1}$  s nulom dobije se  $\bar{\gamma}_{n+1}$ :

$$\bar{\gamma}_{n+1} = \frac{\bar{\phi}_{n+1}^{probno}}{\frac{E}{l_e} + K_s} \quad (4.59)$$

gdje je  $K_s$  modul omekšavanja dobiven derivacijom izraza (4.56) za eksponencijalni zakona omekšavanja u odnosu na unutarnju varijablu omekšavanja  $\bar{\xi}$ .

Novo vrijednosti lokalnih varijabli skoka u polju pomaka (otvaranje pukotine)  $\alpha_{n+1}$  i varijable omekšavanja  $\bar{\xi}_{n+1}$  izračunate su na sljedeći način:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1} + \bar{\gamma}_{n+1} \text{sign}(t_{n+1}^{\text{probno}}), \quad \bar{\xi}_{n+1} = \bar{\xi}_{n+1}^{\text{probno}} + \bar{\gamma}_{n+1} \quad (4.60)$$

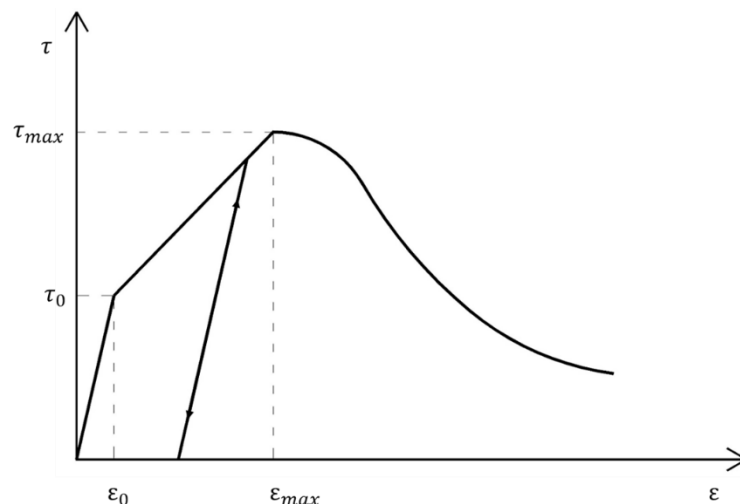
Za  $\bar{\phi}_{n+1}^{\text{probno}} > 0$  nova vrijednost naprezanja u diskontinuitetu  $t_{n+1}$  izračuna se na sljedeći način:

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= E(\bar{\varepsilon}_{n+1} - \bar{\varepsilon}^p + \bar{G}\alpha_{n+1}) \\ &= E(\bar{\varepsilon}_{n+1} - \bar{\varepsilon}^p + \bar{G}\alpha_n) + E(\bar{G}\bar{\gamma}_{n+1} \text{sign}(t_{n+1}^{\text{probno}})) \\ &= t_{n+1}^{\text{probno}} + E(\bar{G}\bar{\gamma}_{n+1} \text{sign}(t_{n+1}^{\text{probno}})) \end{aligned} \quad (4.61)$$

Kao i u modelu oštećenja, i za model plastičnosti također se u obzir uzima utjecaj tlačnog naprezanja na granicu sloma u posmiku koji se prikazuje s Mohr-Coulombovim zakonom (4.33).

#### 4.2.4. Model međudjelovanja armature i betona

Koncept armiranog betona moguć je zahvaljujući međudjelovanju odnosno vezi između armature i betona koje predstavlja zonu prijenosa sila između betona i ugrađene armature te je bitan je mehanizam nosivosti armirano betonskih konstrukcija. Međudjelovanje između ova dva materijala može se podijeliti u tri komponente: adhezijsko (kemijsko) međudjelovanje, trenje te mehaničko uklještenje između rebara šipke i betona. Kako bi se opisalo ponašanje međudjelovanja, u ovom diskretnom model koristi se model plastičnosti, čiji je razvoj opisan u prethodnom potpoglavlju. Uzlazna krivulja opisana je koristeći bilinearni model plastičnosti s očvršćivanjem dok je silazna krivulja opisana s eksponencijalnom krivuljom koja se koristi za model plastičnosti s omekšavanjem te opisuje pojavu diskontinuiteta između armature i betona (crtež 4.6).



Crtež 4.6 Model međudjelovanja između armature i betona

Na crtežu 4.6  $\tau_0$  je čvrstoća međudjelovanja koja odgovara za deformaciju  $\varepsilon_0$  te se nakon toga u modelu ponašanja međudjelovanja uzima kao plastično s očvršćivanjem.  $\tau_{max}$  predstavlja maksimalnu čvrstoću međudjelovanja za deformaciju  $\varepsilon_{max}$ , nakon prekoračenja granice čvrstoće  $\tau_{max}$ , međudjelovanje se opisuje modelom plastičnosti s omekšavanjem. U rasterećenju međudjelovanje se ponaša linearno-elastično te nema smanjenja krutosti veze armature i betona. Prema CEB-FIP [72] maksimalna čvrstoća  $\tau_{max}$  za međudjelovanje dana je izrazom:

$$\tau_{max} = 2.5 \times f_c^{0.5} \quad (4.62)$$

gdje je  $f_c$  čvrstoća betona u tlaku.

U ovom modelu međudjelovanja, vrijednost  $\tau_0$  se uzima kao  $\tau_{max}/2$ .

### 4.3. Postupak izračuna globalnih varijabli

Nakon izračuna vrijednosti unutarnjih varijabli na razini elementa, tj. na lokalnom nivou, potrebno je na globalnom nivou izračunati nove iterativne vrijednosti pomaka u čvorovima. Globalni sustav jednadžbi ravnoteže provjerava se s prethodno izračunatima unutarnjim silama:

$$\|A_{e=1}^{nel}(\mathbf{f}^{int,e,(i)} - \mathbf{f}^{ext,e}) < tol\| \quad (4.63)$$

Ako rješenja konvergiraju, radi se novi pseudo vremenski inkrementalni korak. Iz iterativno-inkrementalnog postupka za konačne elemente dobiju se nove vrijednosti pomaka u čvorovima. Doprinos svakog pojedinog elementa (neovisno je li betonski, armaturni ili vezni element) označenog s  $e$  u eksponentu slijedi prema izrazu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(e)} & \mathbf{F}^{(e)} \\ \mathbf{F}^{(e),T} & \mathbf{H}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(i)} \\ \Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{n+1}^{ext,(e)} - \mathbf{f}_{n+1}^{int,(e),(i)} \\ \mathbf{h}_{n+1}^{(e),(i)} \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

gdje eksponent  $i$  označava brojač koraka iteracija. Matrice  $\mathbf{K}^{(e)}$ ,  $\mathbf{F}^{(e)}$ ,  $\mathbf{H}^{(e)}$  definirane su sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{n+1}^{(e),(i)} &= \left( \frac{\partial \mathbf{f}^{int,(e)}}{\partial \mathbf{u}^{(e)}} \right)_{(n+1)}^{(i)} = \int_0^{l^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{n+1} \mathbf{B} dx \\ \mathbf{F}_{n+1}^{(e),(i)} &= \left( \frac{\partial \mathbf{f}^{int,(e)}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^{(e)}} \right)_{(n+1)}^{(i)} = \int_0^{l^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{n+1} \mathbf{G} dx \\ \mathbf{H}_{n+1}^{(e),(i)} &= \left( \frac{\partial \mathbf{h}^{(e)}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^{(e)}} \right)_{(n+1)}^{(i)} = \int_0^{l^e} \mathbf{G}^T \mathbf{D}_{n+1} \mathbf{G} dx + \mathbf{K}_s \end{aligned} \quad (4.65)$$

Matrica  $\mathbf{B}$  prikazana je izrazom (3.12) dok matrica  $\mathbf{D}_{n+1}$  predstavlja materijalnu matricu Timoshenkove grede (elementa):

$$\mathbf{D}_{n+1} = \begin{bmatrix} C_{n+1}^{(u)}A & 0 & 0 \\ 0 & C_{n+1}^{(v)}A\xi & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

gdje su  $C_{n+1}^{(u)}$  i  $C_{n+1}^{(v)}$  tangentni moduli (elasto-plastičnosti ili elasto-oštećenja ovisno o materijalu) za uzdužni odnosno poprečni smjer,  $A$  je poprečni presjek grede, a  $\xi$  je faktor posmika.  $\mathbf{G}$  predstavlja matricu derivacija interpolacijske funkcije diskontinuiteta  $\bar{G}$ :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \bar{G} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Matrica  $\mathbf{K}_s$  sadrži tangentne krutosti za diskontinuitet dobivene derivacijom eksponencijalnog zakona omekšavanja za oštećenje (4.8) ili za plastičnost (4.41) po unutarnjoj varijabli omekšavanja (u oštećenju ili plastičnosti). Za betonske elemente koristi se izraz (4.8), a za armaturne i vezne elemente (4.41). Uvjet  $\mathbf{h}^{(e)} = 0$  iz izraza (3.17), omogućava primjenu statičke kondenzacije sustava te uklanjanje parametra diskontinuiteta  $\alpha$  iz globalnog sustava jednadžbi. To dovodi do reduciranja matrice krutosti, koja se računa na sljedeći način:

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{e,(i)} = \mathbf{K}_{n+1}^{e,(i)} - \mathbf{F}_{n+1}^{e,(i),T} (\mathbf{H}_{n+1}^{(e),(i)})^{-1} \mathbf{F}_{n+1}^{(e),(i),T} \quad (4.68)$$

Reducirana matrica krutosti koristi se u globalnom sustavu lineariziranih jedandžbi ravnoteže koji se može riješiti koristeći Newton-Raphson-ov iterativni postupak. Izračunati inkrementalni pomak  $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(i)}$  koristi se za ažuriranje odgovarajućeg vektora pomaka:

$$\begin{aligned} A_{e=1}^{nel} [\hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{e,(i)} \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(i)}] &= A_{e=1}^{nel} [\mathbf{f}_{n+1}^{ext,e} - \mathbf{f}_{n+1}^{int,e,(i)}] \\ \Rightarrow \mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)} &= \mathbf{u}_{n+1}^{(i)} + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(i)} \end{aligned} \quad (4.69)$$

U globalnom sustavu jednadžbi ravnoteže sudjeluju svi elementi (betonski, armaturni i vezni) čije su krutosti izražene preko reducirane matrice krutosti  $\hat{\mathbf{K}}^e$  dimenzija  $6 \times 6$ .

## 5. MODEL ZA DINAMIČKU ANALIZU ARMIRANO BETONSKE KONSTRUKCIJE

Za analizu armirano betonskih konstrukcija izloženih dinamičkom opterećenju potrebno je postojeći model za analizu statičkog djelovanja proširiti te njime omogućiti dinamičku analizu. U literaturi se može naći nekoliko radova temeljenih na metodi ED-FEM-a koji analiziraju dinamičko opterećenje [29, 37, 73–75]. Za analizu armirano betonskih konstrukcija izloženih dinamičkom opterećenju nije pronađen niti jedan rad u dostupnoj literaturi temeljen na metodi ED-FEM-a. S obzirom da je doprinos diskontinuiteta zadržan na lokalnoj razini unutar elementa, model za dinamičku analizu se implementira dodavanjem utjecaja inercijalnih sila primjenom D'Alembertovog principa na sustav jednažbi (4.69) napisan u prethodnom poglavlju kao što je to slučaj u klasičnoj metodi konačnih elemenata. Na taj način formulacija za ugrađeni diskontinuitet ostaje nepromijenjena u odnosu na model za statičku analizu.

Globalni dinamički sustav jednažbi dan je izrazom:

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{f}_{n+1}^{int} = \mathbf{f}_{n+1}^{ext} \quad (5.1)$$

Vektor  $\mathbf{a}_{n+1}$  predstavlja ubrzanje u čvorovima. Globalna matrica masa  $\mathbf{M} = A_{e=1}^{nel} \mathbf{M}^e$  sastavljena je od matrica masa za svaki pojedini element:

$$\mathbf{M}^e = \int_0^{l_e} \mathbf{N}^T \rho A \mathbf{N} dx \quad (5.2)$$

gdje je  $A$  površina poprečnog presjeka, a  $\rho$  gustoća materijala. Matrica masa iz izraza (5.2) predstavlja konzistentnu matricu masa. Kako bi se izračunala točna masa za diskretni element (betonski element), volumen za svaki element (crtež 5.1) računa se prema izrazu:

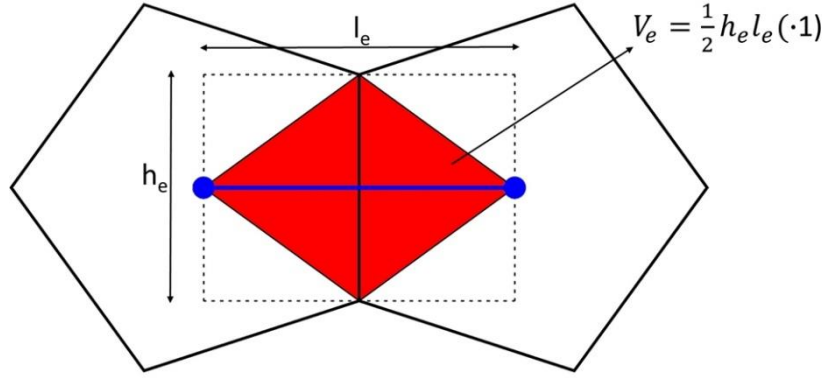
$$V_e = \frac{1}{2} h_e l_e (\cdot 1) \quad (5.3)$$

gdje je 1 debljina/širina modela.

Stoga se koristi modificirani poprečni presjek grede za izračun matrice masa elementa:

$$A'_e = \frac{1}{2} h_e (\cdot 1) = \frac{1}{2} A_e \quad (5.4)$$





Crtež 5.1 Izračun udjela volumena elementa koji sudjeluje u matrici masa

Modificirani poprečni presjek koristi se za izračun mase Timoshenkove grede betonskog elementa, dok se za izračun mase Timoshenkove grede armaturnog elementa i elementa međudjelovanja koristi standardni poprečni presjek grede, a samim time i standardni volumen elementa:

$$V_e^{r,b} = h_e l_e (\cdot 1) \quad (5.5)$$

gdje u eksponentu  $V_e^{r,b}$  r (eng. reinforcement) označava armaturni element, b (eng. bond) označava element međudjelovanja (vezni element), a 1 je debljina/širina modela.

Za rješavanje dinamičke jedandžbe koristi se Newmark-ov implicitni iterativni postupak. Ažurirane (nove) vrijednosti pomaka i brzine mogu se izraziti pomoću Newmark-ovih parametara  $\beta$  i  $\gamma$  [19] i to:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + (\Delta t)^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \mathbf{a}_n + \beta \mathbf{a}_{n+1} \right] \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_n + \Delta t [(1 - \gamma) \mathbf{a}_n + \gamma \mathbf{a}_{n+1}] \end{aligned} \quad (5.6)$$

gdje je  $\Delta t$  vremenski korak (inkrement). Kako bi se riješile nelinearne jednadžbe gibanja prvo je potrebno dobiti izraz za  $\mathbf{a}_{n+1}$  iz (5.6):

$$\mathbf{a}_{n+1} = -\frac{\frac{1}{2} - \beta}{\beta} \mathbf{a}_n - \frac{\mathbf{v}_n}{\beta \Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2 \beta} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) \quad (5.7)$$

Uvrštenjem izraza (5.7) u jednadžbe gibanja dobiva se sustav jednadžbi koji se rješava korištenjem Newton-ovog iterativnog postupka:

$$\begin{aligned} A_{e=1}^{nel} \left[ \frac{1}{(\Delta t)^2 \beta} \mathbf{M}^e + \hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{e,(i)} \right] \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(i)} &= A_{e=1}^{nel} \left[ \mathbf{f}_{n+1}^{ext,e} - \mathbf{f}_{n+1}^{int,e,(i)} - \mathbf{M}^e \mathbf{a}_{n+1}^{(i)} \right] \\ \Rightarrow \mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)} &= \mathbf{u}_{n+1}^{(i)} + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(i)} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Važno je naglasiti da je ugrađeni diskontinuitet zadržan na lokalnoj razini unutar elementa te da kondezirana matrica krutosti ostaje jednaka kao i u primjeru za kvazi-statičku analizu što omogućava dobivanje rješenja neovisnih o veličini mreže. Razvoj dinamičkog modela napravljen je kao nadogradnja statičkog modela, dodavajući doprinos inercijalne sile unutar globalnog sustava jednadžbi ravnoteže. U dinamičkim jednadžbama koriste se Newmark-ovi parametri  $\beta = \frac{1}{4}$  i  $\gamma = \frac{1}{2}$ . Parametar  $\gamma$  odražava numeričko prigušenje u sustavu te za  $\gamma = \frac{1}{2}$  nema prigušenja.

## 5.1. Analiza gubitka energije

Za dobivanje pouzdanih rezultata u analizi armirano betonskih konstrukcija izloženih dinamičkom opterećenju važno je modelirati gubitak energije uslijed pojave diskontinuiteta u armirano betonskoj konstrukciji. S obzirom da se za model ponašanja betona koristi model oštećenja, a za ponašanje armature i međudjelovanja model plastičnosti potrebno je prikazati gubitke energije i za jedan i za drugi model ponašanja materijala.

### 5.1.1. Proračun energija za model plastičnosti

Ravnoteža sustava, uključujući prvi i drugi zakon termodinamike za svaki konačni element modela plastičnosti, dana je izrazom:

$$W_{input} = E_K + E_S + \underbrace{E_P + D_P}_{E_{PF}} \quad (5.9)$$

gdje je  $W_{input}$  ukupni rad uveden u sustav kroz djelovanje vanjskih opterećenja,  $E_K$  je kinetička energija,  $E_S$  elastična energija,  $E_P$  slobodna plastična energija,  $D_P$  je disipacijska energija u plastičnom području, dok  $E_{PF}$  predstavlja disipiranu energiju loma kod nastanka pukotina.  $E_S$  i  $E_P$  predstavljaju elastične i plastične dijelove slobodne energije  $\psi^{el}$  i  $\psi^{pl}$  definirane potencijalom plastičnosti za omekšavanje (4.40) [29, 76, 77].

Izraz za ravnotežu sustava (5.9) može se napisati u diferencijalnom obliku koristeći teorem o disipaciji energije iz 2. zakona termodinamike [24]

$$\dot{D}_P = \dot{W}_{input} - \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} \psi \, d\Omega \right] - \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} e_K \, d\Omega \right] \quad (5.10)$$

gdje  $\dot{D}_P$  predstavlja prirast disipacije energije u plastičnosti.  $\dot{W}_{input}$  predstavlja prirast ulaznog rada zbog djelovanja vanjskih opterećenja. Izraz (5.10) može se zapisati tako da slobodnu energiju

razdijelimo na elastični i plastični dio, gdje  $e_S$  i  $e_P$  predstavljaju elastičnu odnosno plastičnu gustoću energije te vrijedi:

$$\dot{W}_{input} = \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} e_K d\Omega \right] + \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} e_S d\Omega \right] + \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} e_P d\Omega \right] + \dot{D}_P \quad (5.11)$$

Integracijom izraza (5.11) po vremenu dobiva se:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{t_0}^t \dot{W}_{input} dt}_{W_{input}} &= \underbrace{\int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} e_K d\Omega \right] dt}_{E_K} + \underbrace{\int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} e_S d\Omega \right] dt}_{E_S} + \underbrace{\int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} e_P d\Omega \right] dt}_{E_P} \\ &+ \underbrace{\int_{t_0}^t \dot{D}_P dt}_{D_P} \end{aligned} \quad (5.12)$$

što predstavlja ravnotežu energija za plastični model omekšavanja sa svim komponentama energija. Treba naglasiti da je disipacijska energija uvijek pozitivna, dok slobodna plastična energija nije te je ona za omekšavanje negativna. Zbroj ukupne disipacijske energije i slobodne plastične energije jednak je disipacijskoj energiji loma u plastičnosti.

Ukupna energija loma dobiva se integracijom izraza:

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma_u \exp\left(-\xi \frac{\sigma_u}{G_f}\right) d\xi \quad (5.13)$$

Rješavanjem integrala (5.13) analitički za raspon vremena od početka omekšavanja do trenutka izračuna, dobiva se disipacijska energija loma u plastičnosti:

$$E_{PF} = G_f \left( 1 - \exp\left(-\frac{\sigma_u}{G_f} \xi_c\right) \right) \quad (5.14)$$

gdje  $\xi_c$  predstavlja unutarnju varijablu omekšavanja u plastičnosti u tom trenutku.

Disipacijska energija loma u plastičnosti predstavlja površinu ispod krivulje omekšavanja te se ona koristi u izračunu gubitka energije u plastičnosti.

### 5.1.2. Proračun energija za model oštećenja

Uzimajući u obzir 1. i 2. zakon termodinamike ravnoteža sustava izražena preko energija za svaki element oštećenja može se zapisati sljedećim izrazom:

$$W_{input} = E_K + E_S + \underbrace{E_D + D_D}_{E_{DF}} \quad (5.15)$$

gdje je  $W_{input}$  ukupni rad uveden u sustav kroz djelovanje vanjskih opterećenja,  $E_K$  je kinetička energija,  $E_S$  elastična energija,  $E_D$  slobodna energija oštećenja,  $D_D$  je disipacijska energija u oštećenju, dok  $E_{DF}$  predstavlja disipacijsku energiju loma u propagaciji pukotina koje uzrokuju oštećenje materijala [37, 78].

Kao i za plastičnost na sličan način ravnoteža sustava (5.15) za oštećenje može se napisati koristeći 2. zakon termodinamike [24] kombinirajući je s disipacijskom energijom oštećenja:

$$\dot{D}_D = \dot{W}_{input} - \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} \psi \, d\Omega \right] - \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} e_K \, d\Omega \right] \quad (5.16)$$

gdje  $\dot{D}_D$  predstavlja prirast disipacije energije u procesu akumuliranja oštećenju.  $\dot{W}_{input}$  predstavlja prirast ulaznog rada zbog vanjskog opterećenja, a  $\psi$  predstavlja slobodnu energiju prikazanu izrazom (4.6). Ako se slobodna energija razdjeli na elastični dio  $e_S$  (elastična gustoća energije) i na neelastični dio zbog oštećenja te integracijom izraza (5.16) dobiva se:

$$\underbrace{\int_{t_0}^t \dot{W}_{input} \, dt}_{W_{input}} = \underbrace{\int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} e_K \, d\Omega \right] \, dt}_{E_K} + \underbrace{\int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} e_S \, d\Omega \right] \, dt}_{E_S} + \underbrace{\int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} e_D \, d\Omega \right] \, dt}_{E_D} + \underbrace{\int_{t_0}^t \dot{D}_D \, dt}_{D_D} \quad (5.17)$$

što predstavlja ravnotežu energija za model oštećenja omekšavanja sa svim komponentama energija. Ovdje, kao i kod modela plastičnosti, vrijedi da je disipacijska energija uvijek pozitivna, dok slobodna energija oštećenja ne mora biti te je ona u slučaju omekšavanja negativna. Zbroj ukupne disipacijske energije i slobodne energije oštećenja jednak je disipacijskoj energiji loma u procesu nastanka oštećenja.

Ukupna energija loma dobiva se integracijom izraza:

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma_u \exp\left(-\xi \frac{\sigma_u}{G_f}\right) d\xi \quad (5.18)$$

Analitičkim rješenjem integrala (5.18) za raspon vremena od početka omekšavanja do trenutka proračuna, dobiva se dispacijska energija loma u modelu oštećenja:

$$E_{DF} = G_f \left( 1 - \exp \left( - \frac{\sigma_u}{G_f} \xi_c \right) \right) \quad (5.19)$$

gdje  $\xi_c$  predstavlja unutarnju varijablu omekšavanja u oštećenju za taj trenutak.

Dispacijska energija loma u oštećenju kao i u plastičnosti predstavlja površinu ispod krivulje omekšavanja te se ona koristi u izračunu gubitka energije u oštećenju.

Može se primijetiti kako za proračun gubitka energije u modelu plastičnosti kao i za gubitak energije u modelu oštećenja ključnu ulogu ima unutarnja varijabla  $\xi$  koja u modelu plastičnosti predstavlja akumuliranu plastičnu deformaciju, a u modelu oštećenja ukupno oštećenja materijala te ja kao takva ireverzibilna.

## 6. NUMERIČKA VERIFIKACIJA, VALIDACIJA I PRIMJENA MODELA

Razvijeni modeli oštećenja i plastičnosti prikazani u četvrtom poglavlju koji se koriste za opisivanje ponašanja materijala implementirani su unutar istraživačke verzije računalnog koda FEAP, razvijenog od R.L.Taylor sa Sveučilišta u Kaliforniji u Berkeleyu [79] koji se koristi za numeričku analizu sljedećih primjera.

### 6.1. Tlačni test za prikaz svojstava kontinuuma diskretnim modelom zasnovanim na Voronoi poligonima

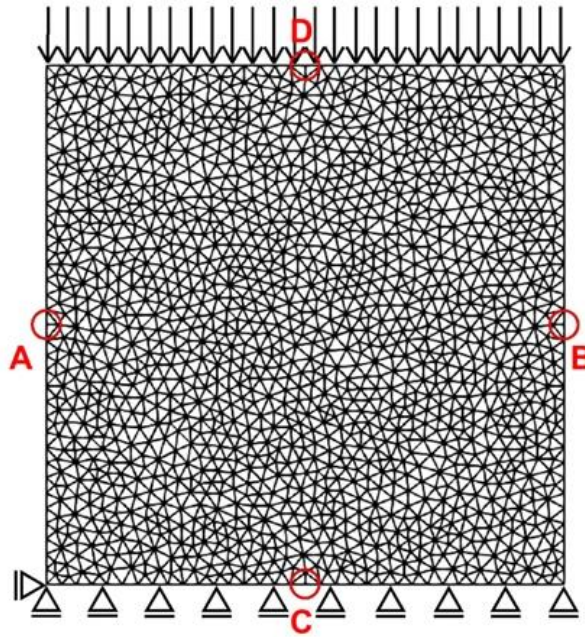
Kako bi se prikladno prikazala globalna svojstva kontinuuma (Youngov modul elastičnosti  $E$  i Poissonov koeficijent  $\nu$  za ravninsko stanje naprezanja) diskretnim modelom, napravljen je tlačni test za linearno elastično područje. Uzorak je dimenzija  $100 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$  i jedinične debljine. Globalne vrijednosti Poissonovog koeficijenta i Youngova modula elastičnosti izračunate su na temelju rezultata simulacija koristeći sljedeće izraze:

$$\nu = \frac{(u_B^x - u_A^x)/(x_B^0 - x_A^0)}{(u_D^y - u_C^y)/(y_D^0 - y_C^0)} \quad (6.1)$$

i

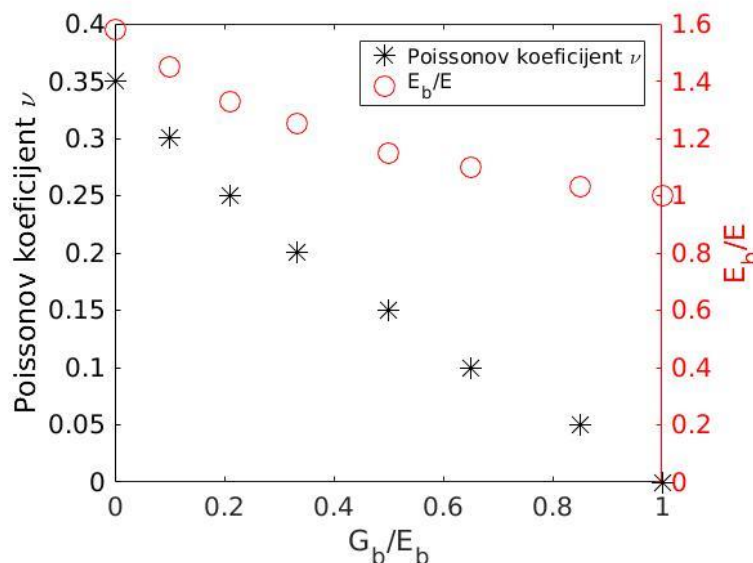
$$E = \frac{F/W}{U/H} \quad (6.2)$$

gdje su  $u_a, u_b, u_c, u_d$  pomaci, a  $x_A^0, x_B^0, y_A^0, y_B^0$  početne su koordinate točaka A, B, C, D (crtež 6.1)



Crtež 6.1 Tlačni test – uzorak s mjernim točkama

$F$  i  $U$  predstavljaju zabilježenu silu i pomak na vrhu uzorka, dok su  $W$  i  $H$  širina i visina uzorka. Kako bi se dobile odgovarajuće globalne vrijednosti  $E$  i  $\nu$  diskretnog modela za kontinuum potrebna je izmjena aksijalne i posmične krutosti odnosno modula elastičnosti i modula posmika elemenata diskretnog modela (greda) i njihovog omjera  $G_b/E_b$  [63, 80, 81]. Svejedno, ovakav diskretni model i dalje nije homogeno elastičan, ali stupanj heterogenosti je malen [56]. Treba naglasiti da su potrebni posebni iterativni postupci za dobivanje lokalnih svojstva kontinuuma ( $E, \nu$ ) ili homogene elastičnosti za nepravilnu mrežu diskretnog modela [63]. U ovom radu razmatra se jedino prikaz/izračun globalnih vrijednosti svojstava kontinuuma. Na crtežu 6.2 za odabrani iznos omjera krutosti grede  $G_b/E_b$  prikazan je izračunati Poissonov koeficijent  $\nu$  za uzorak, gdje  $G_b$  predstavlja modul posmika grede, a  $E_b$  modul elastičnosti koji definira aksijalnu krutost Timoshenkove grede u diskretnom modelu.  $E_b$  i  $G_b$  mogu se smatrati parametrima modela. Također na crtežu 6.2 prikazan je omjer modula elastičnosti  $E_b/E$  u odnosu na  $G_b/E_b$ , gdje  $E$  predstavlja izračunati modul elastičnosti. Crtež 6.2 pokazuje kako se povećanjem vrijednosti omjera  $G_b/E_b$  smanjuje Poissonov koeficijent te za  $E_b = G_b$ ,  $\nu = 0$ . Nadalje izračunati modul elastičnosti  $E$  također se smanjuje, za smanjenje vrijednosti omjera  $G_b/E_b$ . Kako bi se dobila vrijednost modula elastičnosti za kontinuum s diskretnim modelom potrebno je odrediti vrijednost modula elastičnosti grede  $E_b$  s crteža 6.2. Može se zaključiti kako prikaz elastičnih svojstva kontinuuma diskretnim modelom ovisi o odabiru grednih modula elastičnosti i posmika te njihovog omjera.



Crtež 6.2 Tlačni test – odnos između omjera modula posmika i modula elastičnosti grede te dobivenih vrijednosti za Poissonov koeficijent i modul elastičnosti

## 6.2. Primjena novog modela oštećenja – omekšavanja za analizu raspucavanja

Novi model oštećenja-omekšavanja implementiran je unutar diskretnog modela zasnovanog na Voronoi poligonima s ugrađenim jakim diskontinuitetom za analizu raspucavanja materijala. Kako bi se pokazala efikasnost tog modela, provedeni su statički i dinamički testovi.

### 6.2.1. Vlačni test za tri različite diskretizacije

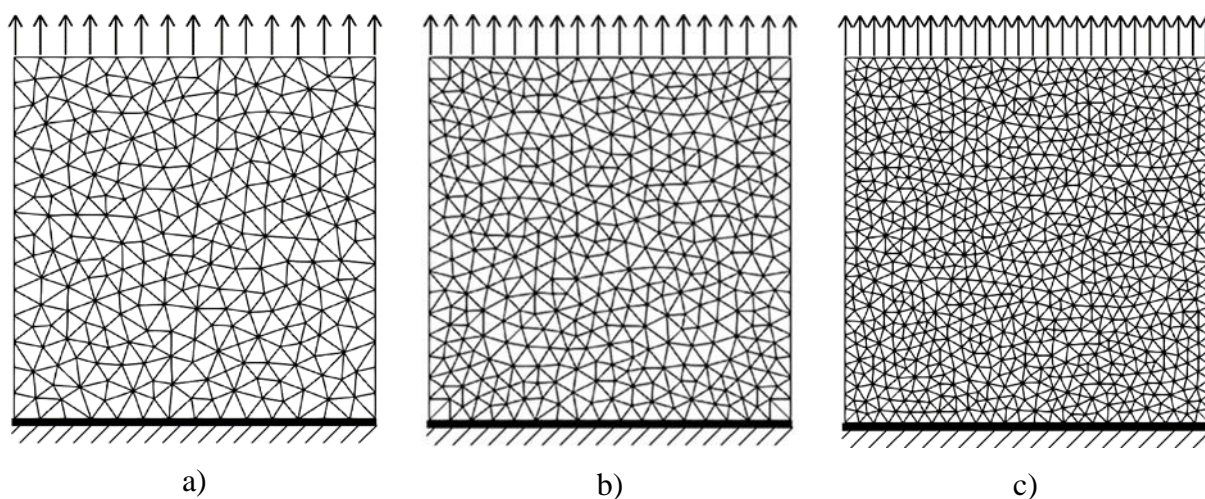
Vlačni testovi na uzorcima jednakih geometrijskih i mehaničkih svojstava koji su diskretizirani s tri različite mreže (mreža 1 – 810, mreža 2 – 1210, mreža 3 – 2570 Timoshenkovih greda) napravljen je s ciljem kako bi se ispitala sposobnost novog modela oštećenja-omekšavanja za dobivanje rješenja neovisnih o veličine mreže. Uzorci su homogeni i dimenzija  $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$  (jedinčne debljine), a svojstva uzoraka odgovaraju svojstvima kvazi-krtih materijala. Domena uzorka podijeljena je na mrežu trokuta koristeći GMSH [82] koji upotrebljava Delaunayevu triangulaciju. Način dobivanja geometrijskih svojstva Timoshenkovih greda kao kohezivnih veza između Voronoi poligana poblježe je objašnjeno u poglavlju 3. Materijalna i geometrijska svojstva te parametri modela za ispitivani uzork zadani su u tablici 6.1.



Tablica 6.1 Materijalne i geometrijske karakteristike te parametri modela za uzorak

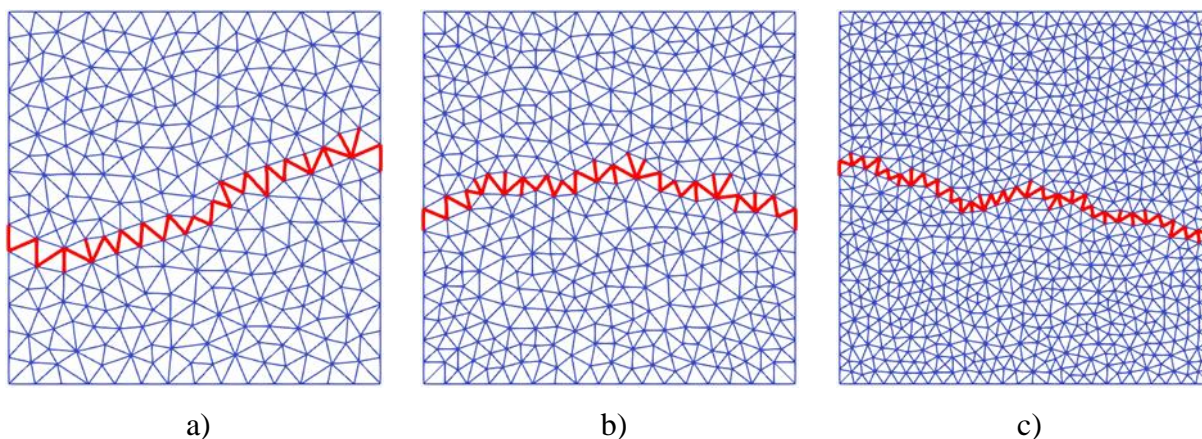
Uzorak
$E = 24 \text{ GPa}, \nu = 0.2$
$E_b = 30 \text{ GPa}, G_b = 10 \text{ GPa}$
$\sigma_{u,t} = 2 \text{ MPa}, \tau_{u,t} = 1.3 \text{ MPa}, \varphi = 0^\circ$
$G_{f,I} = 6.5 \text{ N/m}, G_{f,II} = 7 \text{ N/m}$
<i>Dimenzije uzorka: 10 cm × 10 cm × 1 cm</i>

Vrijednosti elastičnih parametara krutosti (modula elastičnosti i modula posmika) Timoshenkovih greda odabrani su kao parametri modela u skladu s crtežom 6.2 i to  $E_b = 30 \text{ GPa}$  i  $G_b = 10 \text{ GPa}$  kako bi se sačuvala materijalna svojstva kontinuuma. Sve tri mreže izložene su jednakim kontroliranim pomacima na vrhu uzorka (crtež 6.3).



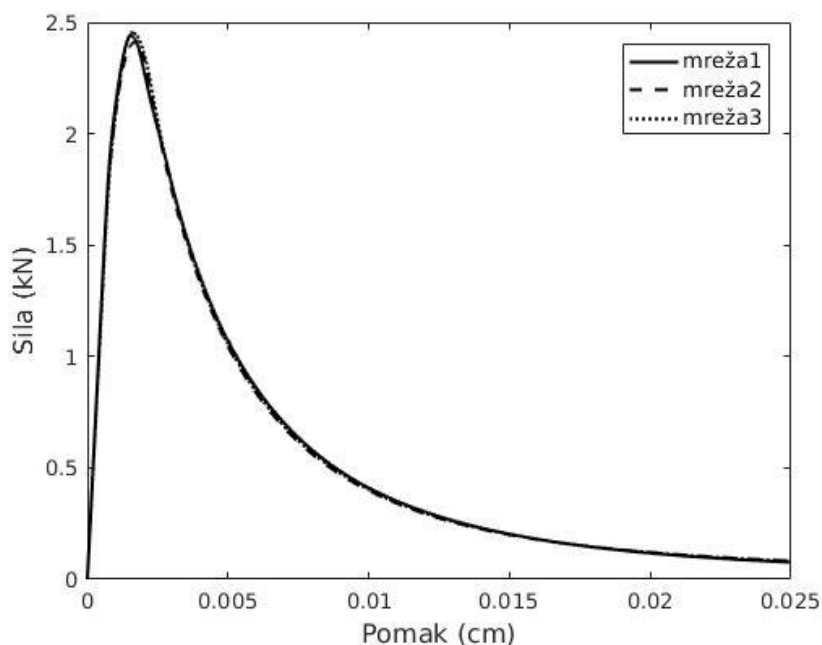
Crtež 6.3 Vlačni test: a) Mreža 1 – 811 el b) Mreža 1 – 1210 el c) Mreža 3 – 2570 el

Na crtežu 6.4 može se vidjeti nastanak makropukotina koje se postepeno šire. Geometrija pukotina je nepravilna i razlikuje se za tri mreže. Sam razlog nepravilnosti i nešto drugačiji položaj pukotine za svaku mrežu nastaje radi blago umjetno izazvane heterogenosti uzorka koja je uzrokovana računskim parametrima Timoshenkovih greda te lokalnoj preraspodjeli krutosti [43]. Iako postoje razlike u samoj geometriji pukotina, duljina pukotina gotovo je jednaka za sve tri mreže.



Crtež 6.4 Položaj makropukotina na kraju testa: a) Mreža 1 – 811 el b) Mreža 1 – 1210 el c) Mreža 3 – 2570 el

Iako se veličina mreže mijenja, širenje pukotina uzrokuje jednaku disipaciju energije što rezultira gotovo identičnom krivuljom u omekšavanju za sve tri mreže (crtež 6.5). To je posljedica ugrađenog jakog diskontinuiteta unutar formulacije konačnih elemenata, što omogućava dobivanje neovisnih rezultata u smislu izračunate vrijednosti disipacije energije.



Crtež 6.5 Vlačni test – dijagram sila – pomak – usporedba rezultata za tri mreže

### 6.2.2. Vlačni i tlačni test za heterogeni materijal

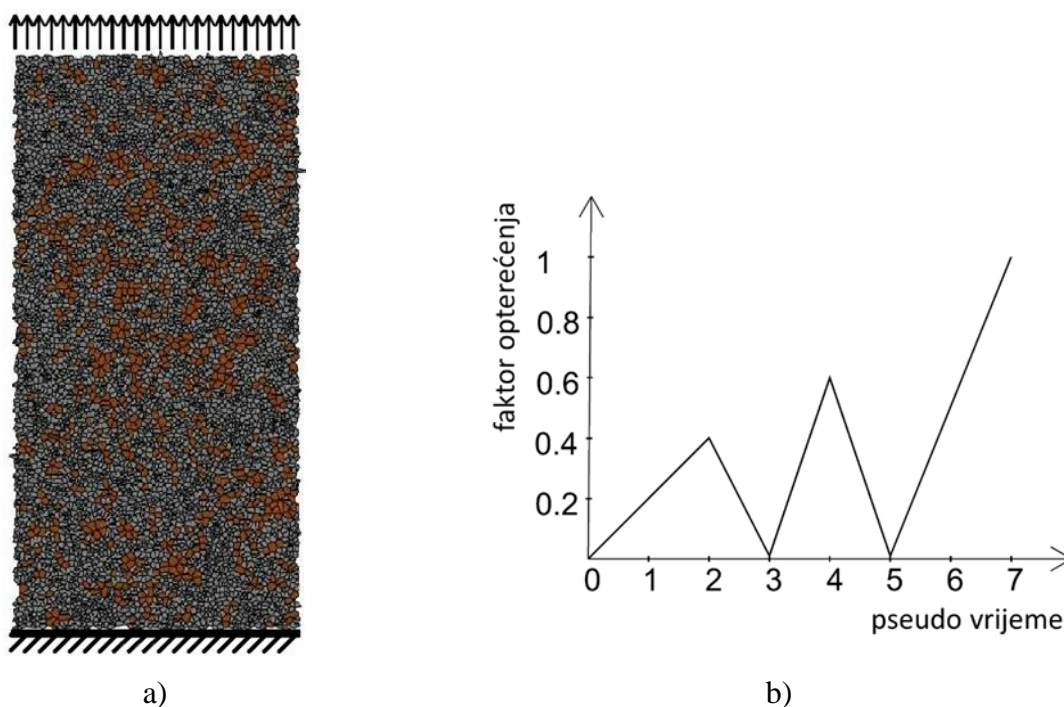
U ovom primjeru ispituje se model oštećenja-omekšavanja za analiziranje ponašanja heterogenog materijala (betona) kada dolazi do pojave pukotina. Kako bi se ispitaio model oštećenja-omekšavanja napravljeno je više numeričkih simulacija gdje je uzork opterećen vlačno, tlačno te ciklički opterećen u vlaku odnosno u tlaku. Za diskretizaciju (modeliranje) heterogenog uzorka koristi se The Poisson Random Lattice (PRL) mreža, koja je izgenerirana algoritmom definiranim u [83, 84]. Mreže slične ovoj već su korištene za proučavanje biocementnih zrnatih kompozita [85] te za proučavanje termomehaničkog ponašanja stijena [86]. Heterogeni uzorak sastoji se od dva materijala, materijal I (koji može simulirati agregat u betonskoj mješavini) i materijala II (simulira cementnu pastu). Materijal I je krući (većeg modula elastičnosti) te se ne raspucava, odnosno ponaša se linearno-elastično tijekom testa. Materijal II je mekši (manjeg modula elastičnosti) te tijekom ispitivanja dolazi do sloma u njemu što vodi do omekšavanja materijala. Raspored materijala I i II unutar uzorka odabran je koristeći slučajnu distribuciju (crtež 6.6 a), 6.9 a)). U tablici 6.2 date su materijalne karakteristike, parametri modela te geometrijske karakteristike uzorka.

Tablica 6.2 Materijalne i geometrijske karakteristike te parametri modela za heterogeni uzorak

<i>Materijal I</i>	<i>Materijal II</i>
$E = 70 \text{ GPa}, \nu = 0.2$	$E = 20 \text{ GPa}, \nu = 0.2$
$E_b = 87.5 \text{ GPa}, G_b = 29 \text{ GPa}$	$E_b = 25 \text{ GPa}, G_b = 8 \text{ GPa}$
	$\sigma_{u,c} = 40 \text{ MPa}, \sigma_{u,t} = 4 \text{ MPa}, \tau_u = 6 \text{ MPa}, \varphi = 30^\circ$
	$G_{f,I}^{(c)} = 350 \text{ N/m}, G_{f,I}^{(t)} = 2 \text{ N/m}, G_{f,II} = 300 \text{ N/m}$
<i>Dimenzije uzorka: 5 cm × 10 cm × 1 cm, 70% materijala II</i>	

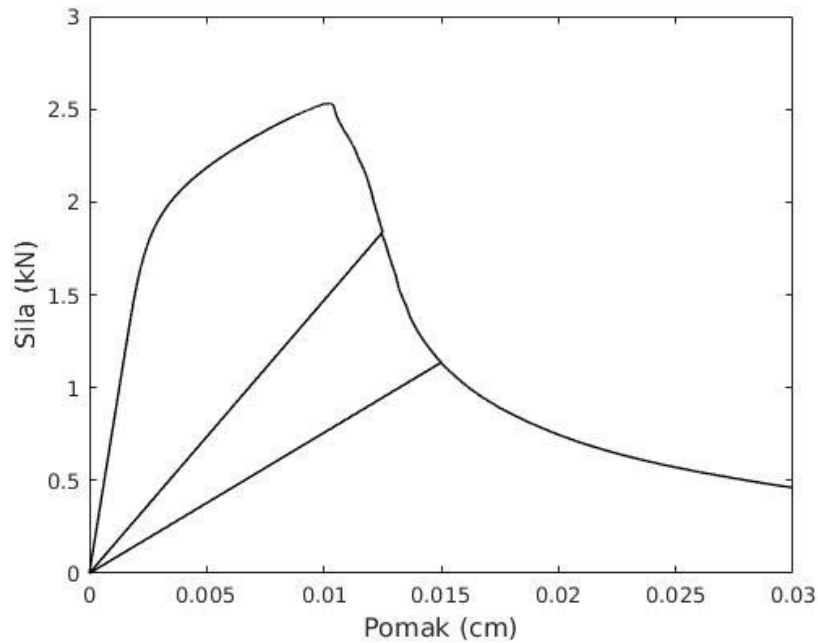
#### 6.2.2.1 Cikličko opterećenje u vlaku

Heterogeni uzorak s materijalnim i geometrijskim karakteristikama prikazanim u tablici 6.2, izložen je cikličkom opterećenju u vlaku. U simulaciji u ovom testu uzorak je izložen kontroliranim pomacima (crtež 6.6 a), b)).



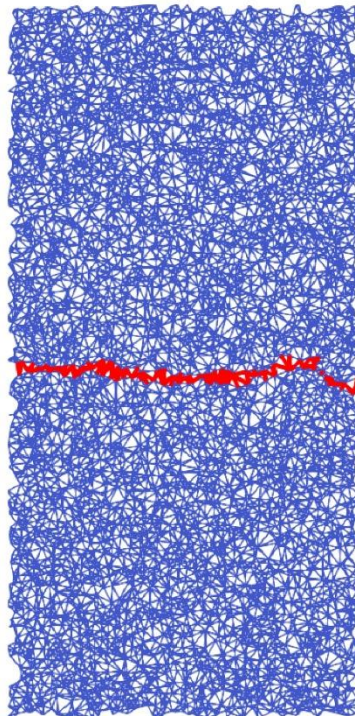
Crtež 6.6 Vlačni test: a) heterogeni uzorak – materijal I (smeđe) i materijal II (sivo), b) program opterećenja

Globalni odgovor uzorka, prikazan kroz dijagram sila – pomak prikazan je na crtežu 6.7. Ciklus kompletnog rasterećenja odnosno ponovnog opterećenja proveden je dva puta te je zabilježen mehanizam zatvaranja pukotina. U trenutku kada se uzorak rastereti sve do početne pozicije, dolazi do kompletnog zatvaranja pukotine, što je kontrolirano varijablom skoka u polju pomaka  $\alpha$ . Ponovno opterećenje uzrokuje otvaranje iste pukotine u oštećenom uzorku. Novi ciklus opterećenja ovisan je o smanjenoj krutosti materijala te prati inverznu vrijednost modula popustljivosti.



Crtež 6.7 Vlačni test – dijagram sila – pomak

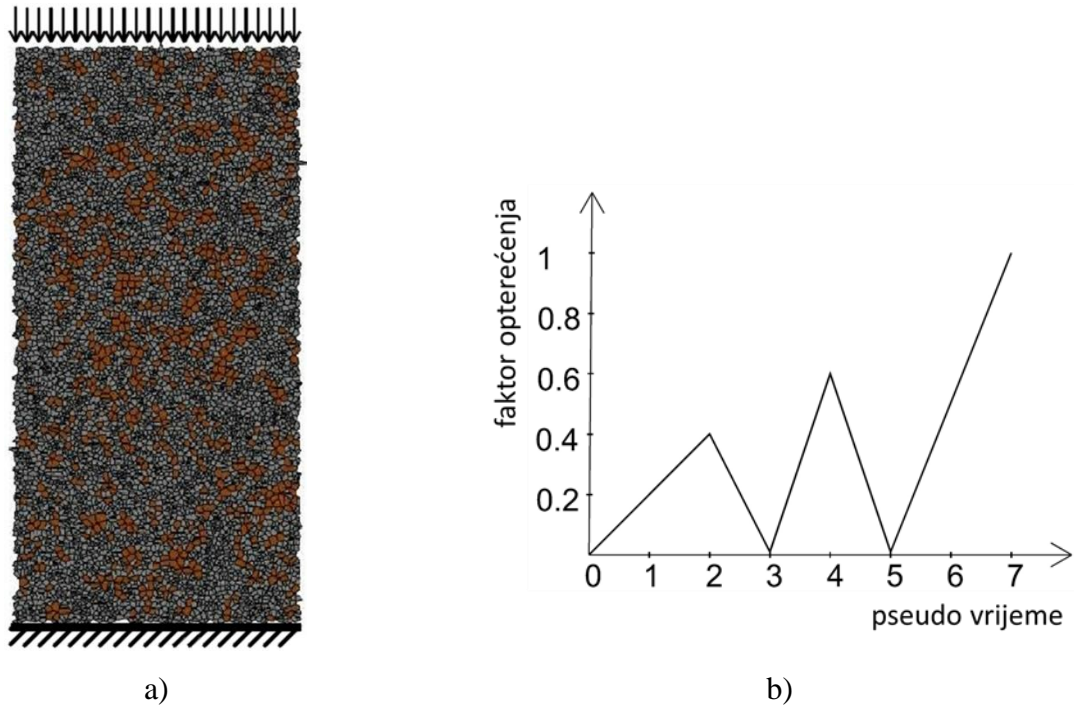
Na crtežu 6.8 može se vidjeti prikaz pukotina u uzorku na kraju testa, elementi za koje je varijabla oštećenja  $\xi$  različita od nule prikazani su crvenom bojom. Varijabla  $\xi$  predstavlja akumulirano oštećenje od početka simulacije. Primjećuje se dominantna pukotina, koja je položena u smjeru okomitome na smjer opterećenja. Lom u modu I dominantan je u vlačnom testu.



Crtež 6.8 Vlačni test – prikaz oštećenja uzorka na kraju testa

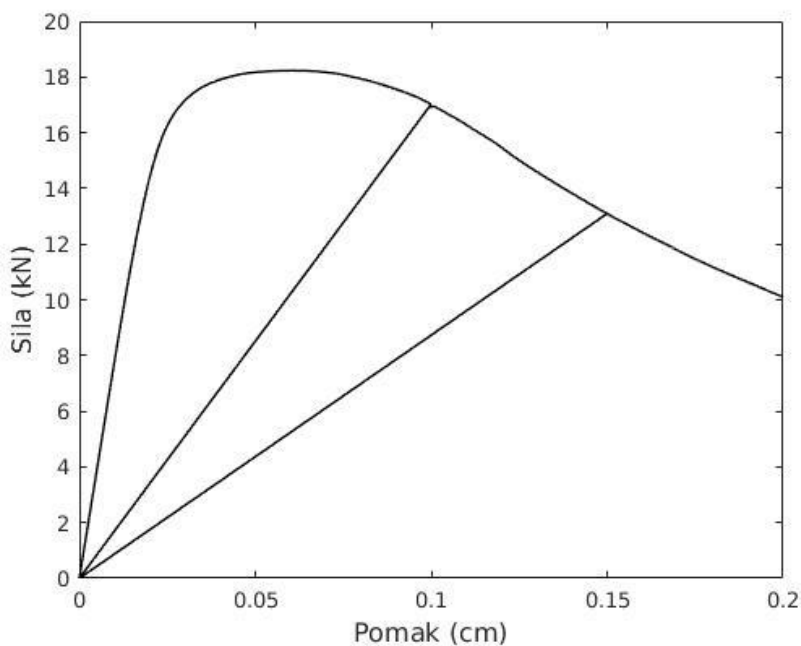
### 6.2.2.2 Cikličko opterećenje u tlaku

U ovom numeričkom testu uzorak jednakih mehaničkih i geometrijskih svojstava kao u primjeru 6.2.2.1 (tablica 6.2) izložen je cikličkom opterećenju u tlaku. U ovoj simulaciji uzorak je izložen kontroliranim pomacima kako je prikazano na crtežu 6.9 a), b).



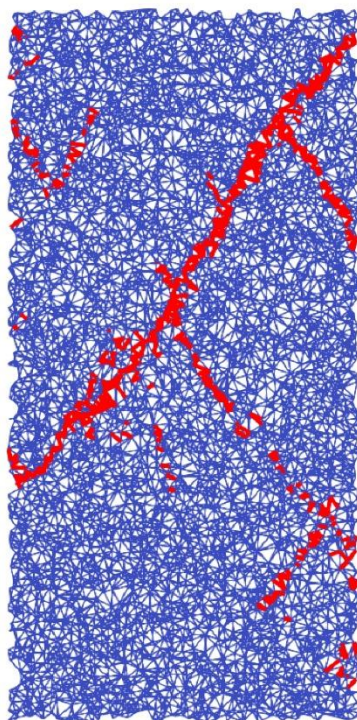
Crtež 6.9 Tlačni test: a) heterogeni uzorak – materijal I (smeđe) i materijal II (sivo), b) program opterećenja

U odnosu na vlačni test, u tlačnom testu primjećuje se kako je područje razvoja pukotine izraženije, kao i što je izraženija i ukupna otpornost uzorka za slom u tlaku (crtež 6.10). Razlog tome može se potražiti u činjenici da je dominantan lom materijala u modu II popraćen mehanizmom trenja. Kao i kod vlačnog testa i ovdje se vidi mehanizam otvaranja i zatvaranja pukotina za cikličko opterećenje i rasterećenje.



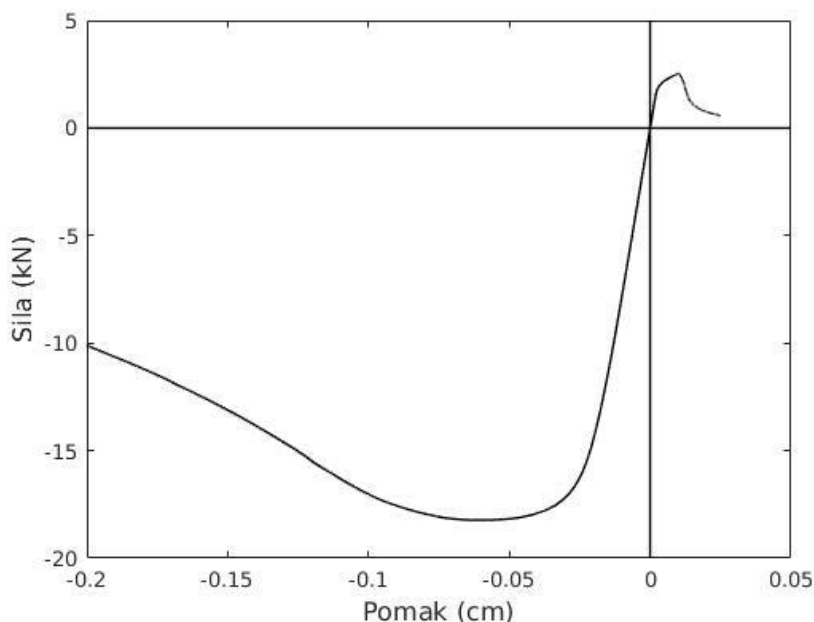
Crtež 6.10 Tlačni test – dijagram sila – pomak

U tlačnom testu nastaje više makropukotina koje se spajaju u jednu dominantnu dijagonalnu makropukotinu koja vodi do sloma uzorka (crtež 6.11). Elementi za koje je varijabla oštećenja  $\xi$  različita od nule prikazani su crvenom bojom. Iako je naglašeniji lom u modu II, također dolazi do loma u modu I.



Crtež 6.11 Tlačni test – prikaz oštećenja uzorka na kraju testa

Na crtežu 6.12 vide se globalni odgovori uzorka za vlačno te tlačno opterećenje, gdje omjer čvrstoća za tlak/vlak iznosi 7.3. To je posljedica implementacije Mohr-Coulombovog zakona kojim se povećava posmična čvrstoća elemenata kao posljedica povećanja kuta unutarnjeg trenja.

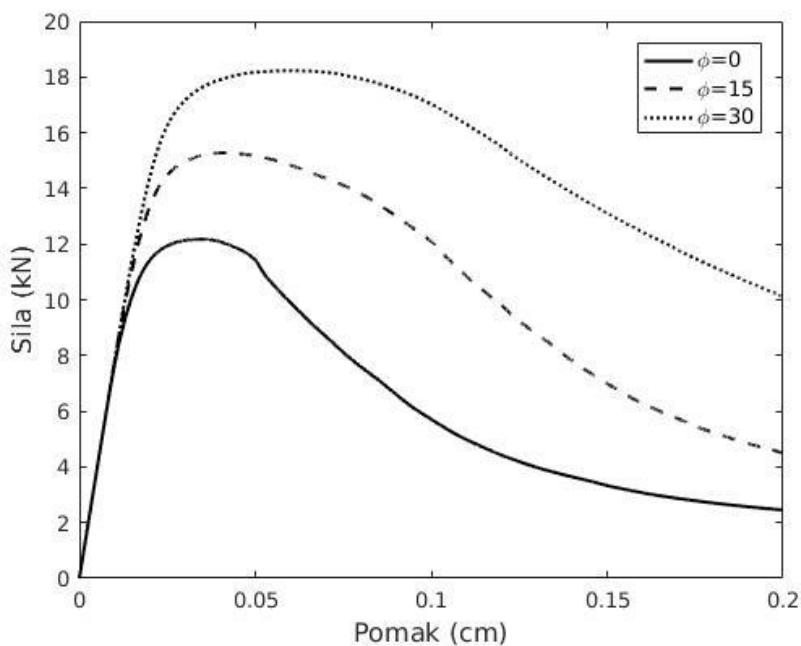


Crtež 6.12 Usporedba rezultata sila – pomak dobivenih za monotono vlačno opterećenje i monotono tlačno opterećenje heterogeni uzorak s rezultatima dobivenim za monotono tlačno opterećenje heterogeni uzorak

### 6.2.2.3 Tlačni test za različite kuteve unutarnjeg trenja

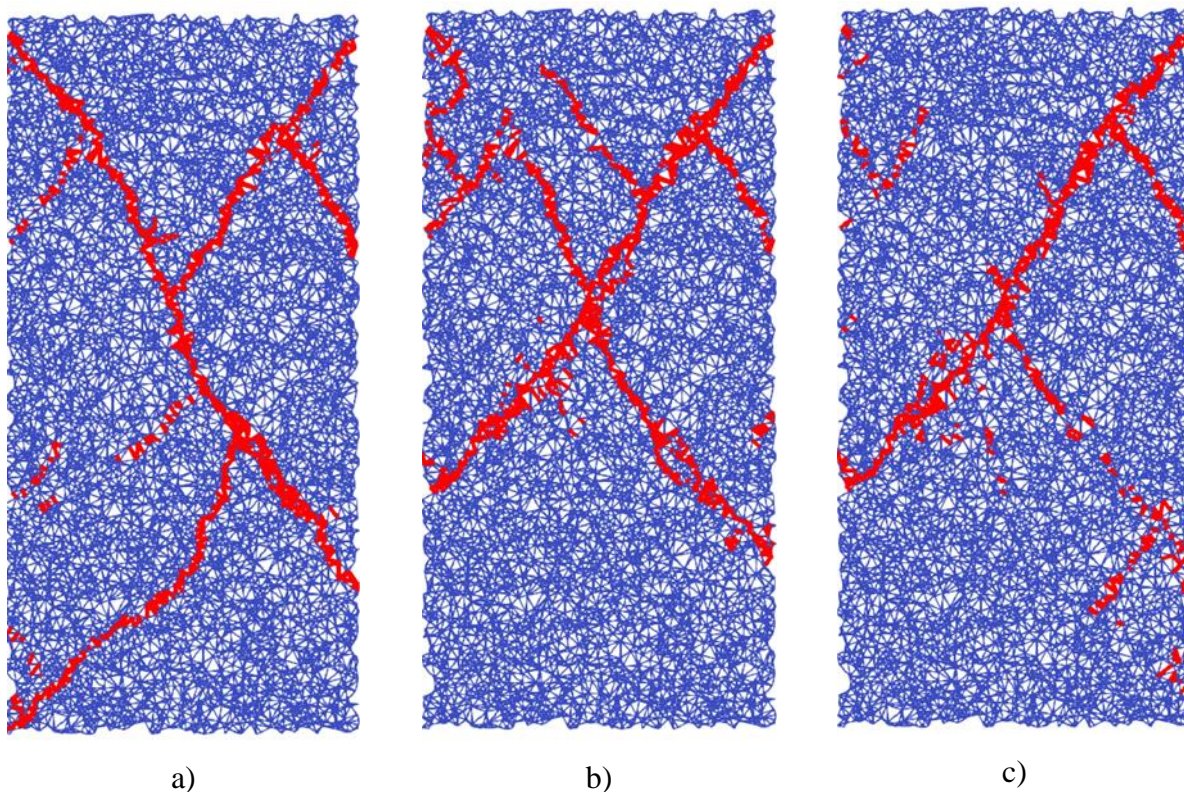
Posljednji test za heterogeni uzorak je tlačni test za tri različita kuta unutarnjeg trenja. Sva tri uzorka imaju jednaka geometrijska i mehanička svojstva prikazana tablicom 6.2 i pod utjecajem su jednakih kontroliranih pomaka. Jedina razlika je kut unutarnjeg trenja te energija loma za mod II i oni iznose  $\phi = 0^\circ$ ,  $G_{f,II} = 40 \text{ N/m}$ ,  $\phi = 15^\circ$ ,  $G_{f,II} = 100 \text{ N/m}$ ,  $\phi = 30^\circ$ ,  $G_{f,II} = 300 \text{ N/m}$ . Crtežom 6.13 prikazan je dijagram sila – pomak za svaki uzorak te se može zapaziti kako se povećanjem kuta unutarnjeg trenja povećava sila što proizlazi iz povećanja posmične čvrstoće elemenata implementacijom Mohr–Coulombova zakona unutar materijalnog modela oštećenja.





Crtež 6.13 Ovisnost sila – pomak za tlačni test za tri različita kuta unutarnjeg trenja

Na crtežu 6.14 prikazane su pukotine na kraju ispitivanja za svaki uzorak te je vidljivo kako za manji kut unutarnjeg trenja veće je raspucavanje i stvaranje više makropukotina što je povezano s manjom posmičnom čvrstoćom uzorka.

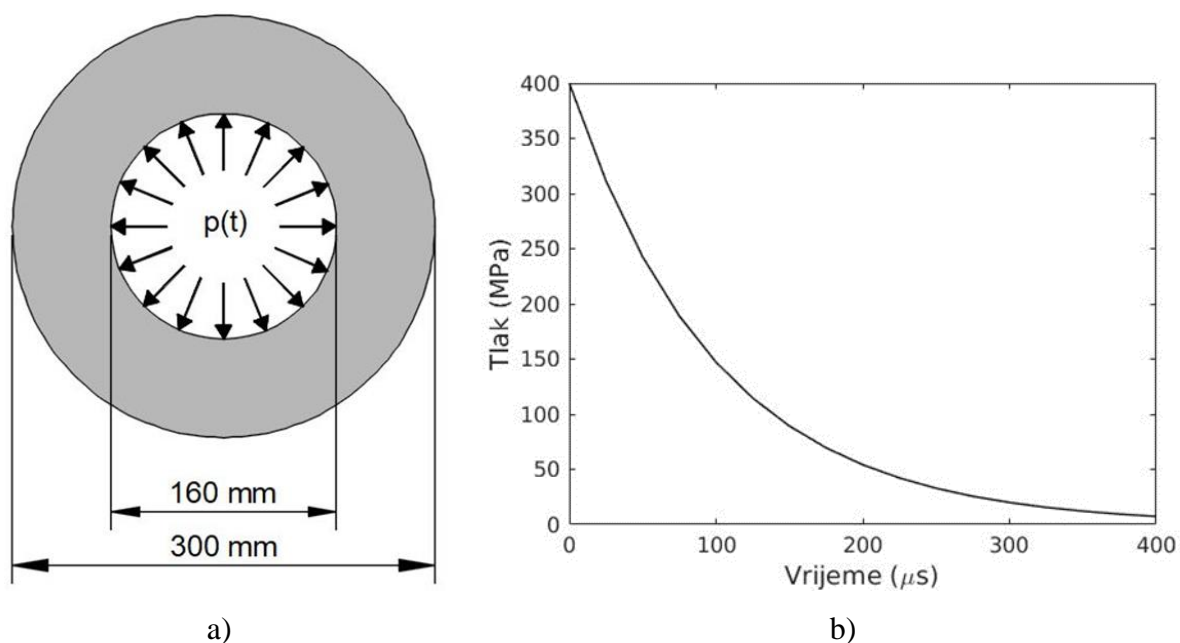


Crtež 6.14 Prikaz pukotina na kraju tlačnog testa za tri različita kuta unutarnjeg trenja –

a)  $\phi = 0^\circ$ , b)  $\phi = 15^\circ$ , c)  $\phi = 30^\circ$

## 6.2.3. Fragmentacija valjka s debelom stijenkom

Posljednji test u kojem se ispituje novi model oštećenja-omekšavanja je dinamički test fragmentacije valjka s debelom stijenkom. U tom testu valjak s debelom stijenkom izložen je impulsnom tlačnom opterećenju (crtež 6.15 a)). Ovaj problem već su obrađivali neki autori koristeći različite numeričke metode [87–90]. Unutarnji i vanjski radijusi valjka su 80 mm i 150 mm. Unutarnji pritisak na valjak eksponencijalno se smanjuje u vremenu te je definiran izrazom  $p(t) = p_0 e^{-t/t_0}$ , gdje je  $p_0 = 400 \text{ MPa}$ , a  $t_0 = 100 \mu\text{s}$ . Odnos promjene opterećenja u vremenu prikazan je crtežom 6.15 b). Materijalna i geometrijska svojstva valjka te parametri modela zadani su u tablici 6.3.

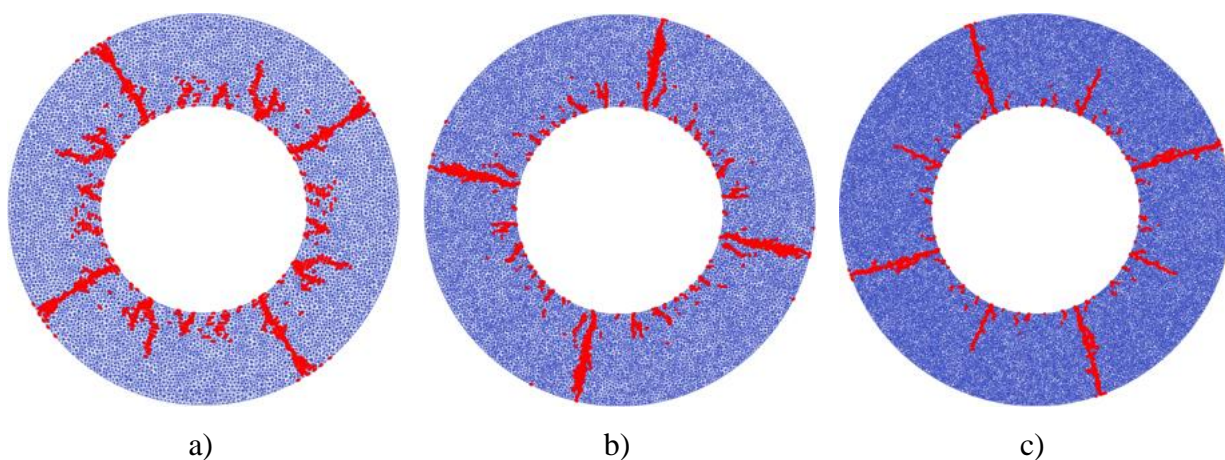


Crtež 6.15 Fragmentacija valjka s debelom stijenkom – geometrija i opterećenje

Tablica 6.3 Materijalne karakteristike te parametri modela za valjak s debelom stijenkom

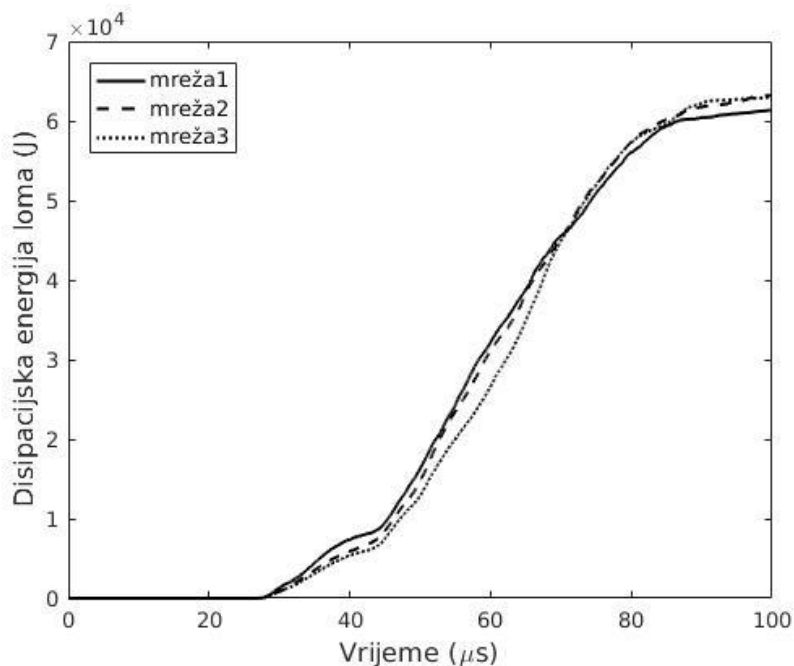
Čelični valjak s debelom stijenkom
$E = 210 \text{ GPa}, \nu = 0.3, \rho = 7850 \text{ kg/m}^3$
$E_b = 305 \text{ GPa}, G_b = 30.5 \text{ GPa}$
$\sigma_{u,t} = 1 \text{ GPa}, \tau_u = 1 \text{ GPa}, \varphi = 0^\circ$
$G_{f,I}^{(t)} = 50000 \text{ N/m}, G_{f,II} = 50000 \text{ N/m}$

U ovom testu korištene su tri mreže različite veličine i to redom Mreža 1, Mreža 2, Mreža 3 modelirane s 22616, 33388 i 50720 Timoshenkovih greda. Crtež 6.16 pokazuje raspucavanje valjaka na kraju testu. Kao što se može primijetiti s crteža 6.16 fragmentacija valjka za sve tri mreže je slična. U stvari jednak je broj fragmenata (četiri) kao rezultat višestrukog formiranja i širenja pukotina. Jedina razlika među mrežama je to, što su fragmenti za različite mreže međusobno zarotirani jedni u odnosu na druge. Ovo se može pripisati blagoj razlici na mikrostrukturnoj razini uzorkovanoj elementima diskretnog modela (parametrima Timoshenkovih greda) te lokalnoj preraspodjeli krutosti [43] gdje pukotine propagiraju kroz najslabije vezne elemente.



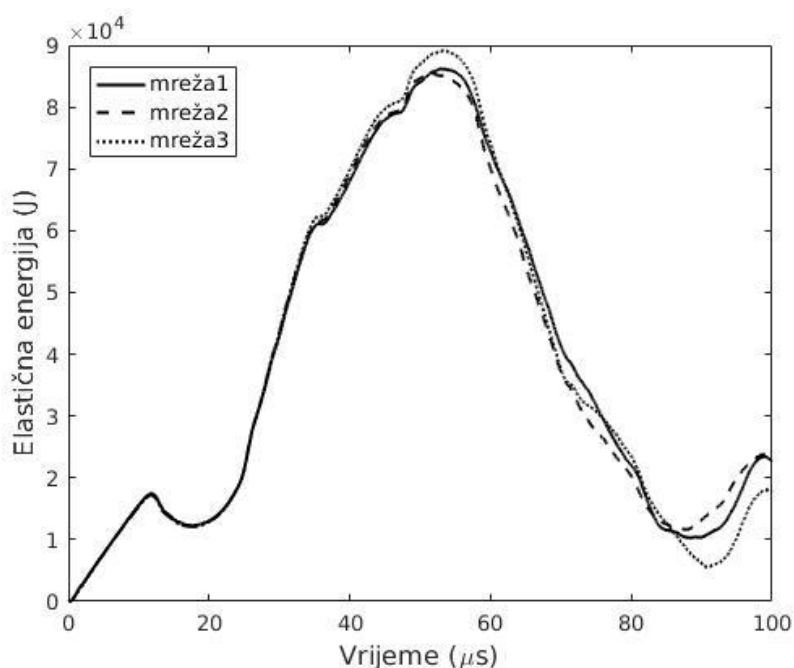
Crtež 6.16 Fragmentacija valjka s debelom stijenkom – pukotine valjka na kraju testa za diskretizaciju s a) 22616 el, b) 33388 el, c) 50720 el

Proces fragmentacije u valjku započinje za vrijeme približno jednako  $30\mu\text{s}$  s velikim brojem malih pukotina od kojih se neke zaustave sa širenjem, dok ostale propagiraju do vanjskog ruba valjka. Proces fragmentacije završava za vrijeme približno jednako  $90\mu\text{s}$ . Količine disipirane energije loma za svaku mrežu prikazane su na crtežu 6.17 te se vidi kako su ti iznosi vrlo sličnih vrijednosti. Razlog tome leži u ugradnji jakog diskontinuiteta i obogaćenju polja pomaka što omogućava da mehanizmi loma ostaju lokalizirani unutar oštećenog elementa, čime je postignuto dobivanje neovisnog odgovora za omekšavanje materijala.



Crtež 6.17 Fragmentacija valjka s debelom stijenkom – disipacijska energija loma

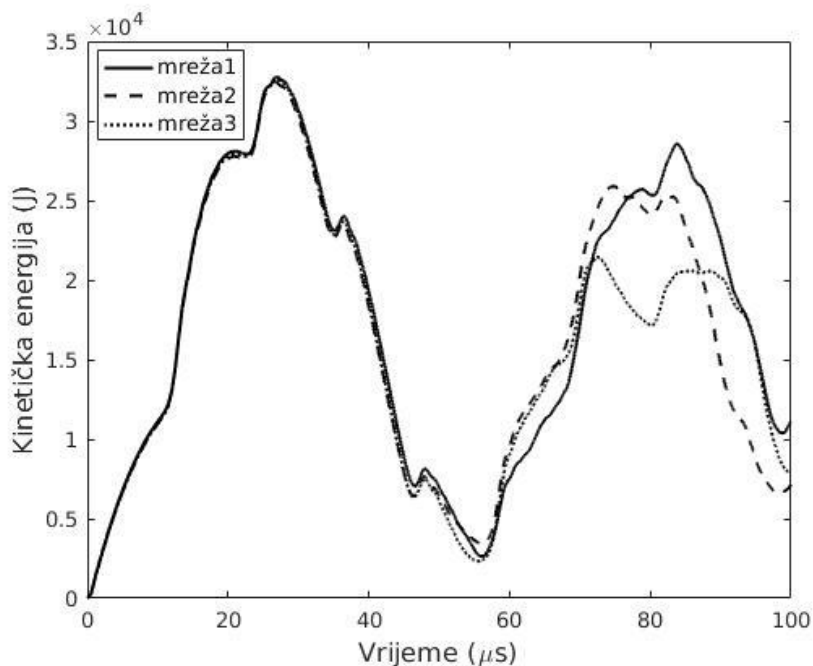
Elastična energija izračunata je iz elastičnih deformacija te se vidi na crtežu 6.18, kako sve tri analizirane mreže rezultiraju sličnim rješenjima za zadani vremenski interval opterećivanja.



Crtež 6.18 Fragmentacija valjka s debelom stijenkom – elastična energija

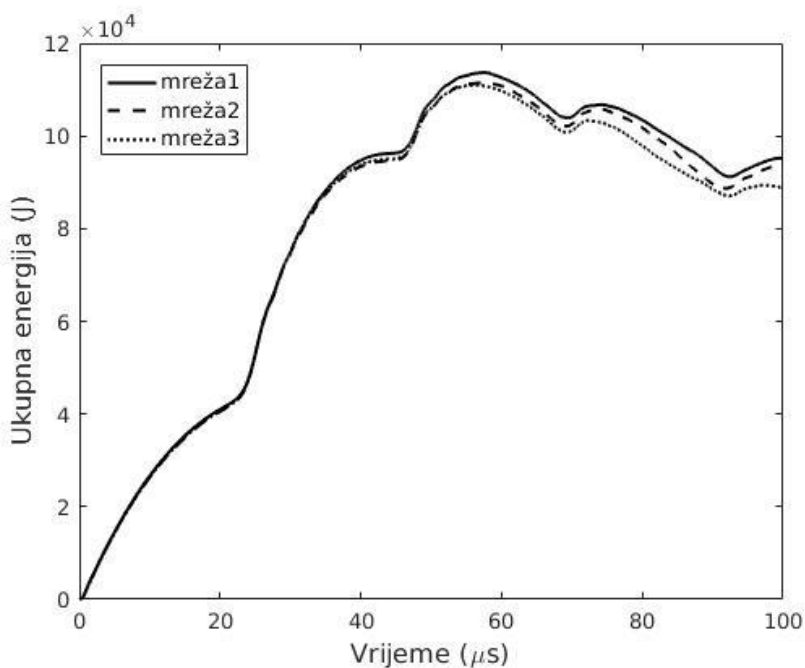
Na crtežu 6.19 prikazani su iznosi kinetičke energije ovisni o vremenu za sve tri mreže, gdje je kinetička energija definirana izrazom  $E_k = \frac{1}{2} \mathbf{v}_{n+1} \mathbf{M} \mathbf{v}_{n+1}$ , gdje je  $\mathbf{v}$  vektor brzina, a  $\mathbf{M}$  matrica masa. Zbog heterogenosti mreže i lokalne preraspodjele krutosti došlo je do drukčijeg mehanizma

loma za promatrane mreže [43], a samim time i do različitih brzina širenja udarnog opterećenja za svaku pojedinu mrežu.



Crtež 6.19 Fragmentacija valjka s debelom stijenkom – kinetička energija

Za kraj prikazana je ukupna energija kao zbroj disipacijske, elastične i kinetičke energije koja je jednaka ukupnom radu vanjskih sila na valjak (crtež 6.20), gdje se mogu vidjeti blaga odstupanja rezultata za promatrane mreže.



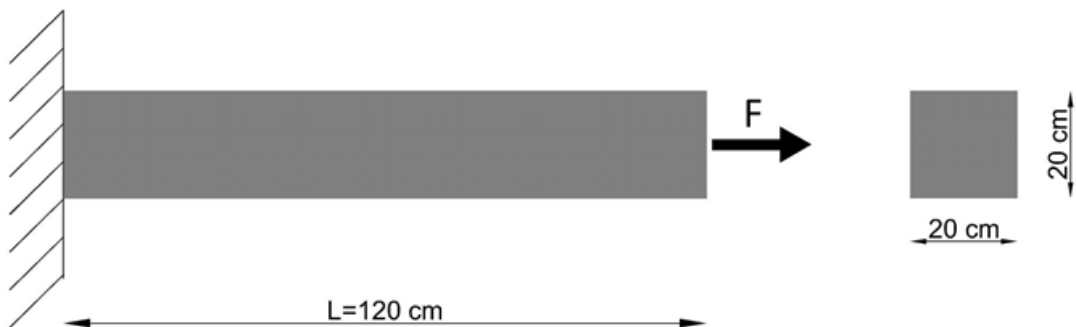
Crtež 6.20 Fragmentacija valjka s debelom stijenkom – ukupna energija

### 6.3. Linearna analiza armirano betonskih konstrukcija

Kako bi se validirala točnost diskretnog modela zasnovanog na Voronoi poligonima za analizu ponašanja armirano betonskih konstrukcija u linearno elastičnom području, rezultati numeričkih simulacija dobiveni tim modelom uspoređeni su s analitičkim rezultatima, rezultatima dobivenim koristeći pravila miješanih metoda (ROM) [91, 92] te s rješenjima dobivenim programskim paketom ANSYS [93] gdje je korišten model kontinuuma zasnovan na 3D konačnim elementima. U prvom i drugom primjeru napravljeni su vlačni testovi, a u trećem i četvrtom napravljeni su testovi na savijanje za betonsku i armirano betonsku gredu.

#### 6.3.1. Vlačni test betonske konzolne grede

U ovom primjeru analizirana je betonska konzolna greda raspona 120 cm, dimenzija 20/20 cm opterećena monotono rastućim uzdužnim opterećenjem, prikazana na crtežu 6.21 s karakteristikama materijala te parametrima modela prikazanim u tablici 6.4.

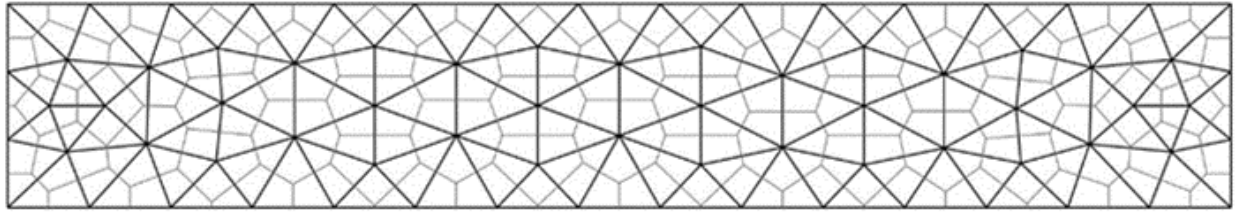


Crtež 6.21 Vlačni test betonske konzolne grede – geometrija i opterećenje

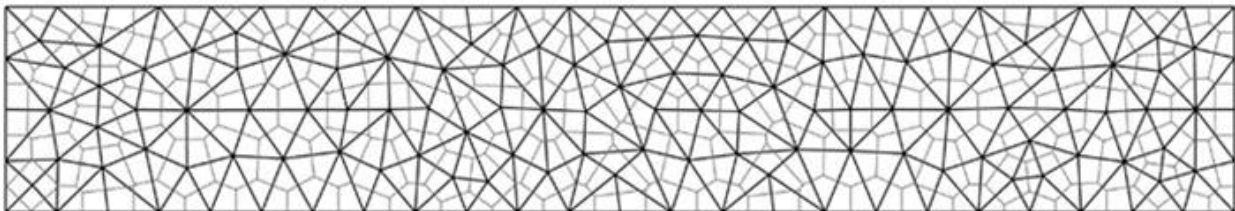
Tablica 6.4 Vlačni test: materijalne karakteristike te parametri modela betonske grede

Beton	
$E_c = 31400 \text{ MPa}$	$\nu = 0.2$
$E_b = 39250 \text{ MPa}$	$G_b = 13083.33 \text{ MPa}$

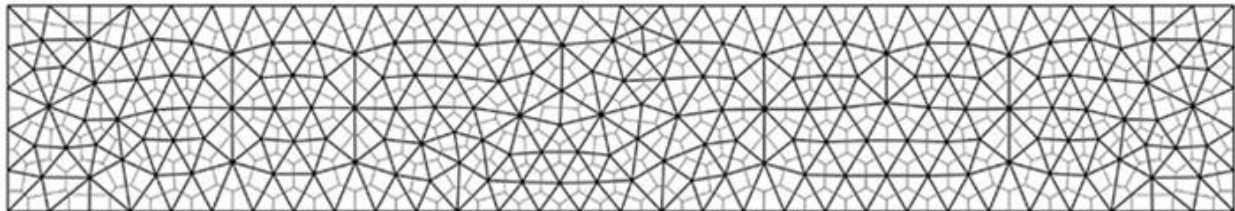
Konzolna greda diskretizirana je s tri mreže različite gustoće i to s mrežom 1 koja sadrži 189 Timoshenkovih greda, mrežom 2 od 394 Timoshenkovih greda te s mrežom 3 od 608 Timoshenkovih greda (crtež 6.22) kako bi se pokazala neovisnost rješenja diskretnog modela o gustoći mreže.



a)



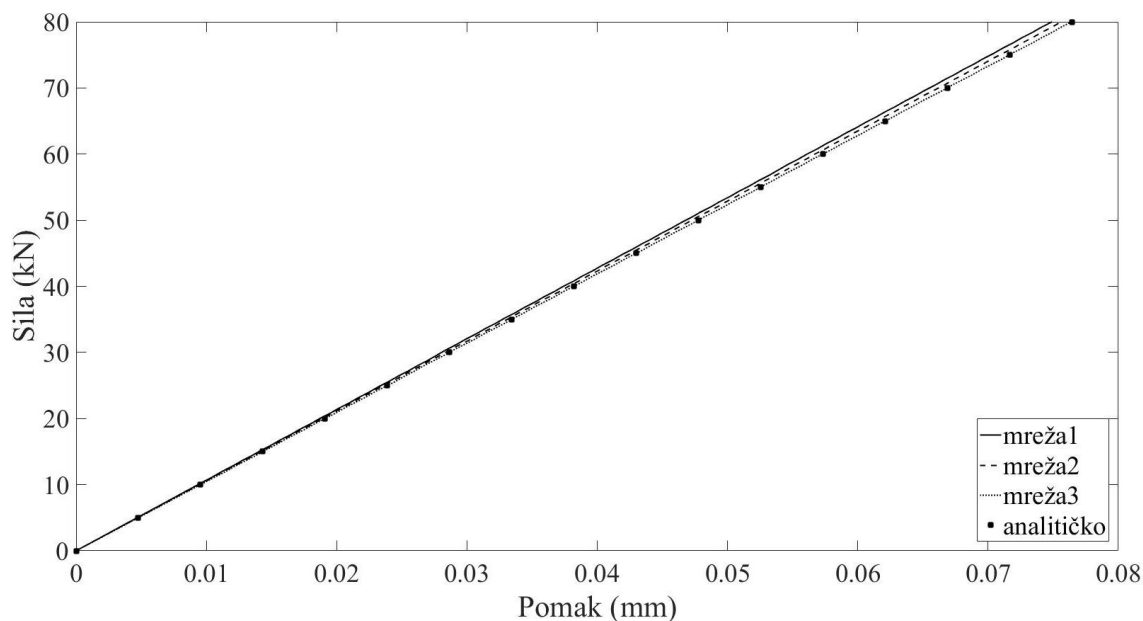
b)



c)

Crtež 6.22 Vlačni test – diskretizacija betonske grede: a) mreža 1 (189 el) b) mreža 2 (394 el) c) mreža 3 (608 el)

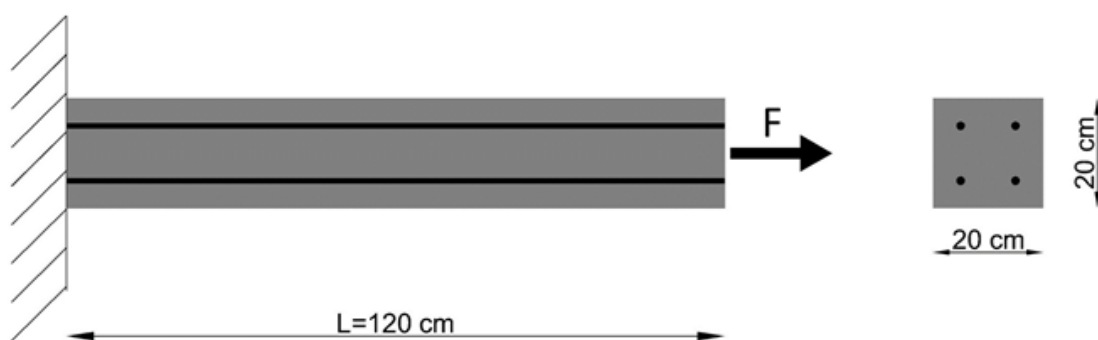
Na crtežu 6.23 prikazane su usporedbe analitičkog i numeričkih rješenja za uzdužnu vlačnu silu i produljenje grede za tri mreže različite gustoće. Može se primijetiti kako sve tri mreže daju slične rezultate, a rezultat najfinije mreže gotovo se poklapa s analitičkim rezultatom.



Crtež 6.23 Vlačni test betonska greda – sila – produljenje

### 6.3.2. Vlačni test armirano betonske konzolne grede

Kako bi se validirao diskretni model za analizu ponašanja armiranog betona u linearno-elastičnom području provedena je analiza armirano betonske konzole raspona 120 cm, poprečnog presjeka 20/20 cm, armirane sa  $4\Phi 12$  koja je izložena monotono rastućem vlačnom opterećenju (crtež 6.24). Svojstva materijala te parametri modela prikazani su u tablici 6.5.



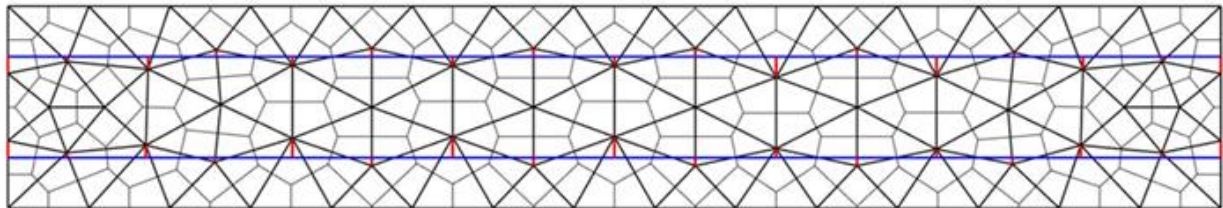
Crtež 6.24 Vlačni test armirano betonske konzolne grede – geometrija i opterećenje



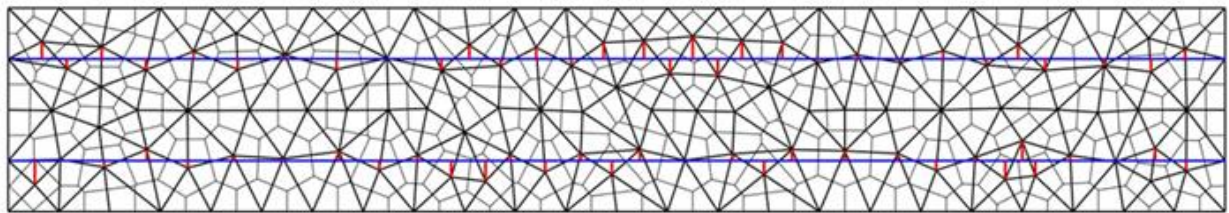
Tablica 6.5 Vlačni test: materijalne karakteristike te parametri modela za armirano betonsku gredu

Beton	Čelik	Vezni elementi
$E_c = 31400 \text{ MPa}, \nu = 0.2$	$E_s = 210000 \text{ MPa}, \nu = 0.3$	
$E_b = 39250 \text{ MPa},$ $G_b = 13083.33 \text{ MPa}$	$E_b = 210000 \text{ MPa},$ $G_b = 80769.23 \text{ MPa}$	$E_b = 70000 \text{ MPa},$ $G_b = 15000 \text{ MPa}$

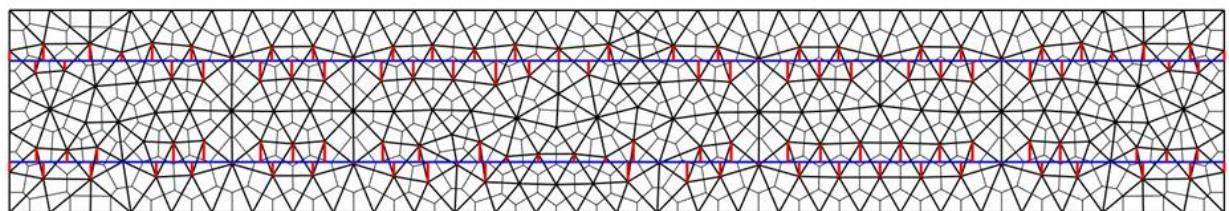
U ovom testu armirano betonska konzola diskretizirana je s tri mreže različite gustoće kako bi se analizirala neovisnost rješenja o gustoći mreže. Diskretizacija betona je napravljena je koristeći mreže iz prethodnog primjera. U svaku postojeću betonsku mrežu koja diskretizira betonsku konstrukciju, ugrađene su četiri čelične šipke te su dobivene nove mreže (mreža 1 – 255 el, mreža 2 – 526 el, mreža 3 – 840 el) koje sadrže nove elemente (čelične i vezne elemente) također modelirane koristeći Timoshenkove grede što se može vidjeti na crtežu 6.25.



a)



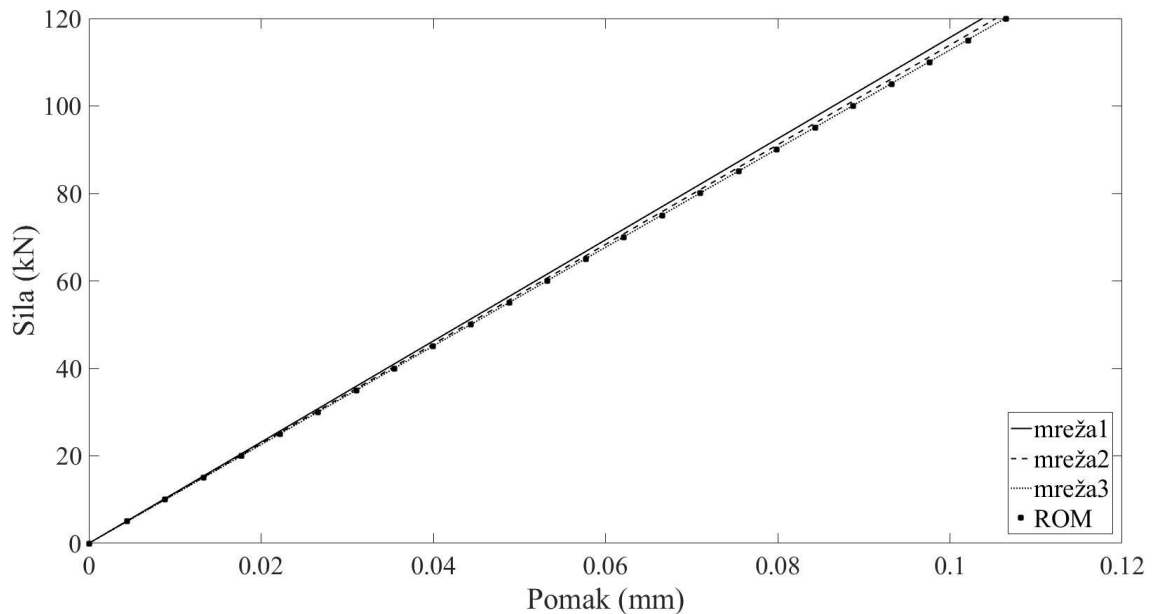
b)



c)

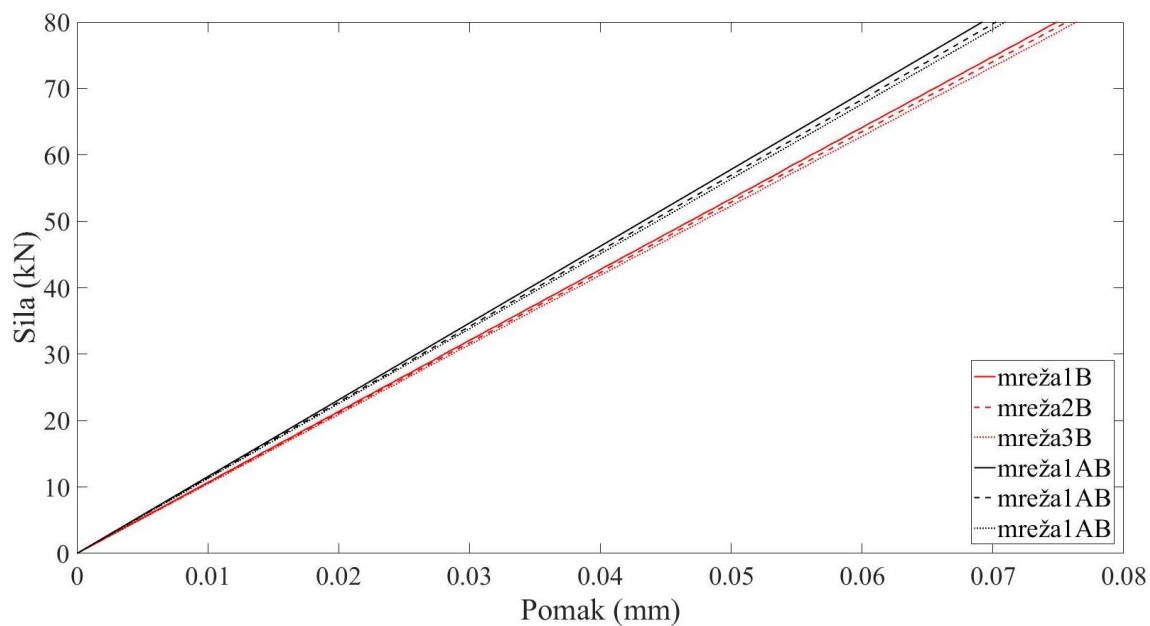
Crtež 6.25 Vlačni test – diskretizacija armirano betonske grede: a) mreža 1 (255 el) b) mreža 2 (526 el) c) mreža 3 (840 el)

Kako bi se validiralo ponašanje armirano betonske grede, korištena je miješana metoda (ROM). To je jednostavan i poprilično točan način odabira/izračuna modula elastičnosti za kompozite zasnovan na volumenskom udjelu komponenti kompozita (tj. vlakana/armature, matrice/betona) i njihovih modula elastičnosti osobito kada su vlakna (šipke armature) položena u smjeru djelovanja opterećenja. Modul elastičnosti kompozita (armiranog betona) dobiven metodom (ROM) korišten je za dobivanje horizontalnog pomaka grede. Mogu se primijetiti vrlo zadovoljavajući rezultati diskretnog modela u usporedbi s rezultatom dobivenim koristeći pravila miješane metode (crtež 6.26). Rezultati za sve tri mreže su vrlo slični i pokazuju veliku podudaranost s rezultatom dobivenim koristeći ROM.



Crtež 6.26 Vlačni test armirano betonska greda – sila – produljenje

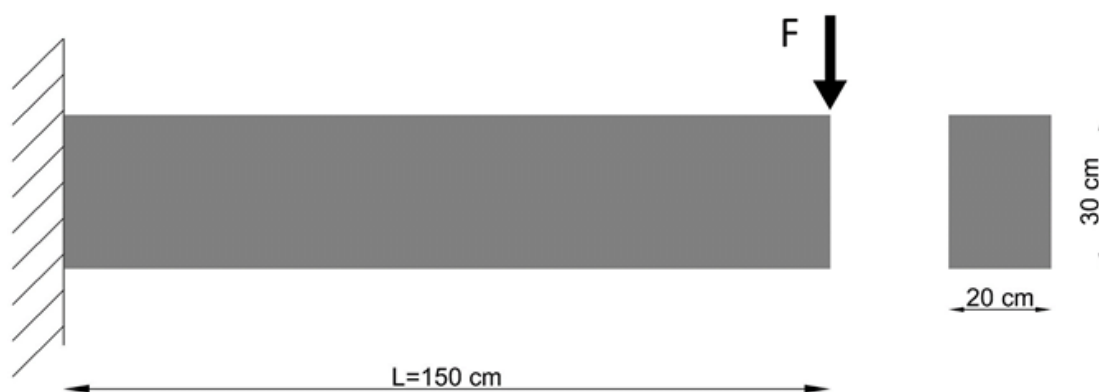
Sa crteža 6.27 može se vidjeti kako se dodavanjem novih elemenata (čeličnih i veznih) u diskretizacijsku mrežu betonske konstrukcije postiže dodatna krutost grede, jer veznim elementima povezuju se čvorovi betona i armature i omogućava se prijenos naprezanja između armature i betona. To je vidljivo u povećanju nagiba pravca sila – produljenje. Također može se primijetiti kako i kod betonske i kod armirano betonske grede imamo ekvivalentna rješenja gdje za grublju mrežu dobijamo nešto krući odgovor, u odnosu na srednju odnosno na finiju mrežu.



Crtež 6.27 Vlačni test betonska i armirano betonska greda – sila – produljenje

### 6.3.3. Betonska konzola opterećena na savijanje

U ovom primjeru betonska konzolna greda raspona 150 cm, dimenzija 20/30 cm opterećena je monotono rastućom koncentriranom silom na rubu nosača, prikazanom na crtežu 6.28 s karakteristikama materijala te parametrima modela prikazanim u tablici 6.6.

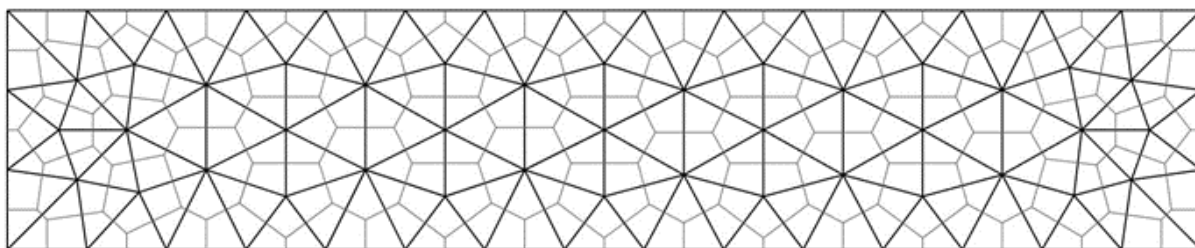


Crtež 6.28 Test savijanjem betonska greda – geometrija i opterećenje

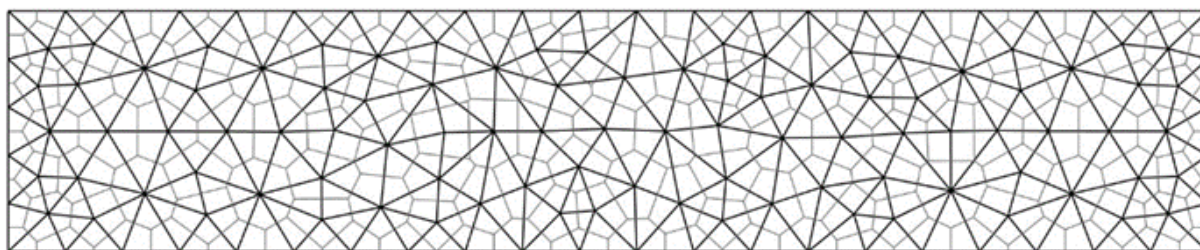
Tablica 6.6 Test savijanjem: materijalne karakteristike te parametri modela za betonsku gredu

<i>Beton</i>	
$E_c = 31400 \text{ MPa}$	$\nu = 0.2$
$E_b = 39250 \text{ MPa}$	$G_b = 13083.33 \text{ MPa}$

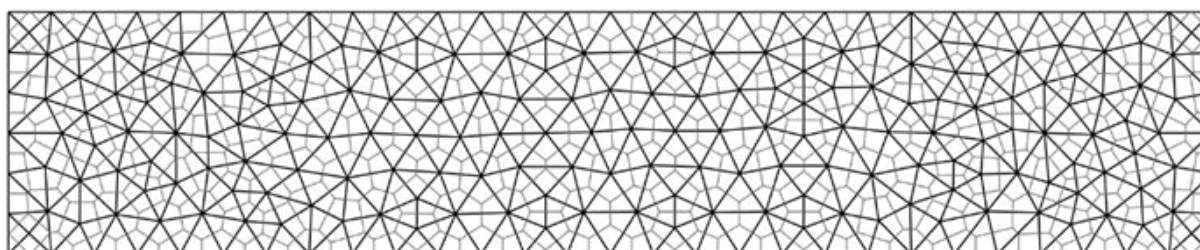
Kako bi se provjerila neovisnost rješenja o veličini mreže te njihova točnost za analiziranje progiba nosača u kojima dominira utjecaj savijanja koristeći diskretni model, greda je diskretizirana s tri mreže različite gustoće i to s mrežom 1 s 186, mrežom 2 s 380 te mrežom 3 s 655 Timoshenkovih grednih elemenata (crtež 6.29).



a)



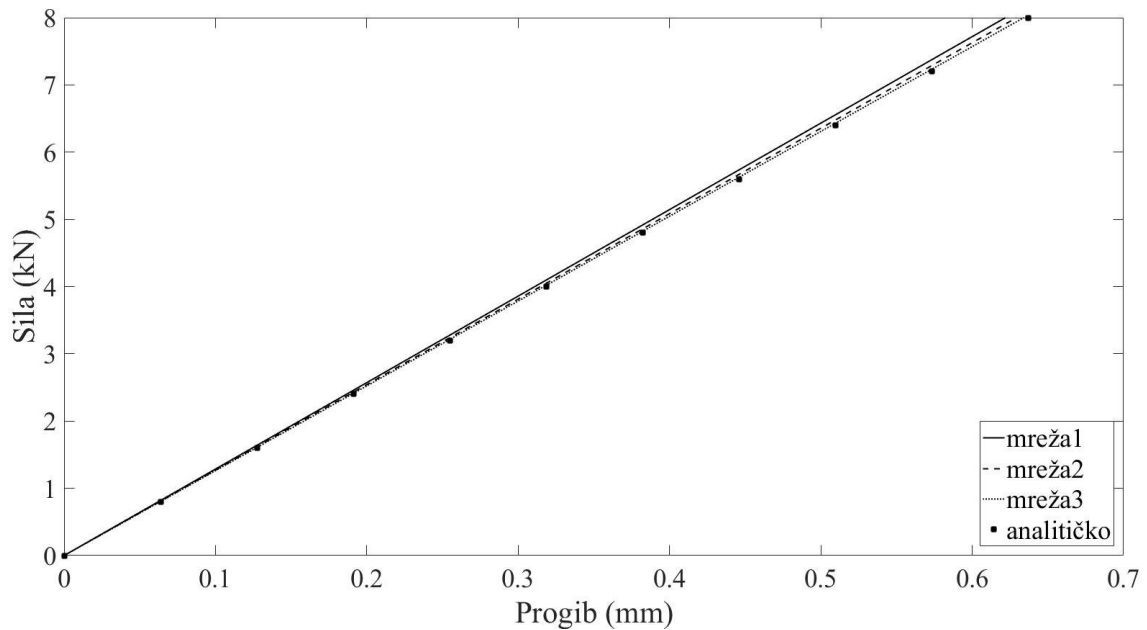
b)



c)

Crtež 6.29 Test savijanjem betonska greda – diskretizacija grede: a) mreža 1 (186 el) b) mreža 2 (380 el) c) mreža 3 (655 el)

Na crtežu 6.30 prikazane su usporedbe numeričkih rješenja i analitičkog za progib točke ispod djelovanja sile i sile dobivenih za različitu gustoću diskretizacije. Kao što se može vidjeti, rezultati za sve tri mreže vrlo su slični, a rezultat za najfiniju mrežu (mrežu 3) najbliži je analitičkom rezultatu. Rezultati dobiveni u ovom primjeru ekvivalentni su rezultatima iz prijašnjih analiza, gdje se točnost rješenja podudara s brojem elemenata u diskretnom modelu zasnovanom na Voronoi poligonima (za finiju mrežu dobiva se točnije rješenje).

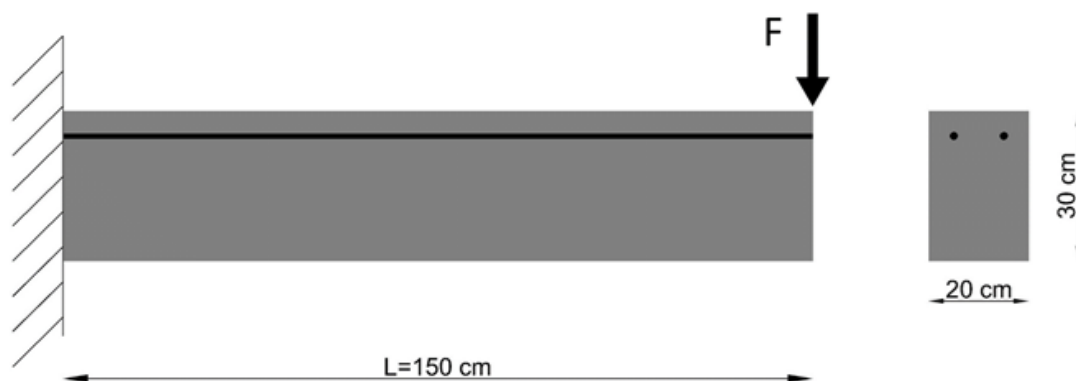


Crtež 6.30 Test savijanjem betonske grede – sila – progib

#### 6.3.4. Armirano betonska konzola opterećena na savijanje

U posljednjem primjeru u ovom potpoglavlju testirana je sposobnost diskretnog modela za analizu armirano betonske grede opterećene na savijanje.

Armirano betonska konzolna greda raspona 150 cm, poprečnog presjeka 20/30 cm armirana s  $2\Phi 12$  opterećena je monotono rastućom koncentriranom silom na rubu nosača (crtež 6.31) Materijalna svojstva grede te parametri modela prikazani su u tablici 6.7.

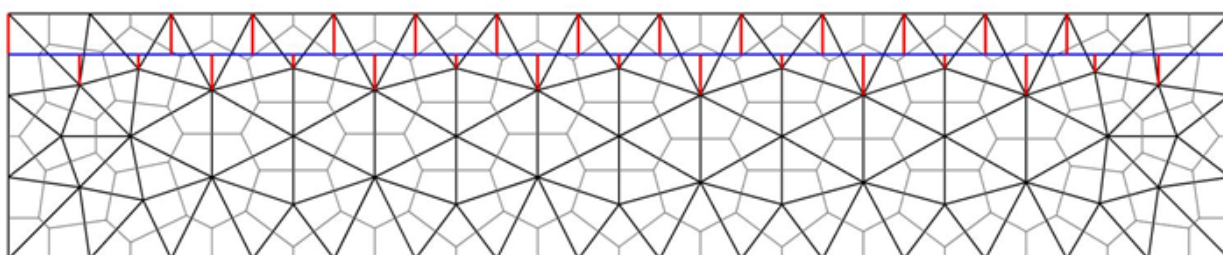


Crtež 6.31 Test savijanjem armirano betonska greda – geometrija i opterećenje

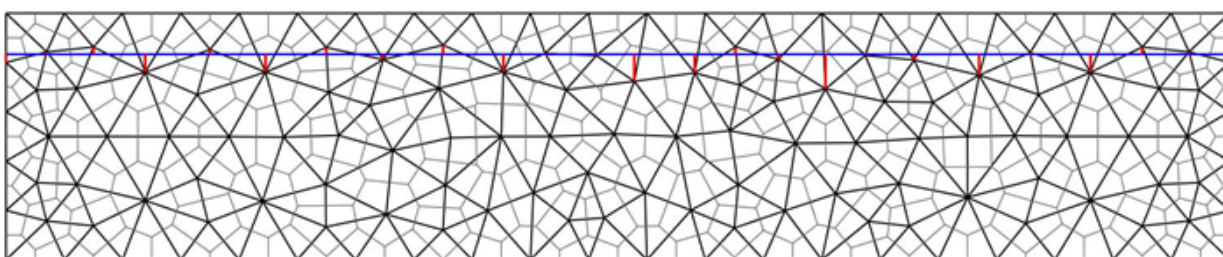
Tablica 6.7 Test savijanjem: materijalne karakteristike te parametri modela za armirano betonsku gredu

Beton	Čelik	Vezni elementi
$E_c = 31400 \text{ MPa}$ , $\nu = 0.2$	$E_s = 210000 \text{ MPa}$ , $\nu = 0.3$	
$E_b = 39250 \text{ MPa}$ , $G_b = 13083.33 \text{ MPa}$	$E_b = 210000 \text{ MPa}$ , $G_b = 80769.23 \text{ MPa}$	$E_b = 70000 \text{ MPa}$ , $G_b = 15000 \text{ MPa}$

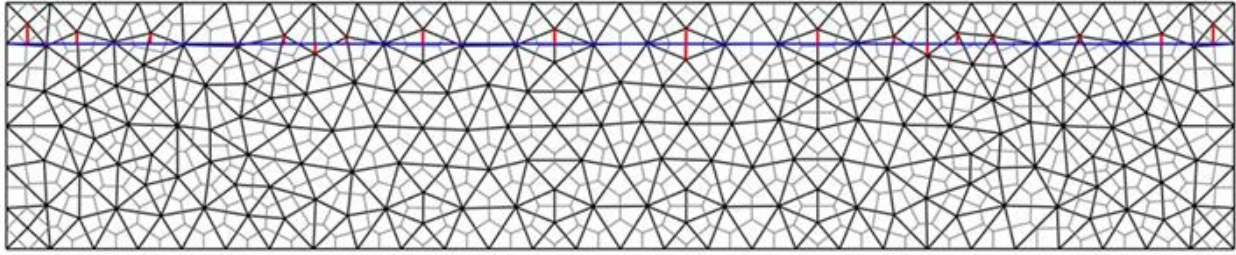
Za ovaj numerički test za diskretizaciju betonske grede korištene su tri mreže iz prethodne analize betonske grede na savijanje. Ugradnja armature unutar tih postojećih diskretizacijskih mreža betonske konstrukcije rezultirala je dobivanjem tri nove mreže (mreža 1 – 243 el, mreža 2 – 429 el i mreža 3 – 724 el) u kojoj svaka mreža sadrži nove elemente (armaturene i vezne koji su također modelirani Timoshenkovim gredama) što je prikazano na crtežu 6.32.



a)



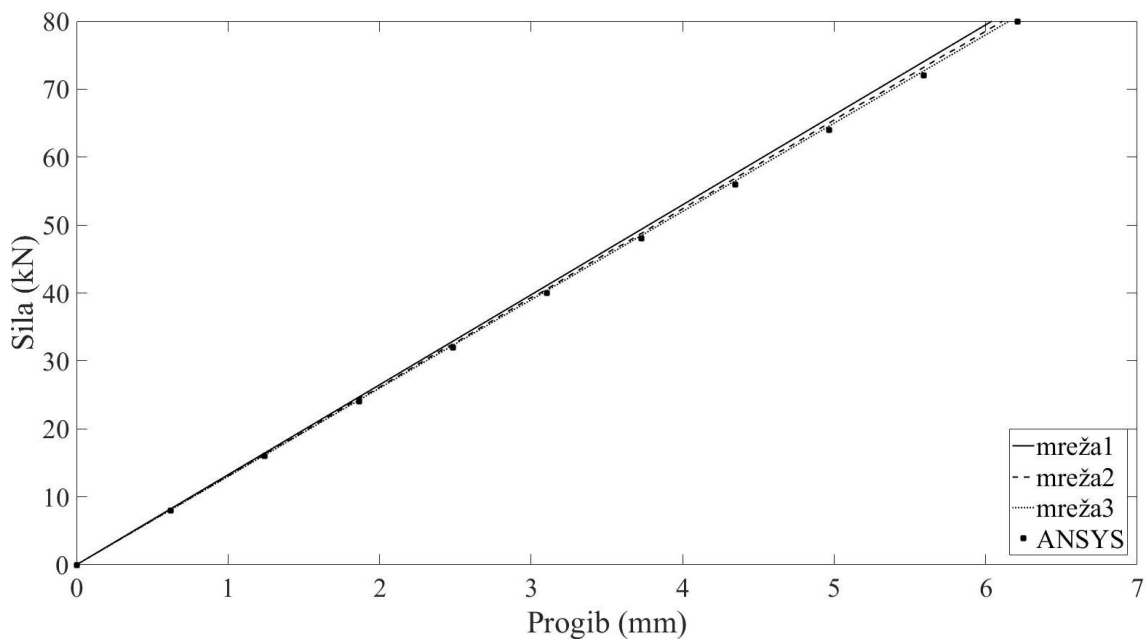
b)



c)

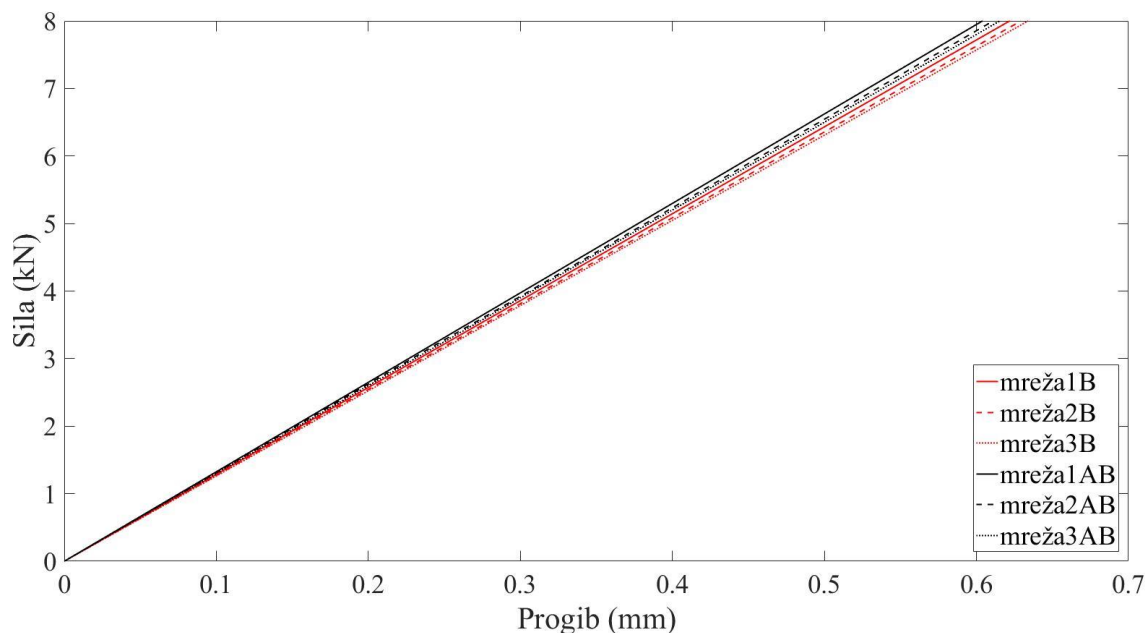
Crtež 6.32 Test savijanjem armirano betonska greda – diskretizacija grede: a) mreža 1 (243 el) b) mreža 2 (429 el) c) mreža 3 (724 el)

Usporedba numeričkih rezultata i rješenja dobivenog programskim paketom ANSYS za progib grede u ovisnosti o monotonno rastućoj koncentriranoj sili prikazan je crtežu 6.33. Kao što se može vidjeti, rezultati za sve tri mreže su blizu jedan drugome te se gotovo poklapaju s rezultatom dobivenim koristeći ANSYS program.



Crtež 6.33 Test savijanjem armirano betonska greda – sila – progib

Usporedba numeričkih rezultata za progib grede u ovisnosti o sili za betonsku i armirano betonsku gredu za tri različite mreže prikazana je na crtežu 6.34. Kao što je i očekivano, dodavanjem novih elemenata (armaturnih i veznih) povećava se krutost elemenata te je omogućen prijenos napreznja između armature i betona koristeći vezne elemente.



Crtež 6.34 Test savijanjem za betonsku i armirano betonsku gredu – sila – progib

## 6.4. Nelinearna analiza armirano betonskih konstrukcija

Kako bi se pokazala sposobnost diskretnog modela zasnovanog na Voronoi poligonima s ugrađenim jakim diskontinuitetom za analiziranje i proračun nelinearnog ponašanja armirano betonskih konstrukcija izloženih monotonom, cikličkom te dinamičkom opterećenju napravljena su četiri numerička testa. Rezultati dobiveni koristeći diskretni model uspoređeni su s eksperimentalnim i numeričkim rezultatima dostupnima iz literature.

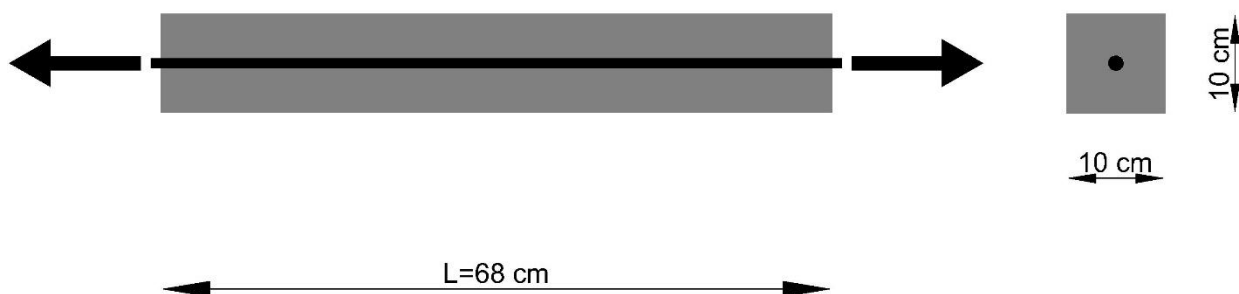
Cilj navedenih testova bio je demonstrirati mehanizam nosivosti armirano betonske konstrukcije kada dolazi do raspucavanja betona, klizanja armature te popuštanja odnosno pojave plastične deformacije u armaturi.

### 6.4.1. Vlačno opterećeni armirano betonski štap

U primjerima 6.4.1.1 i 6.4.1.2 analiziran je betonski štap kvadratnog poprečnog presjeka kroz čije središte prolazi armaturna šipka promjera 10 mm (crtež 6.35) koji je eksperimentalno ispitivao Clement [94]. U primjeru 6.4.1.1 štap je izložen monotonom opterećenju kakvo je provodio i Clement te su dobiveni rezultati uspoređeni s eksperimentalnim i numeričkim rezultatima preuzetim iz literature [95]. Primjer 6.4.1.2 predstavlja nastavak prethodnog primjera te je u ovom primjeru štap izložen cikličkom opterećenju. Za ovaj primjer nema eksperimentalnih rezultata

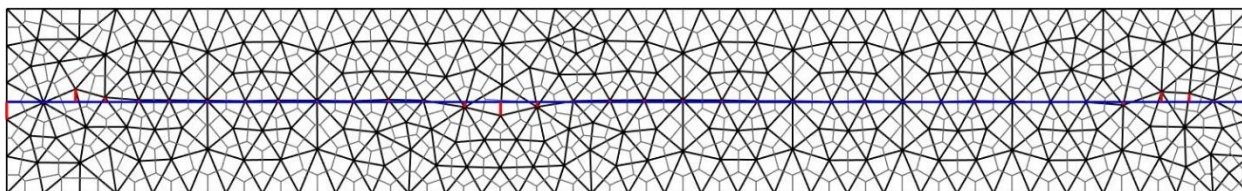


testa. Geometrijske karakteristike armirano betonskog štapa jednake su za monotono i cikličko opterećenje te su prikazane na crtežu 6.35.



Crtež 6.35 Vlačni test armirano betonski štap – geometrija i opterećenje

U oba primjera štap s ugrađenom armaturnom šipkom modeliran je s 755 Timoshenkovih greda s ugrađenim jakim diskontinuitetom od čega 684 Timoshenkove grede predstavljaju betonske elemente, 35 Timoshenkovih greda predstavljaju armaturne elemente te 36 Timoshenkovih greda predstavljaju vezne elemente (crtež 6.36). Materijalne karakteristike štapa [95] te parametri modela prikazani su u tablici 6.8.



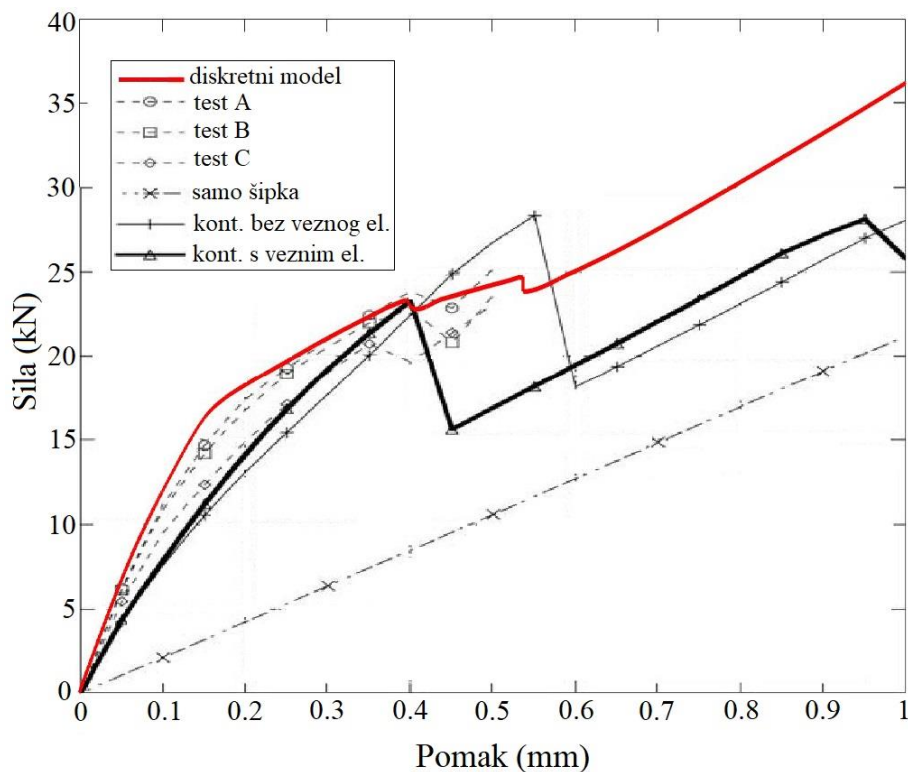
Crtež 6.36 Vlačni test armirano betonski štap – diskretizacija štapa (755 elemenata)

Tablica 6.8 Materijalne karakteristike te parametri modela za armirano betonski štap

Beton	Čelik	Vezni elementi
$E = 31000 \text{ MPa}, \nu = 0.2$	$E = 210000 \text{ MPa}, \nu = 0.3$	
$E_b = 38750 \text{ MPa}, G_b = 12787.5 \text{ MPa}$	$E_b = 210000 \text{ MPa}, G_b = 80769 \text{ MPa}$	$E_b = 30000 \text{ MPa}, G_b = 15000 \text{ MPa}$
$\sigma_{y,c} = 25 \text{ MPa}$	$\sigma_y = 510 \text{ MPa}$	$\tau_0 = 7 \text{ MPa}$
$\sigma_{u,c} = 32 \text{ MPa}, \sigma_{u,t} = 2.8 \text{ MPa},$ $\tau_u = 1 \text{ MPa}, \varphi = 0^\circ$	$\sigma_u = 620 \text{ MPa}$	$\tau_{max} = 14 \text{ MPa}$
$G_{f,I}^{(c)} = 500 \text{ N/m},$ $G_{f,I}^{(t)} = 200 \text{ N/m}, G_{f,II} = 150 \text{ N/m}$		$G_{f,II} = 300 \text{ N/m}$

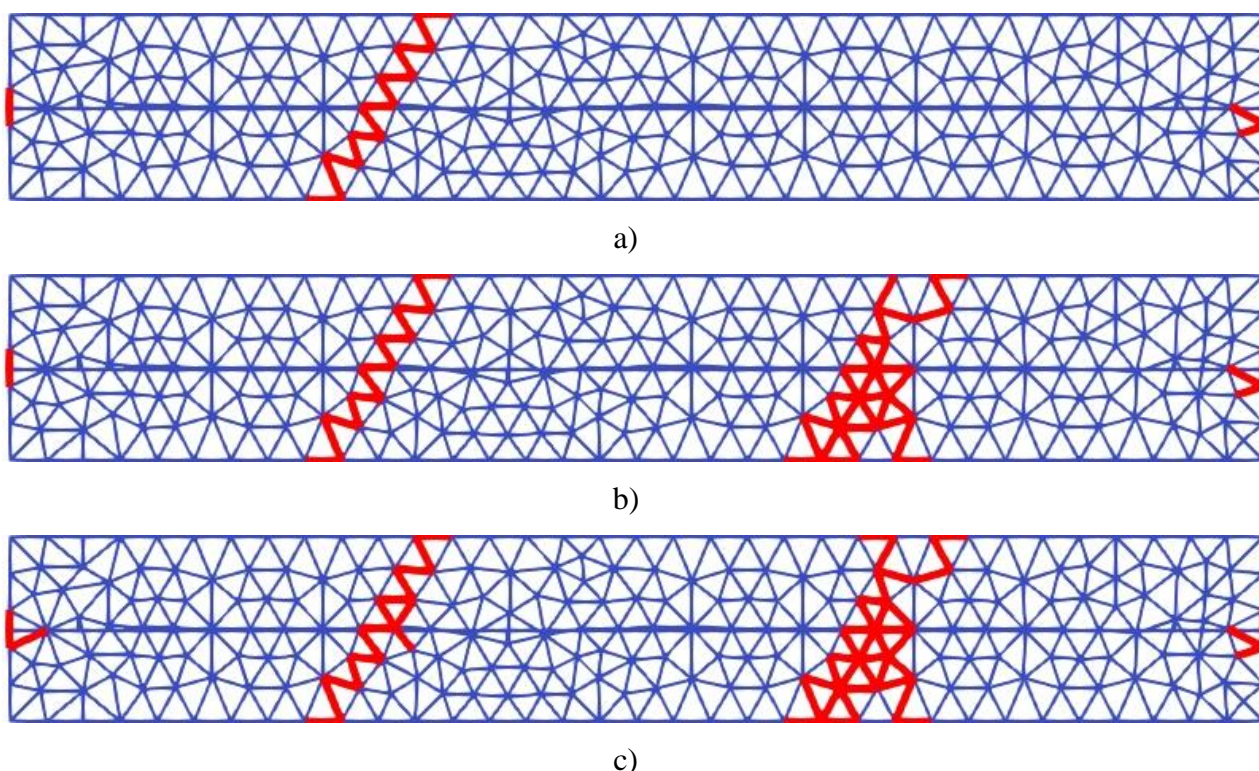
## 6.4.1.1 Vlačno opterećen armirano betonski štap – monotono opterećenje

Clement je ispitivao armiranobetonski štap izložen monotono rastućim kontroliranim pomacima na krajevima armaturne šipke. U svom testu ispitivao je sedam uzorka. Test je bio prekinut u trenutku nastanka prve makropukotine koja se pojavljivala u rasponu od 21 do 31.5 cm u odnosu na rub uzorka. U testu za zadane pomake ne dolazi do prekoračenja granice popuštanja u čeliku za armiranje. Na crtežu 6.37 prikazan je rezultat sile u ovisnosti o pomaku (produljenju) armaturne šipke te je uspoređen s eksperimentalnim rezultatima (test A, test B i test C) i rezultatima dobivenim koristeći kontinuum model (kontinuum s veznim elementima i kontinuum bez veznih elemenata) iz literature. Eksperimentalni rezultati za silu te pripadajući pomak kada dolazi do pojave makropukotine za tri različita uzorka su sljedeći: 21.4 kN za 0.37 mm, 23.1 kN za 0.44 mm i 24.2 kN za 0.42 mm. Razvijenim modelom pojava prve makropukotine javlja se pri sili od 23.35 kN i za pomak od 0.4 mm kada dolazi do pada krutosti, što odgovara rezultatima dobivenim eksperimentom. Također sa crteža 6.37 vidi se relativno jednak iznos vlačne sile i pomaka pri pojavi prve pukotine dobiven diskretnim i kontinuum modelom. Prva makropukotina nalazi se (crtež 6.38 a)) na 20 cm od ruba uzorka što odgovara rezultatima koje je Clement dobio eksperimentom.



Crtež 6.37 Vlačni test armirano betonski štap (monotono opterećenje) – dijagram sila – pomak

U ovom primjeru, nakon pojave prve pukotine za razliku od Clementovog eksperimenta uzorak je i dalje izložen jednolikom kontroliranom pomaku s obje strane što je dovelo po pojave druge pukotine. Pri sili od 24. 68 kN i pri pomaku od 0.53 mm (crtež 6.37) pojavljuje se druga pukotina te dolazi po pada krutosti. Pukotina je smještena 45 cm od lijevog ruba uzorka (crtež 6.38 b)). Uzorak je i nakon toga izložen kontroliranom monotonom pomaku do trenutka kada pomak šipke dosegne vrijednost 1 mm. Sa crteža 6.38 c) koji predstavlja stanje uzorka za pomak od 1 mm može se vidjeti da nema nastanka novih makropukotina.



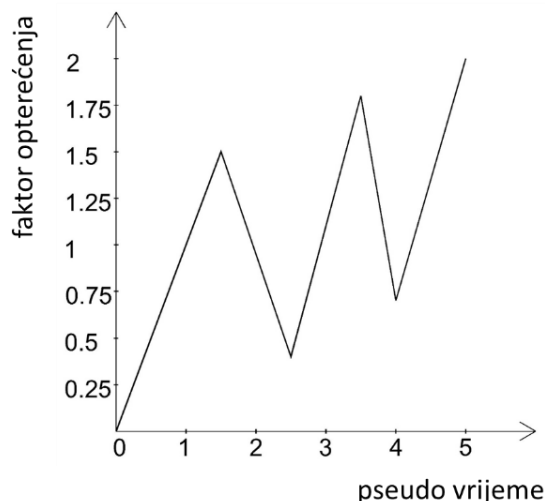
Crtež 6.38 Prikaz pukotina za različite pomake šipke (monotono opterećenje): a) 0.4 mm b) 0.53 mm c) 1 mm

Sa crteža 6.37 može se vidjeti odnos sile – pomak proračunat za štap s ugrađenom armaturom kao i odnos sile – pomak proračunat samo za šipku. Jasno se uočava puno veća krutost šipke ugrađene u štap u odnosu na samu šipku, koja nastaje zbog dodatnog otpora koji se dobiva zbog prijenosa naprezanja između armature i okolnog betona koje je omogućeno veznim elementima.

Naime, ovim modelom može se prikazati početno linearno elastično ponašanje materijala i stvaranje područja razvoja pukotine nakon čega nastaje prva makropukotina koja dovodi do naglog pada krutosti (crtež 6.37). Model može simulirati daljnju preraspodjelu naprezanja što rezultira oporavkom uzorka, odnosno povećanjem krutosti (crtež 6.37), prije nego što se razvije sljedeća makropukotina i tako sve dok ne dođe do konačnog raspucavanja uzorka.

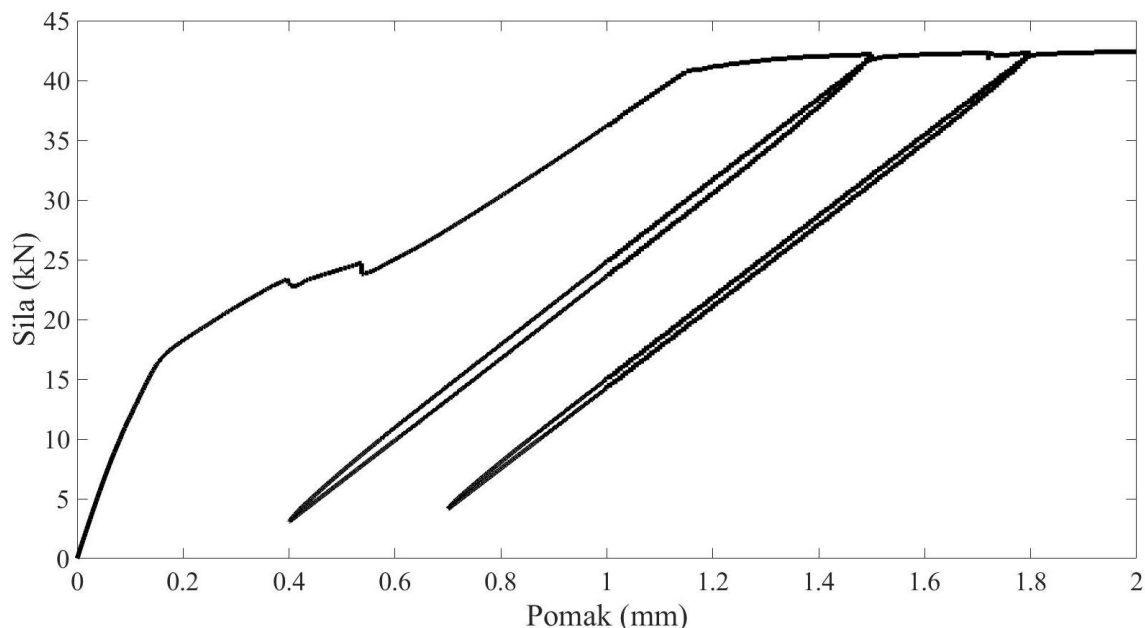
## 6.4.1.2 Vlačno opterećeni armirano betonski štap – cikličko opterećenje

U ovom testu armirano betonski štap izložen je cikličkom opterećenju. U simulaciji u ovom testu uzorak je izložen kontroliranim pomacima (crtež 6.39).



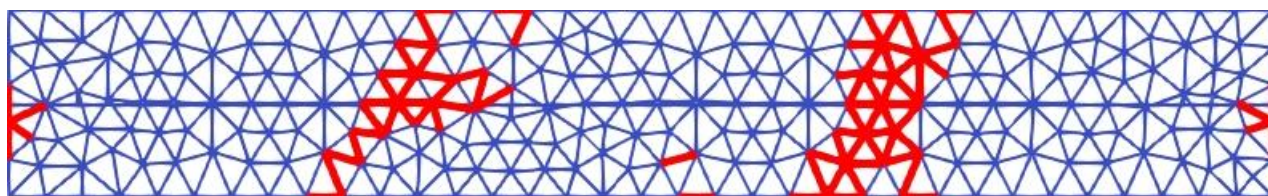
Crtež 6.39 Vlačni test armirano betonski štap (cikličko opterećenje) – program opterećenja

Ovaj test se može smatrati nastavkom prethodnog testa, gdje je štap bio monotono opterećen te je test prekinut za pomak od 1 mm. U ovom testu štap je i nakon pomaka od 1 mm izložen prisilnim pomacima te za razliku od prethodnog testa dolazi do doseganja granice plastičnosti i popuštanja čelika, što je vidljivo na crtežu 6.40. Nedugo nakon toga štap je rasterećen te ponovno opterećen što je opisano pripadnom krivuljom rasterećenja i ponovnog opterećenja. U rasterećenju se može vidjeti kako dolazi do plastičnih deformacija čelika nakon što je prijeđena granica popuštanja za čelik te plastičnih deformacija u međudjelovanju koje opisuju klizanje armature. Također je vidljivo smanjenje krutosti štapa što je uzrokovano trajnim oštećenjem betona uslijed stvaranja pukotina u betonu. Ovakav model rasterećenja i ponovnog opterećenja karakterističan je za modele koji kombiniraju model oštećenja i model plastičnosti te opisuje realno ponašanje armirano betonskih konstrukcija izloženih cikličkom opterećenju. Nakon toga ponovljen je još jedan ciklus rasterećenja i ponovnog opterećenja uz vidljivu prateću krivulju opterećenja i rasterećenja.



Crtež 6.40 Vlačni test armirano betonski štap (cikličko opterećenje) – dijagram sila – pomak

Na crtežu 6.41 prikazan je oštećeni štap s pripadnim pukotinama na kraju testa za konačni pomak od 2 mm. Usporedbom s uzorkom pukotina za monotoni test (crtež 6.38 c)) može se primijetiti da mu je uzorak pukotina za ciklički test dosta sličan te nema nastajanja novih makropukotina. Raspucavanje štapa i stvaranje makropukotina događa se u prvom dijelu testa što je vidljivo sa crteža 6.40.

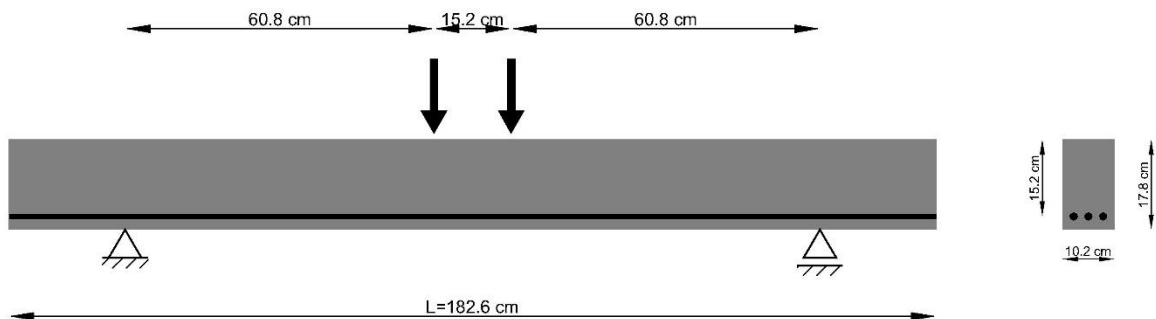


Crtež 6.41 Prikaz pukotina na kraju testa (cikličko opterećenje)

#### 6.4.2. Ispitivanje armirano betonske grede na savijanje opterećene u četiri točke pod kontrolom pomaka

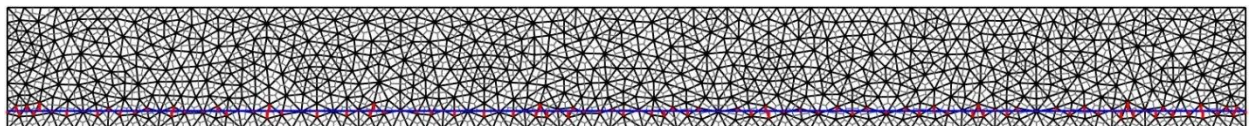
U primjerima 6.4.2.1 i 6.4.2.2 napravljene su numeričke analize armirano betonske grede na savijanje opterećene u četiri točke gdje je vanjsko djelovanje simulirano kontroliranim pomakom i to s dvjema različitim kontroliranim brzinama nanošenja opterećenja. U prvom slučaju kontrolirana brzina u opterećenim čvorovima iznosi 0.0071 mm/s, a u drugom 380 mm/s te prvo ispitivanje predstavlja kvazi-statički test, a drugo dinamički test. Eksperimentalna ispitivanja

armirano betonskih greda za različite brzine nanošenja proveli su Kulkarni i Shah [96]. Iz literature su preuzeti eksperimentalni i numerički rezultati [97, 98] ovih testova te su uspoređeni s rezultatima dobivenim koristeći diskretni numerički model s ugrađenim jakim diskontinuitetom. Kim [97] za analizu armirano betonske grede koristi mrežni model opruga krutih tijela RBS. Geometrijske karakteristike grede jednake su u statičkom i dinamičkom testu te su prikazane na crtežu 6.42. Greda je jednostruko armirana s tri čelične šipke promjera  $\Phi$  9.5 mm te postotak armature u poprečnom presjeku iznosi 1.38 %. Omjer posmičnog raspona u odnosu na efektivnu statičku visinu grede iznosi 4.0.



Crtež 6.42 Armirano betonska greda opterećena s dvije simetrične sile – geometrija i opterećenje

Armirano betonska greda diskretizirana je s 2512 Timoshenkovih greda s ugrađenim jakim diskontinuitetom. Od toga 2305 Timoshenkove grede predstavljaju betonske elemente, 103 Timoshenkove grede čine armaturne elemente dok 104 elemenata predstavlja vezne elemente, što se može vidjeti na crtežu 6.43. Materijalna svojstva [97] te parametri modela dani su u tablici 6.9.



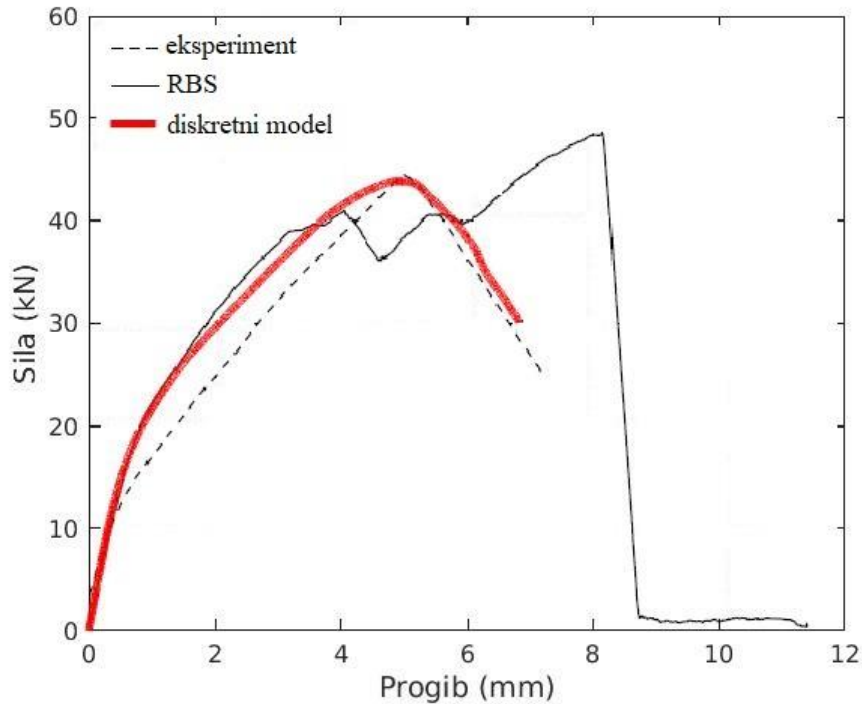
Crtež 6.43 Diskretizacija armirano betonske grede (2512 elemenata)

Tablica 6.9 Materijalne karakteristike te parametri modela za armirano betonsku gredu

Beton	Čelik	Vezni elementi
$E = 32900 \text{ MPa}, \nu = 0.2,$ $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$	$E = 200000 \text{ MPa}, \nu = 0.3,$ $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$	
$E_b = 41125 \text{ MPa}, G_b = 13708.3 \text{ MPa}$	$E_b = 200000 \text{ MPa}, G_b = 76923 \text{ MPa}$	$E_b = 30000 \text{ MPa}, G_b = 15000 \text{ MPa}$
$\sigma_{y,c} = 42 \text{ MPa}$	$\sigma_y = 518 \text{ MPa}$	$\tau_0 = 7.9 \text{ MPa}$
$\sigma_{u,c} = 48.3 \text{ MPa}, \sigma_{u,t} = 4.3 \text{ MPa},$ $\tau_u = 1.5 \text{ MPa}, \varphi = 0^\circ$	$\sigma_u = 620 \text{ MPa}$	$\tau_{max} = 15.8 \text{ MPa}$
$G_{f,I}^{(c)} = 700 \text{ N/m},$ $G_{f,I}^{(t)} = 200 \text{ N/m}, G_{f,II} = 150 \text{ N/m}$	$G_{f,I}^{(t)} = 20000 \text{ N/m}$	$G_{f,II} = 300 \text{ N/m}$

#### 6.4.2.1 Ispitivanje armirano betonske grede na savijanje u četiri točke pod kontrolom pomaka – kvazi–statički test

Vanjsko djelovanje na armirano betonsku gredu simulirano je kontroliranim monotonim rastućim pomakom i to brzinom nanošenja opterećenja od 0.0071 mm/s (crtež 6.42). Na crtežu 6.44 prikazan je dijagram sila – pomak te je uspoređen s eksperimentalnim i numeričkim rezultatima preuzetim iz literature [97]. Dijagram veze sila – pomak točke u sredini raspona nosača dobiven koristeći diskretni model s ugrađenim jakim diskontinuitetom daje dobre rezultate u usporedbi s rezultatima eksperimenta osobito za vrijednost pomaka kod kojeg dolazi do opadanja vrijednosti krivulje kapaciteta nosivosti armirano betonske grede, što je vidljivo za pomake veće od 5 mm (crtež 6.44). Također diskretni model i eksperimentalni rezultati ukazuju da dolazi do krtog sloma u gredi uzrokovanog posmičnim lomom betona.

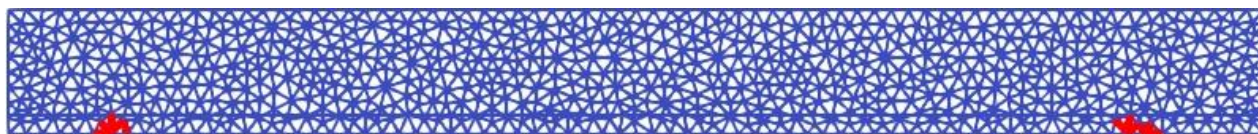


Crtež 6.44 Armirano betonska greda – test savijanjem (kvazi–statički test) – dijagram sila – pomak na sredini grede

Crtež 6.45 prikazuje razvoj pukotina u gredi za različite progibe  $u$  (0.7, 1.8, 4.9 i 6.8 mm) te prikaz pukotina dobivenih eksperimentom. Za progib grede od 0.7 mm nema pojave značajnijih pukotina osim na mjestima ležajeva radi koncentracije naprežanja. Kod progiba grede od 1.8 mm dolazi do pojave pukotina i to najviše na mjestima oko armature te na mjestima gdje dolazi do direktnog opterećenja grede (elementi su tlačno opterećeni te dolazi do loma elemenata u posmiku). U trenutku kada progib grede iznosi 4.9 mm dolazi do stvaranja jedne dominantne pukotine te dvije manje pukotine što se poklapa s rezultatima dobivenim za odnos sila – pomak (progib) sa crteža 6.44 kada dolazi do opadanja vrijednosti krivulje kapaciteta nosivosti armirano betonske grede. Greda je i nakon toga izložena kontroliranom pomaku do trenutka kada progib dosegne vrijednost od 6.8 mm te dolazi do potpunog otkazivanja nosivosti grede uslijed širenja dominantne makropukotine nastale zbog raspucavanja betona u posmiku. S crteža 6.45 c) i 6.45 d), odnosno za povećanje progiba grede s 4.9 na 6.8 mm, može se vidjeti kako dolazi do srastanja više pukotina u jednu dominantnu makropukotinu. Uspoređujući prikaz pukotina dobiven koristeći diskretni model (crtež 6.45 d)) s pukotinama dobivenim eksperimentalnim ispitivanjem (crtež 6.45 e)) [98] vidi se kako u jednoj i drugoj analizi nastaje jedna dominantna makropukotina uzrokovana posmičnim lomom betona radi koje dolazi do sloma grede. U numeričkoj analizi položaj te makropukotine je osno simetričan u odnosu na eksperimentalno ispitivanje. Također u analizi



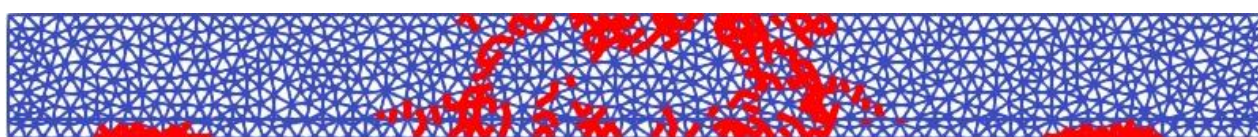
pukotina jednog i drugog ispitivanja zapaža se nastanak drugih pukotina, čiji ukupni broj je veći u eksperimentalnom ispitivanju, jer kod diskrenog modela dolazi do spajanja više pukotina u jednu.



a)



b)



c)



d)



e)

Crtež 6.45 Prikaz pukotina za različite progibe grede dobivene diskretnim modelom te prikaz pukotina dobivenih eksperimentalnim ispitivanjem (kvazi–statički test): a) 0.7 mm b) 1.8 mm c) 4.9 mm d) 6.8 mm e) eksperimentalno [98]

#### 6.4.2.2 Ispitivanje armirano betonske grede na savijanje u četiri točke pod kontrolom pomaka – dinamički test

Vanjsko djelovanje na armirano betonsku gredu simulirano je kontroliranim monotonim rastućim pomakom i to brzinom nanošenja opterećenja od 380 mm/s (crtež 6.42). Za razliku od prijašnjeg primjera, gdje se simulacija promatrala kao statički test, ovdje se, s obzirom na brzinu djelovanja

u opterećenim čvorovima, test promatra kao dinamički. Brzina prirasta nanošenja opterećenja utječe na ponašanje armiranog betona. Tako kod armirano betonskih konstrukcija izloženih dinamičkom opterećenju poput udarnog, brzina deformacije je velika. Kod povećanja brzine deformacije dolazi do povećanja čvrstoće betona kako vlačne tako i tlačne te ona može biti značajna za velike brzine deformacija [99]. Faktor kojim se regulira odnos čvrstoće za statičko i dinamičko opterećenje je dinamički faktor povećanja (DIF). Izračun dinamičkog faktora (za tlačnu i vlačnu čvrstoću) koji će se koristiti u ovom primjeru izvršen je prema smjernicama Europskog odbora za beton (Comité Européen du Béton) (CEB) [100].

### Dinamički faktor povećanja

S obzirom na brzinu nanošenja opterećenja od 380 mm/s odgovarajuća brzina deformacije koji se uzima za izračun dinamičkog faktora povećanja DIF približno iznosi  $0.3 \text{ s}^{-1}$ .

Dinamički faktor povećanja za tlačnu čvrstoću betona dan je izrazom:

$$DIF_{conc}^c = \frac{f_c}{f_{c,st}} = \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_s} \right)^{1.026\alpha_s} \quad (6.3)$$

gdje je  $f_c$  dinamička tlačna čvrstoća za  $\dot{\epsilon}$ ,  $f_{c,st}$  statička tlačna čvrstoća za  $\dot{\epsilon}_s$ ,  $\dot{\epsilon}$  brzina deformacija za dinamičko opterećenje,  $\dot{\epsilon}_s$  brzina deformacija za statičko opterećenje koja iznosi  $3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ,  $\alpha_s = 1/(5 + 9f_{cs}/f_{co})$ ,  $f_{co} = 10 \text{ MPa}$ .

Dobiveni  $DIF_{conc}^c$  iznosi 1.27.

Dinamički faktor povećanja za vlačnu čvrstoću betona dan je izrazom:

$$DIF_{conc}^t = \frac{f_t}{f_{t,st}} = \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_s} \right)^{1.016\delta} \quad (6.4)$$

gdje je  $f_t$  dinamička vlačna čvrstoća za  $\dot{\epsilon}$ ,  $f_{t,st}$  statička vlačna čvrstoća za  $\dot{\epsilon}_s$ ,  $\dot{\epsilon}$  brzina deformacija za dinamičko opterećenje,  $\dot{\epsilon}_s$  brzina deformacija za statičko opterećenje koja iznosi  $3 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ ,  $\delta = 1/(10 + 6f_{cs,st}/f_{co})$ ,  $f_{co} = 10 \text{ MPa}$ .

Dobiveni  $DIF_{conc}^t$  iznosi 1.41.

Prema [98], kod povećanja brzine deformacija dolazi i do povećanja modula elastičnosti betona te je novi modul elastičnosti izračunat prema sljedećem izrazu:

$$\frac{E_c}{E_{c,st}} = \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_s} \right)^{0.026} \quad (6.5)$$

gdje je  $E_c$  modul elastičnosti za  $\dot{\epsilon}$ ,  $E_{c,st}$  modul elastičnosti za  $\dot{\epsilon}_s$ ,  $\dot{\epsilon}$  brzina deformacija za dinamičko opterećenje,  $\dot{\epsilon}_s$  brzina deformacija za statičko opterećenje koja iznosi  $3 \times 10^{-6} s^{-1}$ .

Prema [101] izračunat je i dinamički faktor povećanja za popuštanje čelika prema izrazu:

$$DIF_{steel}^y = \frac{f_y}{f_{y,st}} = \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_s} \right)^{\alpha_y} \quad (6.6)$$

gdje je  $f_y$  dinamička granica popuštanja za  $\dot{\epsilon}$ ,  $f_{y,st}$  statička granica popuštanja za  $\dot{\epsilon}_s$ ,  $\dot{\epsilon}$  brzina deformacija za dinamičko opterećenje,  $\dot{\epsilon}_s$  brzina deformacija za statičko opterećenje koja iznosi  $1 \times 10^{-4} s^{-1}$ ,  $\alpha_y = 0.074 - 0.040f_y/414$ .

Dobiveni  $DIF_{steel}^y$  iznosi 1.22.

Također prema [101] izračunat je i dinamički faktor povećanja za vlačnu čvrstoću čelika i to prema izrazu:

$$DIF_{steel}^u = \frac{f_u}{f_{u,st}} = \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_s} \right)^{\alpha_u} \quad (6.7)$$

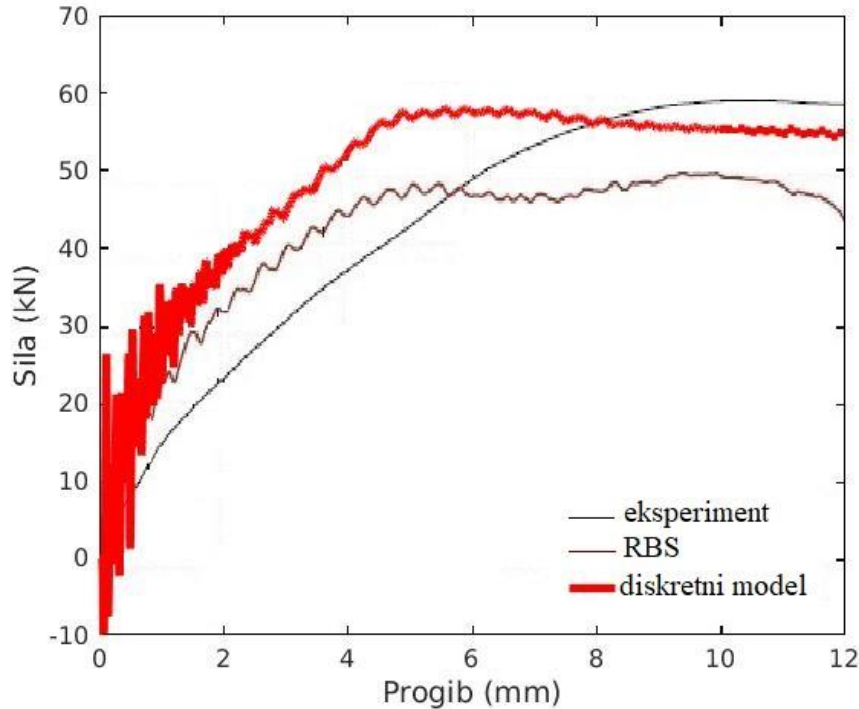
gdje je  $f_u$  dinamička vlačna čvrstoća za  $\dot{\epsilon}$ ,  $f_{u,st}$  statička vlačna čvrstoća za  $\dot{\epsilon}_s$ ,  $\dot{\epsilon}$  brzina deformacija za dinamičko opterećenje,  $\dot{\epsilon}_s$  brzina deformacija za statičko opterećenje koja iznosi  $1 \times 10^{-4} s^{-1}$ ,  $\alpha_u = 0.019 - 0.009f_y/414$ .

Dobiveni  $DIF_{steel}^u$  iznosi 1.065.

Tlačna i vlačna čvrstoća za beton, granica popuštanja za čelik te vlačna čvrstoća čelika iz tablice 6.9 pomnoženi su s pripadajućim dinamičkim faktorima povećanja kako bi se dobile točnije vrijednosti ulaznih parametra modela armiranog betona izloženog dinamičkom opterećenju.

Na crtežu 6.46 prikazan je odnos reakcija i pomaka te je uspoređen s eksperimentalnim i numeričkim rezultatima preuzetim iz literature [97]. Na početku simulacije na dijagramu reakcije pomaka primjećuje se negativna vrijednost reakcije što može biti posljedica odizanja ležajeva uzrokovanih inercijalnim silama unutar grede. Armirano betonska greda ima veću nosivost za dinamičko opterećenje nego za statičko (posljedica povećanja vlačne i tlačne čvrstoće betona te granice tečenja za armaturu u skladu s CEB-om) te je u skladu s rezultatom dobivenim eksperimentom. Razlika u rezultatu dobivenim koristeći diskretni model u odnosu na eksperiment je u tome što se za manju vrijednost progiba (6 mm u odnosu na 10 mm) dosegne maksimalna nosivost, ali krivulja odnosa reakcije – pomaka za jedno i drugo ispitivanje pokazuju postepeno

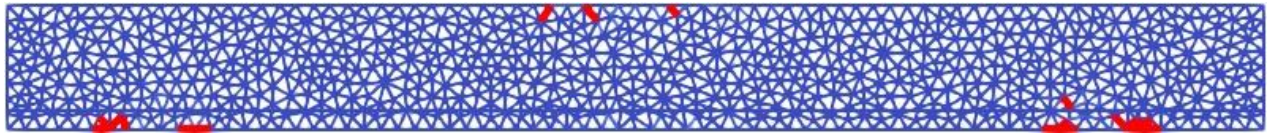
smanjenje nosivosti. U odnosu na rezultat statičkog testa (crtež 6.44) gdje nakon dosezanja maksimalne nosivosti dolazi do naglog pada krivulje i posmičnog sloma, u dinamičkom testu dolazi do postepenog smanjenja nosivosti i sloma savijanjem (crtež 6.46). Može se primijetiti kako povećanjem brzine vanjskog djelovanja dolazi do promjene moda sloma.



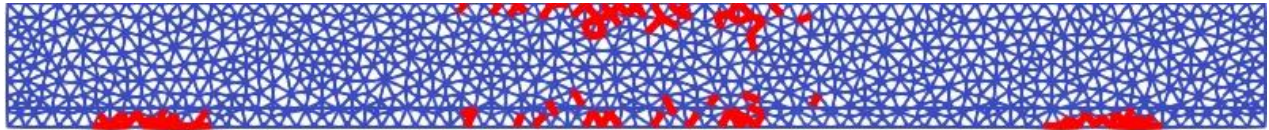
Crtež 6.46. Armirano betonska greda – test savijanjem (dinamički test) – dijagram sila – pomak na sredini grede

Crtež 6.47 prikazuje razvoj pukotina u gredi za različite progibe  $u = 1, 3, 6$  i  $12$  mm te prikaz pukotina dobivenih eksperimentom. Za progib grede od  $1$  mm (crtež 6.47 a)) javljaju se pukotine na mjestima ležajeva radi koncentracije naprezanja te se pojavljuju prve pukotine na mjestu vanjskog djelovanja. Za progib od  $3$  mm (crtež 6.47 b)) vidi se formiranje pukotina oko armature te povećanje i spajanje broja pukotina na mjestu dinamičkog djelovanja. Kod progiba grede od  $6$  mm (crtež 6.47 c)) kada dolazi do dostizanja nosivosti, vidi se formiranje sve više okomitih pukotina te pojave prve makropukotine. Na kraju ispitivanja kod progiba od  $12$  mm na crtežu 6.47 d) prikazno je nastajanje više makropukotina. Usporedbom crteža 6.47 d) i 6.47 e) [98] gdje su prikazi pukotina na kraju testa dobiveni diskretnim modelom i eksperimentom, vidi se podudarnost u nastanku makropukotina na sredini grede kao i raspucavanje grede na mjestu dinamičkog djelovanja. Također analizom pukotina dobivenih diskretnim modelom i eksperimentom može se

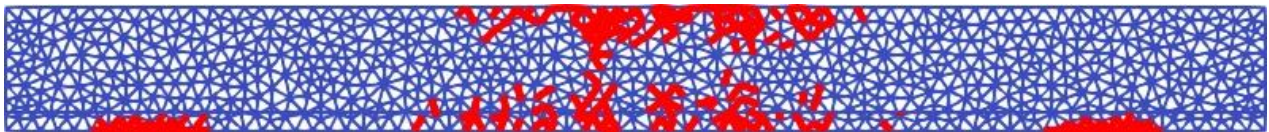
primijetiti nešto veći broj pukotina dobivenih eksperimentom u odnosu na diskretni model gdje se pojedine pukotine spajaju u jednu.



a)



b)



c)



d)



Crtež 6.47 Prikaz pukotina za različite progibe grede dobivene diskretnim modelom te prikaz pukotina dobivenih eksperimentalnim ispitivanjem (dinamički test): a) 1 mm b) 3 mm c) 6 mm d) 12 mm e) eksperiment [98]

## 7. ZAKLJUČCI I SMJERNICE ZA DALJNJA ISTRAŽIVANJA

### 7.1. Zaključci

U sklopu ovog istraživanja razvijen je novi numerički model za analizu armirano betonskih konstrukcija izloženih statičkom i dinamičkom opterećenju koristeći diskretni model zasnovan na Voronoi poligonima i Timoshenkovim gredama s ugrađenim jakim diskontinuitetom. Unutar već razvijenog diskretnog modela zasnovanog na Voronoi poligonima i Timoshenkovim gredama kao kohezivnim vezama između Voronoi poligona za simulaciju betona razvijen je i ugrađen model armature koji se može postaviti neovisno o geometriji postojeće mreže diskretnih elemenata betona. Razvojem i implementacijom modela međudjelovanja ostvaren je interaktivni mehanizam koji omogućuje prijenos sile između armaturnih i betonskih elemenata što osigurava kompozitno djelovanje armiranog betona, a ujedno je omogućeno i klizanje armature. Ovakav numerički model za analizu armirano betonskih konstrukcija originalan je u načinu opisivanja ponašanja betona, armature i njihovog međudjelovanja te kao takav može opisati efekte nelinearnosti uzrokovane statičkim ili dinamičkim opterećenjem. Sve materijalne komponente armiranog betona (beton, armaturne šipke i međudjelovanje betona i armature) modelirane su s istim elementima, Timoshenkovim gredama s ugrađenim diskontinuitetom, koje omogućuju nelinearno deformiranje i pucanje betona i armature, kao i klizanje i izvlačenje armaturnih šipki.

Kako bi se što bolje opisali slomni procesi koji se događaju u krtim i kvazi-krtim materijalima, poput betona koji su izloženi statičkom i dinamičkom opterećenju, razvijen je novi model oštećenja-omekšavanja. Ovim modelom uspješno su opisane nelinearnosti i mehanizmi karakteristični za krte i kvazi-krte materijale poput smanjenja krutosti materijala te mehanizmi otvaranja i zatvaranja pukotina kada je materijal ciklički opterećen odnosno rasterećen.

Validacija modela oštećenja-omekšavanja prikazana je za nekoliko testova sa statičkim i dinamičkim opterećenjem. Za test s dinamičkim opterećenjem prikazan je izračun gubitka energije pri raspucavanju materijala te izračun elastične i kinetičke energije.

Za opisivanje nelinearnog deformiranja i pucanja u armaturi te klizanja armature implementiran je model plastičnosti koji opisuje mehanizme karakteristične za duktilne materijale.

Verifikacija i validacija razvijenog novog diskretnog modela provedena je za različite statičke i dinamičke testove. Usporedbom rezultata dobivenih diskretnim modelom s rezultatima dobivenim analitičkim i numeričkim metodama te eksperimentalnim ispitivanjima dostupnima u literaturi, pokazalo se kako razvijeni numerički model vrlo dobro opisuje ponašanje armirano betonskih konstrukcija izloženih statičkom i dinamičkom opterećenju. Ovaj model može prikazati glavne fenomene u armirano betonskoj konstrukciji poput smanjenja krutosti uslijed pucanja betona, popuštanje armature te lokalizirani slom. Dobiveni numerički rezultati dobro se podudaraju s

rezultatima eksperimentalnih ispitivanja. Također simulacija pukotina diskretnim modelom je realistična te se ovim modelom mogu prikazati procesi nastanka i širenja pojedinačnih pukotina te njihovog srastanja u složene pukotine.

Model omogućuje i opisivanje heterogenosti osnovnog materijala (betona), što u kombinaciji s razvijenim modelima armature i međudjelovanja predstavlja vrlo kvalitetnu osnovu za simulaciju nelinearnog ponašanja armirano betonskih konstrukcija. Modeliranjem pukotina u betonu, kidanja armature te klizanja armature Timoshenkovim gredama s ugrađenim diskontinuitetom ne povećava se globalna matrica krutosti sustava što ovakav način modeliranja čini računalno vrlo efikasnim i brzim, čak i za vrlo guste diskretizacije sustava i nanošenje opterećenja u velikom broju inkrementa te kao takav predstavlja značajnu alternativu dosadašnjim numeričkim modelima za nelinearni proračun armirano betonskih konstrukcija izloženih statičkim i dinamičkim opterećenjima.

## **7.2. Smjernice za daljnja istraživanja**

Diskretni model razvijen u ovom radu koji omogućuje simulaciju različitih komponenti kompozitnog materijala (u ovom slučaju betona i armature) i osigurava njihovo međudjelovanje može biti osnova za daljnji razvoj i primjenu modela u području praćenja odgovora armirano betonskih konstrukcija izloženih ekstremnim djelovanjima, a posebno dinamičkom i seizmičkom djelovanju.

U daljnjem radu planirano je postojeći model za opisivanje međudjelovanja između armature i betona detaljno validirati i verificirati u usporedbi s eksperimentalnim istraživanjima, posebno u cikličkom i dinamičkom režimu opterećenja, te ovisno o dobivenim zaključcima izvršiti potrebne prilagodbe parametara modela.

U ovom radu u primjerima s dinamičkim opterećenjima korišteno je povećanje dinamičke čvrstoće prema izrazima iz literature [99, 101] dobivenima na osnovu eksperimentalnih ispitivanja pojedinačnih pokusa (REF). Modeliranje porasta dinamičke čvrstoće u ovisnosti o brzini deformacija moguće je postići uključivanjem viskoznosti [102] u postojeće konstitutivne modele za plastičnost i oštećenje što bi moglo značajno doprinijeti simulaciji ponašanja armirano betonskih konstrukcija izloženih dinamičkom opterećenju.

Razvijeni model moguće je koristiti u seizmičkoj analizi armirano betonskih konstrukcija pri čemu je potrebno izvršiti detaljnu validaciju i verifikaciju rezultata usporedbom s postojećim numeričkim i eksperimentalnim rezultatima.

Model je razvijen u 2D području. Modeliranje Timoshenkovih greda kao prostornih grednih elemenata omogućilo bi analizu prostornih armirano betonskih konstrukcija uz korištenje ovdje razvijenih konstitutivnih materijalnih modela.

Iako je ovaj model prvenstveno razvijen za analizu armirano betonskih konstrukcija, diskretni model uz dodatna poboljšanja i prilagodbe može se koristiti i za analizu drugih ojačanih betonskih konstrukcija gdje se za ojačanje ne koriste čelične šipke, nego vlakna od različitih materijala poput PVA (eng. Polyvinyl alcohol) ili ugljika (karbonska vlakna).

Također takav poboljšani diskretni model mogao bi se koristiti i za modeliranje drugih kompozitnih materijala, gdje matrica kompozita ne mora biti betonska, nego može biti i modelirana nekim drugim materijalom.



---

## 8. LITERATURA

- [1] H. Ogura, M. Kunieda, H. Nakamura, "Tensile Fracture Analysis of Fiber Reinforced Cement-Based Composites with Rebar Focusing on the Contribution of Bridging Forces," *Journal of Advanced Concrete Technology*, vol. 17, no. 5, pp. 216-231, 2019.
- [2] U. Farooq, H. Nakamura, T. Miura, Y. Yamamoto, "Proposal of bond behavior simulation model by using discretized voronoi mesh for concrete and beam element for reinforcement," *Cement and Concrete Composites*, vol. 110, pp. 103593, 2020.
- [3] K. Lundgren, "Bond between ribbed bars and concrete. Part 1: Modified model," *Magazine of Concrete reserch*, vol. 57, no. 7, pp. 371-382, 2005.
- [4] A. Ibrahimbegovic, A. Boulkertous, L. Davenne, D. Brancherie, "Modelling of reinforced-concrete structures providing crack-spacing based on X-FEM, ED-FEM and novel operator split solution procedure," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 83, no. 4, pp. 452-481, 2010.
- [5] Y. R. Rashid, "Analysis of prestressed concrete pressure vessels," *Nuclear Engineering and Design*, vol. 7, pp. 334-344, 1968.
- [6] H. Okamura, K. Maekawa, "Nonlinear Analysis and Constitutive Models of Reinforced Concrete," *Giho-do Press, University of Tokyo, Japan*, pp. 831-850, 1991.
- [7] C. Sittipunt, S. L. Wood, "Influence of Web Reinforcement on the Cyclic Response of Structural Walls," *ACI Structural Journal*, vol. 92, no. 6, pp. 745-756, 1995.
- [8] A. K. Gupta, H. Akbar, "Cracking in reinforced concrete analysis," *Journal of Structural Engineering*, vol. 110, pp. 1735-1746, 1984.
- [9] D. Palermo, F. J. Vecchio, "Compression field modeling of reinforced concrete subjected to reversed loading: formulation," *Structural Journal*, vol. 100, pp. 616-625, 2003.
- [10] Z. P. Bažant, B. H. Oh, "Microplane model for fracture analysis of concrete structures," *Proc., Symp. on Interaction of Non-Nuclear Munitions with Struct., U.S. Air Force Academy, Colorado Springs, Colo*, pp. 49-53, 1983.
- [11] Z. P. Bažant, B. H. Oh, "Microplane model for progressive fracture of concrete and rock," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 111, no. 4, pp. 559-582, 1985.
- [12] J. Ožbolt, Y. Li, I. Kožar, "Microplane model for concrete with relaxed kinematic constraint," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, no. 4, pp. 2683-2711, 2001.

- [13] Ž. Smolčić, J. Ožbolt, "Meso scale model for fiber-reinforced-concrete: Microplane based approach," *Computers and Concrete*, vol. 19, no. 4, pp. 375-385, 2017.
- [14] V. Travaš, J. Ožbolt, I. Kožar, "Failure of plain concrete beam at impact load: 3D finite element analysis," *International journal of fracture*, vol. 160, no. 1, pp. 31-41, 2009.
- [15] D. Ngo, A. G. Scordelis, "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams," *Journal of ACI*, vol. 64, no. 3, pp. 152-163, 1967.
- [16] A. H. Nilson, "Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method," *ACI Journal*, vol. 65, pp. 757-766, 1968.
- [17] A. R. Ingraffea, V. Saouma, "Numerical modeling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete," in *Sih G.C., DiTommaso A. (eds): Fracture mechanics of concrete: structural application and numerical calculation*, vol. 4, Springer, Dordrecht, 1985, pp. 171-225.
- [18] Z. Y. Yang, J. Chen, "Finite element modelling of multiple cohesive discrete crack propagation in reinforced concrete beams," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 72, pp. 2280-2297, 2005.
- [19] A. Ibrahimbegovic, *Nonlinear Solid Mechanics: Theoretical Formulations and Finite Element Solution Methods*, London: Springer, 2009.
- [20] Z. P. Bažant, T. Belytschko, T. P. Chang, "Continuum theory for strain softening," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 110, no. 12, pp. 1666-1692, 1984.
- [21] A. Needleman, "Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 67, no. 1, pp. 69-85, 1988.
- [22] Z. P. Bažant, B. H. Oh, "Crack Band Theory for Fracture of Concrete," *Materials and Structures*, vol. 16, pp. 155-177, 1983.
- [23] N. Moes, J. Dolbow, T. Belytschko, "A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, pp. 131-150, 1999.
- [24] J. C. Simo, J. Oliver, F. Armero, "An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids," *Computational Mechanics*, vol. 12, no. 5, pp. 277-296, 1993.
- [25] J. Oliver, A. E. Huespe, P. J. Sanchez, "A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities: E-FEM vs. X-FEM," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 4732-4752, 2006.

- [26] T. Rukavina, A. Ibrahimbegovic, I. Kožar, "Fiber-reinforced brittle material fracture models capable of capturing a complete set of failure modes including fiber pull-out," *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 355, no. 1, pp. 157-192, 2019.
- [27] I. Kožar, T. Rukavina, A. Ibrahimbegović, "Method of Incompatible Modes – Overview and Application," *Građevinar : časopis Hrvatskog saveza građevinskih inženjera*, vol. 70, no. 1, pp. 19-29, 2018.
- [28] J. H. Song, T. Belytschko, "Cracking node method for dynamic fracture with finite elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 77, no. 3, pp. 360-385, 2009.
- [29] M. Nikolić, X. N. Do, A. Ibrahimbegovic, Ž. Nikolić, "Crack propagation in dynamics by embedded strong discontinuity approach: Enhanced solid versus discrete lattice model," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 340, pp. 480-499, 2018.
- [30] E. Schlangen, J. G. M. Van Mier, "Simple lattice model for numerical simulation of fracture of concrete materials and structures," *Materials and Structures*, vol. 25, pp. 534-542, 1992.
- [31] S. Saito, H. Hikosaka, "Numerical analyses of reinforced concrete structures using spring network models," *Journal of Materials, Concrete Structures and Pavements, JSCE*, vol. 44, no. 627, pp. 289-303, 1999.
- [32] M. Nikolić, "Rock mechanics, failure phenomena with preexisting cracks and internal fluid flow through cracks," Doktorski rad, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Split, 2015.
- [33] M. Nikolić, A. Ibrahimbegovic, P. Miscevic, "Brittle and ductile failure of rocks: embedded discontinuity approach for representing mode I and mode II failure mechanisms," *The International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 102, pp. 1507-1526, 2015.
- [34] M. Nikolić, A. Ibrahimbegovic, "Rock mechanics model capable of representing initial heterogeneities and full set of 3D failure mechanisms," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 290, pp. 209-227, 2015.
- [35] E. Karavelić, M. Nikolic, A. Ibrahimbegovic, A. Kurtović, "Concrete mesoscale model with full set of 3D failure modes with random distribution of aggregate and cement phase. Part I: Formulation and numerical implementation," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 344, pp. 1051-1072, 2019.

- [36] M. Nikolić, A. Ibrahimbegovic, P. Mišćević, “Discrete lattice element approach for rock failure modeling,” *Electronic Journal of the Faculty of Civil Engineering Osijek*, vol. 8, no. 14, pp. 1-7, 2017.
- [37] J. Čarija, M. Nikolić, A. Ibrahimbegovic, Ž. Nikolić, “Discrete softening-damage model for fracture process representation with embedded strong discontinuities,” *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 236, pp. 107211, 2020.
- [38] N. Živaljić, H. Smoljanović, Ž. Nikolić, “A combined finite-discrete element model for RC structures under dynamic loading,” *Engineering Computations*, vol. 30, no. 7, pp. 982-1010, 2013.
- [39] Ž. Nikolić, N. Živaljić, H. Smoljanović, I. Balić, “Numerical modelling of reinforced-concrete structures under seismic loading based on the finite element method with discrete inter-element cracks,” *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 46, no. 1, pp. 159-178, 2017.
- [40] G. Cusatis, Z. P. Bažant, L. Cedolin, “Confinement-shear lattice CSL model for fracture propagation in concrete,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, no. 52, pp. 7154-7171, 2006.
- [41] H. Zhang, B. Savija, S. C. Figueiredo, E. Schlangen, “Experimentally validated multi-scale modelling scheme of deformation and fracture of cement paste,” *Cement and Concrete Research*, vol. 102, pp. 175-186, 2017.
- [42] P. Grassl, T. Davies, “Lattice modelling of corrosion induced cracking and bond in reinforced concrete,” *Cement and Concrete Composites*, vol. 33, no. 9, pp. 918-924, 2011.
- [43] M. Nikolić, E. Karavelić, A. Ibrahimbegovic, P. Miscević, “Lattice Element Models and Their Peculiarities,” *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 25, no. 3, pp. 753-784, 2018.
- [44] M. Koichi, B. Hauke, “Three-dimensional modeling of reinforced concrete with multi-directional cracking,” *Journal of Materials, Concrete Structures and Pavements, JSCE*, vol. 45, no. 634, pp. 349-368, 1999.
- [45] L. Dahmani, A. Khennane, S. Kaci, “Crack identification in reinforced concrete beams using ANSYS software,” *Strength Material*, vol. 42, no. 42, pp. 232-240, 2010.
- [46] A. K. H. Kwan, P. L. Ng, “Modelling dowel action of discrete reinforcing bars for finite element analysis of concrete structures,” *Computers and Concrete*, vol. 12, no. 1, pp. 19-36, 2013.

- [47] P. L. Ng, J. Y. K. Lam, A. K. H. Kwan, "Tension stiffening in concrete beams: Part 1 - FE analysis," *Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Structures and Buildings*, vol. 163, no. 1, pp. 19-28, 2010.
- [48] Ž. Nikolić, A. Mihanović, "Non-linear finite element analysis of post-tensioned concrete structures," *Engineering Computations*, vol. 14, no. 5, pp. 509-528, 1997.
- [49] P. Marović, Ž. Nikolić, M. Galić, "Some aspects of 2D and/or 3D numerical modelling of reinforced and prestressed concrete structures," *Engineering Computations*, vol. 22, no. 5-6, pp. 684-710, 2005.
- [50] M. Galić, P. Marović, Ž. Nikolić, "Modified Mohr-Coulomb - Rankine material model for concrete," *Engineering computations*, vol. 28, no. 7, pp. 853-887, 2011.
- [51] A. E. Elwi, T. M. Hrudey, "Finite Element Model for Curved Embedded Reinforcement," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 115, no. 4, pp. 740-754, 1989.
- [52] A. Mihanović, Ž. Nikolić, "Numerical model for posttensioning concrete structures," *International Journal for Engineering Modelling*, vol. 6, pp. 1-4, 1993.
- [53] M. Galić, P. Marović, Ž. Nikolić, "Mathematical formulation of the space curvature of the tendon in the PC structures," *International Journal for Engineering Modelling*, vol. 21, no. 1-4, pp. 15-22, 2003.
- [54] Ž. Nikolić, "Numeričko modeliranje armiranobetonskih i prednapetih konstrukcija," *Građevinar: časopis Hrvatskog saveza građevinskih inženjera*, vol. 47, pp. 121-129, 1995.
- [55] L. A. G. Bitencourt Jr., O. L. Manzoli, Y. T. Trindade, E. A. Rodrigues, D. Dias-da-Cost, "Modeling reinforced concrete structures using coupling finite elements for discrete representation of reinforcements," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 149, pp. 32-44, 2018.
- [56] J. E. Bolander, S. Saito, "Fracture analyses using spring networks with random geometry," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 61, no. 5-6, pp. 569-591, 1998.
- [57] E. Schlangen, Z. Qian, "3D modeling of fracture in cement-based materials," *Journal of Multiscale Modelling*, vol. 1, no. 2, pp. 245-261, 2009.
- [58] W. Gerstle, H. H. Geitanbaf, A. Asadollahi, "Computational simulation of reinforced concrete using the micropolar state-based peridynamic hexagonal lattice model," *In Proc., 8th Int. Conf. on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures. Toledo, Spain IA-FRAMCOS*, pp. 261-270, 2013.

- [59] B. B. Aydin, K. Tuncay, B. Binici, "Simulation of Reinforced Concrete Member Response Using Lattice Model," *Journal of Structural Engineering*, vol. 145 , no. 9, pp. 04019091, 2019.
- [60] F. Montero, E. Schlangen, "Modelling of fracture in fibre-cement based materials," in *Tenth international symposium on brittle matrix composites*, Warsaw, Poland, 2012.
- [61] M. Lukovic, H. Dong, E. Schlangen, G. Ye, K. Van Breugel, "Tailoring strain-hardening cementitious composite repair systems through numerical experimentation," *Cement and Concrete Composites*, vol. 53 , pp. 200-213, 2014.
- [62] A. Gaetani, A. Fascetti, N. Nistico, " Parametric investigation on the tensile response of GFRP elements through a discrete lattice modeling approach," *Composites Part B: Engineering*, vol. 176, pp. 107254, 2019.
- [63] D. Asahina, K. Aoyagi, K. Kim, J. T. Birkholzer, J. E. Bolander, "Elastically-homogeneous lattice models of damage in geomaterials," *Computers and Geotechnics*, vol. 81, pp. 195-206., 2017.
- [64] J. Čarija, M. Nikolić, Ž. Nikolić, "A Voronoi Based Discrete Numerical Approach for Modelling Reinforcement in Concrete Structures," *International Journal for Engineering Modelling*, vol. 34, no. 2, pp. 77-98, 2021.
- [65] J. Čarija, M. Nikolić, Ž. Nikolić, "Discrete lattice model for nonlinear analysis of reinforced concrete structures," *ECCOMAS MSF 2021 - 5th International Conference on Multi-scale Computational Methods for Solids and Fluids, Split*, pp. 181-182, 2021.
- [66] M. Yip, J. Mohle, J. E. Bolander, "Automated Modeling of Three-Dimensional Structural Components Using Irregular Lattices," *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering* , vol. 20, no. 6, pp. 393-407, 2005.
- [67] A. Ibrahimbegovic, E. Wilson, "A modified method of incompatible modes," *Communications in Applied Numerical Methods*, vol. 7, no. 3, pp. 187-194, 1991.
- [68] L. Kachanov, "Time of the rupture process under creep conditions," *TVZ Akad Nauk S.S.R. Otd. Tech. Nauk*, vol. 8, pp. 26-31, 1958.
- [69] J. Lemaitre, J. Chaboche, "Aspect phenomenologique de la rupture par endommagement," *Journal de mécanique appliquée*, vol. 2, no. 3, pp. 317-365, 1978.
- [70] M. Ortiz, "A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete," *Mechanics of Materials*, vol. 4, no. 1, pp. 67-93, 1985.

- [71] J. Čarija, M. Nikolić, A. Ibrahimbegovic, Ž. Nikolić, “Cyclic model for concrete in discrete lattice model,” *4th International Conference on Multi-scale Computational Methods for Solids and Fluids, Sarajevo*, pp. 189-192, 2019.
- [72] CEB-FIP, Structural concrete-textbook on behavior, design and performance, updated knowledge of the CEB-FIP model code 1990, vol. 1, Stuttgart, Germany: International Federation for Structural Concrete, 1999.
- [73] A. E. Huespe, J. Oliver, P. J. Sanchez, S. Blanco, V. Sonzogni, “Strong discontinuity approach in dynamic fracture simulations,” *Mecanica Computacional*, vol. 25, no. 20, pp. 1997-2018, 2006.
- [74] F. Armero, C. Linder, “Numerical simulation of dynamic fracture using finite elements with embedded discontinuities,” *International Journal of Fracture*, vol. 160, no. 2, pp. 119-141, 2009.
- [75] T. Saksala, D. Brancherie, I. Harari, A. Ibrahimbegovic, “Combined continuum damage-embedded discontinuity model for explicit dynamic fracture analyses of quasi-brittle materials,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 101, no. 3, pp. 230-250, 2015 .
- [76] H. Yang, S. S. Sinha, Y. Feng, D. B. McCallen, B. Jeremic, “Energy dissipation analysis of elastic-plastic material,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 331, pp. 309-326, 2018.
- [77] M. Nikolić, J. Ćesić, A. Ibrahimbegovic, Ž. Nikolić, “Lattice model for failure based on embedded strong discontinuities in dynamic framework,” *COMPLAS XIV: proceedings of the XIV International Conference on Computational Plasticity: fundamentals and applications, Barcelona*, pp. 568-575, 2017.
- [78] M. Nikolić, J. Čarija, A. Ibrahimbegovic, Ž. Nikolić, “Energy dissipation analysis in localized strain softening plasticity and damage models,” in *XV International Conference on Computational Plasticity. Fundamentals and Applications*, Barcelona, 2019.
- [79] R. L. Taylor, FEAP Finite element Analysis Program, University of California, Berkeley, 2017.
- [80] L. L. Rasmussen, A. P. Assis, “Elastically-homogeneous lattice modelling of transversely isotropic rocks,” *Computers and Geotechnics*, vol. 104, pp. 96-108, 2018.
- [81] G. F. Zhao, Q. Yin, A. R. Russell, Y. Li, W. Wu, Q. Li, “On the linear elastic responses of the 2D bonded discrete element model,” *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 43, no. 1, pp. 166-182, 2019.

- [82] C. Geuzaine, J. F. Remacle, "Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities," *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 79, no. 11, pp. 1309-1331, 2009.
- [83] Z. H. Rizvi, D. Shrestha, A. Sattari, F. Wuttke, "Numerical modelling of effective thermal conductivity for modified geomaterial using Lattice Element Method," *Heat and Mass Transfer*, vol. 54, no. 2, pp. 483-499, 2018.
- [84] Z. H. Rizvi, K. Sembdner, A. Suman, M. J. Giri Prasad, F. Wuttke, "Experimental and Numerical Investigation of Thermo-Mechanical Properties for Nano-Geocomposite," *International Journal of Thermophysics*, vol. 40, no. 5, pp. 1-24, 2019.
- [85] Z. H. Rizvi, M. Nikolić, F. Wuttke, "Lattice element method for simulations of failure in bio-cemented sands," *Granular Matter*, vol. 21, no. 2, pp. 1-14, 2019.
- [86] Z. H. Rizvi, M. A. Khan, H. B. Motra, F. Wuttke, J. Ahmad, "Effective Physical Parameter Evaluation of Shallow Crustal Rocks by Lattice Element Method," *Materials Today: Proceedings*, vol. 18, no. 1, pp. 132-142, 2019.
- [87] J. H. Song, T. Belytschko, "Cracking node method for dynamic fracture with finite elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 77, no. 3, pp. 360-385, 2009.
- [88] M. Braun, J. Fernandez-Saez, "A 2D discrete model with a bilinear softening constitutive law applied to dynamic crack propagation problems," *International Journal of Fracture*, vol. 197, pp. 81-97, 2016.
- [89] M. R. Hirmand, K. D. Papoulia, "A continuation method for rigid-cohesive fracture in a discontinuous galerkin finite element setting," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 115, no. 5, pp. 627-650, 2018.
- [90] R. J. M. Geelen, Y. Liu, T. Hu, M. R. Tupek, J. E. Dolbow, "A phase-field formulation for dynamic cohesive fracture," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 348, pp. 680-711, 2019.
- [91] G. R. Liu, "A step-by-step method of rule-of-mixture of fiber-and particle-reinforced composite materials," *Composite Structures*, vol. 40, no. 3-4, pp. 313-322, 1997.
- [92] B. Pal, M. Riyazuddin Haseebuddin, "Analytical Estimation of Elastic Properties of Polypropylene Fiber Matrix Composite by Finite Element Analysis," *Advances in Materials Physics and Chemistry*, vol. 2, no. 1, pp. 23-30, 2012.
- [93] ANSYS, Inc. Canonsburg, PA 15317, Release 16.2, 2015.



- 
- [94] J.-L. Clément, "Interface acier-beton et comportement des structures en beton arme : caracterisation, modelisation," Doktorski rad, Sveučilište Paris VI, Pariz, 1987.
- [95] N. Dominguez, D. Brancherie, L. Davenne, A. Ibrahimbegovic, "Prediction of crack pattern distribution in reinforced concrete by coupling a strong discontinuity model of concrete cracking and a bond-slip of reinforcement model," *Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software*, vol. 22, no. 5-6, pp. 558-582, 2005.
- [96] S. M. Kulkarni, S. P. Shah, "Response of Reinforced Concrete Beams at High Strain Rates," *ACI Structural Journal*, vol. 95, no. 6, pp. 705-715, 1998.
- [97] K. Kim, J. E. Bolander, Y. M. Lim, "Failure simulation of RC structures under highly dynamic conditions using random lattice models," *Computers & Structures*, vol. 125, pp. 127-136, 2013.
- [98] L. Majidi, N. Usefi, R. Abbasnia, "Numerical study of RC beams under various loading rates with LS-DYNA," *Journal of Central South University*, vol. 25, pp. 1226-1239, 2018.
- [99] L. J. Malvar, J. E. Crawford, "Dynamic Increase Factors for Concrete," *Proceedings of the 28th DDESB seminar, Orlando, FL. ANSI Std*, pp. 1-17, 1998.
- [100] Comité Euro-International du Béton, CEB-FIP Model Code 1990, Trowbridge, Wiltshire, UK: Redwood Books, 1993.
- [101] L. J. Malvar, J. E. Crawford, "Dynamic Increase Factors for Steel Reinforcing Bars," *Proceedings of the 28th DDESB seminar, Orlando, FL. ANSI Std*, pp. 1-17, 1998.
- [102] I. Kožar, J. Ožbolt, "Some aspects of load-rate sensitivity in visco-elastic microplane material model," *Computers and Concrete, an International Journal*, vol. 7, no. 4, pp. 317-329, 2010.