

# Numerički model za identifikaciju parametara mikro-armiranog betona

---

Sulovsky, Tea; Kožar, Ivica; Plovanić, Marina

*Source / Izvornik:* **Zajednički temelji 2023. - uniSTem : deseti skup mladih istraživača iz područja građevinarstva i srodnih tehničkih znanosti, Split, 14.-17. rujna, 2023. : zbornik radova, 2023, 120 - 127**

**Conference paper / Rad u zborniku**

*Publication status / Verzija rada:* **Published version / Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

<https://doi.org/10.31534/10.ZT.2023.16>

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:123:222681>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-04**



*Repository / Repozitorij:*

[FCEAG Repository - Repository of the Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy, University of Split](#)



UDRUGA  
HRVATSKIH  
GRAĐEVINSKIH  
FAKULTETA



<https://doi.org/10.31534/10.ZT.2023.16>

## NUMERIČKI MODEL ZA IDENTIFIKACIJU PARAMETARA MIKRO- ARMIRANOG BETONA

Tea Sulovsky<sup>1</sup>, Ivica Kožar<sup>2</sup>, Marina Plovanić<sup>3</sup>

(1) Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci, Hrvatska, [tea.sulovsky@uniri.hr](mailto:tea.sulovsky@uniri.hr)

(2) Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci, Hrvatska, [ivica.kozar@gradri.uniri.hr](mailto:ivica.kozar@gradri.uniri.hr)

(3) Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci, Hrvatska, [marina.plovanic@gradri.uniri.hr](mailto:marina.plovanic@gradri.uniri.hr)

### Sažetak

Određivanje parametara materijala ključno je za razumijevanje njihovih fizikalnih svojstava, poboljšanje procesa projektiranja i optimizaciju troškova. Zbog izazova mjerenja parametara betona armiranog vlaknima koriste se numerički modeli i inverzna analiza za identifikaciju parametara. U svrhu izrade jednog takvog modela provedena su laboratorijska ispitivanja, uključujući ispitivanja savojne i tlačne čvrstoće betona, na uzorcima betona bilježeći tri parametra: vertikalni pomak, pomak otvaranja pukotine i nanesenu silu. Rezultati laboratorijskih ispitivanja poslužili su kao referenca za razvoj numeričkog modela mikro-ojačanog betona koji je generirao podatke naknadno korištene kao ulazne vrijednosti za inverzni model temeljen na Levenberg-Marquardt metodi. Verifikacija modela uključivala je usporedbu rezultata s podacima dobivenim iz laboratorijskih ispitivanja.

*Ključne riječi: mikro-armirani beton, matematički model, inverzna analiza, procjena parametara*

## NUMERICAL MODEL FOR PARAMETER IDENTIFICATION OF MICRO- REINFORCED CONCRETE

### Abstract

Determining material parameters is crucial for understanding their physical properties, improving the design process, and optimizing costs. Due to the challenges of measuring parameters in fiber-reinforced concrete, numerical models and inverse analysis are employed for parameter identification. Laboratory tests, including bending and compressive strength tests, were conducted on concrete samples, recording three parameters: vertical displacement, crack mouth opening displacement, and applied force. The laboratory test results served as a reference for developing a numerical model of micro-reinforced concrete, which generated simulated data used as input for an inverse model based on the Levenberg-Marquardt method. Model verification involved comparing the results with the data obtained from the laboratory tests.

*Keywords: fiber-reinforced concrete, mathematical model, inverse analysis, parameter estimation*

## 1. Uvod

Identifikacija i kvantifikacija parametara nekog inženjerskog materijala imaju značaj u unaprijeđenu razumijevanja njegovih fizikalnih svojstava, poboljšanje metoda i postupaka upotrebe u projektiranju te optimizaciju troškova. Proces identifikacije parametara često zahtijeva mnoga laboratorijska ispitivanja koja mogu biti dugotrajna, financijski iscrpna te ponekada i nedovoljna. U slučaju mikro-armiranog betona, čija je glavna karakteristika zamjena klasične šipkaste armature malim, kratkim vlaknima, parametri koji opisuju betonsku smjesu, čelična vlakna i njihovu međusobno interakciju često su fizički nemjerljive veličine.

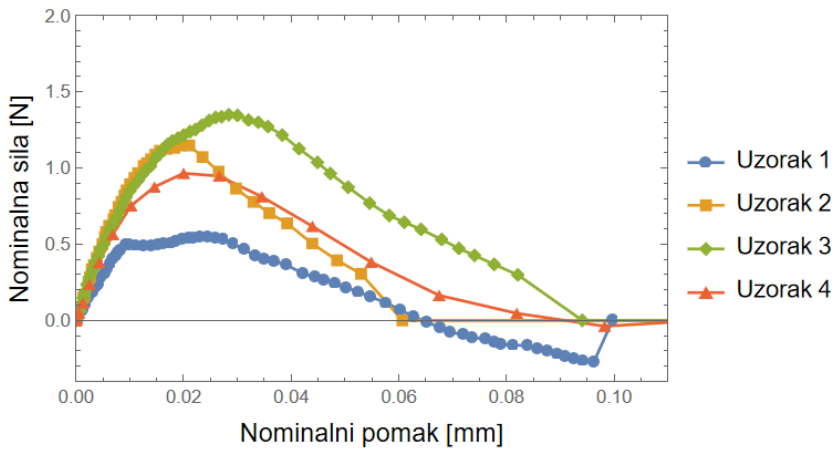
Jedna od metoda indirektnog određivanja nepoznatih veličina je korištenje računalnih modela koji mogu zamijeniti skupe eksperimentalne testove. Međutim, izuzetna heterogenost betona predstavlja značajan izazov pri opisivanju tog materijala numeričkim metodama, što se dodatno komplicira dodatkom vlakana u smjesu. U prethodnim istraživanjima korištena su dva pristupa pri rješavanju ovog problema: primjena odgovarajućeg modela konačnih elemenata gdje su vlakna diskretizirana i smještena duž rubova konačnih elemenata [1] te korištenje Modela snopova vlakana (eng. 'Fiber Bundle Model' - FBM) za kompozitne materijale [2].

U ovom radu prezentiran je novi deterministički numerički model koji inverznom analizom, temeljenom na Levenberg-Marquardtovom algoritmu, identificira materijalne parametre mikro-armiranog betona koji utječu na globalni odziv gotovog betonskog elementa.

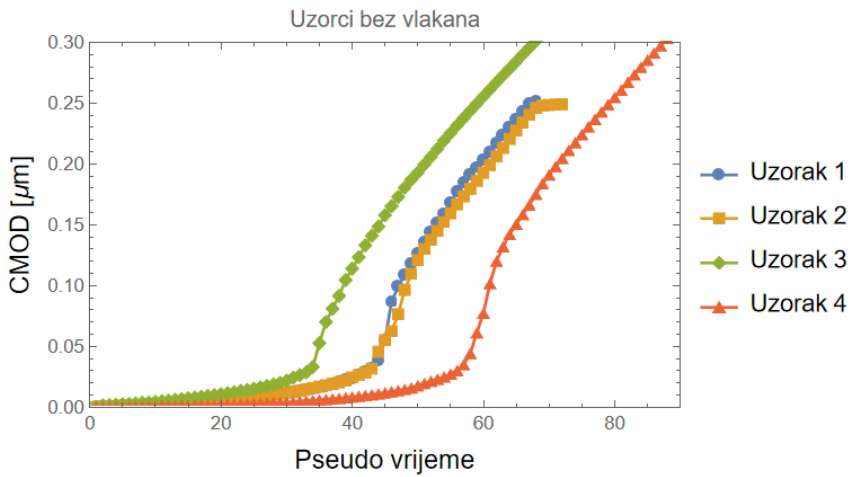
## 2. Laboratorijska ispitivanja

U svrhu dobivanja uvida u ponašanje greda izrađenih od mikro-armiranog betona provedena su laboratorijska ispitivanja. Izvršena su dva testa: savijanje greda u tri točke i ispitivanje tlačne čvrstoće kocaka. Svi ispitni uzorci izrađeni su od samoslijegajućeg betona. Ispitivanje tlačne čvrstoće provedeno je na standardnim uzorcima betona dimenzija 150x150x150 mm nanošenjem opterećenja do sloma kocke slijedeći normu za određivanje tlačne čvrstoće ispitnih uzoraka očvrstlog betona [3]. Srednja vrijednost svih mjerenja uzeta je kao referentna vrijednost tlačne čvrstoće betona.

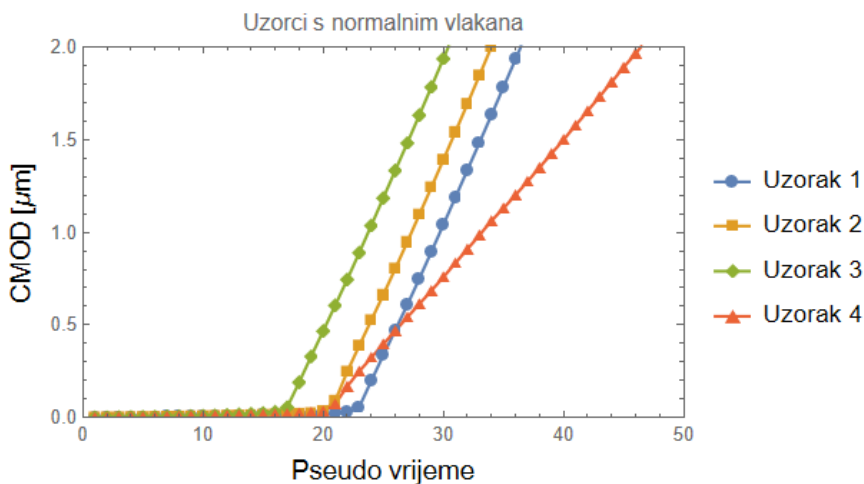
Uzorci za ispitivanje savijanjem u tri točke kategorizirani su u tri skupine: grede bez vlakna, grede s normalnim vlaknima i grede s hrapavim vlaknima. Prilikom pripreme betona armiranog vlaknima ona se obično dodaju tijekom miješanja mokrih sastojaka, što rezultira njihovom homogenom, ali nepredvidivom raspodjelom unutar gotove smjese. Kako bi se eliminirala nesigurnost pozicije vlakana unutar ispitnih uzoraka, vlakna su postavljena na predefinirane pozicije uz pomoćne elemente prije ulijevanja betonske smjese. Nakon 28 dana pomoćni elementi su uklonjeni ostavljajući „zareze“ na gredi koji predefiniira poziciju pukotine i olakšava promatranje ponašanja vlakana tijekom savijanja. Sva ispitivanja provedena su uz kontrolu pomakom do sloma grede slijedeći normu za određivanje čvrstoće na savijanje uzoraka očvrstlog betona [4]. Mjerene veličine uključuju: vertikalni pomak, pomak otvora pukotine (horizontalni pomak) i nanešenu silu. Rezultati ispitivanja korišteni za validaciju numeričkog modela prikazani su na Grafikonima 1. do 4.



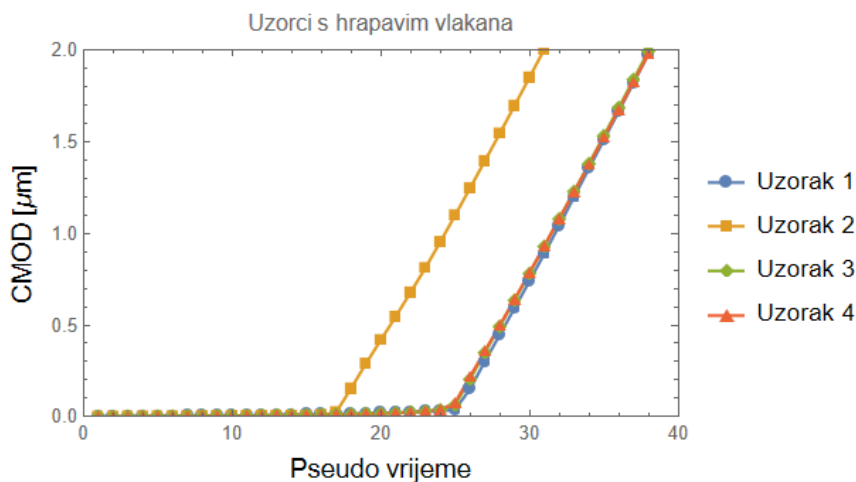
Grafikon 1. Dijagram sila-pomak betona



Grafikon 2. Horizontalni pomak otvora pukotine grede za uzorke bez vlakana



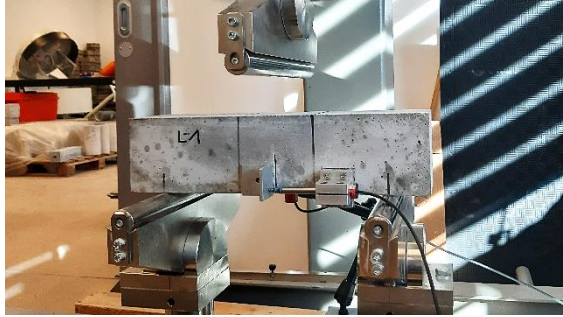
Grafikon 3. Horizontalni pomak otvora pukotine grede za uzorke s normalnim vlaknima



Grafikon 4. Horizontalni pomak otvora pukotine grede za uzorke s hrapavim vlaknima

## 2.1. Deformacija otvora pukotine

Deformacija otvora pukotine (eng. 'Crack Mouth Opening Displacement' - CMOD) je horizontalna deformacija grede pri savijanju koja se mjeri na vrhu pukotine kako je prikazano na Slici 1.



**Slika 1.** Konfiguracija testa savijanja s postavljenim mjeracem pomaka otvora pukotine CMOD je od svih rezultata dobivenih laboratorijskim ispitivanjem jedina veličina koja direktno povezuje poprečni i uzdužni presjek grede. Analizom te veličine moguće je dobiti uvid u utjecaj materijalnih parametara, kao što su oni koji opisuju vlakna u betonu, na globalni odziv grede pri opterećenju.

### 3. Matematički model mikro-armiranog betona

Beton je matematički opisan dijagramom sila-pomak:

$$f_b(x, a_t, b_t, a_c, b_c) = \begin{cases} a_c x E_b \exp(-b_c x) & \text{if } x < 0 \\ a_t x E_b \exp(-b_t x) & \text{if } x \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

gdje su  $a_t$  i  $b_t$  parametri ponašanja betona u vlaknu,  $a_c$  i  $b_c$  parametri ponašanja betona u tlaku te  $E_b$  modul elastičnosti betona. Jednadžba odnosa pomaka i sile za čelična vlakna je sljedeća:

$$f_a(x, F_t, E_u, E_d) = \begin{cases} x E_b \exp(-b_c x) & \text{if } x < 0 \\ x E_u & \text{if } x > 0 \wedge x < x_{elast} \\ (x - x_{elast}) E_d & \text{if } x \geq x_{elast} \wedge x < x_{limit} \\ 0 & \text{if } x > x_{limit} \end{cases} \quad (2)$$

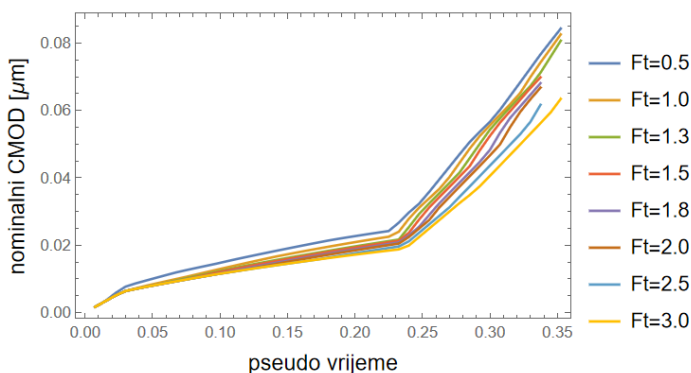
Parametri koji opisuju ponašanje vlakana su granična sila  $F_t$  te moduli elastičnosti čeličnih vlakana pri opterećenju i rasterećenju  $E_u$  i  $E_d$ . Jednadžbe materijala (1) i (2) su međusobno nezavisne, no dovode se u relaciju unutar jednadžbi ravnoteže:

$$\begin{aligned} F(\epsilon, \kappa) &= \Delta h \sum_{i=1}^{sloj} f_b[(h_i - \epsilon h) t g(\kappa)] + \Delta a f_a(h_a - \epsilon h) = 0 \\ M(\epsilon, \kappa) &= \Delta h \sum_{i=1}^{sloj} (h_i - \epsilon h) f_b[(h_i - \epsilon h) t g(\kappa)] + \Delta a (h_a - \epsilon h) f_a(h_a - \epsilon h) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

gdje gornja jednadžba predstavlja ravnotežu sila, a donja ravnotežu momenata. Iz jednadžbi ravnoteže mogu se odrediti položaj neutralne osi grede  $\epsilon$  te mjera otvora pukotine grede izražene kutom  $\kappa$ . Te dvije vrijednosti se potom koriste u izrazu za deformaciju otvora pukotine:

$$d_{cmo} = (1 - \epsilon) \cdot h \cdot t g(\kappa) \quad (4)$$

gdje  $h$  predstavlja visinu pojedinog sloja grede. Rezultati dobiveni numeričkim modeliranjem izraza (4) prikazani su na Grafikonu 5.



**Grafikon 5.** Rezultati CMOD za  $E_b=40$  GPa i vrijednosti  $F_t$  od 0.5kN do 3.0kN

## 4. Inverzni model za identifikaciju parametara

Inverzni model je skup računalnih tehnika za određivanje podataka o fizičkom ponašanju u prirodi kada se pretpostavi početni uzrok pojave. Stoga, kod takvih modela izračuni započinju poznavanjem općeg načela problema koji se rješava te rezultiraju procjenama parametara ponašanja modela [5]. Inverzni model u ovom radu temelji se na metodi Levenberg-Marquardt.

### 4.1. Lavenberg-Marquardt metoda za inverznu analizu

Levenberg-Marquardt metoda je iterativna tehnika za rješavanje problema nelinearnog najmanjeg kvadrata za procjenu parametara. Ova metoda iterativno prilagođava promatrani parametar neke funkcije dok ne pronađe vrijednost koja minimizira grešku između predviđenih i stvarnih podataka.

Opći izraz za sumu kvadrata u jednadžbi koja opisuje problem prilagođavanja funkcije modela  $\hat{y}(x, p)$  nezavisnoj varijabli  $t$  i vektoru od  $n$  parametara  $p$  setu od  $m$  podataka  $(t_i, y_i)$  je:

$$SS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (5)$$

gdje su  $y_i$  poznati (mjereni) podaci, a  $\hat{y}_i$  je ciljna funkcija. Ukoliko je  $\hat{y}(x, p)$  nelinearna u parametrima modela  $p$ , tada postupak minimizacije postaje iterativan.

$$\frac{\partial SS}{\partial p} = 0 \quad (6)$$

Uvrštavanjem izraza (5) u (6) dobiva se:

$$\frac{\partial SS}{\partial p} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial p} \quad (7)$$

gdje je  $\frac{\partial \hat{y}_i}{\partial p}$  Jakobijska matrica dimenzija  $m \times n$  koja predstavlja lokalnu osjetljivost funkcije na varijacije vrijednosti parametara  $p$ . To se, također, naziva i koeficijentom osjetljivosti u svakoj točki mjerenja  $x_p$  te se može zapisati kao:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) \chi_p = 0 \quad (8)$$

Perturbirana vrijednost parametra sa svakom iteracijom označava se s  $\Delta p$ . Ciljna funkcija od  $p + \Delta p$  se tada zapisuje kao:

$$\hat{y}_i(p + \Delta p) = \hat{y}_i(p) + \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial p} \Delta p \quad (9)$$

Kad se (9) uvrsti natrag u (8), dobiva se:

$$\sum_{i=1}^n \left( y_i - \hat{y}_i(p) - \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial p} \Delta p \right) \chi_p = 0 \quad (10)$$

Iz izraza (10) dobiva se vrijednost perturbacije parametra  $p$  kao:

$$\Delta p = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i(p)) \chi_p}{\sum_{i=1}^n \chi_p^2} \quad (11)$$

## 4.2. Određivanje parametara materijala $E_b$ i $F_t$

Prethodno opisana metoda primjenjuje se za određivanje vrijednosti modula elastičnosti betona  $E_b$  i granične sile čeličnog vlakna  $F_t$  te izraz (11) se zapisuje kao:

$$\Delta E_b = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - d_{cmod}(E_b, F_t)) \chi_{E_b}}{\sum_{i=1}^n (\chi_{E_b})^2} \quad (12)$$

za minimizaciju po  $E_b$ , te

$$\Delta F_t = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - d_{cmod}(E_b, F_t)) \chi_{F_t}}{\sum_{i=1}^n (\chi_{F_t})^2} \quad (13)$$

za minimizaciju po  $F_t$ . Izračun započinje pretpostavljanjem početnih vrijednosti  $E_{b,0}$  i  $F_{t,0}$ . Izraz (4) koristi se kao ciljna funkcija, a koeficijenti osjetljivosti dobiveni iz izraza (8) su:

$$\chi_{E_{b,1}} = \frac{y_1 - d_{cmod}(E_{b,0}, F_{t,0})}{\Delta E_b} \quad (14)$$

za parametar  $E_b$ , tj.

$$\chi_{F_{t,1}} = \frac{y_1 - d_{cmod}(E_{b,0}, F_{t,0})}{\Delta F_t} \quad (15)$$

za parametar  $F_t$ . Sukladno tome, izrazi za perturbaciju oba parametara su sljedeći:

$$\Delta E_b = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - d_{cmod}(E_{b,0}, F_{t,0})) \chi_{E_{b,1}}}{\sum_{i=1}^n \chi_{E_{b,1}}^2} \quad (16)$$

za parametar  $E_b$ , tj.

$$\Delta F_t = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - d_{cmod}(E_{b,0}, F_{t,0})) \chi_{F_{t,1}}}{\sum_{i=1}^n \chi_{F_{t,1}}^2} \quad (17)$$

za parametar  $F_t$ . Zbrajanjem početne pretpostavke s izrazima (16) i (17) za odgovarajuće parametre dobiva se konačna vrijednost iteracije.

$$F_{t,1} = F_{t,0} + \Delta F_t \quad (18)$$

$$E_{b,1} = E_{b,0} + \Delta E_b \quad (19)$$



Nakon toga se započinje nova iteracija i nastavlja se sve dok se ne pronađu vrijednosti lokalnih minimuma u kojima oba parametara konvergiraju.

Ovaj postupak se primijenio na podacima s Grafikona 1. uz vrijednost parametara  $E_b=45.0$  GPa i  $F_t=1.8$  kN. Inverznom analizom dobiveni su zadovoljavajući rezultati, pri čemu su vrijednosti tih istih parametara iznosile  $E_b=43.12$  GPa i  $F_t=1.71$  kN, uz konvergenciju unutar 20 iteracija.

## **5. Zaključak**

Proveden je izvod i opis inverznog modela za određivanje nepoznatih vrijednosti parametara materijala. Model je verificiran usporedbom rezultata s onima dobivenima laboratorijskim ispitivanjima. Daljnji rad uključivat će nadogradnju inverznog modela te analizu osjetljivosti parametara.

Zahvale: Ovaj rad je podržan projektom HRZZ 7926 "Razdvajanje utjecaja parametara u inženjerskom modeliranju s parametarskom identifikacijom" na čemu zahvaljujemo.

## **Literatura**

- [1] Smolčić, Ž., Ožbolt, J.: Mezo model betona armiranog vlaknima: Efektivna posmična veza između vlakna i betona, Zbornik radova 17(1), Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci, pp.197–212, 2014, doi: <https://doi.org/10.32762/zr>
- [2] Sampson, W. W.: Modelling Stochastic Fibrous Materials with Mathematica, Engineering Materials and Processes, Springer Nature, London, 2009
- [3] Testing hardened concrete – part 3: Compressive strength of test specimens (en 12390-3:2019), 2019, doi: 10.3403/30360097U
- [4] Testing hardened concrete – part 5: Flexural strength of test specimens (en 12390-5:2019), 2019, doi: 10.3403/30360073U
- [5] Menke, W.: Geophysical data analysis: Discrete inverse theory, Academic Press, pp. 11-300, 2018 doi: 10.1016/B978-0-12-813555-6.09999-8