

# Priručnik za vježbe iz predmeta Geodezija

---

Duplančić-Leder, Tea; Bačić, Samanta; Gilić, Frane

**Authored book / Autorska knjiga**

*Publication status / Verzija rada:* **Published version / Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

*Publication year / Godina izdavanja:* **2023**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:123:922836>

<https://doi.org/10.31534/9789536116942>

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-16**



*Repository / Repozitorij:*

[FCEAG Repository - Repository of the Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy, University of Split](#)



UNIVERSITY OF SPLIT

  
DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI



# Priručnik za vježbe iz predmeta Geodezija

**Tea Duplančić Leder**

**Samanta Bačić**

**Frane Gilić**

Split, 2023.



**Izdavač:**

Sveučilište u Splitu  
Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije

**Tehnički urednici:**

prof. dr. sc. Tea Duplančić Leder  
Samanta Bačić, mag. ing. geod. et geoinf.  
Frane Gilić, mag. ing. geod. et geoinf.

**Recenzenti:**

izv. prof. dr. sc. Željko Hećimović  
izv. prof. dr. sc. Martina Baučić  
doc. dr. sc. Danko Markovinović

Udžbenici Sveučilišta u Splitu = Manualia Universitatis studiorum Spalatensis

Odlukom Senata Sveučilišta u Splitu, KLASA: 029-03/23-01/11, URBOJ: 2181-202-3-01-18, od 13. srpnja 2023. godine, za ovu knjigu odobreno je korištenje naziva Sveučilišni priručnik

**e-ISBN 978-953-6116-94-2**



## Uvod

Priručnik je pisan za potrebe izvođenja vježbi iz predmeta Geodezija na stručnom i sveučilišnom prijediplomskom studiju Građevinarstvo na Fakultetu građevinarstva, arhitekture i geodezije Sveučilišta u Splitu. Predmet Geodezija priprema buduće inženjere građevinarstva za obavljanje osnovnih zadataka u prostoru, kao što je određivanje pozicije te suradnji s geodetima na gradilištima ili pri drugim građevinskim radovima.

Predviđeni program vježbi obuhvaća 7 vježbi, koje su tematski podijeljeni u tri cjeline, pa se tako i predaju u obliku triju projekata. Prvi projekt sastoji se od tri vježbe: upoznavanje sa službenim kartama i planovima i očitavanje koordinata s topografskih karata, transformacije i konverzije koordinata te rad s GNSS prijamnicima i kartiranje dobivenih lokacija u *Google Earth* pregledniku. Drugi projekt bavi se određivanjem koordinata u ravnini, a sastoji od dviju vježbi: mjerenje horizontalnih kutova girusnom metodom (terenska vježba) i obrade rezultata mjerenja te računanje koordinata točaka u poligonskom vlaku. Treći projekt obrađuje mjerenje visina koje se obrađuju u dvjema vježbama: trigonometrijskom nivelmanu ili mjerenju visina i geometrijskom nivelmanu ili mjerenju visinskih razlika (terenska vježba) metodom nivelanskog vlaka i obradi rezultata mjerenja.

Izvedbenim programom predviđena su dva sata auditornih, konstruktivnih i/ili terenskih vježbi tjedno. Za konstruktivni dio vježbi (obrada zadanih ili vlastitih mjerenja prikupljenih na terenskim vježbama) potrebno je posjedovati kalkulator s mogućnošću računanja trigonometrijskih funkcija. Prije svakih vježbi potrebno je pročitati kratke upute i opis vježbe iz ove skripte, te se tako upoznati s geodetskim instrumentima, metodama i postupkom rada te obradom prikupljenih podataka.

Studenti prije svake terenske vježbe trebaju s mrežnih stranica predmeta (e-učenje) skinuti obrazac za računanje (formular) u koji zapisuju izmjerene ili očitane vrijednosti. Ispunjeni obrazac za računanje potrebno je uredno prepisati, sastaviti tehničko izvješće i predati predmetnom asistentu u dogovoreno vrijeme (najviše tjedan dana nakon obrade). Informacije i gradivo o sadržaju vježbi, obrasci za računanje, te pregled bodova kolokvija i testova mogu se naći na mrežnim stranicama predmeta na e-učenju (dostupan na <https://merlin.srce.hr/>). Projekti se predaju u dogovoreno vrijeme u formi tehničkog izvješća prije izlaska na kolokvij (međuispit). Studenti koji nisu predali projekte/programme u dogovoreno vrijeme ne mogu pristupiti kolokviju (međuispitu).



## Sadržaj

<b>PROJEKT 1 Upoznavanje s kartama i koordinatama .....</b>	<b>1</b>
1. vježba: Korištenje karata i planova .....	3
2. vježba: Transformacija i konverzija koordinata .....	17
3. vježba: GNSS mjerenja.....	22
<b>PROJEKT 2 Mjerenje kutova i određivanje koordinata .....</b>	<b>32</b>
4. vježba: Mjerenje horizontalnog kuta i obrada podataka mjerenja .....	34
5. vježba (1. dio): Računanje smjernog kuta .....	43
5. vježba (2. dio): Računanje poligonskog vlaka .....	50
<b>PROJEKT 3 Mjerenje visinskih razlika - niveliranje.....</b>	<b>66</b>
6. vježba: Geometrijski nivelman.....	68
7. vježba: Trigonometrijski nivelman .....	82
<b>LITERATURA .....</b>	<b>88</b>





# **PROJEKT 1**

## **UPOZNAVANJE S KARTAMA I KOORDINATAMA**



# 1. vježba: Korištenje karata i planova

**Opis vježbe:** Upoznavanje s različitim vrstama državnih karata i planova (ili jednostavnije podlogama koje izdaje Državna geodetska uprava) kao i sa sastavnim dijelovima karata: topografskim ključem, legendom i objektima koji se prikazuju na karti. Sve državne karte moguće je pronaći na internetskom izvorniku prostornih podataka – geoportalu Državne geodetske uprave. S karte je potrebno očitati koordinate, koje se dalje mogu koristiti za različite potrebe.

**Ishodi učenja:** Studenti će razlikovati vrste karata i planova, očitavati podatke s njih te se služiti njima za potrebe planiranja i projektiranja u prostoru.

**Potrebna oprema i pribor:** Dva trokuta i šestar.

## 1.1. Kratak opis vrsta karata

**Karta** (zemljovid), prema Međunarodnom kartografskom društvu, je kodirani prikaz geografske stvarnosti koji prikazuje izabrane objekte i svojstva, a rezultat je autorove kreativnosti i odabira. To je slika zemljine površine ili njenog dijela prenesena u ravninu u određenom mjerilu. Objekti se na Zemljinoj površini prikazuju posebnim oznakama (topografskim znakovima), a njihov međusobni raspored i povezanost su jednaki kao i na površini Zemlje. Podaci na kartama sakupljaju se geodetskim mjerenjima.

Svaka karta sadrži osnovne i kartografske elemente:

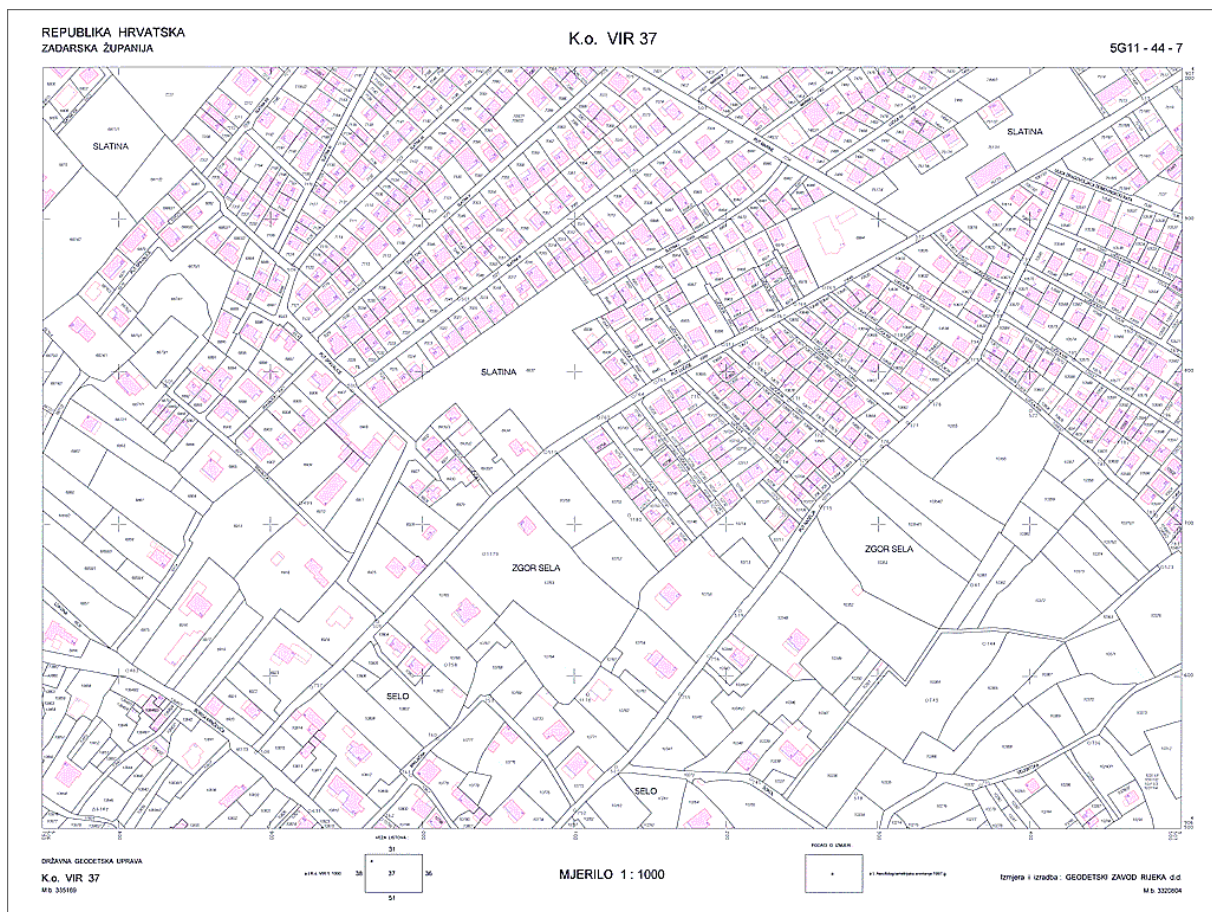
1. osnovne elemente (mjerilo, koordinatnu mrežu, geodetske točke) i podatke o karti (podaci o projekciji, legenda, godinu izdanja i sl.) te
2. kartografske elemente, koje dijelimo na:
  - a. fizičke – reljef, vegetacija, vode, geološki sastav...;
  - b. društvene – naselja, objekti, prometne mreže...;
  - c. ostale – topografski znakovi, nadmorske visine, nazivi ...

Državna geodetska uprava (DGU; [www.dgu.hr](http://www.dgu.hr)) je institucija koja je u Republici Hrvatskoj zadužena za izradu **službenih** karata i planova, kao i za prikupljanje i obradu prostornih podataka na temelju kojih se oni izrađuju. Standardna ponuda **kartografskih proizvoda** (karata i planova) DGU-a uključuje:

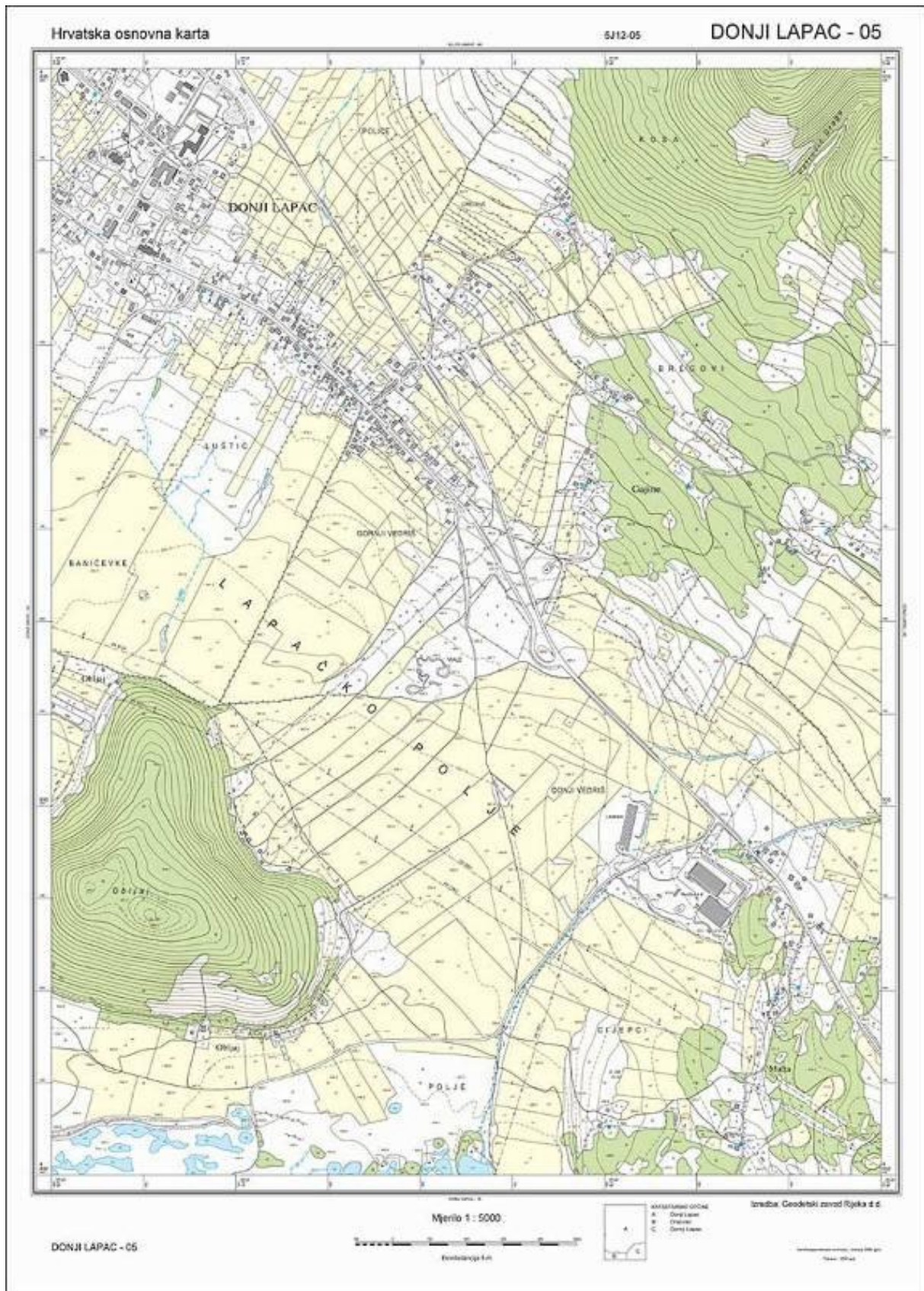
1. Katastarskih planova (slika 1.1), koji se izrađuju u mjerilu 1:1 000;
2. Hrvatske osnovne karte (HOK; slika 1.2) u mjerilu 1:5 000;
3. Topografskih karata (TK; slika 1.3), koje se izrađuju u mjerilima 1:25 000, 1:50 000...;
4. Digitalnih ortofotokarata (DOF slika 1.4) u mjerilu 1:5 000.

Treba napomenuti da razliku između plana i karte čini mjerilo 1:5 000, naime do tog se mjerila svi objekti mogu prikazati u stvarnim veličinama, a od tog mjerila manji se objekti prikazuju znakovima. Sve države imaju slične serije karata i planova kojima prikazuju prostor, a služe različitim korisnicima da bi lakše mogli obavljati svoje zadatke. Osim standardnih kartografskih proizvoda DGU opskrbljuje korisnike i ostalim geodetskim proizvodima kao što su fotogrametrijske snimke, Digitalni Modeli Reljefa (DMR) i drugim proizvodima.

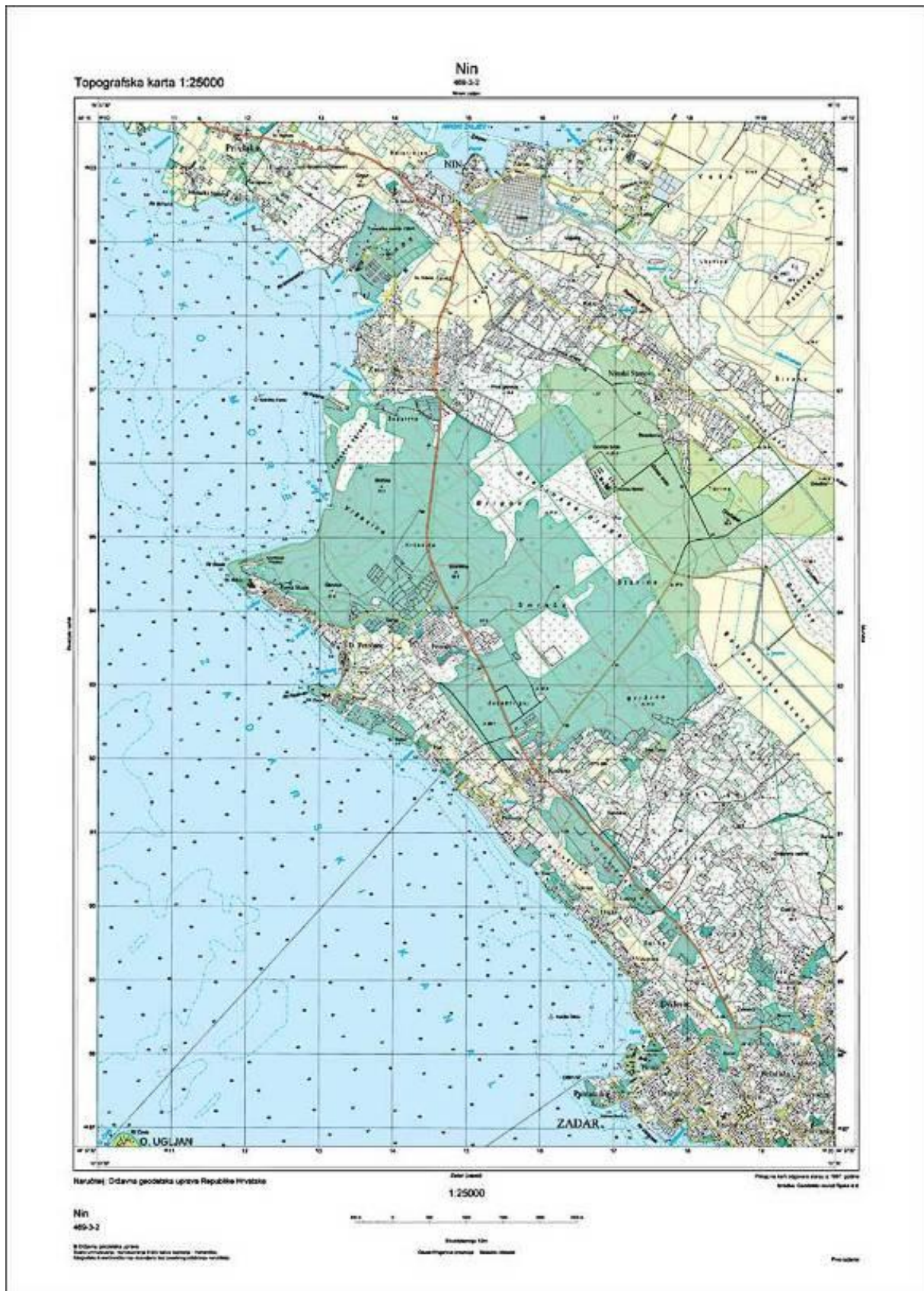
Slika 1.1. prikazuje katastarski plan rađen u mjerilu 1:1 000. Karte i planovi nose naziv prema najvećem mjestu kojeg podjela obuhvaća, a nazivu je dodan redni broj podjele (npr. Zagreb broj 320, Ivanić Grad 321, Bjelovar 322). Prikazani katastarski plan prikazuje dio katastarske općine Vir iz Zadarske županije sa svim katastarskim česticama ili dijelovima zemljišta koji pripadaju jednom vlasniku i svim objektima (nekretninama) na čestici. Na slici 1.2. prikazana je Hrvatska osnovna karta (HOK) mjerila 1:5 000. Slika 1.3. prikazuje topografsku kartu (TK25) u mjerilu 1:25 000, a na slici 1.4. možemo vidjeti digitalnu ortofoto kartu (DOF) koja se izrađuje u istom mjerilu i obuhvatu kao i Hrvatska osnovna karta.



Slika 1.1. Katastarski plan (mjerilo 1:1 000)



Slika 1.2. Hrvatska osnovna karta (mjerilo 1:5 000)



Slika 1.3. Topografska karta (mjerilo 1:25 000)



© Geografski zavod Hrvatske Republike

Mjerilo 1:5000

Uređeno: Zavod za kartografiju i GIS - Zagreb

VARAŽDIN - 47



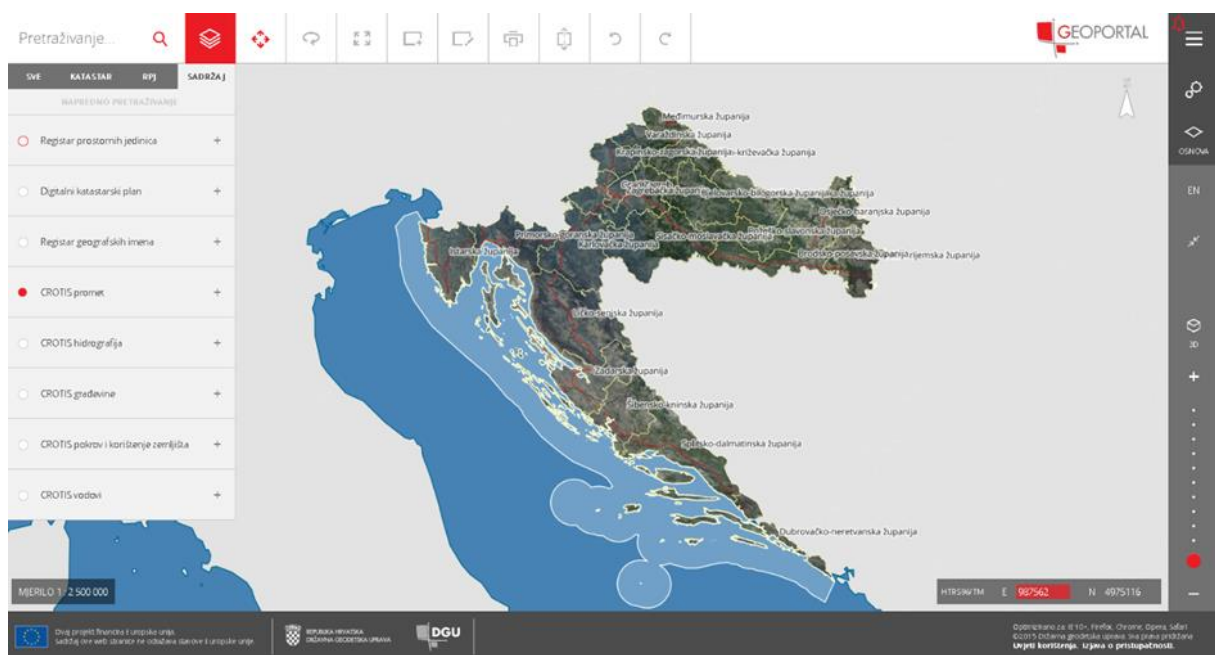
Slika 1.4. Digitalna Ortofoto karta (mjerilo 1:5 000)



## 1.2. Geoportal

**Geoportal** Državne geodetske uprave možemo naći na adresi <https://geoportal.dgu.hr/>, a predstavlja web stranice na kojima možemo naći veliki broj prostornih podataka na jednom mjestu (slika 1.5.). Slojevi podataka koje se prikazuju na Geoportalu su: digitalni ortofoto (DOF5), hrvatska osnovna karta (HOK5), topografske karte (TK25), digitalni katastarski plan (DKP; katastarske općine, čestice, zgrade). Ostali podaci koje na njemu možete pronaći su: registar prostornih jedinica (županije, gradovi i općine, naselja, mjesne samouprave, ulice i kućne brojeve), prikaz prometa (prometne površine, pruge, prometnice), hidrografiju (elementi vodotoka, more i vode stajaćice, široki i uski vodeni tokovi, vodene prepreke), građevine (manje građevine, veće građevine, zgrade, izgrađene barijere), pokrov i korištenje zemljišta (javne površine, gospodarsko područje, ostala prirodna područja, poljoprivredno zemljište, šumska područja, upotreba zemljišta) te prikaz različitih vodova.

Svi korisnici imaju pravo korištenja osnovnih geografskih podataka besplatno ako se koriste za nekomercijalne svrhe. Portal je preglednik rasterskih i vektorskih slojeva s mogućnošću ispisa prikaza.



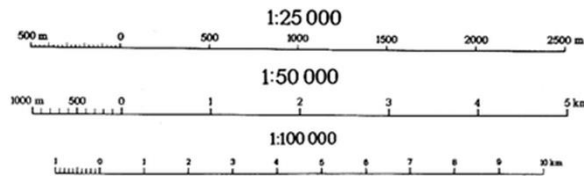
Slika 1.5. Sučelje Geoportala DGU-a

## 1.3. Mjerilo

**Mjerilo** predstavlja odnos između udaljenosti na karti i stvarne udaljenosti u prirodi. Dvije su vrste mjerila: brojčano (numeričko) i grafičko (linearno).

**Brojčano ili numeričko mjerilo** (slika 1.6. gore) prikazuje odnos udaljenosti na karti i u prirodi izražen u obliku odnosa (1:50000) ili razlomka (1/50000). Brojnik nam pokazuje iznosi dužina na karti, a nazivnik dužinu u prirodi.

**Grafičko ili linearno mjerilo** (slika 1.6. dolje) nam grafički prikazuje odnos dužina na karti i u prirodi, pa se vrijednosti uspoređuju bez računanja očitavanjem. Za točnije mjerenje koristimo poprečno mjerilo.



Slika 1.6. Tri primjera brojčanog (gore) i grafičkog mjerila (dolje)

## 1.4. Kartografski prikaz terena

Visina je vertikalna udaljenost izmjerena od nulte nivo plohe i odabrane točke naziva se **apsolutna (nadmorska) visina**. Nulta nivo ploha (koju nazivamo geodetskom nulom) je ploha koja odgovara srednjoj razini mora koja se dobiva na temelju višegodišnjih mjerenja morske razine i od koje se računaju nadmorske ili apsolutne visine. Razlika između dvije apsolutne visine naziva se **relativna visina (visinska razlika)** (slika 1.7.)



Slika 1.7. Apsolutna visina (lijevo) relativna visina (desno)

Za prikazivanje reljefa na kartama najčešće se koriste izohipse (linije koje spajaju točke jednakih visina) i značajne visinske točke (kotama), bojanjem reljefa hipsometrijskom metodom ili bojanjem intervala površina između izohipsa određenim bojama, a odavno se koristi sjenčanje, kao pokušaj simulacije treće dimenzije na karti (slika 1.8.).



Slika 1.8. Prikazivanje visina na karti: hipsometrijskom skalom boja (lijevo), izohipsama (u sredini) sjenčenjem (desno)

Na topografskih i ostalim kartama izdanja DGU-a prikazana hidrografija ili vodna mreža su u plavoj boji, raslinje i vegetacija se prikazuju zelenom bojom, a geološki sastav područja i prikaz društveno-zemljopisnih elemenata i ostale oznake prikazane su crnom bojom. Veličina slova naglašava važnost objekta. Topografski znakovi su dogovoreni simboli koji predstavljaju objekte na terenu, a čije se središte poklapa s objektom u prirodi, a objašnjeni su u legendi.

## 1.5. Mjerenja na karti

**Mjerenja ravnih linija** (slika 1.9.) – šestarom uzmemo udaljenost koju želimo izmjeriti, preneseno udaljenost na grafičko mjerilo na karti i očitamo vrijednost udaljenost u metrima. Grafičko mjerilo na karti 1:25000 podijeljeno je po 25 metara.



Slika 1.9. Mjerenje ravnih linija na karti

## 1.6. Točke geodetske osnove

Popisi geodetskih točaka (točaka s definiranim koordinatama i trajno označenih na terenu; trigonometrijske, poligonske točke i reperi) mogu se naći u katastarskim uredima i ispostavama, a geodetske točke se prikazuju i na kartama. Na slici 1.10. prikazan je dio topografske karte s prikazanim znakom geodetske točke i dio tablice s popisa koordinata geodetskih točaka (trigonometrijske točke; slika 1.10). Na karti vidimo da su te točke prikazane znakom trokuta ili kruga. U tablici su navedeni svi podaci o geodetskoj točki (pravokutne i geografske koordinate, visina i oznaka točke te napomena npr. podnožje križa na tornju crkve).

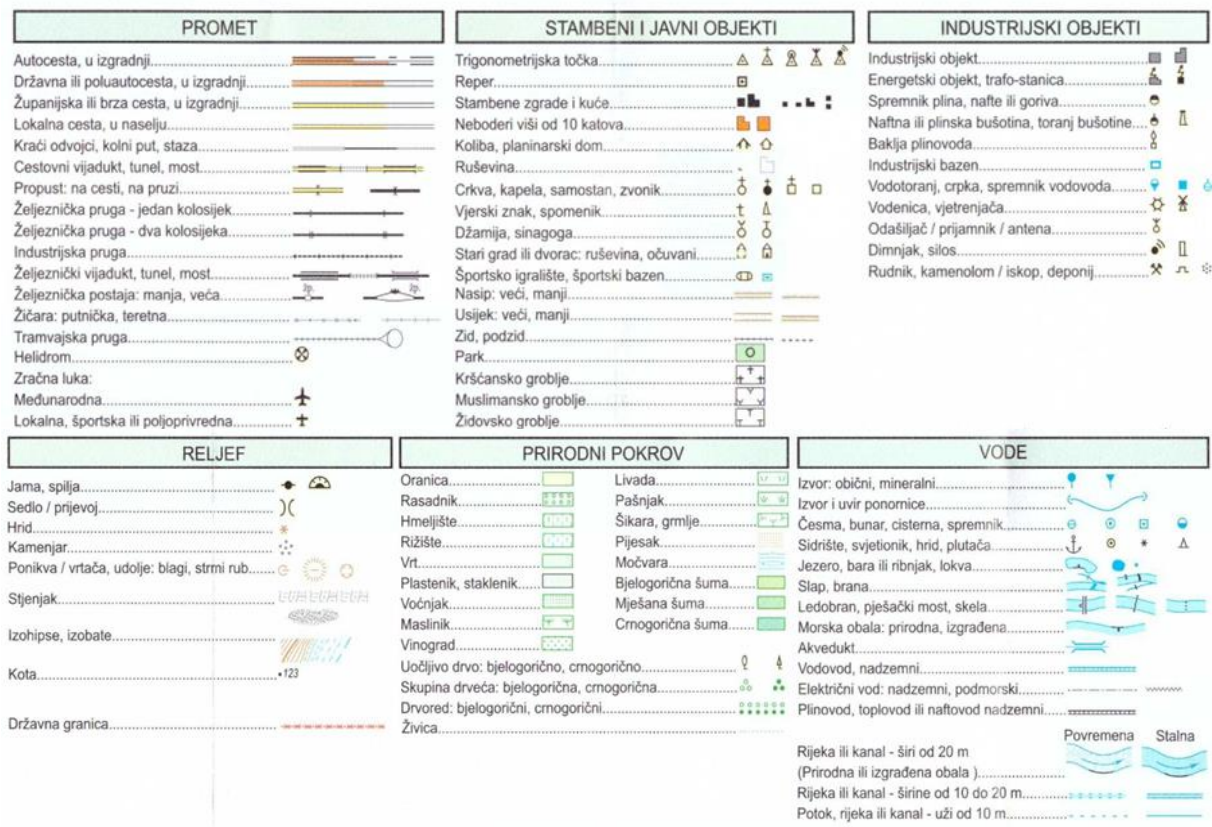


Redni broj točke	PRAVOKUTNE KOORDINATE		APSOLOTNA VISINA Z (metri)	GEOGRAFSKE KOORDINATE Širina (ϕ) Dužina (λ)	Oznaka točke u trigonometrijskoj mreži		PRIPOMENA	
	X (metri)	Y (metri)			OSTR	RED		
								KSTAR
103	49 87 842,60	73 35 894,64	79,77	45 08 21,801	18 54 36,177	351	4	
104	49 87 816,14	73 37 311,39	81,05	45 08 22,176	18 55 56,537	352	4	V10

Slika 1.10. Točke geodetske osnove prikazane na karti (lijevo) te u popisu točaka (desno)

## 1.7. Legenda

Popisi svih simbola i znakova koji se pojavljuju na karti objašnjeni su na legendi. Na slici 1.11. je prikazan dio znakova koji se najčešće koriste na topografskoj karti, a podijeljeni su na znakove za prometnice, znakove koji se koriste za prikazivanje stambenih, javnih i industrijskih objekata, reljefa, prirodnog pokrova i hidrologije ili vodenih površina.



Slika 1.11. Legenda

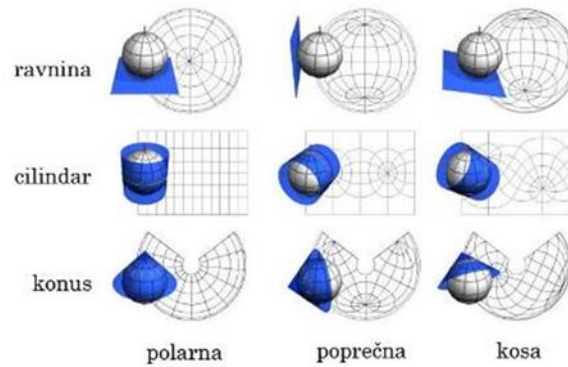
Unutarnji okvir karte čine podaci o geografskim koordinatama i mreže pravokutnih koordinata, a vanjski okvir karte sadrži potrebne podatke o karti:

1. elementi za mjerenja (mjerila, ekvidistanciju, magnetsku deklinaciju i njen prirast, meridijansku konvergenciju ...),
2. podaci o projekciji, početnom meridijanu, oznaka lista,
3. podaci o izdavaču (izdavač, godina izdanja, godina mjerenja...),
4. legenda - topografski znakovi.

## 1.8. Koordinatne mreže i datumi

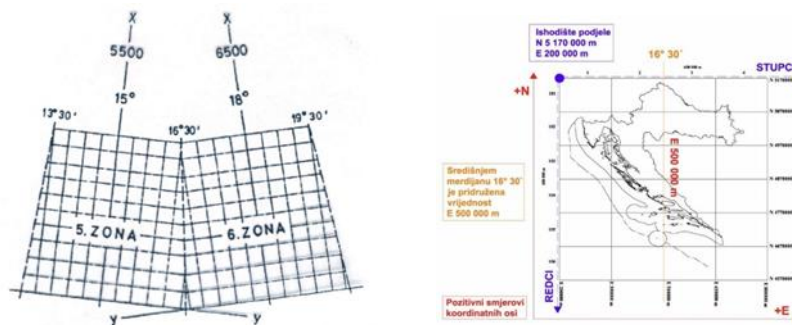
**Kartografska projekcija** je matematički postupak kojim se zakrivljena ploha (rotacijski elipsoid ili kugla) preslika u ravninu. Najčešće se zadaje analitički, osnovnim kartografskim jednadžbama  $x = f_1(\varphi, \lambda)$ ,  $y = f_2(\varphi, \lambda)$ , gdje su  $\varphi, \lambda$  geodetske koordinate na rotacijskom elipsoidu, a  $x, y$  koordinate u ravnini projekcije.

Kartografske projekcije prema ploham preslikavanja dijelimo na: konusne ili stožaste, cilindrične ili valjkaste i azimutalne ili ravninske projekcije, a prema položaju pola dijele se na uspravne, poprečne i kose projekcije (slika 1.12.). Nemoguće je preslikati zakrivljenu plohu rotacijskog elipsoida ili sfere u ravninu bez deformacija. Prema deformacijama kartografske projekcije dijelimo na: konformne ili istokutne, ekvivalentne ili istopovršinske i ekvidistantne ili istodužinske.



Slika 1.12. Kartografske projekcije

Kartografska projekcija koja je dogovorno uzeta za preslikavanje teritorija određene države naziva se državnom projekcijom. U Republici Hrvatskoj se do 2010. godine kao državna projekcija koristila **Gauss-Krügerova projekcija** ili konformna poprečna cilindrična projekcija kod koje se srednji meridijan zadanog područja preslikava kao pravac i služi kao os x pravokutnoga koordinatnog sustava u ravnini. Srednji meridijan područja preslikava se bez linearnih deformacija ili je linearno mjerilo uzduž njega konstantno (slika 1.13.). Kao nova državna projekcija koristi se Hrvatski terestrički referentni sustav 1996 u poprečnoj Mercatorovoj projekciji ili skraćeno **HTRS96/TM**, koja je također konformna poprečna cilindrična projekcija (slika 1.13.).



Slika 1.13. Gauss-Krügerova projekcija (lijevo) HTRS96/TM projekcija (desno)

Osnovne karakteristike topografskih karata 1:25 000: njihov prostorni obuhvat, način označavanja listova, koordinate i visine te karakteristike starih (Gauss-Krügerova projekcija) i novih državnih koordinatnih sustava (HTRS96/TM projekcija) prikazane su na slici 1.14.

## Topografska karta u mjerilu 1:25 000 (TK25)

### Prostorni obuhvat

- područje Republike Hrvatske pokriva 594 listova TK25, jedan list karte ima dimenzije  $7^{\circ}30' \times 7^{\circ}30'$  što približno odgovara području od  $10 \times 14$  km

### Označavanje listova

- svaki list karte TK25 ima svoju oznaku i ime
- oznaka se sastoji od četiri broja, jednog četveroznamenastog i tri jednoznamenasta (od 1-4)
- ime lista potječe od imena najvećeg naseljenog mjesta ili nekog drugog važnijeg topografskog objekta na prostoru obuhvaćenom tim listom

### Visine

- visinski datum određen je srednjom razinom Jadranskog mora na mareografu u Trstu
- u odnosu na srednju razinu određena je apsolutna (nadmorska) visina ishodišnog repera visinskog sustava u iznosu 3,3520 m
- visine svih repera definirane su u normalno-ortometrijskom sustavu visina

### Novi koordinatni referentni sustav za kartografsku projekciju HTRS96/TM

- nova kartografska projekcija je poprečna Mercatorova projekcija sa samo jednim koordinatnim sustavom za čitavo područje Republike Hrvatske
- nova kartografska projekcija temelji se na elipsoidu GRS80 kojim je definiran i novi hrvatski terestrički referentni koordinatni sustav HTRS96
- umjesto dosadašnjih oznaka x i y za koordinate u ravnini projekcije koristiti će se oznake N [northing -sjeverno] i E [easting -istočno], što je u skladu s normom ISO 19111 koja se bavi geoinformacijama i prostornim koordinatama

### Koordinatna mreža Gauss-Krügerove projekcije

#### Stari koordinatni referentni sustav za kartografsku projekciju Republike Hrvatske [crna mreža na karti]

Referentni elipsoid Bessel 1841:  $a = 6\,377\,397,155$  m;  $f = 299,152\,812\,85$

Geodetska [elipsoidna] širina ishodišta:  $\varphi = 0'$

Geodetska [elipsoidna] dužina ishodišta:

$\lambda = 15'$  za 5.zonu

$\lambda = 18'$  za 6.zonu

Linearno mjerilo na srednjem meridijanu: 0,9999

Pomak u smjeru istoka [false easting]:

5 500 000 m za 5.zonu

6 500 000 m za 6.zonu

Pomak u smjeru sjevera [false northing]: 0 m

### Koordinatna mreža sustava HTRS96/TM

#### Novi koordinatni referentni sustav za kartografsku projekciju Republike Hrvatske [crvena mreža na karti]

Referentni elipsoid GRS80:  $a = 6\,378\,137$  m;  $f = 298,257\,222\,101$

Geodetska [elipsoidna] širina ishodišta:  $\varphi = 0'$

Geodetska [elipsoidna] dužina ishodišta:  $\lambda = 16^{\circ}30'$

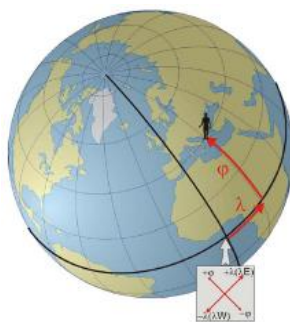
Linearno mjerilo na srednjem meridijanu: 0,9999

Pomak u smjeru istoka [false easting]: 500 000 m

Pomak u smjeru sjevera [false northing]: 0 m

Slika 1.14. Karakteristike topografskih karata (preuzeto s lista karte TK25)

**Geodetska koordinatna mreža** (slika 1.15.) je trodimenzionalna koordinatna mreža i sastoji od meridijana (podnevnika) i paralela (usporednika). **Geodetska duljina** ( $\lambda$  – lambda, od  $-180^{\circ}W$  do  $+180^{\circ}E$ ) je kutna udaljenost između početnog meridijana i meridijana koji prolazi promatranom točkom. **Geodetska širina** ( $\varphi$  – fi, od  $-90^{\circ}S$  do  $+90^{\circ}N$ ) je kutna vrijednost između ravnine ekvatora i okomice na rotacijski elipsoid u promatranoj točki. Za početni meridijan je dogovorno odabran meridijan koji prolazi kroz zvjezdarnicu u Greenwich-u u Londonu. **Elipsoidna visina** je vertikalnu udaljenost od rotacijskog elipsoida do promatrane točke. S ove tri koordinate položaj točke u odnosu na rotacijski elipsoid potpuno je određen.



Slika 1.15. Geodetska (geografska) koordinatna mreža

**Pravokutna koordinatna mreža** ili državna koordinatna mreža prikazuje položaj u ravnini projekcije. Pravokutne koordinate se u Gauss-Krügerovoj projekcija označavaju s x i y, dok se u HTRS96/TM projekciji označavaju sa N i E, izražavaju se u metrima.

U **Gauss-Krügerovoj (GK) projekciji** je koordinatni sustav obrnuto orijentiran od matematičkog - x na ordinati, a y na apscisi. Koordinata x označava pravokutnu udaljenost od ekvatora u metrima, a koordinata y označava udaljenost od središnjeg meridijana te zone u metrima. Središnjem meridijanu se dodaje vrijednost 500 000 m radi izbjegavanja negativnih vrijednosti.

Prva znamenka y koordinate označava meridijansku zonu (5 ili 6), a druga znamenka označava je li točka istočno ili zapadno od središnjeg meridijana, a zadnjih 5 znamenki nam govori za koliko je udaljena točka od središnjeg meridijana te meridijanske zone.

**Primjer:**

y = 5 570 250 m.

5 označava 5. meridijansku zonu (15°),

570 - koordinata veća od 500 000 m; točka se nalazi istočno (desno) od 15° meridijana,

70 250 m - vrijednost udaljenosti točke od 15° meridijana.

U **HTRS96/TM** projekciji koordinate se označavaju s N koji predstavlja udaljenost od ekvatora u metrima i E koji predstavlja udaljenost od središnjeg ili dodirnog meridijana od 16°30'. Na središnjem meridijanu se E koordinati dodaje vrijednost 500 000 m radi izbjegavanja negativnih vrijednosti. HTRS96/TM koordinate možemo razlikovati osim po drugačijem označavanju i po tome što jedna koordinata ima znamenku manje.

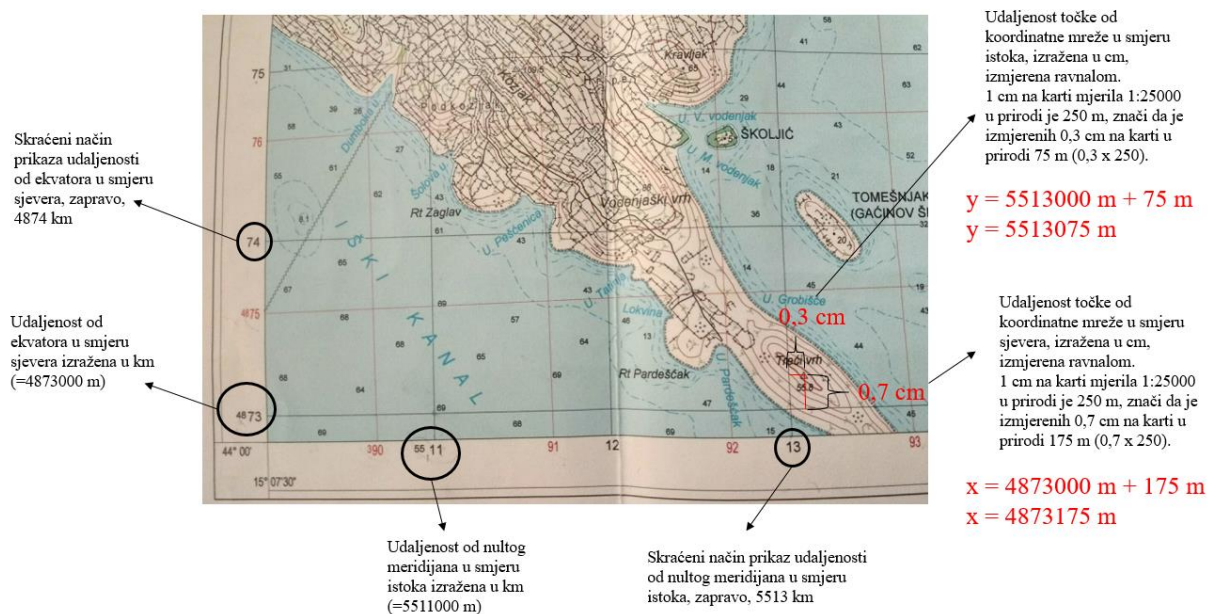
## 1.9. Postupak određivanja koordinata na topografskoj karti

Na rubu okvira topografske karte nalazi se podjela **geodetskih koordinata** – širine i dužine ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ) u stupnjevima i **pravokutnih koordinata** (x, y) koje možemo očitati te tako odrediti položaj ili lokaciju traženog objekta.

**Primjer** određivanja koordinata na topografskoj karti prikazan je na slici 1.16.:

1. Na rubu karte očitamo vrijednosti u km (crne brojke označavaju GK koordinate, a crvene HTRS96/TM koordinate) y=5513 km; x=4873 km;
2. U otvor šestara uzmemo ostatak vrijednosti i očitamo ostatak na grafičkom mjerilu ili ga pretvorimo u metre – 0,3 cm = 75 m; 0,7 cm = 175 m;
3. Pribrojimo koordinati u km i dobijemo konačne koordinate: x=4873175 m; y=5513075 m.

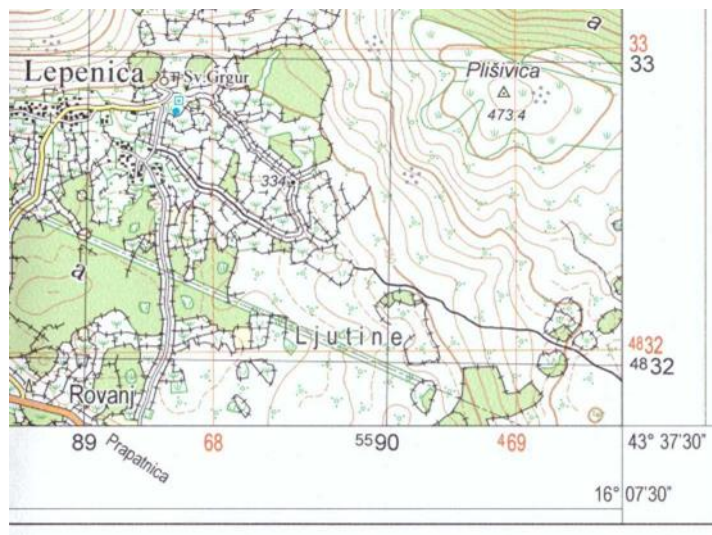
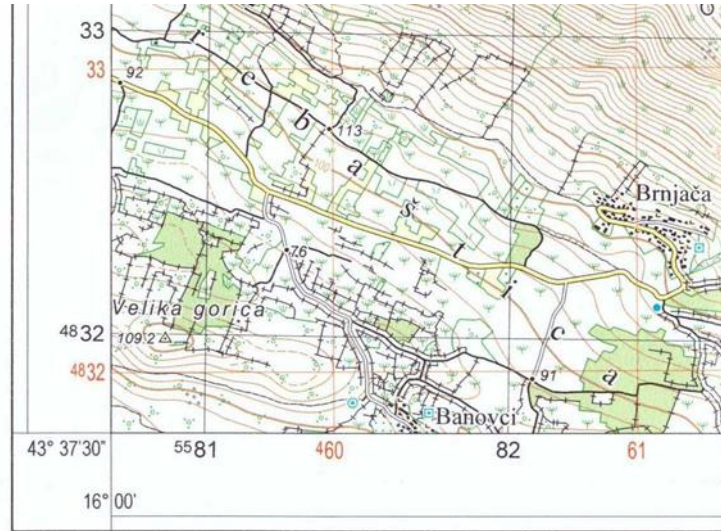
Sličan postupak izvodimo prilikom očitavanja HTRS96/TM koordinata, ali gledamo crvene brojke i crvenu mrežu.



Slika 1.16. Postupak određivanja koordinata određenog objekta na karti

## 1.10. Zadatci za vježbu

Na zadana dva predloška odabrati nekoliko točaka i očitati koordinate.





## 1.11. Pitanja za ponavljanje

- 1) Koje karte i u kojim mjerilima izdaje Državna geodetska uprava?
- 2) Koji su osnovni, a koji kartografski elementi na karti?
- 3) Kako se prikazuje reljef na kartama?
- 4) Koja je razlika između nadmorske i relativne visine?
- 5) Što je geoportal?
- 6) Koje slojeve podataka sadrži geoportal?
- 7) Koje su karakteristike Gauss-Krügerove (GK) projekcije?
- 8) Koje su karakteristike HTRS96/TM projekcije?

## 2. vježba: Transformacija i konverzija koordinata

**Opis vježbe:** Ovladavanje koordinatnim sustavima u prostoru i ravnini (projekciji) te osnovnim operacijama sa zadanim koordinatnim sustavima i datumima.

**Ishodi učenja:** Studenti će naučiti prevoditi koordinate iz jednog u drugi koordinatni sustav te razlikovati konverziju i transformaciju koordinata.

**Potrebna oprema i pribor:** Slobodni program Geotrans (<https://earth-info.nga.mil/>).

### 2.1. Kratak opis koordinatnih sustava

**Koordinatni sustav** je sustav koji omogućuje da se položaj točke na krivulji, na pravcu, na plohi, u ravnini ili u prostoru opišu s pomoću brojeva, to jest koordinatama. Koordinatni sustav može biti **prostorni** (trodimenzionalni - 3D), **ravninski** (dvodimenzionalni - 2D) ili **visinski** (jednodimenzionalni - 1D). U **visinskom koordinatnom sustavu** položaj točke određen je pomoću samo jedne koordinate (visine), u **ravninskom koordinatnom sustavu** (pravokutni koordinatni sustav i polarni koordinatni sustav) položaj točke određen je pomoću dvije koordinate, dok je u **prostornom koordinatnom sustavu** (3D kartezijev koordinatni sustav i geodetski koordinatni sustav) položaj točke određen pomoću tri koordinate.

Kako bi povezali koordinatni sustav sa Zemljinim tijelom potrebno je uspostaviti odgovarajući geodetski datum. **Geodetski datum** je skup podataka koji definira veličinu i oblik zemljinog elipsoida, položaj ishodišta, mjerilo i orijentaciju osi koordinatnog sustava u odnosu na Zemlju. Svaki koordinatni sustav koji se prema stvarnom svijetu odnosi uz pomoć datuma naziva se **referentni koordinatni sustav**.

Za ovu vježbu potrebno je razlikovati pravokutni koordinatni sustav u Gauss-Krügerovoj projekciji (GK), Hrvatski terestrički referentni sustav 1996 u poprečnoj Mercatorovoj projekciji (HTRS96/TM), geodetski koordinatni sustav i 3D kartezijev koordinatni sustav.

Kod pravokutnog koordinatnog sustava u Gauss-Krügerovoj projekciji koordinate se označavaju s  $x$  i  $y$  i obrnute su od koordinata  $x$  i  $y$  u matematičkom koordinatnom sustavu. Koordinatni sustav podijeljen je na zone, kroz područje Republike Hrvatske rasprostire se peta i šesta zona čiji su središnji meridijani  $15^\circ$  i  $16^\circ$ , pomak u smjeru istoka 5 500 000 m za petu i 6 500 000 m za šestu zonu, a pomak u smjeru sjevera je 0 m. Odgovarajući elipsoid je Besselov elipsoid, a odgovarajući geodetski datum je Hermannskogel datum.

**Hrvatski terestrički referentni sustav 1996** u poprečnoj Mercatorovoj projekciji (HTRS96/TM) je odlukom Vlade RH iz 2004. godine postao službeni koordinatni sustav za područje Republike Hrvatske, a od 2010. godine je uveden u službenu uporabu. Koordinate u HTRS96/TM označavaju se s E i N te se sustav sastoji od samo jedne zone čiji je središnji meridijan 16°30'. Kako bi izbjegli negativne ordinate svim ordinatama je dodano 500 000 m, odnosno pomak u smjeru istoka je 500 000 m. Odgovarajući elipsoid je GRS80 (Globalni referentni sustav 1980), a odgovarajući datum je ETRS89 (Europski terestrički referentni sustav 1989).

Kod **geodetskog koordinatnog sustava** koordinate se označavaju s  $\varphi$  (geodetska širina),  $\lambda$  (geodetska duljina) i h (visina). Odgovarajući elipsoid za geodetski koordinatni sustav je WGS84 (World Geodetic System 1984), a odgovarajući datum je ITRF (International Terrestrial Reference Frame).

Kod **3D kartezijevog** ili globalnog koordinatnog sustava koordinate se označavaju s X, Y i Z te se još nazivaju geocentričnim koordinatama. Odgovarajući elipsoid za geocentrični koordinatni sustav je WGS84, a odgovarajući datum je ITRF.

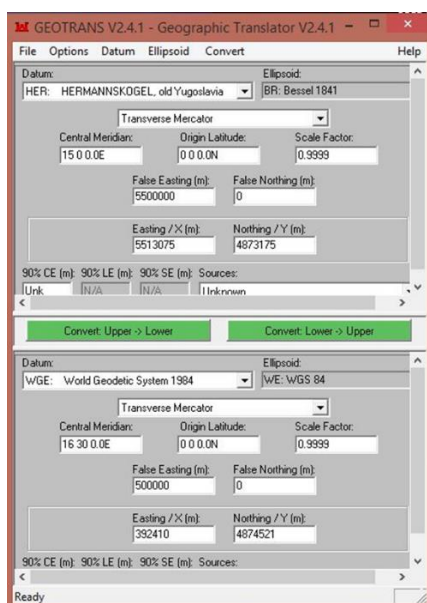
S obzirom na to da za neko područje možemo imati različite koordinate moguće je te koordinate prevesti iz jednog koordinatnog sustava u drugi. Osnovne operacije s koordinatama su konverzija i transformacija koordinata.

**Konverzija koordinata** je postupak prevođenja koordinata iz jednog koordinatnog sustava u drugi koordinatni sustav s istim datumom. Na primjer: iz geodetskog koordinatnog sustava ( $\varphi$ ,  $\lambda$ , h) u 3D kartezijev koordinatni sustav (X, Y, Z).

**Transformacija koordinata** je postupak prevođenja koordinata iz jednog koordinatnog sustava u drugi koordinatni sustav s različitim datumima. Na primjer: iz GK (x, y) u HTRS96/TM (E, N).

Konverzija i transformacija koordinata može se provesti pomoću programa **Geotrans** (Geographic Translator) (slika 2.1.), koji se može slobodno skinuti s web adrese Nacionalne geoprostorne agencije SAD-a (<https://earth-info.nga.mil>).

Kod prevođenja koordinata pomoću Geotransa bitno je napomenuti kako Geotrans koristi matematički, a ne geodetski koordinatni sustav što znači da su x i y koordinate u programu obrnute u odnosu na x i y koordinate očitane s karte. Također, u Geotransu ne postoji ETRS89 datum pa za naša računanja koristimo WGS84, odnosno ITRF datum. Razlika između ova dva globalna datuma je zanemariva. Bitno je napomenuti i da je točnost transformacije (različiti datumi) koordinata pomoću Geotransa reda veličine od nekoliko metara. Točnosti transformacije koordinata je niska zato što Geotrans vodi računa samo o translaciji između koordinatnih sustava, a ne i o rotaciji osiju koordinatnih sustava.



Slika 2.1. Sučelje programa Geotrans

## 2.2. Primjer prevođenja koordinata u Geotransu

Prilikom prevođenja koordinata, bila transformacija ili konverzija, potrebno je podesiti ulazne i izlazne parametre (datum, elipsoid, projekciju, središnji meridijan, mjerilo, pomak u smjeru istoka i sjevera) te upisati ulazne koordinate kako bi mogli dobiti izlazne koordinate.

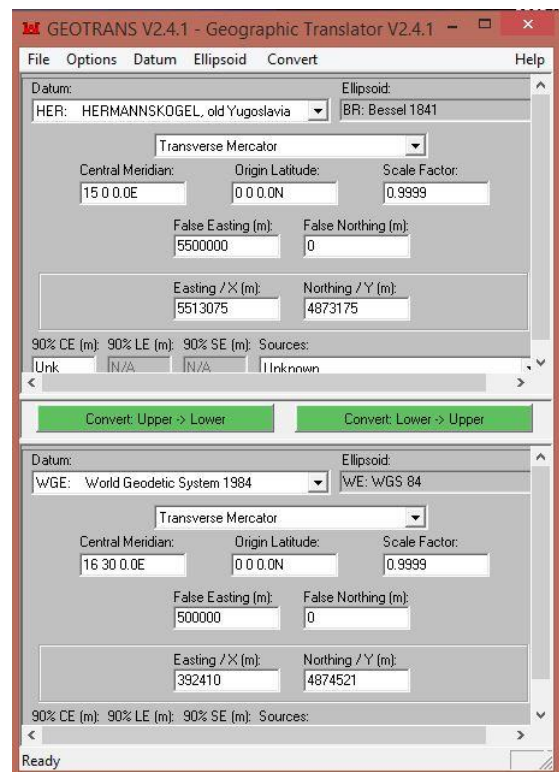
### 1. korak: Transformacija koordinata iz GK u HTRS96/TM ravninske koordinate

Kod ulaznih parametara je potrebno odabrati datum *Hermannskogel*, projekciju *Transverse Mercator*, središnji meridijan  $15^\circ$  i pomak u smjeru istoka  $5\,500\,000$  m ako se radi o petoj zoni ili  $18^\circ$  i  $6\,500\,000$  m ako se radi o šestoj zoni, za mjerilo preslikavanja unosi se  $0.9999$ .

Za izlazne parametre potrebno je unijeti WGS84 kao datum i elipsoid, *Transverse Mercator* projekciju, središnji meridijan od  $16^\circ 30'$ , za mjerilo preslikavanja unosi se ponovno  $0.9999$ , a pomak u smjeru istoka je  $500\,000$  m.

Ulazne koordinate:  $y = 5\,513\,075$  m  
 $x = 4\,873\,175$  m

Izlazne koordinate:  $E = 392\,410$  m  
 $N = 4\,874\,521$  m



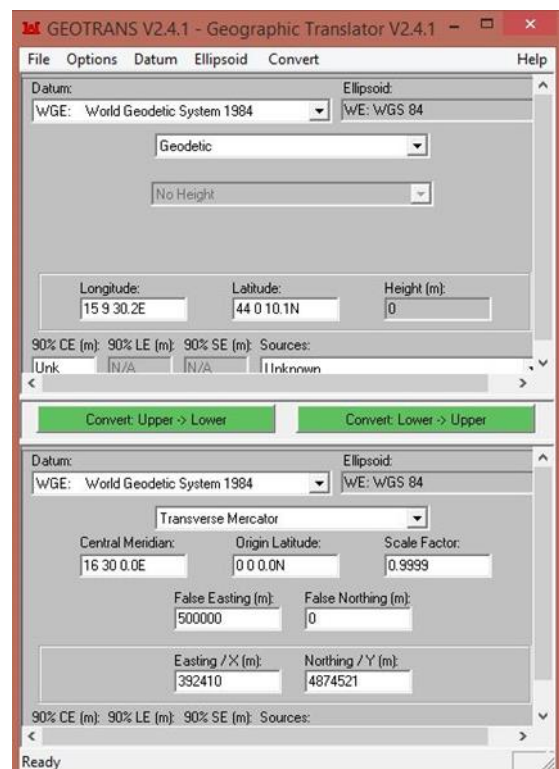
### 2. korak: Konverzija iz HTRS96/TM ravninskih koordinata u geodetske koordinate

Za ulazne parametre potrebno je unijeti WGS84 kao datum i elipsoid, *Transverse Mercator* projekciju, središnji meridijan od  $16^\circ 30'$ , mjerilo preslikavanja od  $0.9999$  te pomak u smjeru istoka od  $500\,000$  m, kao prethodni izlazni parametri.

Za izlazne parametre odabire se WGS84 kao datum i elipsoid, za projekciju se odabere geodetska (*Geodetic*) s obzirom na to da želimo odrediti geodetske koordinate.

Ulazne koordinate:  $E = 392\,410$  m  
 $N = 4\,874\,521$  m

Izlazne koordinate:  $\varphi = 44^\circ\ 0'\ 10.1''$  N  
 $\lambda = 15^\circ\ 9'\ 30.2''$  E  
 $h = 0$  m





## 2.3. Zadatak za vježbu

Očitane ravninske koordinate  $x$  i  $y$  s topografske karte transformirati i konvertirati koristeći Geotrans.

## 2.4. Pitanja za ponavljanje

- 1) Što je koordinatni sustav?
- 2) Koje koordinatne sustave razlikujemo?
- 3) Što je datum?
- 4) Što je konverzija koordinata?
- 5) Što je transformacija koordinata?
- 6) Koji je središnji meridijan za HTRS96/TM?
- 7) Koji je središnji meridijan za petu, a koji za šestu zonu?
- 8) Koliko iznosi mjerilo preslikavanja za pravokutne koordinate u HTRS96/TM?
- 9) Što je Geotrans?

## 3. vježba: GNSS mjerenja

**Opis vježbe:** Upoznavanje s konceptima GNSS pozicioniranja i rada s GNSS prijamnicima. Izvođenje i ocjena točnosti GNSS mjerenja.

**Ishodi učenja:** Studenti će izložiti osnovne koncepte GNSS pozicioniranja, provesti GNSS pozicioniranje i procijeniti očekivanu točnost pozicioniranja.

**Potrebna oprema i pribor:** Pametni telefon koji je opremljen GNSS senzorom i aplikacija koja ima mogućnost prikazivanja trenutnih koordinata telefona određenih pomoću GNSS senzora.

### 3.1. Kratak opis GNSS sustava i načina GNSS pozicioniranja

**GNSS** (engl. Global Navigation Satellite System) je satelitski sustav koji omogućava **pozicioniranje** (određivanje položaja), **navigaciju** i **prijenos vremena** na Zemljinoj površini ili iznad nje, neovisno o vremenskim prilikama i dijelu dana ili noći.

GNSS sustavi sastoje se od:

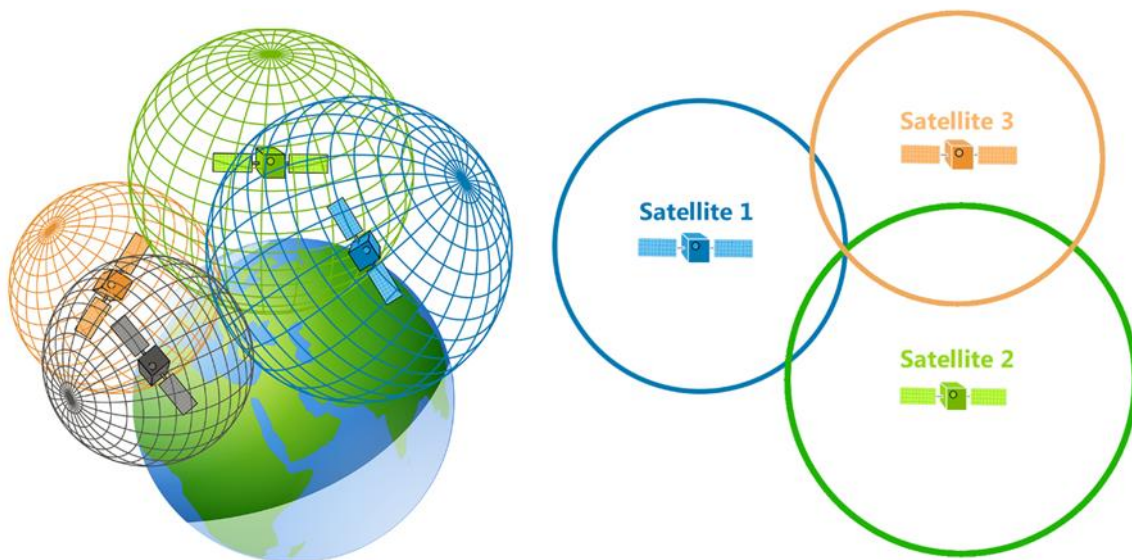
- **svemirskog segmenta:** sateliti koji kruže oko zemlje i odašilju GNSS signale;
- **kontrolnog segmenta:** mreža opažачkih i kontrolnih stanica na zemlji koje prate satelite, određuju im položaj i upravljaju cijelim GNSS sustavom i
- **korisničkog segmenta:** različiti uređaji koji imaju mogućnost prijema i obrade GNSS signala, kao što su pametni telefoni, navigacijski uređaji u automobilima, dronovi i sl.

Osnovni koncept pozicioniranja, tj. određivanja položaja (geodetska širina i dužina) korištenjem GNSS sustava zasniva se na mjerenju vremena koje je potrebno elektromagnetskom signalu koji je odaslan s GNSS satelita da prijeđe put do GNSS prijemnika, tj. uređaja koji ima mogućnost prijema i obrade GNSS signala. Položaj svakog GNSS satelita je, uvjetno govoreći, u svakom trenutku poznat. On se određuje na temelju opažanja koje izvode postaje koje su dio kontrolnog segmenta i koje opskrbljuju satelite parametrima na temelju kojih se njihova pozicija može izračunati.

Svaki satelit odašilje signale koji, među ostalim, sadrže podatke o točnom vremenu odašiljana signala i parametre na temelju kojih se može izračunati njihova pozicija u trenutku kada je signal odaslan. U trenutku primitka signala, prijemnik registrira točno vrijeme primitka i računa vremensku razliku koja je bila potrebna signalu da prijeđe udaljenost od satelita. Množenjem izmjerenog vremena i poznate brzine širenja elektromagnetskih signala (brzina svjetlosti) kroz atmosferu, moguće je odrediti udaljenost od satelita do prijemnika. Tako da je, uvjetno govoreći, položaj satelita u svakom trenutku poznat. Položaja satelita u

trenutku odašiljanja signala i udaljenosti od satelita do prijemnika (indirektno određena iz mjerenja vremena), definira sferu kojoj je središte u položaju satelita u trenutku odašiljanja signala, a polumjer jednak udaljenosti od satelita do prijemnika. To znači da se prijemnik, čiji je položaj (geodetska širina i dužina) nepoznat, nalazi negdje na navedenoj sferi. Očito je da na ovaj način položaj prijemnika nije definiran, jer se on može nalaziti bilo gdje na sferi. Zbog toga je potrebno odrediti udaljenost od prijemnika do još jednog satelita čime se definira još jedna sfera. Ove dvije sfere sijeku se u kružnici, koja opet jednoznačno ne definira položaj prijemnika. Konačno, ako se odredi i udaljenost od prijemnika do trećeg satelita, dobivaju se dva rješenja (dvije točke gdje može biti prijemnik) od kojih samo jedno rješenje može biti na zemljinoj površini pa možemo uvjetno reći da se dobiva jednoznačno rješenje (slika 3.1.). Može se zaključiti da je za određivanje položaja GNSS prijemnika potrebno odrediti udaljenosti od prijemnika do najmanje tri GNSS satelita. Ovo je pojednostavljeni koncept, a u praksi je za određivanje položaja potrebno odrediti udaljenost prema najmanje četiri satelita.

Potreba za četvrtim satelitom, tj. četvrtom udaljenošću, proizlazi zbog toga što je točnost kvarcnih satova koji se koriste u GNSS prijamicima za registraciju vremena primitka signala znatno manja od točnosti atomskih satova koji se nalaze na GNSS satelitima i pomoću kojih se određuje vrijeme odašiljanja signala. Zbog toga se uz tri nepoznanice položaja, kao četvrta nepoznanica u sustavu jednačbi uvodi pogreška sata prijemnika. Na temelju svake udaljenosti formira se jedna jednačba pa je za rješavanje sustava jednačbi s četiri nepoznanice potrebno raspolagati s najmanje četiri udaljenosti od prijemnika do satelita.



Slika 3.1. Koncept pozicioniranja pomoću GNSS sustava (izvor: <https://gisgeography.com/trilateration-triangulation-gps/>)

U ovom konceptu pozicioniranja pomoću GNSS prijemnika izostavljen je cijeli niz problema koji se trebaju svladati kako bi se postigla dovoljno visoka točnost pozicioniranja. Na primjer, jedan od problema je taj što, zbog različitih svojstava pojedinih slojeva atmosfere, brzina širenja elektromagnetskih signala na putu od satelita do prijemnika nije konstantna. Točnost koja se može postići ovim načinom pozicioniranja, uz određene preduvjete, u najboljem slučaju iznosi nekoliko metara, što je nedovoljno za većinu geodetskih primjena. GNSS prijavnici koji se koriste za geodetske potrebe, uz mogućnost mjerenja vremena imaju i mogućnost mjerenja faznih razlika elektromagnetskih valova, kao i mogućnost istovremenog opažanja više frekvencija. GNSS sateliti odašilju signale na barem dvije frekvencije jer se opažanjem dviju frekvencija može odrediti negativni utjecaj koji ionosfera ima na rasprostiranje signala. Također, kod geodetskih mjerenja pomoću GNSS sustava, trenutno jedine metode koje omogućavaju postizanje centimetarske točnosti (a uz određene preduvjete i subcentimetarske) zahtijevaju korištenje minimalno dva GNSS prijemnika.



Kako su GNSS signali vrlo male snage u trenutku kada dođu do zemljine površine, objekti koji se nalaze na putanji signala vrlo ga često blokiraju i tako onemogućavaju njegov prijem. Osim toga, rasprostiranje GNSS signala ometaju i drugi radio uređaji, a posebno signali koje odašilju repetitori i elektromagnetska polja koja se stvaraju oko dalekovoda. Problem predstavljaju i vodene i staklene površine, kao i metalne plohe koje mogu reflektirati GNSS signale i tako stvoriti tzv. multipath efekt – nastaje u slučaju kada signal ne dolazi do antene prijemnika direktno od satelita, nego nakon refleksije o neku površinu čime se produljuje vrijeme putovanja, a time i udaljenost koja se izračuna. Točnost GNSS pozicioniranja najviše ovisi o točnosti s kojom se određuje udaljenost od satelita do prijemnika, ali i o rasporedu satelita na nebu – točnost je manja ako su svi sateliti grupirani na istom dijelu neba.

Trenutno operativni GNSS sustavi (slika 3.2.) su:

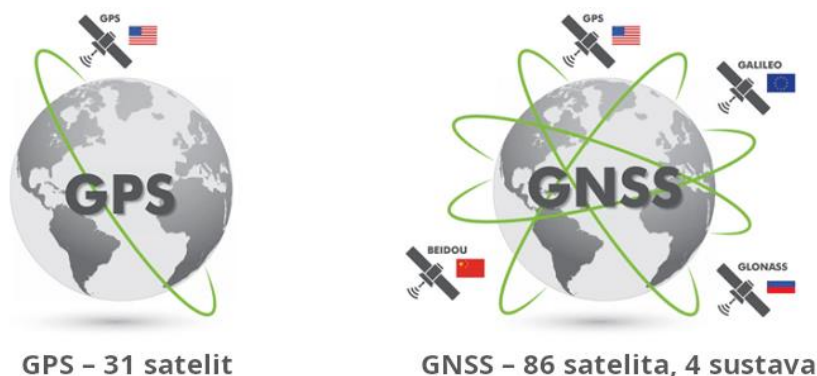
- **GPS** (engl. *Global Positioning System*) – SAD;
- **GLONASS** (rus. *GLObalnaja NAVigacionnaja Sputnikovaja Sistema*) – Rusija;
- **Galileo** – EU;
- **BDS** – Kina.

Prvi GNSS sustav koji je postao operativan je **GPS** (engl. *Global Positioning System*), zbog čega se pojmovi „GNSS“ i „GPS“ često izjednačavaju, što nije ispravno – GPS je samo jedan od GNSS sustava. GPS sustav je američki sustav koji se počeo razvijati 70-ih godina prošlog stoljeća. Do 2000. godine bio je dostupan samo autoriziranim vojnim korisnicima, a nakon 2000. je postao svima dostupan. Dio GNSS sustava, točnije tzv. P-kod kojim se mogu postići veće točnosti i dalje je rezerviran samo za vojne korisnike. GPS sustav sastoji se od 24 aktivna i četiri pričuvna satelita koji kruže oko zemlje u šest orbitalnih ravnina međusobno otklonjenih za 60° na ekvatoru, a koje s ravninom ekvatora zatvaraju kut od 55°. Sateliti kruže na visini od približno 20 200 km iznad zemljine površine, što otprilike odgovara polovini opsega ekvatora. GPS sateliti se s vremenom kvare pa je svakih nekoliko godina potrebno lansirati nove satelite koji redovito imaju bolje karakteristike od svojih prethodnika.

**GLONASS** (rus. *GLObalnaja NAVigacionnaja Sputnikovaja Sistema*) je GNSS sustav kojim upravlja Rusija. Također se sastoji od 24 satelita koji kruže oko zemlje, ali u tri orbitalne ravnine koje s ravninom ekvatora zatvaraju kut od približno 65°. Sateliti kruže na visini od 19 100 km. Često se kao jedan od nedostataka GLONASS sustava navodi neravnomjeran razmještaj njegovih kontrolnih stanica – glavnina stanica nalazi se na području Rusije.

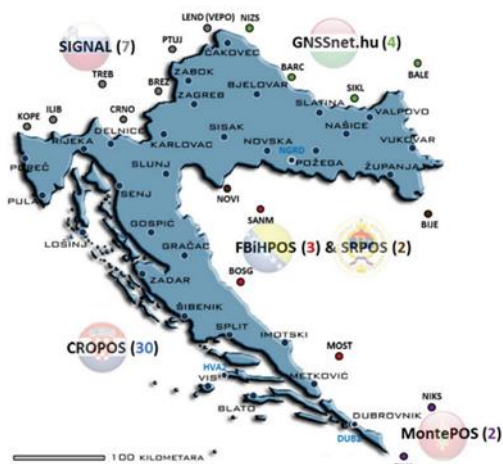
**Galileo** je GNSS sustav kojeg razvija Europska unija i, za razliku od ostalih, jedini je civilni sustav. Sastoji se od 24 operativna i šest pričuvnih satelita koji kruže na visini od 23 222 km i koji su raspoređeni u tri orbitalne ravnine koje s ravninom ekvatora zatvaraju kut od 56°. Posebnost sustava Galileo je i u tome što posebnom opremljenim uređajima omogućava prijenos podataka o trenutnom položaju hitnim službama. Galileo sustav, iako se može koristiti za pozicioniranje i navigaciju, još uvijek nije potpuno operativan. Kada postane potpuno operativan, postoji mogućnost da će se neki od njegovih servisa naplaćivati, dok će neki servisi biti dostupni samo autoriziranim korisnicima (npr. hitnim službama). Galileo je trenutno jedini sustav koji omogućava tzv. precizno pozicioniranje točke (PPP) čijim je korištenjem uz samo jedan GNSS prijemnik moguće ostvariti točnost od nekoliko decimetara.

**BeiDou** navigacijskim satelitskim sustavom (BDS) upravlja Kina. Za razliku od ostalih GNSS sustava, svemirski segment BDS-a sastoji se i od satelita koji se nalaze u tzv. geostacionarnoj orbiti. To je orbita čija se orbitalna ravnina približno poklapa s ravninom ekvatora, a sateliti u toj orbiti imaju istu kutnu brzinu rotacije kao i zemlja. To znači da, gledajući sa zemljine površine, izgleda kao da se takvi sateliti ne pomiču. BDS se postupno razvija tako da prvo zadovolji kineske potrebe, a zatim i globalne.



Slika 3.2. Globalni navigacijski satelitski sustavi (GNSS; izvor: <https://www.soloprotect.com/us/knowledge-base/blog/location-location-location/>)

Osim globalnih navigacijskih satelitskih sustava (GNSS), razvijaju se i regionalni sustavi, kao i sustavi koji se koriste za poboljšanje postojećih GNSS sustava. Takav primjer u Europi je sustav **EGNOS**. Kao što je već rečeno, kod primjene GNSS sustava za geodetske potrebe treba koristiti minimalno dva prijemnika. Jedan od prijemnika postavlja se na poznatu, a jedan na nepoznatu točku. Iako se pojedinačnim prijemnicima točnost određuje s metarskom točnošću, kombiniranjem opažanja na oba prijemnika moguće je odrediti njihov relativni položaj (položaj jednog prijemnika u odnosu na drugi) s centimetarskom ili čak subcentimetarskom točnošću. Kako je jedan prijemnik postavljen na poznatoj točki, tada je i drugom prijemniku koji je postavljen na nepoznatoj točki moguće vrlo točno odrediti položaj. Osnovni nedostatak ove metode je upravo u potrebi za korištenjem dva prijemnika od koji jedan za vrijeme mjerenja nepomično stoji na jednoj točki. Kako bi se riješio ovaj problem, uspostavljaju se nacionalne mreže permanentnih GNSS prijemnika koje eliminiraju potrebu za korištenjem dva prijemnika. Zapravo, tijekom mjerenja se koristi samo jedan prijemnik, a ulogu drugog prijemnika, uvjetno rečeno, preuzima jedan od GNSS prijemnika u permanentnoj mreži. Hrvatski primjer takve mreže prijemnika je sustav CROPOS kojim upravlja Državna geodetska uprava. **CROPOS** se sastoji od 50-ak permanentnih stanica raspoređenih po teritoriju Republike Hrvatske, a od nedavno je pristup većini njegovih servisa postao besplatan (slika 3.3.).



Slika 3.3. CROPOS sustav (izvor: <https://www.cropos.hr/>)

GNSS mjerenjem redovito se određuju geodetske koordinate: geodetska/elipsoidna širina i dužina i elipsoidna visina, i to s obzirom na WGS84 elipsoid i datum. Često se javlja problem s interpretacijom **elipsoidne visine** koja se određuje GNSS prijemnicima. Datum WGS84 smješta elipsoid u prostor tako da što bolje „prati“ srednju razinu mora. Kako zbog nejednolikog rasporeda masa u zemljinoj unutrašnjosti srednja razina mora nije neka jednostavna matematička ploha (sfera, elipsoid ili sl.) već je nepravilna, ploha elipsoida od srednje razine mora može znatnije odstupati. Na primjer, za područje Hrvatske te razlike s obzirom na WGS84 elipsoid mogu biti i do 50 m. Zbog toga se, kada određujemo položaj primjenom GNSS sustava, može dogoditi da se nalazimo na obali, nekoliko metara iznad razine mora, da nam GNSS prijemnik

na zaslonu prikazuje visinu od npr. 44 m. Tu se naravno ne radi o visini s obzirom na srednju razinu mora, nego o visini s obzirom na elipsoid. Većina modernih GNSS prijemnika, pa i pametni telefoni, sadrže bazu podataka s korekcijama (tzv. geoidnim undulacijama) kojima preračunava elipsoidne visine u visine s obzirom na srednju razinu mora. Ovakve baze podataka redovito su vrlo niske točnosti i iako „poboljšavaju“ visine, one i dalje mogu odstupati za više metara od visine s obzirom na srednju razinu mora. Zbog svega navedenog, potreban je oprez kod interpretacije visina određenih GNSS mjerenjima.

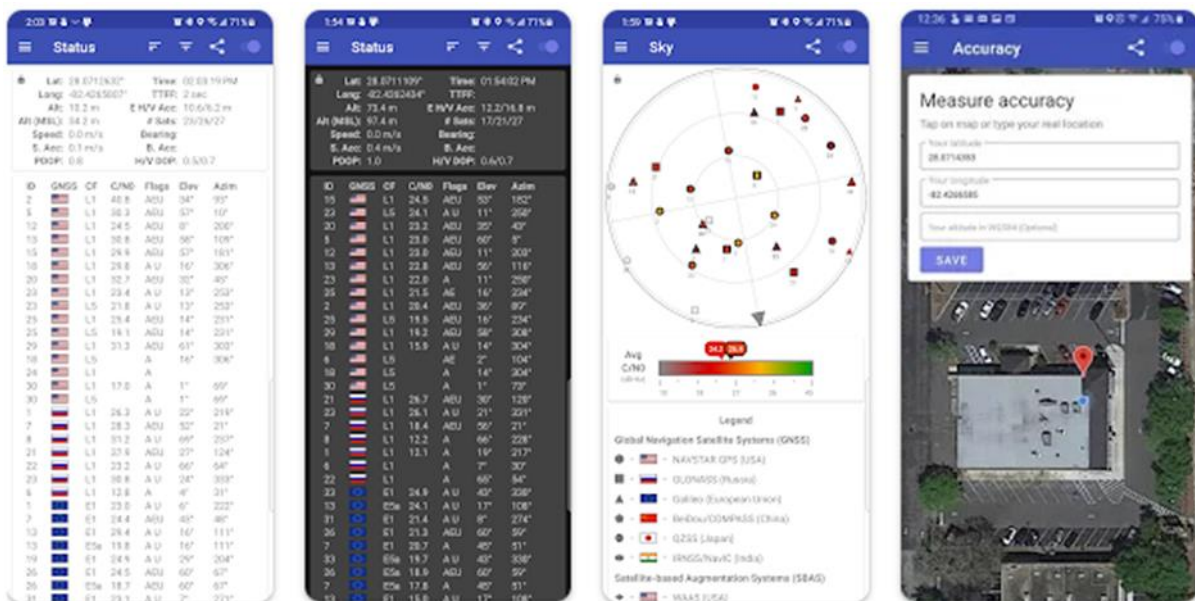
## 3.2. Zadatak za vježbu

GNSS pozicioniranjem odrediti koordinate trima točkama na terenu i istim točkama odrediti koordinate na ortofotu i zatim usporediti dobivene koordinate.

### 3.2.1. Postupak izvođenja zadatka

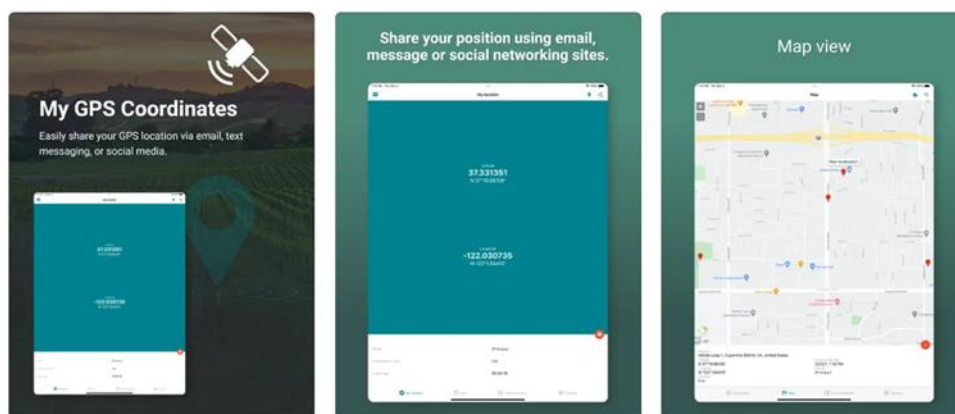
Na pametni telefon potrebno je instalirati aplikaciju koja ima mogućnost prikazivanja trenutnog položaja određenog pomoću GNSS senzora i koja prikazuje položaj u obliku geodetskih/elipsoidnih koordinata. Može se koristiti aplikacija po izboru koja ispunjava te uvjete, a u nastavku su prijedlozi za dvije aplikacije:

- za Android operacijske sustave: *GPSTest* (slika 3.4.) (<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.android.gptest>)



Slika 3.4. GPSTest aplikacija (izvor: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.android.gptest>)

- za iOS operacijske sustave: *My GPS Coordinates* (slika 3.5.) (<https://apps.apple.com/hr/app/my-gps-coordinates/id1335952038>)



Slika 3.5. My GPS Coordinates aplikacija (izvor: <https://apps.apple.com/hr/app/my-gps-coordinates/id1335952038>)

Nakon instalacije odgovarajuće aplikacije, potrebno je slijediti sljedeći postupak:

1. Otvoriti geoportal Državne geodetske uprave koji je dostupan na <https://geoportal.dgu.hr> (slika 3.6.).

2. Zumiranjem na neko poznato područje potrebno je identificirati tri dobro uočljive točke i pritom treba voditi računa o tome da se svakoj od tih točaka može pristupiti i da se u njezinoj neposrednoj blizini (npr. u radijusu od 10 m) ne nalaze visoki objekti ili stabla koji bi na tim točkama mogli onemogućiti prijem GNSS signala – to može biti kut betonskog platoa, kut zida, uočljivi grm, šahta, stup i sl.
3. Za svaku od točaka potrebno je postaviti pokazivač miša iznad točke i prepisati HTRS96/TM koordinate koje su dostupne u donjem desnom kutu preglednika (slika 3.6.).



Slika 3.6. Snimka zaslona Geoportala DGU-a s uključenom ortofoto podlogom

4. Sljedeći korak je otići na točku na terenu s pametnim telefonom na kojem je instalirana prikladna aplikacija za GNSS pozicioniranje i zatim:
  - a. u postavkama pametnog telefona uključiti lokacijske usluge;
  - b. otvoriti aplikaciju za GNSS pozicioniranje i dozvoliti joj pristup lokaciji;
  - c. postaviti pametni telefon iznad jedne od točaka koje su identificirane na ortofoto podlozi i za koju su prepisane koordinate;
  - d. pričekati 10-ak sekundi iznad točke dok točnost pozicioniranja ne bude što veća (pričekati dok /vrijednost „E H/V Acc:“ u aplikaciji GPSTest ili vrijednost „Coordinates accuracy“ u aplikaciji My GPS Coordinates ne bude što manja) i zatim pohraniti snimku zaslona (primjer je vidljiv na slici 3.7.);
  - e. ponoviti isti postupak na preostale dvije točke.

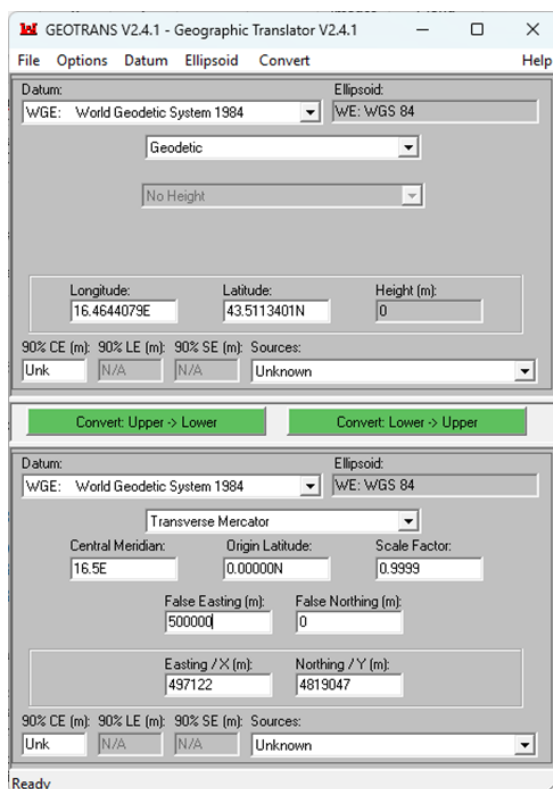
**Status**

Lat: 43.5113401°      Time: 14:40:36  
 Long: 16.4644079°      TTFF:  
 Alt: 99.0 m      E H/V Acc: 3.0/100.0 m  
 Alt (MSL): 58.5 m      # Sats: 23/30/30  
 Speed: 0.0 km/h      Bearing: 0.0°  
 S. Acc: 72.0 km/h      B. Acc: 10.0°  
 PDOP: 0.8      H/V DOP: 0.4/0.6

ID	GNSS	CF	C/N0	Flags	Elev	Azim
2	USA	L1	37.5	EU	9.7°	174.4°
2	EU	E1	37.3	EU	59.7°	67.1°
6	USA	L1	33.6	EU	23.9°	50.6°
8	EU	E1	40.8	EU	19.6°	217.2°
10	CHN	B1	28.1	EU	9.8°	70.1°
11	USA	L1	39.1	EU	35°	94.7°
11	EU	E1	30.1	EU	17.9°	38.6°
12	USA	L1	34.8	EU	69.1°	41.6°
15	RUS	L1	43.9	EU	65.2°	355.3°
18	RUS	L1	33.7	EU	17.1°	184.2°
24	USA	L1	33.9	EU	40.3°	153.2°
24	RUS	L1	37.0	EU	44.2°	46.1°
25	USA	L1	36.0	EU	66°	309.6°
25	EU	E1	27.1	EU	13.3°	89.7°
27	EU	E1	30.3	EU	6°	279.5°
27	CHN	B1	32.5	EU	65.8°	129.9°
28	CHN	B1	35.6	EU	36.2°	51.6°
29	USA	L1	36.8	EU	37.9°	216.8°

Slika 3.7. Snimka zaslona aplikacije GPSTest s vidljivim koordinatama ("Lat" označava geodetsku širinu, "Long" dužinu, "Alt" elipsoidnu visinu i "Alt (MSL)" visinu s obzirom na srednju razinu mora)

5. Za sve tri točke, geodetske koordinate dobivene GNSS pozicioniranjem potrebno je transformirati u koordinatni sustav HTRS96/TM pomoću programa Geotrans, primjer je vidljiv na slici 3.8. (kako bi se mogle unijeti geodetske koordinate u obliku decimalnih stupnjeva, potrebno je odabrati *Options ► Geodetic Units ► Degrees*).



Slika 3.8. Transformacija WGS84 geodetskih koordinata dobivenih GNSS pozicioniranjem u koordinate u sustavu HTRS96/TM

6. U tabličnoj formi potrebno je prikazati koordinate točaka koje su dobivene GNSS pozicioniranjem i zatim transformirane u HTRS96/TM, koordinate određene pomoću ortofoto podloge na geoportalu Državne geodetske uprave i izračunati razlike koordinata u E i N smjeru (primjer je vidljiv u tablici 3.1.).

*Tablica 3.1. Primjer usporedbe koordinata određenih GNSS pozicioniranjem i preuzetih s ortofoto podloge s geoportala*

<b>Točka</b>	<b>Koordinate određene GNSS pozicioniranjem</b>	<b>Koordinate preuzete s ortofoto podloge s geoportala</b>	<b>Razlika koordinata (apsolutna vrijednost)</b>
Točka 1	E = 497 122 m	E = 497 121 m	$\Delta E = 1 \text{ m}$
	N = 4 819 047 m	N = 4 819 044 m	$\Delta N = 3 \text{ m}$

### 3.3. Pitanja za ponavljanje

- 1) Što je GNSS, a što GPS?
- 2) Nabroji četiri GNSS-a koja su u upotrebi?
- 3) Od koja tri segmenta se sastoji svaki GNSS?
- 4) Opiši osnovni koncept pozicioniranja pomoću GNSS-a?
- 5) Kolike se maksimalne točnosti mogu očekivati kod GNSS pozicioniranja u slučaju kada se koristi samo jedan prijemnik?
- 6) U kojem koordinatnom sustavu se redovito određuju koordinate kod GNSS pozicioniranja?
- 7) S koliko najmanje prijemnika trebamo obavljati GNSS mjerenja kako bi ona bila pogodna za geodetske primjene, tj. imala centimetarsku točnost?
- 8) Koja se vrsta visina određuje GNSS pozicioniranjem?



**PROJEKT 2**

**MJERENJE KUTOVA I  
ODREĐIVANJE KOORDINATA**



## 4. vježba: Mjerenje horizontalnog kuta i obrada podataka mjerenja

**Opis vježbe:** U mnogim granama inženjerstva u kojima je potrebno definirati prostorne koordinate, prethodno je potrebno izmjeriti kutove. Na osnovu izmjerenih kutova i duljina mogu se formirati pravokutni trokuti pomoću kojih se određuju koordinate. Rezultati mjerenja dobiveni terenskom vježbom opažanja pravaca se obrađuju u za to predviđenom obrascu. Rezultate je potrebno kontrolirati zbog izbjegavanja pogrešaka mjerenja i računanja.

**Ishodi učenja:** Studenti će se upoznati s geodetskim instrumentom za mjerenje kutova teodolitom i pomoću njega mjeriti horizontalne kutove. Obraditi mjerenja horizontalnih kutova girusnom metodom.

**Potrebna oprema i pribor:** Geodetski instrument teodolit i džepno računalo.

### 4.1. Teodolit

**Teodolit** je geodetski instrument za mjerenje horizontalnih i vertikalnih kutova (slika 4.1.). Instrument koji osim kutova može mjeriti i udaljenosti nazivamo **tahimetar**. Teodolite prema načinu rada dijelimo na: mehaničke čiji su krugovi (limbovi) metalni, a očitavaju se pomoću lupe ili jednostavnog mikroskopa; optičke koji koriste staklene krugove, koji se očitavaju primjenom optičkih mikrometara; te elektroničke teodolite čiji su krugovi pogodnih za digitalno očitavanje. Danas se najčešće koriste elektronički tahimetri koje nazivamo još i **totalne ili mjerne stanice**.



Mehanički teodolit



Optički teodolit



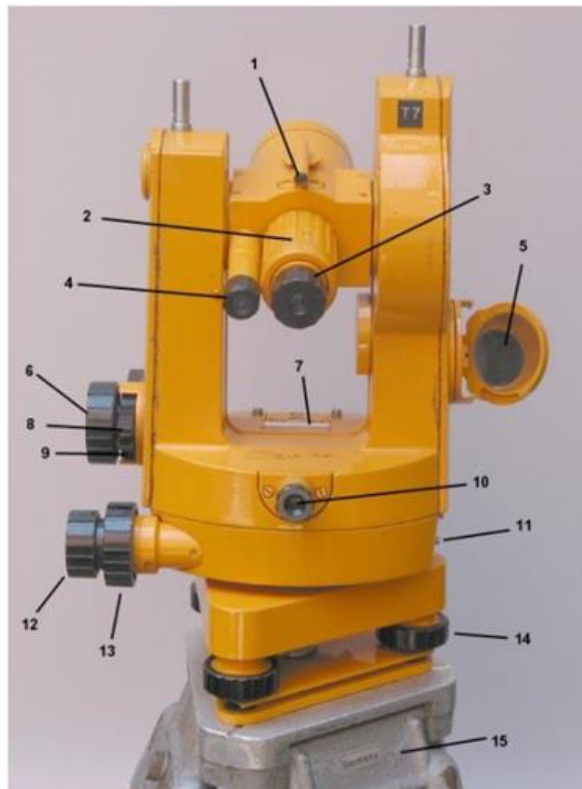
Elektronički teodolit

Slika 4.1. Razvoj instrumenta za mjerenje kutova kroz povijest

Teodolit ima dva dijela: donji nepokretni i gornji pomični dio ili alhidadu (slika 4.2.). Instrument se postavlja na glavu stativa i pričvrsti centralnim (središnjim) vijkom (15).

Glavni dijelovi teodolita:

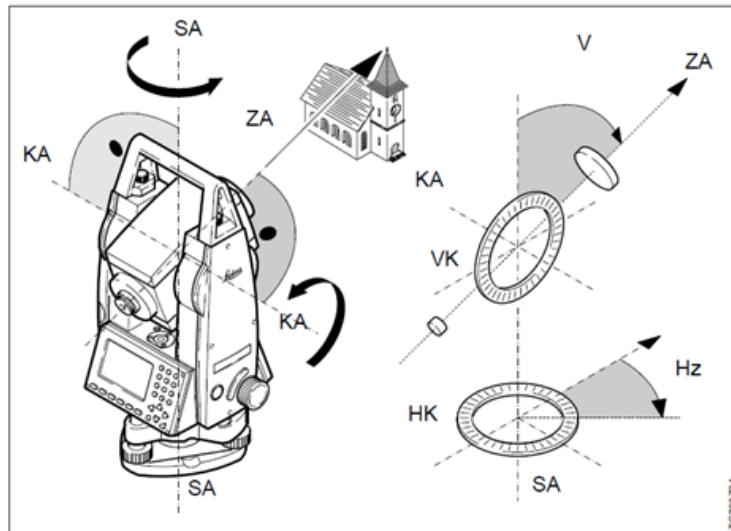
- Donji nepokretni dio koji se sastoji od:
  - podnožna ploča s tri podnožna vijka (14)
  - horizontalni krug (limb)
  - repeticijskog uređaja (11)
- Gornji pomični dio (alhidada) ima sljedeće dijelove:
  - durbin/dalekozor
  - vertikalni krug (limb)
  - kočnice alhidade i dalekozora (9 i 8)
  - vijci za fino pomicanje alhidade i dalekozora (12 i 13)
  - alhidadne libele - cijevna (7) i dozna (kružna)
  - sprava za očitavanje horizontalnog i vertikalnog kruga (4)
  - optički visak (10)



Slika 4.2. Dijelovi optičkog teodolita

Brojevi dijelova teodolita prema slici 4.2:

- |  |                                      |
|--|--------------------------------------|
| 1. optički nišan   | 8. kočnica durbina                   |
| 2. vijak za fokusiranje  | 9. kočnica alhidade                  |
| 3. vijak za dioptriranje   | 10. optički visak                    |
| 4. mikroskop sa skalom   | 11. repeticijski uređaj              |
| 5. ogledalo za osvjjetljenje vidnog polja                              | 12. vijak za fini pomak alhidade (↔) |
| 6. vijak za osvjjetljenje očitavanja vertikalnog i horizontalnog kruga | 13. vijak za fini pomak durbina (↑)  |
| 7. cijevna libela  | 14. podnožni vijak                   |
|  | 15. glava stativa                    |



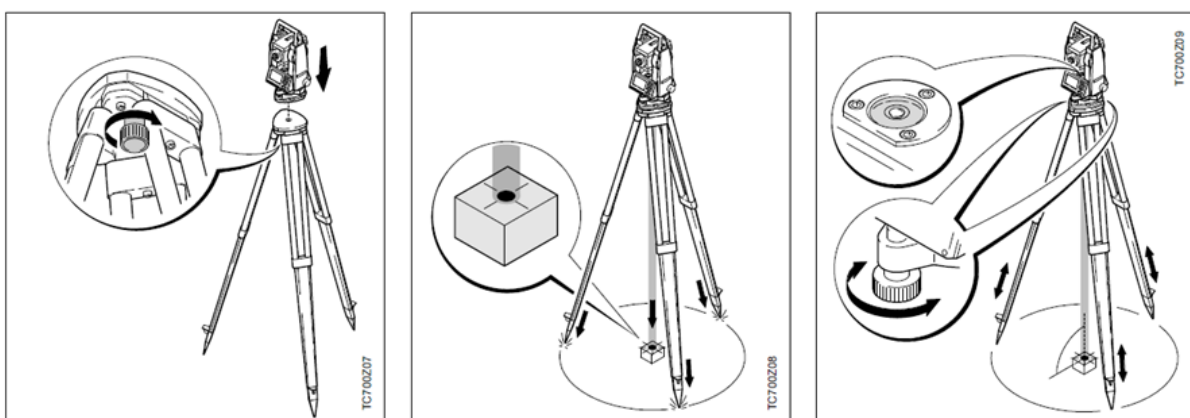
Slika 4.3. Osi teodolita (SA – vertikalna os, KA – horizontalna os i ZA – vizurna (kolimacijska) os) i očitavanja kutova (VK – vertikalni krug za očitavanje vertikalnih kutova i HK – horizontalni krug za očitavanje horizontalnih smjerova)

## 4.2. Postavljanje teodolita u radni položaj

Za mjerenje kutova teodolit se postavlja na stativ iznad geodetske točke (slika 4.4.). Stativ se sastoji od tri noge i glave stativa. Noge stativa izrađuju se od drva ili aluminija, a završavaju s metalnim šiljcima koji se nogom utiskuju u podlogu (zemlju ili drugo). Prije mjerenja osi teodolita moraju se dovesti u ispravan položaj, tada kažemo da se teodolit nalazi u radnom položaju.

**Centriranjem teodolita** vertikalna se os postavlja u smjeru sile teže tako da prolazi označenim centrom točke stajališta (slika 4.4.). Centriranje se izvodi pomoću običnog, krutog ili optičkog viska. Promatramo kroz okular optičkog viska i pomicanjem podnožne ploče teodolita dovedemo da nitni križ optičkog viska pogodi stajališnu točku. Odstupanje dozne libele popravimo dizanjem ili spuštanjem nogara stativa.

**Horizontirati teodolit** znači da treba horizontalnu os teodolita dovesti u prostoru horizontalno i okomito na vertikalnu os (slika 4.4.). Alhidadna libela se postavlja u smjer dva podnožna vijaka i vrhuni (mjhurici u sredini) zakretanjem podnožnih vijaka, zatim se libela zarotira za 90 stupnjeva u smjer trećeg vijaka i ponovo vrhuni zakretanjem trećeg podnožnog vijaka. Horizontiranje je važna operacija jer svako odstupanje horizontalne osi od ispravnog položaja utječe na ispravno mjerenje kutova.



Slika 4.4. Postupak postavljanja instrumenta na stativ (lijevo), centriranje instrumenta (sredina) i horizontiranje instrumenta (desno)

### 4.3. Postupak očitavanja horizontalnog kruga (HZ)

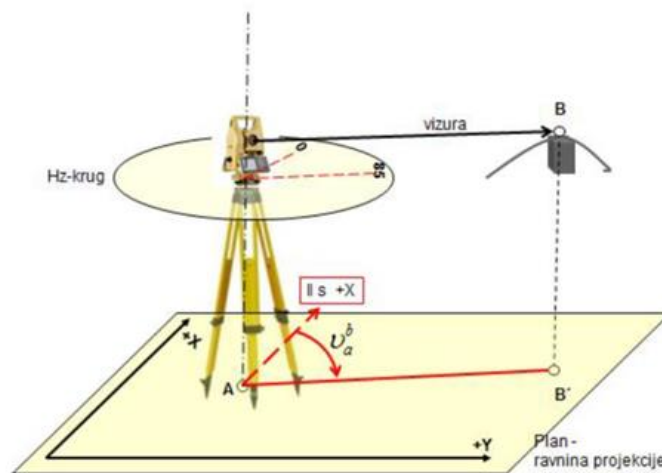


Ignorirati očitavanje  
vertikalnog kruga

Slika 4.5. Očitavanje HK 248° 55' 15"

### 4.4. Postupak terenskih mjerenja

Nakon centriranja i horizontiranja teodolita odabiru se pravci prema vizurnim točkama (slika 4.6.). Izoštrimo sliku nitnog križa (dioptriranje), grubo viziramo, izoštrimo sliku opažane točke uz poništenje paralakse. Fino viziramo odabranu točku, te očitamo horizontalni krug. Nakon toga možemo pristupiti mjerenjima ili očitavanju pravca (slika 4.5.).



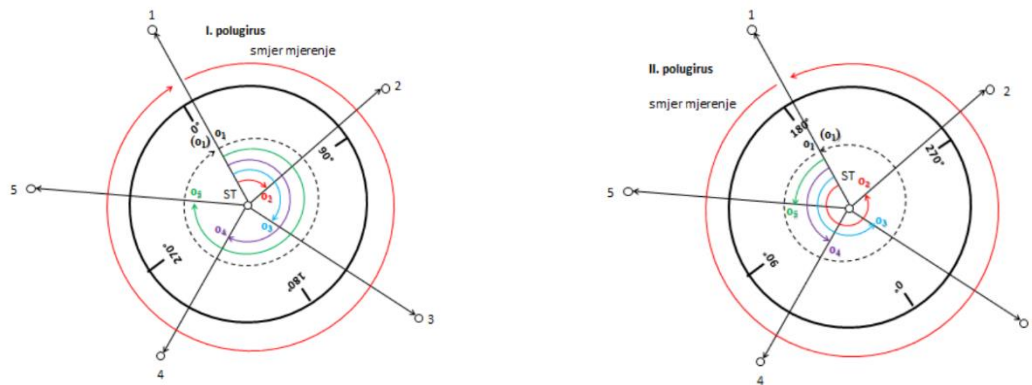
Slika 4.6. Skica opažanja (mjerenja) horizontalnog kuta

**Girusna metoda mjerenja kutova** je metoda mjerenja kutova (pravaca) u dva položaja durbina (instrumenta). Sastoji se od dva polugirusa (slika 4.7.).

**U prvom polugirusu** instrument se postavi u I. položaj (VKL – vertikalni krug se nalazi lijevo od durbina), odabere se početni pravac (opcionally – namjesti očitavanje na početnom pravcu približno 0° pomoću repeticijskog uređaja kod optičkih teodolita), zatim se redom opažaju ostali pravci u smjeru kretanja kazaljke sata. Radi kontrole mjerenja obavezno ponovno opažati početni pravac.

**U drugom polugirusu** kod instrumenta se alhidada i durbin okrenu za 180° u drugi položaj (VKD – vertikalni krug se nalazi desno od durbina) u kojem se opažanja (mjerenja) obavljaju, počevši od početnog

pravca, u obrnutom smjeru od smjera kretanja kazaljke sata. Radi kontrole se ponovno opaža početni pravac.



Slika 4.7. Skica girusne metode mjerenja pravaca – prvi (lijevo) i drugi polugirus (desno)

**Primjer – girusna metoda** mjerenja horizontalnih pravaca (kutova) prema točkama A, B i C. Instrument postavimo u I. položaj. Pravce prema točkama A, B i C viziramo u smjeru kretanja kazaljke na satu i očitamo horizontalni krug. Za kontrolu na kraju ponovno očitamo pravac na početnu točku A. Okrenemo instrument u drugi položaj i viziramo iste točke, ali sada u suprotnom smjeru, od točke A prema točki C, B i za kraj ponovo očitamo pravac prema točki A.

Iz dobivenih mjerenja odredimo dvostruku kolimacijsku pogrešku, sredinu između I. i II. položaja, te reduciranu sredinu. Na kraju računamo horizontalne kutove između pravca A-B, A-C, i B-C.

1. Demonstriranje postavljanja (horizontiranja i centriranja) te mjerenja teodolitom. Instrukcije kako postaviti teodolit iznad stajališne točke nalaze se na kraju vodiča kroz ovu laboratorijsku vježbu.
2. Opažati četiri (4) zadane vizurne točke girusnom metodom. Svaki student treba izmjeriti najmanje dva kuta.

Slijediti navedene korake:

1. Izoštriti sliku nitnog križa (dioptriranje), grubo vizirati prvi pravac, izoštriti sliku opažane točke, fino vizirati točku, te očitavati horizontalni krug (slika 4.5).
2. Grubo vizirati drugi pravac, koji se nalazi u smjeru kazaljke na satu, te ponoviti postupak kao kod prvog pravca.
3. Za kontrolu ponovo očitati prvi pravac. Ovakav niz mjerenja (opažanja) kutova naziva se prvi polugirus i izvodi se u I položaju dalekozora teodolita (kad vertikalni krug stoji na lijevoj strani instrumenta).
4. Okrenuti instrument u drugi položaj (zaokrenuti alhidadu i dalekozor za 180 stupnjeva preko zenita) i vizirati iste točke, ali sada u suprotnom smjeru, od točke A prema točki C, B i za kraj ponovo očitamo pravac prema točki A. Očitani smo sve točke u dva polugirusa, odnosno u jednom punom girusu.
5. Razlika između prvog i drugog očitavanja iste točke trebala bi se razlikovati za  $2c = \alpha II - \alpha I = \max 30''$  (dvostruka kolimacijska pogreška).

Pokupiti opremu, očistiti je i vratiti u skladište. Provjeriti imate li **POTPUNE** terenske bilješke. Instrument se **NE** nosi dok je na stativu. Instrument se **NE** sprema u kutiju mokrak.

## 4.5. Obrada podataka mjerenja horizontalnih kutova

Na slici 4.8. prikazan je riješen **trigonometrijski obrazac br. 1**. namijenjen obradi podataka mjerenja girusnom metodom. Na terenu se ispunjavaju stupci od 1 do 5 (datum i sat, stajalište i girus, vizurna točka, I položaj i II položaj durbina odnosno dalekozora) te stupac 8 (dvostruka kolimacijska pogreška).

Slika 4.9. prikazuje očitavanje vertikalnog i horizontalnog kuta.

Prilikom mjerenja na terenu obavezno kontrolirati iznose **kolimacijske pogreške**, koja je pokazatelj točnosti mjerenja. Dvostruka kolimacijska pogreška računa se po formuli:  $2c = (II \pm 180) - I = (KD \pm 180^\circ) - KL$ , a u obrazac se upisuje u stupac 8. Ako razlika između minimalnog i maksimalnog iznosa  $2c$  prelazi propisane iznose mjerenja se moraju ponoviti.

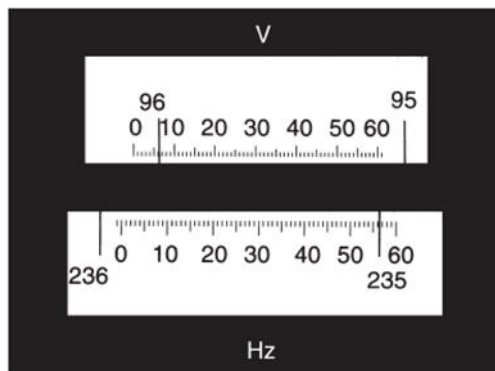
Trigonometrijski obrazac br. 1 Strana .....														
Datum i sat	Stajalište Girus	Vizurna točka	I Položaj durbina			II Položaj durbina			KONTROLE	PRIMJEDBE				
1	2	3	4			5					6	7	8	9
	1	A	13	37	13	193	37	19						
		B	25	21	17	205	21	21						
		C	77	5	42	257	5	48						
		D	103	13	7	283	13	1						
		(A)	(13	37	18)	(193	37	17)						

Slika 4.8. Primjer računanja girusne metode

Aritmetička sredina iz I i II položaja durbina odnosno dalekozora (stupac 6) se računa tako da se iz očitavanja pravaca u prvom položaju durbina prepisuju stupnjevi, a računa se aritmetička sredina minuta i sekundi  $(I+II)/2$ . Reducirana sredina (stupac 7) se računa tako da se od očitavanja svakog pojedinog pravca oduzme očitavanje prvog pravca, pa se tako dobiju razlike između prvog pravca i ostalih pravca.

**I. kontrola** – izračuna se zbroj minuta i sekundi aritmetičke sredine iz I. i II. položaji durbina ( $17'24''$ ), na isti se način sumiraju minute i sekunde reduciranih sredina ( $48'20''$ ).

**II. kontrola** – minute i sekunde prvog ili početnog pravca pomnože se s brojem mjerenih pravaca u girusu ( $37'16'' \times 4 = 148'64'' = 2^{\circ}29'4''$ ) i tom umnošku dodamo zbroj minuta i sekundi reducirane sredine ( $48'20''$ ) i dobije se zbroj minuta i sekundi aritmetičke sredine ( $29'4'' + 48'20'' = 1^{\circ}17'24''$ ).



Slika 4.9. Očitavanje VK  $96^{\circ} 06' 30''$  i HK  $235^{\circ} 56' 30''$

## 4.6. Primjeri računanja trigonometrijskog obrasca br. 1

Opći podaci povezani s mjerenjem (datum i vrijeme, opažač te stajalište) upisuju se u stupce 1 i 2, podaci o mjerenim pravcima ili viziranim objektima (redni broj vizurne točke) upisuju se u stupac 3, dok se podaci izmjereni na terenu (kutovi, minute i sekunde) upisuju u stupce 4 i 5 (slika 4.10.).



Datum i sat	Stajalište Girus	Vizurna točka	I Položaj durbina			II Položaj durbina		
1	2	3	*	*	*	*	*	*
	1	A	27	44	16	207	44	12
		B	44	53	5	224	53	13
		C	66	22	11	246	22	21
		D	99	18	38	279	18	36
		(A)	(27	44	18)	(207	44	17)

Sredina iz I i II			Reducirana sredina			Dvostruki kosinusni razlikovnik Bla 20 = II - I	KONTROLE			PRIMJEDBE	
*	*	*	*	*	*		*	*	*		
6			7			8	9			10	
27	44	14	0	0	0	-	4	4	x	44	14
44	53	9	17	8	55	+	8		+	21	20
66	22	16	38	38	2	+	10		=	18	16
99	18	37	71	34	23	-	2				
	18	16		21	20						

Slika 4.10. Primjer riješenog trigonometrijskog obrasca br.1.

## 4.7. Zadatci za vježbu

Datum i sat	Stajalište Girus	Vizurna točka	I Položaj durbina			II Položaj durbina		
			°	'	"	°	'	"
1	2	3	4			5		
14.12.2015.	PT 212	PT 117	00	00	16	180	00	30
8,05 sati	1. girus	PT 118	97	50	36	277	50	24
		PT 119	151	10	18	331	10	26
		PT 120	196	04	00	16	04	12
		PT 121	294	53	48	114	53	36
		PT 117	(0	00	22	180	00	30)
				58	58		59	08
14.12.2015.	PT 212	PT 117	60	00	42	240	00	36
8,20 sati	2. girus	PT 118	157	50	42	337	50	36
		PT 119	211	10	24	31	10	12
		PT 120	256	04	00	76	04	18
		PT 121	354	53	36	174	53	54
		PT 117	(60	00	30	240	00	36)
				59	24		59	36
14.12.2015.	PT 212	PT 117	120	00	42	240	00	48
8,40 sati	3. girus	PT 118	217	50	42	337	50	30
		PT 119	271	10	24	31	10	24
		PT 120	316	04	06	76	04	18
		PT 121	54	53	42	174	53	54
		PT 117	(120	00	30	300	00	36)
				59	36		59	54

## 4.8. Pitanja za ponavljanje

- 1) Kako se zove instrument za mjerenje kutova i duljina, a kako njegova elektronička varijanta?
- 2) Kako se zove gornji pomični dio teodolita i koji su mu sastavni dijelovi?
- 3) Koje tri osi teodolita poznajete i kako su postavljene?
- 4) Što je centriranje?
- 5) Što je horizontiranje?
- 6) Što je girusna metoda?
- 7) Kako se izvode mjerenja u prvom polugirusu?
- 8) Kako se izvode mjerenja u drugom polugirusu?
- 9) Koje su kontrole kod girusne metode?
- 10) Što je dvostruka kolimacijska pogreška, kako se računa i zašto?

## 5. vježba (1. dio): Računanje smjernog kuta

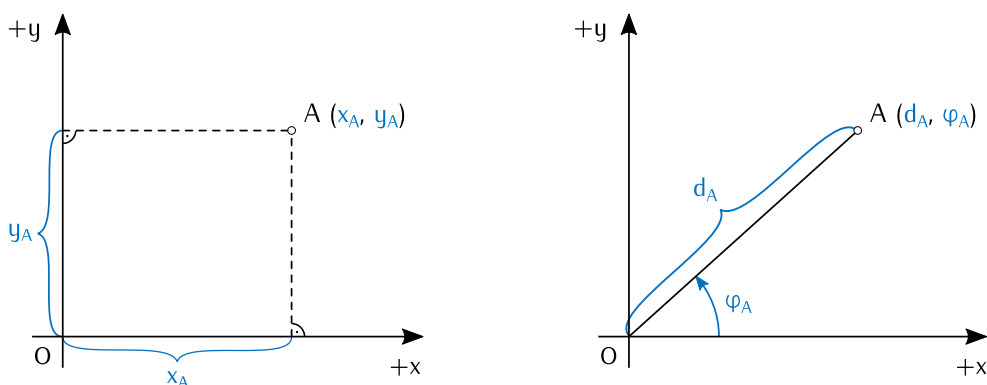
**Opis vježbe:** Izračunati smjerni kut i duljinu iz zadanih pravokutnih 2D kartezijevih koordinata.

**Ishodi učenja:** Studenti će razlikovati polarne i pravokutne koordinate u ravnini i koordinatne sustave koji se koriste u matematici i one koji se koriste u geodeziji. Studenti će konvertirati pravokutne u polarne koordinate.

**Potrebna oprema i pribor:** Džepno računalo.

### 5.1. Kratak opis koordinata u ravnini

Za definiranje položaja točaka u ravnini najčešće se koriste **kartezijev 2D pravokutni** i **2D polarni koordinatni sustav**. U oba slučaja položaj točke definiran je s dvije vrijednosti, odnosno s dvije koordinate. U pravokutnom 2D kartezijevom koordinatnom sustavu to su udaljenosti ortogonalnih projekcija točke na koordinatne osi od ishodišta koordinatnog sustava  $(x_A, y_A)$ , a u polarnom koordinatnom sustavu to su polarni kut i polarna duljina  $((d_A, \varphi_A)$ ; slika 5.1.).

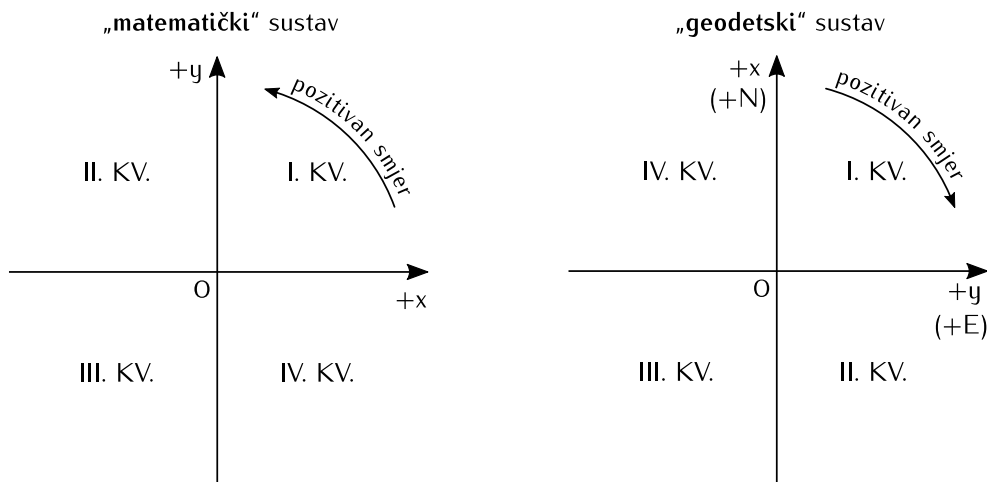


Slika 5.1. Definiranje položaja točke u ravnini pomoću: „matematičkog“ 2D pravokutnog koordinatnog sustava (lijevo) i „matematičkog“ 2D polarnog koordinatnog sustava (desno)

Koordinatni sustavi prikazani na slici 5.1 su desno orijentirani i u geodetskoj terminologiji se često nazivaju „matematičkima“. U matematičkom 2D pravokutnom koordinatnom sustavu apscisna os označava se s  $x$  i pozitivno je usmjerena „u desno“, a ordinatna os s  $y$  i pozitivno je usmjerena „prema gore“. Pozitivan smjer

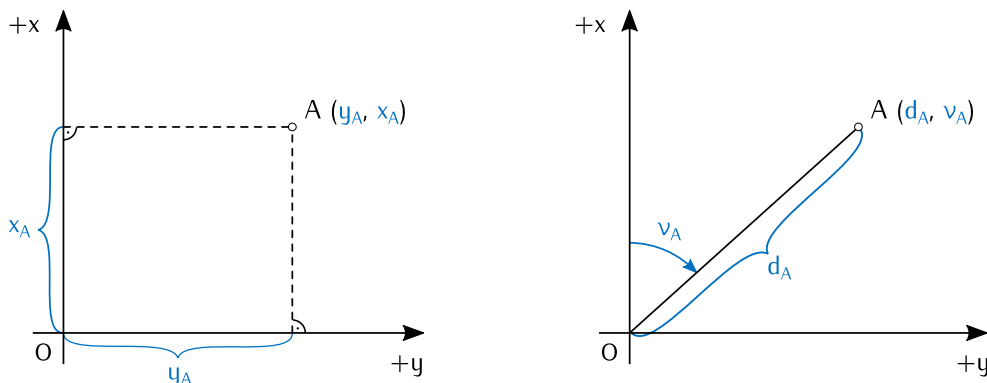
definiran je kao suprotan smjeru kretanja kazaljke na satu. Prvi kvadrant definiran je polupravcima koji se odnose na pozitivne dijelove osi  $x$  i  $y$ , a ostali kvadranti se redom definiraju u pozitivnom smjeru, počevši od prvog. Kod polarnih koordinata, u matematičkom sustavu položaj točke  $A$  (prema slici 5.1) definiran je udaljenošću  $d_A$  točke  $A$  od ishodišta  $O$  (polarna udaljenost) i kutom  $\varphi_A$  kojeg dužina  $\overline{OA}$  zatvara s polarnom osi, odnosno u ovom slučaju s pozitivnim dijelom osi  $x$  (polarni kut). Kut  $\varphi_A$  definira se u od pozitivnog dijela osi  $x$ , i to u smjeru koji je suprotan smjeru kretanja kazaljke na satu (pozitivni smjer).

Pravokutni koordinatni sustav koji se koristi za definiranje položaja točaka u ravnini za geodetske potrebe redovito je lijevo orijentiran. Apscisna os se označava s  $y$  i pozitivno je usmjerena prema istoku (predstavlja projekciju ekvatora), a ordinatna s  $x$  i pozitivno je usmjerena prema sjeveru (predstavlja projekciju srednjeg meridijana). Često se umjesto oznaka  $x$  i  $y$ , za označavanje koordinatnih osi koriste i oznake  $E$  i  $N$ . Kako je u lijevo-orijentiranom koordinatnom sustavu pozitivan smjer jednak smjeru kretanja kazaljke na satu, tako se i kvadranti definiraju u pozitivnom smjeru, što znači da se ne podudaraju s onima u matematičkom sustavu. Ova razlika između „geodetskog“ i „matematičkog“ pravokutnog koordinatnog sustava prikazana je na slici 5.2.



Slika 5.2. Razlika u definiciji „matematičkog“ (lijevo) i „geodetskog“ (desno) koordinatnog sustava

Na slici 5.3 je, slično kao i na slici 5.1, prikazan način definiranja položaja točke u ravnini pomoću pravokutnih i polarnih koordinata, ali sada s obzirom na definiciju „geodetskog“ koordinatnog sustava. Osim što se može uočiti da su zamijenjene osi  $x$  i  $y$ , vidljivo je i da je na drugačiji način definiran polarni kut  $\nu_A$ . Polarna os je u ovom slučaju definirana pozitivnim dijelom osi  $x$ , a kut  $\nu_A$  određuje se u pozitivnom smjeru (u „geodetskom“ sustavu u smjeru kretanja kazaljke na satu) od pozitivnog dijela osi  $x$ . Kod definiranja uređenog para kojim je određen položaj točke u pravokutnom koordinatnom sustavu kao prvi element uzima se apscisa, a kao drugi ordinata, što znači da u „geodetskom“ sustavu uređeni par ima oblik  $(y_A, x_A)$ .



Slika 5.3. Definiranje položaja točke u ravnini pomoću: „geodetskog“ 2D pravokutnog koordinatnog sustava (lijevo) i „geodetskog“ 2D polarnog koordinatnog sustava (desno)

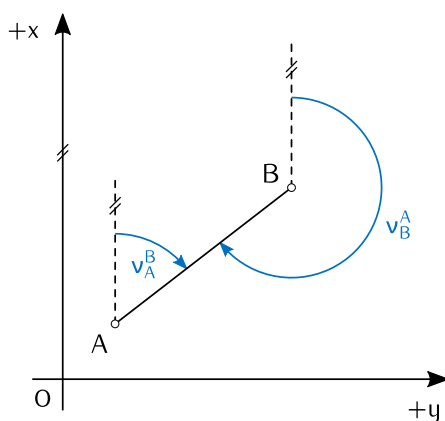
Položaj točke  $A$  na slikama 5.1 i 5.3 definiran je s obzirom na ishodište  $O$  pa se u tom slučaju kaže da je položaj točke  $A$  definiran apsolutno. Položaj točke moguće je definirati i s obzirom na bilo koju drugu točku u koordinatnom sustavu. U tom slučaju kaže se da je položaj točke definiran relativno u odnosu na neku drugu točku. Primjer relativnog zadavanja položaja točke  $B$  s obzirom na točku  $A$  prikazan je na slici 5.5. Položaj točke  $B$  može se s obzirom na točku  $A$  definirati pomoću koordinatnih razlika **koordinatne razlike**  $\Delta y$  i  $\Delta x$  (pravokutni koordinatni sustav) ili pomoću **smjernog kuta**  $v_A^B$  i polarne udaljenosti  $d_{AB}$  (polarni koordinatni sustav). Za razliku od pravokutnih koordinata koje se koriste i za apsolutno i za relativno definiranje položaja točaka u ravnini, u geodeziji se polarne koordinate ne koriste za definiranje apsolutnog položaja točaka u ravnini, nego samo relativnog. U nastavku je opisan postupak konverzije koordinata iz relativnih pravokutnih u relativne polarne i obrnuto.

## 5.2. Smjerni kut

**Smjerni kut**  $v_A^B$  dužine  $\overline{AB}$  u točki  $A$  je kut u točki  $A$  kojeg paralela s pozitivnim smjerom osi  $x$  zatvara s dužinom  $\overline{AB}$ , i to u smjeru kretanja kazaljke na satu (slika 5.4). Smjerni kut je zapravo polarni kut kojim se definira položaj točke u polarnom koordinatnom sustavu.

Smjerni kut uobičajeno se označava grčkim slovom  $\nu$  (čit. *ni*), kako je i označen na slikama 5.3 i 5.4. U indeksu je oznaka točke u kojoj je vrh smjernog kuta, a u eksponentu točka koja definira krak smjernog kuta. Tako je u oznaci smjernog kuta  $v_A^B$  vrh smjernog kuta u točki  $A$ , a krak smjernog kuta je definiran točkom  $B$ , odnosno krak je dužina  $\overline{AB}$ . Smjerni kut se izražava u kutnim stupnjevima i u rasponu je od  $0^\circ$  do  $360^\circ$ . Svaka dužina ima dva smjerna kuta, po jedan u svakoj krajnjoj točki. Ta dva smjerna kuta razlikuju se za  $180^\circ$  i nazivaju se protusmjernima. Smjernom kutu  $v_A^B$  protusmjernan je  $v_B^A$  (slika 5.4), a veza između njih izražena je formulom:

$$v_A^B = v_B^A \pm 180^\circ.$$

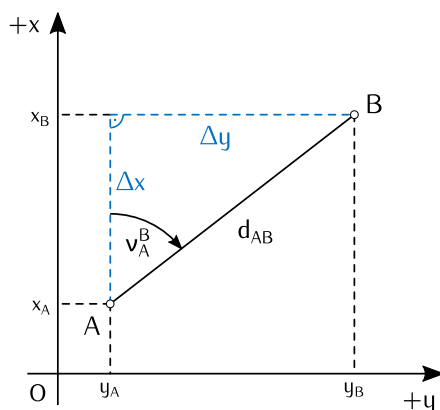


Slika 5.4. Smjerni kut  $v_A^B$  i njegov protusmjerni  $v_B^A$

Često se kod rješavanja geodetskih zadataka javlja potreba za računanjem vrijednosti smjernog kuta iz zadanih pravokutnih koordinata. Kako je prikazano na slici 5.5, ako su zadane pravokutne koordinate točaka  $A (y_A, x_A)$  i  $B (y_B, x_B)$ , smjerni kut  $v_A^B$  se može odrediti iz pravokutnog trokuta kojemu su katete **koordinatne razlike**  $\Delta y$  i  $\Delta x$ , a hipotenuza dužina  $\overline{AB}$ . Koordinatne razlike računaju se po formulama:

$$\Delta y = y_B - y_A, \quad (5.1)$$

$$\Delta x = x_B - x_A. \quad (5.2)$$



Slika 5.5. Veza između koordinatnih razlika  $\Delta y$  i  $\Delta x$  (relativne pravokutne koordinate) i smjernog kuta  $v_A^B$  i duljine  $d_{AB}$  (relativne polarne koordinate)

Iz pravokutnog trokuta kojemu su katete koordinatne razlike, a hipotenuza dužina  $\overline{AB}$ , dobiva se da je:

$$\tan v_A^B = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow v_A^B = \operatorname{atan} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Kako je funkcija  $\operatorname{atan}(x)$  definirana tako da su joj funkcijske vrijednosti u rasponu između  $-90^\circ$  i  $90^\circ$ , a smjerni kut može biti u rasponu od  $0^\circ$  do  $360^\circ$ , prilikom svakog računanja smjernog kuta bi trebalo nacrtati skicu i iz skice odrediti način računanja. Da bi se to izbjeglo, mogu se koristiti formule iz tablice 5.1. U tablici 5.1 znakovi „+“ i „-“ označavaju predznak odgovarajuće koordinatne razlike. Nakon što se odrede predznaci koordinatnih razlika, za računanje smjernog kuta koristi se formula u zadnjem retku tablice. Bitno je napomenuti da je za korištenje tablice 5.1 nužno ispravno izračunati vrijednosti koordinatnih razlika  $\Delta y$  i  $\Delta x$ . Ako je potrebno odrediti smjerni kut  $v_A^B$ , tada se koordinatne razlike računaju po formulama (5.1) i (5.2). Drugim riječima, umanjjenik je odgovarajuća koordinata točke koja definira krak smjernog kuta, a umanjitelj je odgovarajuća koordinata točke u kojoj je vrh smjernog kuta.

Tablica 5.1. Formule za računanje smjernog kuta ovisno o predznacima koordinatnih razlika

	1. kvadrant ( $0^\circ < v_A^B < 90^\circ$ )	2. kvadrant ( $90^\circ < v_A^B < 180^\circ$ )	3. kvadrant ( $180^\circ < v_A^B < 270^\circ$ )	4. kvadrant ( $270^\circ < v_A^B < 360^\circ$ )
$\Delta y = y_B - y_A$	+	+	-	-
$\Delta x = x_B - x_A$	+	-	-	+
$v_A^B$	$\operatorname{atan} \frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\operatorname{atan} \frac{\Delta y}{\Delta x} + 180^\circ$	$\operatorname{atan} \frac{\Delta y}{\Delta x} + 180^\circ$	$\operatorname{atan} \frac{\Delta y}{\Delta x} + 360^\circ$

Osim smjernog kuta  $v_A^B$ , iz koordinatnih razlika  $\Delta y$  i  $\Delta x$  može se izračunati i duljina  $d_{AB}$  dužine  $\overline{AB}$ :

$$d_{AB} = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2}.$$

Često se javlja i potreba da se iz poznatog smjernog kuta  $v_A^B$  i polarne udaljenosti  $d_{AB}$  odrede koordinatne razlike  $\Delta y$  i  $\Delta x$  (prema slici 5.5):

$$\Delta y = d_{AB} \cdot \sin v_A^B,$$

$$\Delta x = d_{AB} \cdot \cos v_A^B.$$

Ako su poznate koordinate točke A ( $y_A, x_A$ ), smjerni kut  $v_A^B$  i polarna udaljenost  $d_{AB}$ , mogu se, prema slici 5.5, odrediti koordinate točki B ( $y_B, x_B$ ):

$$y_B = y_A + \Delta y = y_A + d_{AB} \cdot \sin v_A^B,$$

$$x_B = x_A + \Delta x = x_A + d_{AB} \cdot \cos v_A^B.$$

Za računanje smjernog kuta može se koristiti i trigonometrijski obrazac br. 8 (tablica 5.2). U obrascu u tablici 5.2 riješen je zadatak 1. b) iz poglavlja 5.3.

Tablica 5.2. Trigonometrijski obrazac br. 8

$T_b$	$y_b$	$x_b$	$\operatorname{tg} v_a^b = \Delta y / \Delta x$	$\operatorname{tg}(v_a^b + 45^\circ) = (\Delta x + \Delta y) / (\Delta x - \Delta y)$	$\sin v_a^b$	Kvadrant
$T_a$	$y_a$	$x_a$			$\cos v_a^b$	
	$\Delta y = y_b - y_a$	$\Delta x = x_b - x_a$	$v_a^b$	$v_a^b + 45^\circ$	$d = \Delta y / \sin v_a^b$	
	$\Delta x + \Delta y$	$\Delta x - \Delta y$			$d = \Delta x / \cos v_a^b$	
1	2	3	4	5	6	7
B	483 254,44	5 009 327,91			-0.49204303142	
A	487 254,28	5 002 251,00	-0,565195827		0.870570878924	
	-3 999,84	7 076,91			8129,05	
			330° 31' 30,17"		8129,05	4.



## 5.3. Zadatci za vježbu

**Zadatak 1.** Potrebno je odrediti smjerni kut  $v_A^B$  i duljinu  $d_{AB}$  ako su zadane pravokutne koordinate točaka  $A$  i  $B$ .

a)

A (502 325,21 m; 4 912 254,24 m)  
B (502 542,87 m; 4 912 421,02 m)

b)

A (487 254,28 m; 5 002 251,00 m)  
B (483 254,44 m; 5 009 327,91 m)

**Rješenje:**

a)

$$\begin{aligned}\Delta y &= y_B - y_A = 217,66 \text{ m} \\ \Delta x &= x_B - x_A = 166,78 \text{ m} \\ \Delta y > 0, \Delta x > 0 &\Rightarrow 1. \text{ kvadrant}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_A^B &= \text{atan} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ v_A^B &= 52^\circ 32' 21,07''\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{AB} &= \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2} \\ d_{AB} &= 274,21 \text{ m}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\Delta y &= y_B - y_A = -3 999,84 \text{ m} \\ \Delta x &= x_B - x_A = 7 076,91 \text{ m} \\ \Delta y < 0, \Delta x > 0 &\Rightarrow 4. \text{ kvadrant}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_A^B &= \text{atan} \frac{\Delta y}{\Delta x} + 360^\circ \\ v_A^B &= -29^\circ 28' 29,83'' + 360^\circ \\ v_A^B &= 330^\circ 31' 30,17''\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{AB} &= \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2} \\ d_{AB} &= 8 129,05 \text{ m}\end{aligned}$$

**Zadatak 2.** Potrebno je izračunati koordinatne razlike  $\Delta y$  i  $\Delta x$  ako su poznati smjerni kut  $v_A^B$  i duljina  $d_{AB}$ .

$$\begin{aligned}v_A^B &= 330^\circ 31' 30,17'' \\ d_{AB} &= 8 129,05 \text{ m}\end{aligned}$$

**Rješenje:**

$$\begin{aligned}\Delta y &= d_{AB} \cdot \sin v_A^B = -3 999,84 \text{ m} \\ \Delta x &= d_{AB} \cdot \cos v_A^B = 7 076,91 \text{ m}\end{aligned}$$

**Zadatak 3.** Potrebno je izračunati koordinate točke  $B$  ako su zadane koordinate točke  $A$ , smjerni kut  $v_A^B$  i duljina  $d_{AB}$ .

$$\begin{aligned}A &(432 521,22 \text{ m}; 4 852 221,29 \text{ m}) \\ v_A^B &= 125^\circ 22' 47,32'' \\ d_{AB} &= 521,57 \text{ m}\end{aligned}$$

**Rješenje:**

$$\begin{aligned}\Delta y &= d_{AB} \cdot \sin v_A^B = 425,25 \text{ m} \\ \Delta x &= d_{AB} \cdot \cos v_A^B = -301,99 \text{ m} \\ y_B &= y_A + \Delta y = 432 946,47 \text{ m} \\ x_B &= x_A + \Delta x = 4 851 919,30 \text{ m} \\ B &(432 946,47 \text{ m}; 4 851 919,30 \text{ m})\end{aligned}$$

## 5.4. Pitanja za ponavljanje

- 1) Opiši razliku između „matematičkog“ i „geodetskog“ pravokutnog koordinatnog sustava u ravnini.
- 2) Na koji se način zadaje položaj točke u pravokutnom, a na koji u polarnom koordinatnom sustavu?
- 3) Kako je definirana polarna os u „matematičkom“, a kako u „geodetskom“ polarnom koordinatnom sustavu?
- 4) Kako se definira smjerni kut?
- 5) Na koji način se na temelju izračunatih koordinatnih razlika može prepoznati da se radi o smjernom kutu iz drugog kvadranta?

## 5. vježba (2. dio): Računanje poligonskog vlaka

**Opis vježbe:** Naučiti što je poligonski vlak i kako izračunati poligonski vlak koristeći zadana terenska mjerenja.

**Ishodi učenja:** Studenti će izložiti primjenu poligonskog vlaka u različitim slučajevima, izračunati koordinate točaka te izračunati kontrolne veličine i točnosti.

**Potrebna oprema i pribor:** Džepno računalo.

### 5.5. Poligonski vlak

**Poligonski vlak** je niz točaka stabiliziranih na terenu koje su međusobno povezane mjerenim kutovima i duljinama. Postavlja se između poznatih točaka (npr. postojećih trigonometrijskih ili poligonskih točaka) ili samostalno i služi za potrebe izmjere zemljišta u položajnom i visinskom smislu te za potrebe iskolčenja objekata.

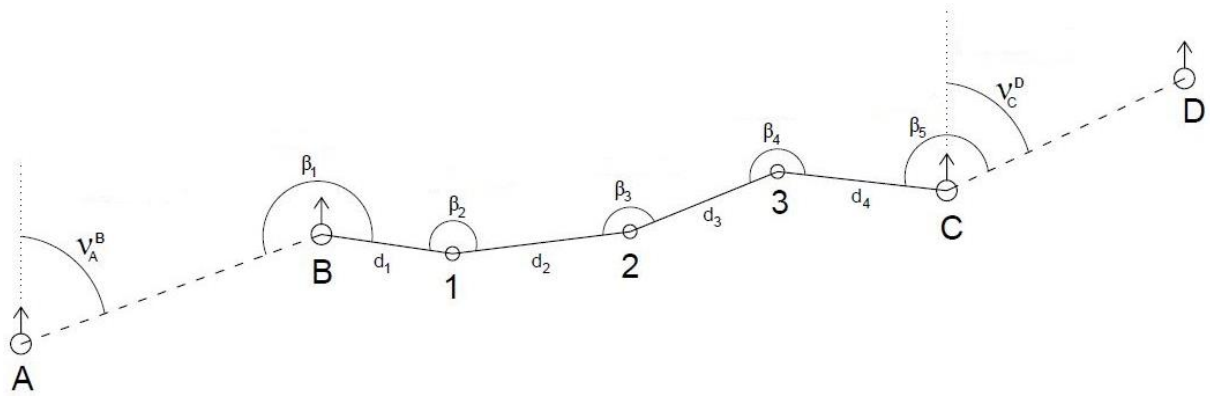
Poligonske točke povezane u poligonske vlakove tvore poligonsku mrežu, a zajedno s ostalim vrstama geodetskih točaka tvore osnovu za geodetsku izmjeru. Koordinate poligonskih točaka izračunamo na osnovi mjerenih poligonskih stranica i prijelomnih kutova. Prijelomni kut je kut između dviju poligonskih stranica, a vrh kuta predstavlja poligonska točka. Poligonska stranica je stranica između dviju poligonskih točaka.

Oblik poligonskog vlaka i njegovu duljinu uvjetuju teren i objekti koje treba izmjeriti, odnosno veličina i oblik objekta kojeg treba iskolčiti.

Prema obliku razlikujemo sljedeće poligonske vlakove:

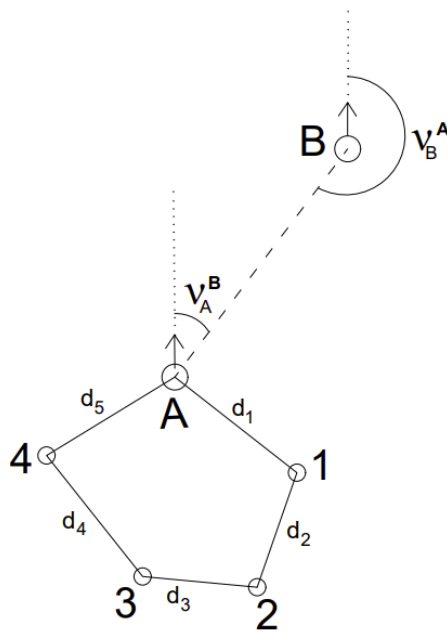
- priključeni ili umetnuti poligonski vlak,
- zatvoreni poligonski vlak,
- slijepi poligonski vlak.

Priključeni ili umetnuti poligonski vlak (slika 5.6.) započinje i završava na točkama čije su koordinate poznate.



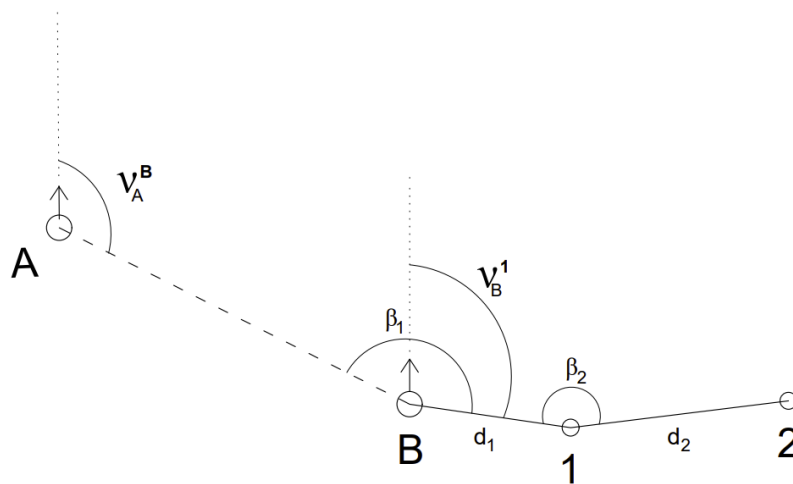
Slika 5.6. Priključeni ili umetnuti poligonski vlak

Zatvoreni poligonski vlak (slika 5.7.) započinje i završava na istoj točki čije su koordinate poznate.



Slika 5.7. Zatvoreni poligonski vlak

Slijepi poligonski vlak (slika 5.8.) započinje na točki čije su koordinate poznate, a završava na točki čije su koordinate nepoznate.



Slika 5.8. Slijepi poligonski vlak

## 5.6. Postupak računanja priključenog poligonskog vlaka

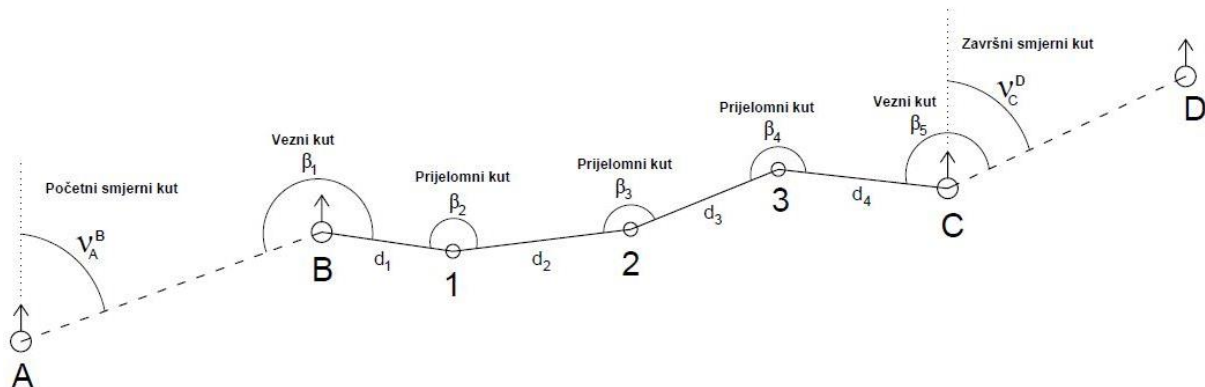
U priključenom poligonskom vlaku poznate su koordinate početne točke  $B$  i završne točke  $C$  poligonskog vlaka, koordinate točaka  $A$  i  $D$  te orijentacija početne i završne točke. Na terenu se mjere vezni kutovi ( $\beta_1$  i  $\beta_5$ ), koji povezuju poligonske i zadane točke, prijelomni kutovi ( $\beta_2, \beta_3$  i  $\beta_4$ ) i poligonske stranice ( $d_1, d_2, d_3$  i  $d_4$ ). Na osnovi zadanih i mjerenih veličina moramo izračunati nepoznate koordinate poligonskih točaka 1, 2 i 3 (slika 5.9.).

- ZADANO:  $A (y_A, x_A), B (y_B, x_B), C (y_C, x_C), D (y_D, x_D)$
- MJERENO:  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, d_1, d_2, d_3, d_4$
- NEPOZNATO:  $1 (y_1, x_1), 2 (y_2, x_2), 3 (y_3, x_3)$

Računanje koordinata poligonskih točaka uobičajeno se provodi u trigonometrijskom obrascu br. 19 (tablica 5.3.). Zbog toga je u nastavku paralelno s izvođenjem formula, prikazano postupno rješavanje obrasca br. 19 (tablice od 5.3 do 5.8.) na temelju sljedećih podataka (oznake prema slici 5.9.):

$A (5576088,41 \text{ m}; 5081710,20 \text{ m})$	$d_1 = 358,55 \text{ m}$
$B (5576234,14 \text{ m}; 5081266,09 \text{ m})$	$d_2 = 440,98 \text{ m}$
$C (5577030,16 \text{ m}; 5080561,65 \text{ m})$	$d_3 = 396,97 \text{ m}$
$D (5576739,94 \text{ m}; 5080174,16 \text{ m})$	$d_4 = 542,07 \text{ m}$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 243^\circ 59' 28'' \\ \beta_2 &= 93^\circ 04' 30'' \\ \beta_3 &= 98^\circ 55' 39'' \\ \beta_4 &= 250^\circ 08' 30'' \\ \beta_5 &= 268^\circ 51' 19'' \end{aligned}$$



Slika 5.9. Priključeni poligonski vlak s osnovnim elementima

Tablica 5.3. Unos zadanih i izmjerenih podataka u obrazac br. 19

Točka	Prijelomni i vezni kutovi	Smjerni kutovi	Dužine [m]	$\Delta y'$ [m]		$\Delta x'$ [m]		y [m] $\Delta y$ [m]	x [m] $\Delta x$ [m]	Točka
				+	-	+	-			
A								5576088,41	5081710,20	A
B	243° 59' 28"		358,55					5576234,14	5081266,09	B
1	93° 04' 30"		440,98							1
2	98° 55' 39"		396,97							2
3	250° 08' 30"		542,07							3
C	268° 51' 19"							5577030,16	5080561,65	C
D								5576739,94	5080174,16	D
IMA =		[d] =		IMA =		IMA =				
TREBA =				TREBA =		TREBA =				
$f_{\beta}$ =				$f_y$ =		$f_x$ =				
$\Delta\beta$ =				$f_d$ =		$f_{dmax}$ =				

Koordinate nepoznatih poligonskih točaka izračunavamo pomoću opažanih smjernih kutova između točaka poligonskog vlaka. Najprije iz zadanih koordinata izračunamo početni smjerni kut  $v_A^B$  i završni smjerni kut  $v_C^D$ :

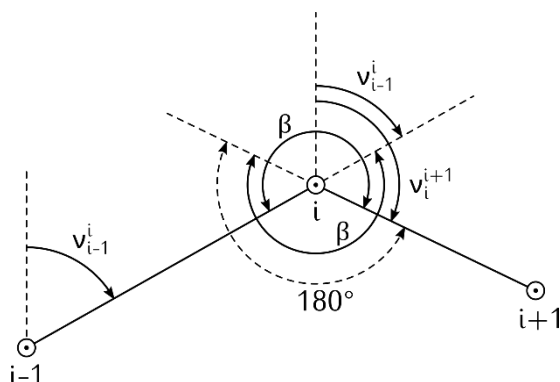
$$\tan v_A^B = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A},$$

$$\tan v_C^D = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}.$$

Tablica 5.4. Računanje početnog i završnog smjernog kuta u obrascu br. 19

Točka	Prijelomni i vezni kutovi	Smjerni kutovi	Dužine [m]	$\Delta y'$ [m]		$\Delta x'$ [m]		y [m] $\Delta y$ [m]	x [m] $\Delta x$ [m]	Točka
				+	-	+	-			
A	(161° 50' 00")	161° 50' 00"						5576088,41	5081710,20	A
B	243° 59' 28"		358,55					+145,73	-444,11	B
								5576234,14	5081266,09	
1	93° 04' 30"		440,98							1
2	98° 55' 39"		396,97							2
3	250° 08' 30"		542,07							3
C	268° 51' 19"							5577030,16	5080561,65	C
D	(216° 49' 56")	216° 49' 56"						-290,22	-387,49	D
								5576739,94	5080174,16	
IMA =		[d] =		IMA =		IMA =				
TREBA =				TREBA =		TREBA =				
$f_{\beta}$ =				$f_y$ =		$f_x$ =				
$\Delta\beta$ =				$f_d$ =		$f_{dmax}$ =				

Da bi izračunali nepoznate koordinate poligonskih točaka moramo izračunati koordinatne razlike  $\Delta y$  i  $\Delta x$ , počevši od prve zadane točke poligonskog vlaka. Koordinatne razlike između točaka poligona jednostavno izračunamo na osnovi poznatih smjernih kutova poligonskih stranica. Njih izračunamo pomoću mjenjenih prijelomnih kutova. Na slici 5.10. možemo vidjeti vezu između smjernih i prijelomnih kutova.



Slika 5.10. Veza između smjernih i prijelomnih kutova

Smjerni kut  $i$ -te stranice dobijemo ako smjernom kutu prethodne stranice pridodamo prijelomni kut te zbroju dodamo ili oduzmemo  $180^\circ$ :

$$v_i^{i+1'} = v_{i-1}^i + \beta_i \pm 180^\circ;$$

$180^\circ$  dodajemo kada je suma manja od  $180^\circ$ , a ako je suma veća od  $180^\circ$  onda oduzimamo  $180^\circ$ .

Za poligonski vlak na slici 5.9., smjerne kutove računamo na sljedeći način:

$$v_B^{1'} = v_A^B + \beta_1 \pm 180^\circ,$$

$$v_1^{2'} = v_B^1 + \beta_2 \pm 180^\circ,$$

$$v_2^{3'} = v_1^2 + \beta_3 \pm 180^\circ,$$

$$v_3^{C'} = v_2^3 + \beta_4 \pm 180^\circ,$$

$$v_C^{D'} = v_3^C + \beta_5 \pm 180^\circ.$$

Završni smjerni kut  $v_C^{D'}$  smo na početku izračunali iz koordinata točaka  $C$  i  $D$  i obje vrijednosti bi trebale biti jednake. Radi pogrešaka koje se javljaju pri mjerenju prijelomnih kutova, smjerni kutovi neće biti jednaki. Iz gornjih formula dobijemo da se završni smjerni kut može izračunati na temelju svih prijelomnih i veznih kutova po formuli:

$$v_C^{D'} = v_A^B + [\beta] \pm n \cdot 180^\circ,$$

pri čemu je  $n$  broj veznih i prijelomnih kutova u poligonskom vlaku, a  $[\beta]$  suma mjenjenih prijelomnih i veznih kutova.

Završni smjerni kut  $v_C^{D'}$  koji je izračunat po ovoj formuli odstupat će od završnog smjernoga kuta  $v_C^D$  koji smo izračunali iz koordinata. To odstupanje nazivamo kutna nesuglasica i označavamo ga s  $f_\beta$ , a izračunamo ga po jednadžbi:

$$f_\beta = TREBA - IMA,$$

$$f_\beta = (v_C^D) - (v_A^B + [\beta] - n \cdot 180^\circ).$$

**Kutna nesuglasica**  $f_\beta$  mora biti manja ili jednaka **dopuštenoj nesuglasici**  $\Delta\beta$  koja se računa po formuli:

$$\Delta\beta = 20''\sqrt{n},$$

pri čemu je  $n$  broj veznih i prijelomnih kutova u poligonskom vlaku.

Ako je kutna nesuglasica manja od dopuštene, ravnomjerno je razdijelimo na sve mjerene kutove. Izračunamo popravke  $v_\beta$  za mjerene prijelomne i vezne kutove, tako da kutnu nesuglasicu podijelimo s brojem prijelomnih i veznih kutova (bez ostatka):

$$v_\beta = \frac{f_\beta}{n}.$$

Popravke su u sekundama i cijeli su brojevi, ne decimalni. Računska kontrola izračunavanja popravaka prijelomnih kutova je:

$$[v_\beta] = f_\beta.$$

Konačne vrijednosti smjernih kutova svake poligonske stranice računamo po formuli:

$$v_i^{i+1} = v_i^{i+1'} + v_\beta,$$

$$v_i^{i+1} = v_{i-1}^i + \beta_i + v_\beta \pm 180^\circ.$$

Tablica 5.5. Računanje smjernih kutova poligonskih stranica u obrascu br. 19

Točka	Prijelomni i vezni kutovi	Smjerni kutovi	Duljine [m]	$\Delta y'$ [m]		$\Delta x'$ [m]		y [m] $\Delta y$ [m]	x [m] $\Delta x$ [m]	Točka
				+	-	+	-			
A	(161° 50' 00")	161° 50' 00"						5576088,41	5081710,20	A
B	+6" 243° 59' 28"									
		225° 49' 34"	358,55					5576234,14	5081266,09	
1	+6" 93° 04' 30"	138° 54' 10"	440,98							1
2	+6" 98° 55' 39"	57° 49' 55"	396,97							2
3	+6" 250° 08' 30"	127° 58' 31"	542,07							3
C	+6" 268° 51' 19"	216° 49' 56"						5577030,16	5080561,65	C
D	(216° 49' 56")									
								5576739,94	5080174,16	
IMA =	216° 49' 26"	[d] =		IMA =		IMA =				
TREBA =	216° 49' 56"			TREBA =		TREBA =				
$f_\beta =$	30"			$f_y =$		$f_x =$				
$\Delta\beta =$	±45"			$f_d =$		$f_{dmax} =$				

S izračunatim konačnim vrijednostima smjernih kutova računamo koordinatne razlike  $\Delta y'_i$  i  $\Delta x'_i$  (koordinatne razlike računamo na toliko decimala, na koliko su izmjerene poligonske stranice):

$$\begin{aligned} \Delta y'_1 &= d_1 \cdot \sin v_B^1, & \Delta x'_1 &= d_1 \cdot \cos v_B^1, \\ \Delta y'_2 &= d_2 \cdot \sin v_1^2, & \Delta x'_2 &= d_2 \cdot \cos v_1^2, \\ \Delta y'_3 &= d_3 \cdot \sin v_2^3, & \Delta x'_3 &= d_3 \cdot \cos v_2^3, \\ \Delta y'_4 &= d_4 \cdot \sin v_3^C, & \Delta x'_4 &= d_4 \cdot \cos v_3^C. \end{aligned}$$

Suma izračunanih koordinatnih razlika morala bi biti jednaka razlici koordinata završne točke C i početne točke B poligonskog vlaka:

$$[\Delta y'] \neq y_C - y_B, \quad [\Delta x'] \neq x_C - x_D.$$

Zbog pogrešaka mjerenja poligonskih stranica dolazi do takozvanih koordinatnih nesuglasica:

$$f_y = TREBA - IMA, \quad f_x = TREBA - IMA,$$



$$f_y = (y_C - y_B) - [\Delta y'], \quad f_x = (x_C - x_B) - [\Delta x'].$$

Slično kao i kod popravljavanja prijelomnih i veznih kutova, i u ovom slučaju potrebno je utvrditi jesu li koordinatne nesuglasice prevelike, odnosno jesu li na terenu tijekom mjerenja napravljene grube pogreške. Kako bi se to utvrdilo, potrebno je izračunati linearno odstupanje  $f_d$  i utvrditi je li ono manje od dozvoljenog linearnog odstupanja  $f_{dmax}$ :

$$f_d = \sqrt{f_y^2 + f_x^2},$$

$$f_{dmax} = 0,0035 \cdot \sqrt{[d]} + 0,0002 \cdot [d] + 0,05,$$

gdje je  $[d]$  zbroj duljina svih poligonskih stranica u poligonskom vlaku.

Tablica 5.6. Računanje koordinatnih razlika i linearnih odstupanja u obrascu br. 19

Točka	Prijelomni i vezni kutovi	Smjerni kutovi	Duljine [m]	$\Delta y'$ [m]		$\Delta x'$ [m]		y [m] $\Delta y$ [m]	x [m] $\Delta x$ [m]	Točka
				+	-	+	-			
A	(161° 50' 00")	161° 50' 00"						5576088,41	5081710,20	A
B	+6" 243° 59' 28"							+145,73	-444,11	B
		225° 49' 34"	358,55		257,16		249,85	5576234,14	5081266,09	
1	+6" 93° 04' 30"	138° 54' 10"	440,98	289,87			332,32			1
2	+6" 98° 55' 39"	57° 49' 55"	396,97	336,03			211,35			2
3	+6" 250° 08' 30"	127° 58' 31"	542,07	427,30			333,55			3
C	+6" 268° 51' 19"	216° 49' 56"						5577030,16	5080561,65	C
D	(216° 49' 56")							-290,22	-387,49	D
								5576739,94	5080174,16	
IMA =	216° 49' 26"	[d] =	1738,57	IMA =	796,04	IMA =	-704,37			
TREBA =	216° 49' 56"			TREBA =	796,02	TREBA =	-704,44			
$f_p =$	30"			$f_y =$	-0,02	$f_x =$	-0,07			
$\Delta\beta =$	±45"			$f_d =$	0,0728	$f_{dmax} =$	0,5437			

Ako je ispunjen uvjet  $f_d < f_{dmax}$ , koordinatne nesuglasice  $f_y$  i  $f_x$  raspodijelimo na koordinatne razlike, i to razmjerno duljinama poligonskih stranica. Izračunamo popravke  $v_{\Delta y}$  i  $v_{\Delta x}$ :

$$v_{\Delta y_i} = \frac{f_y}{[d]} \cdot d_i, \quad v_{\Delta x_i} = \frac{f_x}{[d]} \cdot d_i.$$

Računska kontrola izračuna popravaka koordinatnih razlika je:

$$[v_{\Delta y_i}] = f_y, \quad [v_{\Delta x_i}] = f_x.$$

Izračunate popravke pridodamo koordinatnim razlikama i pri tome predznak popravke ovisi o predznaku koordinatne nesuglasice. Tako dobijemo popravljene koordinatne razlike  $\Delta y_i$  i  $\Delta x_i$ :

$$\Delta y_i = \Delta y'_i + v_{\Delta y_i}, \quad \Delta x_i = \Delta x'_i + v_{\Delta x_i}.$$

Tablica 5.7. Računanje popravaka i konačnih vrijednosti koordinatnih razlika u obrascu br. 19

Točka	Prijelomni i vezni kutovi	Smjerni kutovi	Duljine [m]	$\Delta y'$ [m]		$\Delta x'$ [m]		y [m] $\Delta y$ [m]	x [m] $\Delta x$ [m]	Točka
				+	-	+	-			
A	(161° 50' 00")	161° 50' 00"						5576088,41	5081710,20	A
B	+6" 243° 59' 28"							+145,73	-444,11	B
1	+6" 93° 04' 30"	225° 49' 34"	358,55		257,16	-0,01 249,85		5576234,14	5081266,09	1
		138° 54' 10"	440,98	-0,01 289,87		-0,02 332,32		-257,16	-249,86	
2	+6" 98° 55' 39"	57° 49' 55"	396,97	336,03		-0,02 211,35		+289,86	-332,34	2
		127° 58' 31"	542,07	-0,01 427,30		-0,02 333,55		+336,03	+211,33	
3	+6" 250° 08' 30"	216° 49' 56"						5577030,16	5080561,65	3
		268° 51' 19"						-290,22	-387,49	
C	(216° 49' 56")							5576739,94	5080174,16	D
D										
IMA =	216° 49' 26"	[d] =	1738,57	IMA =	796,04	IMA =	-704,37			
TREBA =	216° 49' 56"			TREBA =	796,02	TREBA =	-704,44			
$f_\beta =$	30"			$f_y =$	-0,02	$f_x =$	-0,07			
$\Delta\beta =$	±45"			$f_d =$	0,0728	$f_{dmax} =$	0,5437			

S popraavljenim koordinatnim razlikama izračunamo koordinate poligonskih točaka:

$$y_1 = y_B + \Delta y_1, \quad x_1 = x_B + \Delta x_1,$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_2, \quad x_2 = x_1 + \Delta x_2,$$

$$y_3 = y_2 + \Delta y_3, \quad x_3 = x_2 + \Delta x_3,$$

$$y_C = y_3 + \Delta y_4, \quad x_C = x_3 + \Delta x_4.$$

Tablica 5.6. - Računanje konačnih vrijednosti koordinata poligonskih točaka u obrascu br. 19

Točka	Prijelomni i vezni kutovi	Smjerni kutovi	Duljine [m]	$\Delta y'$ [m]		$\Delta x'$ [m]		y [m] $\Delta y$ [m]	x [m] $\Delta x$ [m]	Točka
				+	-	+	-			
A	(161° 50' 00")	161° 50' 00"						5576088,41	5081710,20	A
B	+6" 243° 59' 28"							+145,73	-444,11	B
1	+6" 93° 04' 30"	225° 49' 34"	358,55		257,16	-0,01 249,85		5576234,14	5081266,09	1
		138° 54' 10"	440,98	-0,01 289,87		-0,02 332,32		-257,16	-249,86	
2	+6" 98° 55' 39"	57° 49' 55"	396,97	336,03		-0,02 211,35		+289,86	-332,34	2
		127° 58' 31"	542,07	-0,01 427,30		-0,02 333,55		+336,03	+211,33	
3	+6" 250° 08' 30"	216° 49' 56"						5577030,16	5080561,65	3
		268° 51' 19"						-290,22	-387,49	
C	(216° 49' 56")							5576739,94	5080174,16	D
D										
IMA =	216° 49' 26"	[d] =	1738,57	IMA =	796,04	IMA =	-704,37			
TREBA =	216° 49' 56"			TREBA =	796,02	TREBA =	-704,44			
$f_\beta =$	30"			$f_y =$	-0,02	$f_x =$	-0,07			
$\Delta\beta =$	±45"			$f_d =$	0,0728	$f_{dmax} =$	0,5437			

Zadnja računaska kontrola je da moramo sa zbrojem koordinatnih razlika, počevši od početne zadane točke (*B*) doći točno u završnu zadanu točku (*C*). Može lako doći do razlike jedne do dvije znamenke na zadnjem decimalnom mjestu, radi zaokruživanja.

## 5.7. Zadatci za vježbu

**Zadatak 1.** Potrebno je izračunati koordinate poligonskih točaka 1, 2 i 3 ako su zadane koordinate poznatih točaka te mjereni prijelomni i vezni kutovi i dužine.

Koordinate poznatih točaka		
Točka	y [m]	x [m]
A	6515502,19	4720490,99
B	6515593,68	4720087,48
C	6515877,23	4719976,82
D	6515931,71	4719961,46

Točka	Prijelomni i vezni kutovi	Dužina [m]
A		
B	147°57'25"	95,65
1	102°15'25"	105,62
2	220°06'22"	113,86
3	252°50'49"	85,90
C	115°20'47"	
D		

**Rješenje:** Konačno rješenje su y i x koordinate poligonskih točaka 1, 2 i 3.

Koordinate poligonskih točaka		
Točka	y [m]	x [m]
1	6515661,08	4720019,63
2	6515750,08	4720076,47
3	6515862,92	4720061,52

Točka	Prijelomni i vezni kutovi	Smjerni kutovi	Duljine [m]	$\Delta y'$ [m]		$\Delta x'$ [m]		y [m] $\Delta y$ [m]	x [m] $\Delta x$ [m]	Točka
				+	-	+	-			
A	(167° 13' 30")	167° 13' 30"						6515502,19	4720490,99	A
B	+5" 147° 57' 25"							135° 11' 00"	95,65	-0,02 67,42
1	+5" 102° 15' 25"	57° 26' 30"	105,62	-0,02 89,02		56,84	+67,40			
2	+5" 220° 06' 22"						97° 32' 57"	113,86	-0,03 112,87	
3	+5" 252° 50' 49"	170° 23' 51"	85,90	-0,02 14,33		84,70				
C	+5" 115° 20' 47"						105° 44' 18"			
D	(105° 44' 18")									
							+14,31	-84,70		
							6515877,23	4719976,82		
							6515931,71	4719961,46		
IMA =	105° 44' 18"	[d] =	401,04	IMA =	283,64	IMA =	-110,67			
TREBA =	105° 44' 43"			TREBA =	283,55	TREBA =	-110,66			
f <sub>p</sub> =	25"			f <sub>y</sub> =	-0,09	f <sub>x</sub> =	+0,01			
$\Delta\beta$ =	±45"			f <sub>d</sub> =	0,0906	f <sub>dmax</sub> =	0,2003			

**Zadatak 2.** Potrebno je izračunati koordinate poligonskih točaka 1, 2 i 3 ako su zadane koordinate poznatih točaka te mjereni prijelomni i vezni kutovi i dužine.

Koordinate poznatih točaka		
Točka	y [m]	x [m]
A	5515502,17	5020490,99
B	5515593,66	5020087,49
C	5515877,21	5019976,83
D	5515931,70	5019961,44

Točka	Prijelomni i vezni kutovi	Dužina [m]
A		
B	147°58'46"	95,65
1	102°15'25"	105,62
2	220°06'22"	113,86
3	252°50'49"	85,90
C	115°20'47"	
D		

**Rješenje:** Konačno rješenje su y i x koordinate poligonskih točaka 1, 2 i 3.

Koordinate poligonskih točaka		
Točka	y [m]	x [m]
1	5515661,04	5020019,64
2	5515750,08	5020076,47
3	5515862,93	5020061,50

Točka	Prijelomni i vezni kutovi	Smjerni kutovi	Duljine [m]	$\Delta y'$ [m]		$\Delta x'$ [m]		y [m] $\Delta y$ [m]	x [m] $\Delta x$ [m]	Točka
				+	-	+	-			
A	(167° 13' 29")	167° 13' 29"						5515502,17	5020490,99	A
B	+8" 147° 58' 46"	135° 12' 23"	95,65	-0,01 67,39		+0,03 67,88		5515593,66	5020087,49	B
1	+8" 102° 15' 25"	57° 27' 56"	105,62	-0,01 89,05		+0,03 56,80		+67,38	-67,85	1
2	+8" 220° 06' 22"	97° 34' 26"	113,86	-0,02 112,87		+0,04 15,01		<b>5515661,04</b>	<b>5020019,64</b>	2
3	+8" 252° 50' 49"	170° 25' 23"	85,90	-0,01 14,29		+0,03 84,70		+89,04	+56,83	3
C	+8" 115° 20' 47"	105° 45' 38"						<b>5515750,08</b>	<b>5020076,47</b>	C
D	(105° 45' 38")							+112,85	-14,97	D
								<b>5515862,93</b>	<b>5020061,50</b>	
								+14,28	-84,67	
								5515877,21	5019976,83	
								5515931,70	5019961,44	
IMA =	105° 46' 18"	[d] =	401,04	IMA =	283,60	IMA =	-110,79			
TREBA =	105° 45' 38"			TREBA =	283,55	TREBA =	-110,66			
f <sub>p</sub> =	40"			f <sub>y</sub> =	-0,05	f <sub>x</sub> =	+0,13			
$\Delta\beta$ =	±45"			f <sub>d</sub> =	0,1351	f <sub>dmax</sub> =	0,2003			

**Zadatak 3.** Potrebno je izračunati koordinate poligonskih točaka 1, 2 i 3 ako su zadane koordinate poznatih točaka te mjereni prijelomni i vezni kutovi i dužine.

Koordinate poznatih točaka		
Točka	y [m]	x [m]
A	6415502,18	4820490,99
B	6415593,66	4820087,47
C	6415877,23	4819976,83
D	6415931,71	4819961,46

Točka	Prijelomni i vezni kutovi	Dužina [m]
A		
B	147°57'35"	95,65
1	102°15'25"	105,62
2	220°06'22"	113,86
3	252°50'49"	85,90
C	115°20'47"	
D		

**Rješenje:** Konačno rješenje su y i x koordinate poligonskih točaka 1, 2 i 3.

Koordinate poligonskih točaka		
Točka	y [m]	x [m]
1	6415661,06	4820019,63
2	6415750,07	4820076,47
3	6415862,92	4820061,52



Točka	Prijelomni i vezni kutovi	Smjerni kutovi	Duljine [m]	$\Delta y'$ [m]		$\Delta x'$ [m]		y [m] $\Delta y$ [m]	x [m] $\Delta x$ [m]	Točka
				+	-	+	-			
A	(167° 13' 36")	167° 13' 36"						6415502,18	4820490,99	A
B	+9" 147° 57' 35"	135° 11' 20"	95,65	-0,01 67,41		+0,01 67,86		6415593,66	4820087,47	B
1	+9" 102° 15' 25"	57° 26' 53"	105,62	-0,02 89,03		+0,02 56,83		+67,40	-67,85	1
2	+9" 220° 06' 22"	97° 33' 24"	113,86	-0,02 112,87		+0,02 14,97		<b>6415661,06</b>	<b>4820019,62</b>	2
3	+9" 252° 50' 49"	170° 24' 22"	85,90	-0,01 14,32		+0,01 84,70		+89,01	+56,85	3
C	+8" 115° 20' 47"	105° 44' 34"						<b>6415750,07</b>	<b>4820076,47</b>	C
D	(105° 44' 34")							+112,85	-14,95	D
								<b>6415862,92</b>	<b>4820061,52</b>	
								+14,31	-84,69	
								6415877,23	4819976,83	
								6415931,71	4819961,46	
IMA =	105° 44' 34"	[d] =	401,04	IMA =	283,63	IMA =	-110,70			
TREBA =	105° 45' 18"			TREBA =	283,57	TREBA =	-110,64			
f <sub>p</sub> =	44"			f <sub>y</sub> =	-0,06	f <sub>x</sub> =	+0,06			
$\Delta\beta$ =	±45"			f <sub>d</sub> =	0,0863	f <sub>dmax</sub> =	0,2003			

## 5.8. Pitanja za ponavljanje

- 1) Što je poligonski vlak?
- 2) Koje oblike poligonskog vlaka razlikujemo?
- 3) Što je zadano, a što mjereno u poligonskom vlaku?
- 4) Što sve računamo u poligonskom vlaku?
- 5) U kojem obrascu rješavamo poligonski vlak?

## **PROJEKT 3**

### **MJERENJE VISINSKIH RAZLIKA – NIVELIRANJE**



## 6. vježba: Geometrijski nivelman

**Opis vježbe:** Visinske razlike se određuju uglavnom primjenom geodetskih (geometrijskih ili trigonometrijskih) ili negeodetskih (barometrijskih ili hidrostatskih) metoda. U prvoj se vježbi usvaja koncept određivanja visinskih razlika pomoću geometrijskog nivelmana (nivelanskog vlaka), te se određuju visine detaljnih točaka koristeći autoredukcijski nivelir i teleskopsku letvu. U drugoj se vježbi visinske razlike određuju koristeći teodolit i mjeri se vertikalni kut i udaljenost.

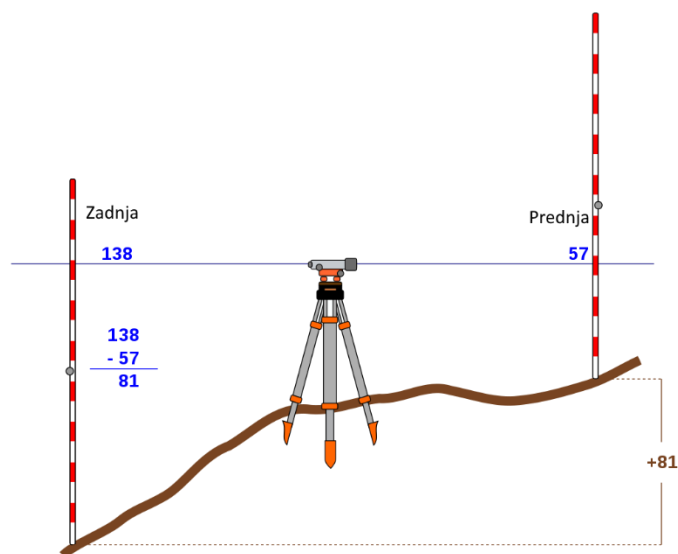
**Ishodi učenja:** Studenti će razlikovati pojmove visine (apsolutne visine) i visinske razlike (relativne visine) te će koristiti dvije geodetske metode određivanja visinskih razlika: geometrijski i trigonometrijski nivelman.

**Potrebna oprema i pribor:** Geodetski instrument nivelir.

### 6.1. Mjerenje visinske razlike

Geometrijski nivelman koristi geodetski instrument nivelir za određivanje visinskih razlika ili razlika visina između dvaju objekata ili dviju kota terena. Visinske se razlike određuju očitanjem na nivelanskim letvama (slika 6.1.), koje se postavljaju vertikalno pomoću dozne libele na točke terena. Prilikom niveliranja, vizurna linija (sredina dalekozora nivelira) bi trebala biti u horizontalnoj ravnini.

Nivelir se postavlja na stativ, u pravilu u sredinu između točaka čija se visinska razlika određuje (slika 6.1.). Nivelanska letva treba biti vertikalno postavljena u prostoru, što se postiže doznom libelom, koja se nalazi na poledini letve.



Slika 6.1. Mjerenje visinske razlike točaka niveliranjem iz sredine

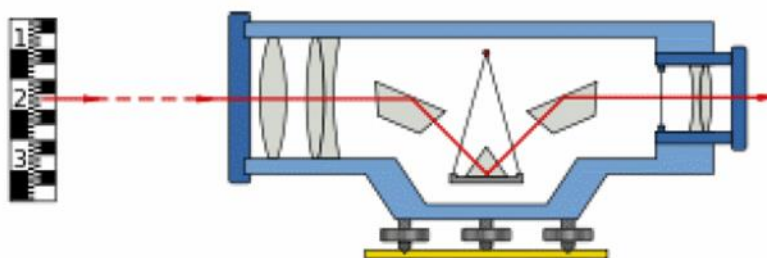
**Primjer:**

Očitanje osječka na **zadnjoj** letvi = 138 mm

Očitanje osječka na **prednjoj** letvi = 57 mm

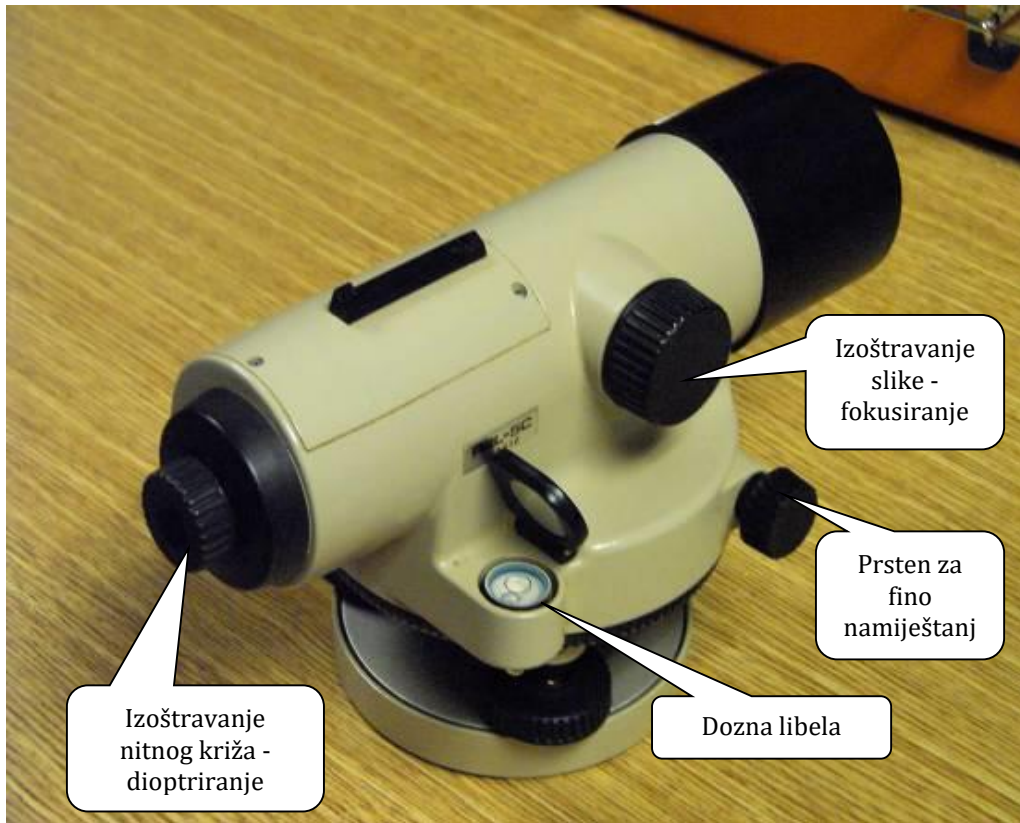
$$\Delta h_{AB} = \text{zadnja} - \text{prednja} = 138 - 57 = 81 \text{ mm} = 0,081 \text{ m}$$

Osnovni princip rada nivelira zasniva se na djelovanju sile teže, odnosno dovođenje vizurne osi dalekozora u horizontalni položaj pomoću libele ili kompenzatora (slika 6.2.). Kompenzator je skupina prizmi koje vise u dalekozoru te pomoću sile teže zauzimaju odgovarajući položaj i ispravljaju malene nagibe nehorizontalnosti kolimacijske ili vizurne osi nivelira. Kada se vizurna os dovede u horizontalnu ravninu, visinske razlike između točaka određuju se očitavanjem na nivelmanskim mjernim letvama koje su vertikalno postavljene na točkama (slika 6.2.).



Slika 6.2. Sastavni dijelovi nivelira

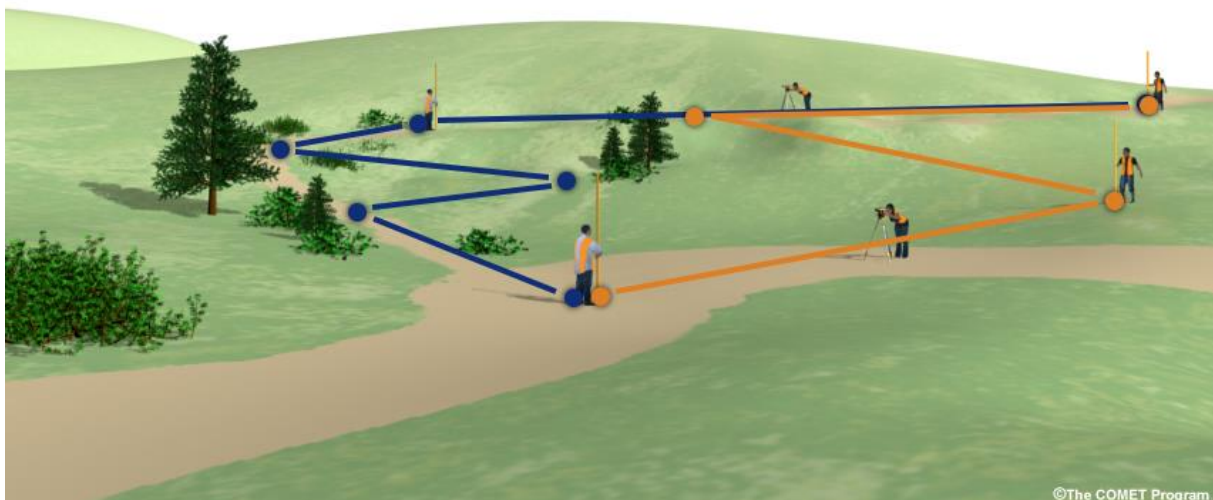
Slika 6.3. prikazuje sastavne dijelove optičkog nivelira. Instrument se postavlja na tronožac, a gornji okretni dio sastoji se od dalekozora na kojem se nalaze vijci za izoštravanje slike (fokusiranje slike) i nitnog križa (dioptriranje), vijak za fino namještanje smjera te dozna libela za grubo horizontiranje instrumenta (ostatak nehorizontalnosti uklanja se pomoću kompenzatora).



Slika 6.3. Sastavni dijelovi nivelira

Za određivanje visinske razlike između udaljenih točaka potrebno je postupno prenositi visine od točke do točke (slika 6.4). Visina neke točke na Zemljinoj površini je udaljenost te točke od srednje nivo plohe mora. Nivo ploha mora određuje se dugogodišnjim opažanjem s instrumentima – mareografima.

Slika 6.4 prikazuje princip niveliranja takozvanog nivelmanskog vlaka ili određivanja visinskih razlika na terenu. U nivelmanskom vlaku potrebno je poznavati visinu jedne točke koju zovemo reper. Na slici je prikazan zatvoreni nivelmanski vlak, odnosno vlak koji počinje i završava na istom reperu, odnosno točki poznate visine. Karakteristike zatvorenog nivelmanskog vlaka je da zbroj visinskih razlika treba biti nula.

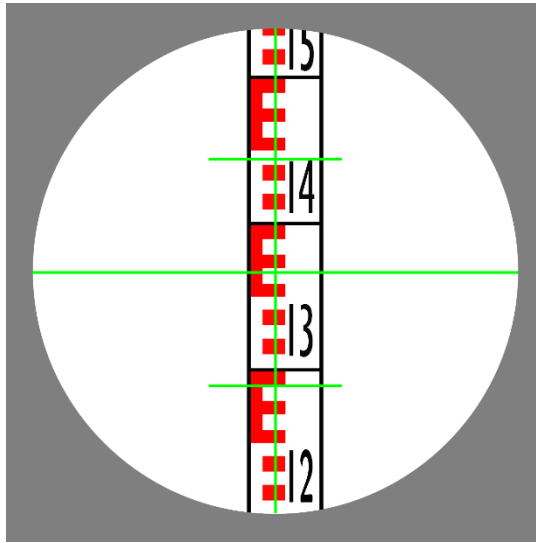


Slika 6.4. Skica terenskih mjerenja kod geometrijskog nivelmana (izvor: [http://kejian1.cmatc.cn/vod/comet/GIS/gravity\\_intro\\_2](http://kejian1.cmatc.cn/vod/comet/GIS/gravity_intro_2))





2. Zatim postaviti nivelmansku letvu na prvi reper, letva se treba nalaziti u vertikalnom položaju, libela na letvi treba vrhuniti.
3. Vizirati letvu te izoštriti i fokusirati sliku na okularu dalekozora tako da slika bude čista i jasna (slika 6.7.).



Slika 6.7. Očitavanje nivelmanske letve (G 1444 mm, S 1368 mm, D 1290 mm)

4. Očitati gornju, srednju i donju nit nitnog križa na milimetar točno. Očitavanje srednje niti nitnog križa upisuje se u nivelmanski obrazac u stupac 5, odsječak na letvi. Donja i gornja nit služe za određivanje udaljenosti od nivelira do letve. Udaljenost se računa tako da se od vrijednosti gornje niti oduzme vrijednost donje niti te ta razlika pomnoži s konstantom letve (100) i dobivena udaljenost se upisuje u stupac 4 u nivelmanskome obrascu.
5. Potom se nivelmanska letva postavi na sljedeću točku i ponovi se postupak pod 4.
6. Zatim se nivelir premjesti na drugo stajalište i ponovi se cijeli postupak i tako sve dok se ne dođe do zadnje točke nivelmanskog vlaka, odnosno poznatog repera.
7. Kad se nivelmanski vlak približi objektu koji se promatra moguće je opažati i detaljne točke objekta. Detaljne točke opažaju se tako da se na detaljnu točku postavi letva i očitava se srednja nit nitnog križa na centimetar točno (bez procjenjivanja milimetara) te se to zapiše u stupac 5 (odsječak na letvi). Nakon očitavanja detaljnih točaka potrebno je još jednom očitati letvu na veznim točkama koje su očitavane s tog istog stajališta, zbog kontrole pomicanja instrumenta. Kontrolno računanje se u zapisnik upisuje u zgradama i izuzima se iz računanja.
8. Nakon završetka terenskih mjerenja potrebno je svu opremu pokupiti, očistiti i vratiti u kabinet te provjeriti jesu li bilješke s terena kompletne.

### 6.3. Postupak računanja detaljnog nivelmana

Kod detaljnog nivelmana poznata je nadmorska visina prve i zadnje točke (repera) nivelmanskog vlaka. Mjeri se odsječak na letvi (srednja nit) i duljina u metrima (gornja minus donja nit puta konstanta letve). Na osnovi zadanih i mjerenih veličina potrebno je izračunati nadmorske visine veznih i detaljnih točaka. Na slici 6.8. prikazan je nivelmanski obrazac u koji su uneseni zadani i mjereni podaci.

- ZADANO:  $A (H_A)$ ,  $D (H_D)$
- MJERENO:  $l_A, l_B, l_C, l_D, l_{DT1}, l_{DT2}, l_{DT3}, l_{DT4}, d_A, d_B, d_C, d_D$
- NEPOZNATO:  $B (H_B)$ ,  $C (H_C)$ ,  $DT1 (H_{DT1})$ ,  $DT2 (H_{DT2})$ ,  $DT3 (H_{DT3})$ ,  $DT4 (H_{DT4})$

Detaljni nivelman od					do						
Datum, nivelir, br. det. skioe, itd.	Stajalište	Vizura	Daljina u metrima	Odsječak na letvi	Dev. ostatak	Visinska razlika	Dev. ostatak	Nad-morska visina vizure	Dev. ostatak	Nadmorska visina	Dev. ostatak
1	2	3	4	5		6		7		8	
	1	A	45,0	1 1 4 6						1 5 1 7 2 9	
		B	42,0	0 8 3 0							
	2	B	65,0	0 8 9 2							
		C	70,0	1 1 5 4							
		DT1		1 1 5							
		DT2		0 8 9							
	3	C	38,0	0 7 3 2							
		D	48,0	1 1 4 0						1 5 1 3 7 0	
		DT3		0 0 8							
		DT4		1 5 2							

Slika 6.8. Nivelmanski obrazac s unesenim zadanim i mjerenim podacima

Prvi korak kod rješavanja nivelmanskog obrasca je izračunati visinske razlike između veznih točaka. Visinska razlika između dvije točke dobije se tako da se od odsječka na zadnjoj letvi oduzme odsječak na prednjoj letvi.

$$\Delta h' = l_z - l_p$$

Zatim se te visinske razlike upišu u nivelmanski obrazac u stupac 6 kao na slici 6.9.

Detaljni nivelman od					do						
Datum, nivelir, br. det. skioe, itd.	Stajalište	Vizura	Daljina u metrima	Odsječak na letvi	Dev. ostatak	Visinska razlika	Dev. ostatak	Nad-morska visina vizure	Dev. ostatak	Nadmorska visina	Dev. ostatak
1	2	3	4	5		6		7		8	
	1	A	45,0	1 1 4 6						1 5 1 7 2 9	
		B	42,0	0 8 3 0		0 3 1 6					
	2	B	65,0	0 8 9 2							
		C	70,0	1 1 5 4		- 0 2 6 2					
		DT1		1 1 5							
		DT2		0 8 9							
	3	C	38,0	0 7 3 2							
		D	48,0	1 1 4 0		- 0 4 0 8				1 5 1 3 7 0	
		DT3		0 0 8							
		DT4		1 5 2							

Slika 6.9. Nivelmanski obrazac s unesenim izračunatim visinskim razlikama

Visinske razlike  $\Delta h'$  između susjednih repera opterećene su pogreškama mjerenja, koje treba ukloniti, odnosno treba izračunati visinsko odstupanje ( $f_H$ ) u vlak u koje se dobije kada se od razlike zadanih repera ( $TREBA$ ) oduzme suma visinskih razlika ( $IMA$ ).

$$TREBA = H_{zadnje\ točke} - H_{prve\ točke}$$

$$IMA = \sum \Delta h'$$

$$f_H = TREBA - IMA = (H_{zadnje\ točke} - H_{prve\ točke}) - \sum \Delta h'$$

Za ovaj konkretan primjer visinsko odstupanje je izračunato na sljedeći način:

$$f_H = TREBA - IMA = (H_D - H_A) - \sum \Delta h' = -0,359m - (-0,354m) = -0,005m$$

Visinsko odstupanje  $f_H$  u nivelmanskome vlaku treba biti manje ili jednako dozvoljenom odstupanju  $\Delta_H$ .

$$f_H \leq \Delta_H$$

Dozvoljeno visinsko odstupanje nivelmanskog vlaka I. kategorije, kao što je nivelmanski vlak u primjeru, računa se na sljedeći način:

$$(\Delta_H)_{mm} = 36mm * \sqrt{D_{km}}$$

$$D = \sum d$$

Za ovaj konkretan primjer dozvoljeno visinsko odstupanje je izračunato na sljedeći način:

$$(\Delta_H)_{mm} = 36mm * \sqrt{D_{km}} = 36mm * \sqrt{0,308km} = 20mm = 0,020m$$

Suma visinskih razlika upisuje se na dno stupca 6, suma duljina nivelmanskog vlaka upisuje se na dno stupca 4, a ostale podatke možete zapisati negdje sa strane s obzirom na to da ne postoji točno predviđeno mjesto unutar obrasca za upis tih podataka.

Kada smo utvrdili da je visinsko odstupanje u nivelmanskome vlaku  $f_H$  manje od dozvoljenog visinskog odstupanja  $\Delta_H$ , možemo pristupiti izjednačavanju nivelmanskog vlaka, odnosno popravljanju mjerenih visinskih razlika proporcionalno dužinama:

$$v_{\Delta h_i} = \frac{f_H}{\sum d} d_i$$

Nakon računanja popravki visinskih razlika suma svih tih popravki  $v_{\Delta h_i}$  treba biti jednaka visinskom odstupanju  $f_H$  te bi trebao biti zadovoljen uvjet:

$$(H_{zadnje\ točke} - H_{prve\ točke}) - \sum \Delta h = 0$$

Izračunate popravke visinskih razlika upisuju se u nivelmanski obrazac u stupac 6 iznad visinskih razlika kao na slici 6.10.

Detaljni nivelman od _____ do _____											
Datum, nivelir. br. det. skice, itd.	Stajalište	Vizura	Dajina u metrima	Određena na letu	Div. ostatak	Visinska razlika	Div. ostatak	Nadmorska visina vizure	Div. ostatak	Nadmorska visina	Div. ostatak
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	A	45,0	1 1 4 6	-	0 0 0 2					1 5 1 7 2 9
		B	42,0	0 8 3 0		0 3 1 6					
	2	B	65,0	0 8 9 2	-	0 0 0 2					
		C	70,0	1 1 5 4	-	0 2 6 2					
		DT1		1 1 5							
		DT2		0 8 9							
	3	C	38,0	0 7 3 2	-	0 0 0 1					
		D	48,0	1 1 4 0	-	0 4 0 8					1 5 1 3 7 0
		DT3		0 0 8							
		DT4		1 5 2							

Slika 6.10. Nivelmanski obrazac s unesenim popravkama visinskih razlika

Nakon što su svi uvjeti zadovoljeni moguće je izračunati konačne visinske razlike:

$$\Delta h_1 = \Delta h'_1 + v_{\Delta h_1}$$

$$\Delta h_2 = \Delta h'_2 + v_{\Delta h_2}$$

...

$$\Delta h_n = \Delta h'_n + v_{\Delta h_n}$$

Potom nadmorske visine veznih točaka, repera:

$$H_i = H_{i-1} + \Delta h_{i-1}$$

Za kontrolu zadana visina zadnje točke nivelmanskog vlaka treba točno odgovarati zbroju visine prethodne točke i izračunate visinske razlike između te dvije točke.

Za ovaj konkretan primjer visine veznih točaka izračunate su na sljedeći način:

$$H_B = H_A + \Delta h'_1 + v_{\Delta h_1} = 152,043 \text{ m}$$

$$H_C = H_B + \Delta h'_2 + v_{\Delta h_2} = 151,779 \text{ m}$$

$$H_D = H_C + \Delta h'_3 + v_{\Delta h_3} = 151,370 \text{ m}$$

(treba se poklopiti sa zadanom visinom  $H_D$ )

Podaci nadmorskih visina veznih točaka upisuju se u nivelmanski obrazac u stupac 8, može se vidjeti na slici 6.11.

Datum, nivelir, br. det. skice, itd.	Stajalište	Vizura	Daljina u metrima	Očitač na letvi	Doz. ostatak	Visinska razlika	Doz. ostatak	Nadmorska visina vizure	Doz. ostatak	Nadmorska visina	Doz. ostatak
1	2	3	4	5		6		7		8	
	1	A	45,0	1 1 4 6						1 5 1 7 2 9	
		B	42,0	0 8 3 0		0 3 1 6				1 5 2 0 4 3	
	2	B	65,0	0 8 9 2							
		C	70,0	1 1 5 4		- 0 2 6 2				1 5 1 7 7 9	
		DT1		1 1 5							
		DT2		0 8 9							
	3	C	38,0	0 7 3 2							
		D	48,0	1 1 4 0		- 0 4 0 8				1 5 1 3 7 0	
		DT3		0 0 8							
		DT4		1 5 2							

Slika 6.11. Nivelmanski obrazac s upisanim nadmorskim visinama veznih točaka

Nakon što su izračunate nadmorske visine veznih točaka moguće je izračunati nadmorske visine detaljnih točaka. Kako bi se mogle dobiti nadmorske visine detaljnih točaka potrebno je prije izračunati nadmorsku visinu vizure instrumenta (nivelira) na stajalištu s kojeg su mjerene detaljne točke. Nadmorska visina vizure upisuje se u stupac 7 i računa se na sljedeći način:

$$H_v = H_i + l_i$$

U konkretnom primjeru detaljne točke mjerene su na stajalištu 2 i 3 te je potrebno izračunati nadmorske visine vizure nivelira na ta dva stajališta (slika 6.12.):

$$H_{v_2} = H_B + l_B = 152,94 \text{ m}$$

$$H_{v_3} = H_C + l_C = 152,51 \text{ m}$$

Potom je pomoću nadmorske visine vizure moguće izračunati nadmorske visine detaljnih točaka:

$$H_{DT} = H_v - l_{DT}$$

Odnosno na konkretnom primjeru (slika 6.12.):

$$H_{DT_1} = H_{v_2} - l_{DT_1} = 152,94 - 1,15 = 151,79 \text{ m}$$

$$H_{DT_2} = H_{v_2} - l_{DT_2} = 152,94 - 0,89 = 152,05 \text{ m}$$

$$H_{DT_3} = H_{v_3} - l_{DT_3} = 152,51 - 0,08 = 152,43 \text{ m}$$

$$H_{DT_4} = H_{v_3} - l_{DT_4} = 152,51 - 1,52 = 150,99 \text{ m}$$

Detaljni nivelman od _____ do _____											
Datum, nivelir, br. det. skice, itd.	Stajalište	Vizura	Dajina u metrima	Odojčak na levu	Don. estak	Visinska razlika	Don. estak	Nadmorska visina vizure	Don. estak	Nadmorska visina	Don. estak
1	2	3	4	5		6		7		8	
	1	A	45,0	1 1 4 6						1 5 1 7 2 9	
		B	42,0	0 8 3 0		0 3 1 6				1 5 2 0 4 3	
	2	B	65,0	0 8 9 2				1 5 2 9 4			
		C	70,0	1 1 5 4		- 0 2 6 2				1 5 1 7 7 9	
		DT1		1 1 5						1 5 1 7 9	
		DT2		0 8 9						1 5 2 0 5	
	3	C	38,0	0 7 3 2				1 5 2 5 1			
		D	48,0	1 1 4 0		- 0 4 0 8				1 5 1 3 7 0	
		DT3		0 0 8						1 5 2 4 3	
		DT4		1 5 2						1 5 0 9 9	

Slika 6.12. Nivelmanski obrazac s upisanim nadmorskim visinama vizura i detaljnih točaka

Na kraju je još potrebno obaviti kontrolu detaljnih točaka, kontrola se obavlja na svakom stajalištu posebno pomoću formule:

$$\sum H_{DT} = n \cdot H_v - \sum l_{DT}$$

gdje je n broj detaljnih točaka koje su mjerene na tom stajalištu.

Kontrola za 2. stajalište u navedenom primjeru:

$$H_{DT_1} + H_{DT_2} = 2 \cdot H_{v_2} - (l_{DT_1} + l_{DT_2})$$

$$151,79 + 152,05 = 2 \cdot 152,94 - (1,15 + 0,89)$$

$$303,84 \text{ m} = 303,84 \text{ m}$$

Kontrola za 3. stajalište u navedenom primjeru:

$$H_{DT_3} + H_{DT_4} = 2 \cdot H_{v_3} - (l_{DT_3} + l_{DT_4})$$

$$152,43 + 150,99 = 2 \cdot 152,51 - (0,08 + 1,52)$$

$$303,42 \text{ m} = 303,42 \text{ m}$$

Na slici 6.13. može se vidjeti cijeli riješeni nivelmanski vlak.

Detaljni nivelman od _____ do _____											
Datum, nivoir, br. det. slike, itd.	Stajalište	Vizura	Visina u metrima	Odstupak na lijevi	Div. ostatak	Visinska razlika	Div. ostatak	Nad-morska visina vizure	Div. ostatak	Nadmorska visina	Div. ostatak
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	A	45,0	1 1 4 6		- 2				1 5 1 7 2 9	
		B	42,0	0 8 3 0		0 3 1 6				1 5 2 0 4 3	
	2	B	65,0	0 8 9 2		- 2		1 5 2 9 4			
		C	70,0	1 1 5 4		- 0 2 6 2				1 5 1 7 7 9	
		DT1		1 1 5						1 5 1 7 9	
		DT2		0 8 9						1 5 2 0 5	
	3	C	38,0	0 7 3 2		- 1		1 5 2 5 1			
		D	48,0	1 1 4 0		- 0 4 0 8				1 5 1 3 7 0	
		DT3		0 0 8						1 5 2 4 3	
		DT4		1 5 2						1 5 0 9 9	
		[d]=	308,0								
		[Δh]=				- 0 3 5 4					

Nivelmanski obrazac br. 1	
Proba	Situacija
9	10
	<p>Dozvoljeno odstupanje: <math>(\Delta H)_{mm} = 19,98mm = 0,020m</math></p> <p>Odstupanje: <math>f_H = TREBA - IMA = (H_D - H_A) - (\Delta h) = -0,005m</math></p> <p>Popravke <math>\Delta h</math>: <math>v_1 = -0,002m</math>; <math>v_2 = -0,002m</math>; <math>v_3 = -0,001m</math></p> <p>Kontrola detaljnih točaka: <math>[H_D] = n \cdot H_V - [I]</math></p> <p>Stajalište 2: <math>303,84 = 305,88 - 2,04 \rightarrow 303,84m = 303,84m</math></p> <p>Stajalište 3: <math>303,42 = 305,02 - 1,6 \rightarrow 303,42m = 303,42m</math></p>

Slika 6.13. Riješeni nivelmanski obrazac broj 1

U slučaju zatvorenog nivelnanskog vlaka (Slika 6.4.) imamo situaciju da su početna i završna točka zapravo iste točke stoga u tom slučaju vrijedi da je  $TREBA = H_{zadnje\ točke} - H_{prve\ točke} = 0$ , stoga i suma visinskih razlika, odnosno IMA treba biti jednako nuli nakon dodjele popravki, stoga vrijedi da je:

$$f_H = 0 - \sum \Delta h$$

## 6.4. Zadatci za vježbu

**Zadatak 1.** Potrebno je izračunati nadmorske visine veznih točaka *B* i *C* te nadmorske visine detaljnih točaka *DT<sub>1</sub>*, *DT<sub>2</sub>*, *DT<sub>3</sub>*, *DT<sub>4</sub>*, *DT<sub>5</sub>* i *DT<sub>6</sub>* ako su zadane nadmorske visine početne (*A*) i završne (*D*) točke nivelmanskog vlaka te mjerene visinske razlike i duljine.

Detaljni nivelman od					do						
Datum, nivelir, br. det. skice, itd.	Stajalište	Vizura	Duljina u metrima	Odbjeglik na lijevi	Dev. ostatak	Visinska razlika	Dev. ostatak	Nad-morska visina vizure	Dev. ostatak	Nadmorska visina	Dev. ostatak
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	A	15,0	1 0 5 4						1 3 1 8 3	
		B	14,0	0 8 9 7							
		DT1		1 2 2							
		DT2		1 4 8							
	2	B	19,0	2 1 2 7							
		C	19,0	2 3 7 8							
		DT3		1 0 4							
	3	C	12,0	1 0 0 1							
		D	13,0	0 9 8 9							
		DT4		1 4 8						1 3 0 9 7	
		DT5		0 7 7							
		DT6		0 1 6							

Nivelmanski obrazac br.1	
Proba	Situacija
9	10

**Rješenje:** Konačno rješenje su nadmorske visine veznih i detaljnih točaka.

Detaljni nivelman od					do						
Datum, nivelir, br. det. skice, itd.	Stajalište	Vizura	Duljina u metrima	Odbjeglik na lijevi	Dev. ostatak	Visinska razlika	Dev. ostatak	Nad-morska visina vizure	Dev. ostatak	Nadmorska visina	Dev. ostatak
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	A	15,0	1 0 5 4		- 1	1 4 2 4			1 3 1 8 3	
		B	14,0	0 8 9 7		0 1 5 7				1 3 3 3 9	
		DT1		1 2 2						1 3 0 2	
		DT2		1 4 8						1 2 7 6	
	2	B	19,0	2 1 2 7		- 2	1 5 4 7				
		C	19,0	2 3 7 8		- 0 2 5 1				1 3 0 8 6	
		DT3		1 0 4						1 4 4 3	
	3	C	12,0	1 0 0 1		- 1	1 4 0 9				
		D	13,0	0 9 8 9		0 0 1 2				1 3 0 9 7	
		DT4		1 4 8						1 2 6 1	
		DT5		0 7 7						1 3 3 2	
		DT6		0 1 6						1 3 9 3	
		[d]=	92,0								
		[Δh]=				- 0 0 8 2					

Nivelmanski obrazac br.1	
Proba	Situacija
9	10
	Dozvoljeno odstupanje: $(\Delta H)_{mm} = 10,92mm = 0,011m$
	Odstupanje: $f_v = TREBA - IMA = (H_D - H_A) - ([\Delta h]) = -0,004m$
	Popravke $\Delta h$ : $v_1 = -0,001m$ ; $v_2 = -0,002m$ ; $v_3 = -0,001m$
	Kontrola detaljnih točaka: $[H_{DT}] = n \cdot H_v - [l]$
	Stajalište 1: $25,78 = 28,48 - 2,70 \rightarrow 25,78m = 25,78m$
	Stajalište 2: $14,43 = 15,47 - 1,04 \rightarrow 14,43m = 14,43m$
	Stajalište 3: $39,86 = 42,27 - 2,41 \rightarrow 39,86m = 39,86m$





## 6.5. Pitanja za ponavljanje

- 1) Što je nivelman?
- 2) Što je nivelir?
- 3) Što se mjeri prilikom izmjere detaljnog nivelmana?
- 4) Koji podaci su nam zadani/poznati u detaljnom nivelmanu?
- 5) Što sve računamo u detaljnom nivelmanu?
- 6) Kako se računaju visinske razlike?
- 7) Koja je razlika između veznih i detaljnih točaka?

## 7. vježba: Trigonometrijski nivelman

**Opis vježbe:** Izračunati visinsku razliku između dvije točke terena na temelju mjerenja trigonometrijskog nivelmana.

**Ishodi učenja:** Studenti će identificirati elemente koje je potrebno izmjeriti na terenu kako bi se mogla odrediti visinska razlika između dvije točke primjenom trigonometrijskog nivelmana. Studenti će provesti računanje visinske razlike i nadmorske visine točke na temelju rezultata mjerenja prikupljenih trigonometrijskim nivelmanom.

**Potrebna oprema i pribor:** Džepno računalo.

### 7.1. Mjerenje vertikalnih kutova

Osnovni instrument koji se koristi za mjerenje horizontalnih kutova koristi se i za mjerenje vertikalnih kutova – *teodolit*. Vertikalni kutovi se teodolitom određuju očitavanjem vertikalnog kruga (limba) koji se najčešće nalazi unutar vertikalnih nosača durбина i zajedno se rotira oko horizontalne osi teodolita (vertikalni krug čvrsto je spojen s horizontalnom okretnom osovinom durбина). Dok je na optičkim teodolitima na vertikalnom krugu nanosena podjela u kutnim stupnjevima (ili nekoj drugoj kutnoj jedinici) i vrijednosti vertikalnih kutova direktno se očitavaju pomoću sustava zrcala i leća, točnije mikroskopa, a kod elektroničkih teodolita vrijednosti vertikalnih kutova „očitavanju“ se pomoću senzora i prikazuju na zaslonu instrumenta. Ovisno o izvedbi teodolita, vertikalni kut koji se očitava pomoću mikroskopa na optičkim teodolitima ili prikazuje na zaslonu elektroničkog teodolita može biti *visinski* ili *zenitni*. Kod vertikalnih kutova, oba kraka kuta leže u vertikalnoj ravnini.

Kako je prikazano na slici 7.1, *visinski kut* je kut između horizontalne ravnine položene kroz horizontalnu os instrumenta i vizurne (kolimacijske) osi durбина, točnije samo onog dijela vizurne osi koji povezuje točku u kojoj se sijeku horizontalna i vertikalna os instrumenta i vizirana točka. Ovisno o tome nalazi li se vizirana točka iznad ili ispod navedene horizontalne ravnine, visinski kut može biti *elevacijski* ili *depresijski*. Kod elevacijskih visinskih kutova vizirana točka nalazi se iznad horizontalne ravnine položene kroz horizontalnu os instrumenta i njihova vrijednost se uzima kao pozitivna, dok je kod depresijskih kutova obrnuto – vizirana točka nalazi se ispod horizontalne ravnine i vrijednost kuta se uzima kao negativna.

Kod suvremenih elektroničkih teodolita, redovito se ne očitavaju visinski, nego zenitni kutovi. *Zenitni kut* je kut između vertikalne i kolimacijske osi instrumenta (slika 7.1.). I u ovom se slučaju razmatra samo dio vizurne osi koji povezuje točku u kojoj se sijeku horizontalna i vertikalna os instrumenta i vizirana točka, kao i dio vertikalne osi koji se nalazi iznad horizontalne ravnine položene kroz horizontalnu os instrumenta.

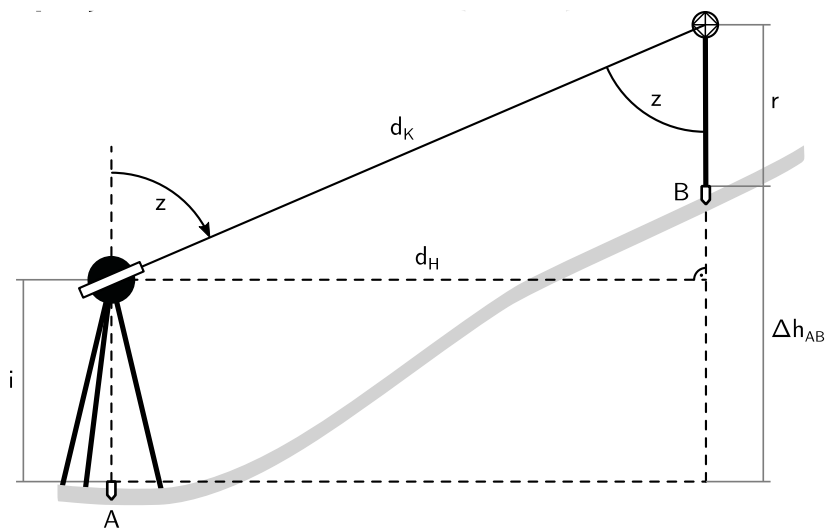


## 7.2. Trigonometrijski nivelman

**Trigonometrijski nivelman** je postupak određivanja visinskih razlika između točaka na temelju mjerenja vertikalnih kutova i duljina te primjene trigonometrije pravokutnog trokuta. Za razliku od geometrijskog nivelmana koji je prikladan za blago nagnut teren, prednost trigonometrijskog nivelmana je mogućnost njegove primjene i na strmom terenu. Uz to, trigonometrijski nivelman je i znatno brži od geometrijskog u slučaju kada je potrebno odrediti visinske razlike između točaka koje su znatnije udaljene u horizontalnom smislu (npr. nekoliko kilometara). S druge strane, točnost koja se može postići geometrijskim nivelmanom značajno je viša od točnosti trigonometrijskog nivelmana.

Da bi se visinska razlika između dviju točaka terena mogla odrediti primjermom trigonometrijskog nivelmana, potrebno je odrediti **zenitni kut** između točaka i **horizontalnu ili kosu udaljenost između njih**. Na jednu od točaka (točka *A* na slici 7.2.) potrebno je postaviti instrument koji ima mogućnost mjerenja vertikalnih kutova (teodolit), a na drugu točku tzv. signal (točka *B* na slici 7.2.). Zatim je potrebno izmjeriti zenitni kut između točaka (točnije, između točke presjeka horizontalne i vertikalne osi instrumenta i vizurne točke, tj. točke signala), kako je i prikazano na slici 7.2. (kut *z*). Kako je potrebno odrediti visinsku razliku između točaka *A* i *B* (označeno s  $\Delta h_{AB}$  na slici 7.2.), potrebno je izmjeriti i visinu instrumenta (*i* na slici 7.2.) i visinu signala (*r* na slici 7.2.). Visina instrumenta *i* je vertikalna udaljenost od točke nad kojom je instrument centriran do horizontalne osi instrumenta (označeno na kućištu instrumenta), a visina signala *r* je vertikalna udaljenost od točke na kojoj je postavljen signal do njegovog centra, tj. do vizirane točke. Visine *i* i *r* se mogu jednostavno izmjeriti običnim metrom.

Posljednje što je potrebno odrediti je kosa udaljenost  $d_K$  ili horizontalna udaljenost  $d_H$ , kako su prikazane na slici 7.2. Koja od ovih duljina će se odrediti ovisi o mogućnostima raspoloživih instrumenata i ostale opreme i podacima s kojima se raspolaže. Ako su ravninske koordinate točaka *A* i *B* poznate, onda je iz njih moguće odrediti horizontalnu udaljenost  $d_H$ . U nekim se slučajevima, a ovisno o točnosti s kojom je potrebno odrediti visinsku razliku  $\Delta h_{AB}$ , koordinate točaka *A* i *B* mogu odrediti očitavanjem na karti pa iz njih izračunati udaljenost  $d_H$ . Ako je udaljenost između točaka *A* i *B* dovoljno mala, onda se horizontalna udaljenost  $d_H$  može odrediti i mjernom vrpcom. Ipak, najčešće se ne određuje horizontalna udaljenost  $d_H$ , već kosa duljina  $d_K$ . Kosa duljina  $d_H$  se redovito određuje pomoću daljinomjera, nekada optičkog, a u posljednjih 30-ak godina elektrooptičkog. Instrument koji se u tom slučaju koristi je mjerna stanica koja, osim mogućnosti mjerenja horizontalnih i vertikalnih kutova, ima i mogućnost elektrooptičkog mjerenja duljina.



Slika 7.2. Određivanje visinske razlike primjenom trigonometrijskog nivelmana

Kod elektrooptičkog mjerenja duljina, kao signal se koristi tzv. prizmeni reflektor. Elektrooptički daljinomjer odašilje elektromagnetski val prema reflektoru koji taj val reflektira u istom pravcu iz kojeg je i došao. Daljinomjer mjeri ili vrijeme koje je bilo potrebno valu da prijeđe dvostruku kosu duljinu pa iz poznate brzine svjetlosti računa duljinu (tzv. impulsno mjerenje), ili duljinu određuje mjerenjem faznih razlika odašlanog i primljenog vala (tzv. fazno mjerenje). Suvremene mjerne stanice čak imaju i mogućnost

mjerenja duljina bez reflektora, što je posebno primjenjivo u slučajevima kada nije moguće pristupiti točki do koje je potrebno izmjeriti duljinu. Ako se mjere dulje udaljenosti (npr. dulje od nekoliko kilometara), na izmjerenu kosu duljinu je potrebno primijeniti i cijeli niz korekcija i redukcija (npr. zbog utjecaja zakrivljenosti zemlje, zbog nejednolike brzine širenja elektromagnetskih valova kroz atmosferu, zbog loma elektromagnetskih valova pri prolasku kroz slojeve atmosfere različite optičke gustoće i sl.).

Nakon što se izmjere zenitni kut  $z$ , visina instrumenta  $i$  i visina signala (reflektora)  $r$  te odrede kosa  $d_K$  ili horizontalna  $d_H$  duljina, po sljedećim formulama moguće je odrediti visinsku razliku  $\Delta h_{AB}$  (prema slici 7.2.):

ako je poznata kosa duljina  $d_K$ :

$$\Delta h_{AB} = d_K \cdot \cos z + i - r;$$

ako je poznata horizontalna duljina  $d_H$ :

$$\Delta h_{AB} = d_H \cdot \operatorname{ctg} z + i - r.$$

Iako nije pravilo, općenito se može uzeti da ako je zenitni kut **manji od 90°** da visinska razlika  $\Delta h_{AB}$  **pozitivna vrijednost**, a ako je **veći od 90°**, onda je visinska razlika  $\Delta h_{AB}$  **negativna**. Slučajevi u kojima se događa da ovo nije točno su oni kod kojih je vrijednost zenitnog kuta blizu 90°, a vrijednosti  $r$  i  $i$  nisu jednake. U prošlosti, kada se računanje visinskih razlika provodilo bez računala, često se visina prizme  $r$  postavljala tako da bude jednaka visini instrumenta  $i$ . Na taj način bi se  $i$  i  $r$  u gornjoj formuli poništili pa bi računanje bilo jednostavnije.

Ako je poznata nadmorska visina  $H_A$  točke na kojoj je postavljen instrument (točka  $A$  na slici 7.3), nakon što je izračunata visinska razlika  $\Delta h_{AB}$ , moguće je odrediti i nadmorsku visinu  $H_B$  točke na kojoj je postavljen signal (točka  $B$  na slici 7.3). Nadmorska visina  $H_B$  točke  $B$  dobiva se jednostavnim zbrajanjem nadmorske visine  $H_A$  točke  $A$  i izračunate visinske razlike  $\Delta h_{AB}$ :

$$H_B = H_A + \Delta h_{AB}.$$

## 7.3. Zadaci za vježbu

**Zadatak 1.** Potrebno je odrediti nadmorsku visinu  $H_B$  točke  $B$ , ako je poznata nadmorska visina točke  $A$  koja iznosi 124,457 m i ako je izmjerena visina instrumenta na točki  $A$  od 1,637 m, visina signala na točki  $B$  od 2,654 m, zenitni kut od  $84^\circ 35' 26''$  i kosa udaljenost između točaka  $A$  i  $B$  od 254,325 m.

**Rješenje:**

$$H_A = 124,457 \text{ m}$$

$$i = 1,637 \text{ m}$$

$$r = 2,654 \text{ m}$$

$$z = 84^\circ 35' 26''$$

$$d_K = 254,325 \text{ m}$$

$$H_B = ?$$

$$\Delta h_{AB} = 22,959 \text{ m}$$

$$H_B = 147,416 \text{ m}$$

**Zadatak 2.** Na točki  $T_C$  na vrhu brda na nadmorskoj visini od 352,254 m centrirana je mjerna stanica i izmjereno je da vertikalna udaljenost od točke  $T_C$  na terenu do horizontalne osi mjerne stanice iznosi 1,752 m. Na točki  $T_P$  koja se nalazi u podnožju brda postavljen je reflektor čije se središte nalazi 1,600 m vertikalno iznad točke  $T_P$ . Mjernom stanicom je izmjerena kosa udaljenost do reflektora koja iznosi 124,254 m i zenitni kut od  $104^\circ 36' 22''$ . Potrebno je odrediti nadmorsku visinu točke  $T_P$ .

**Rješenje:**

$$H_C = 352,254 \text{ m}$$

$$i = 1,752 \text{ m}$$

$$r = 1,600 \text{ m}$$

$$d_K = 124,254 \text{ m}$$

$$z = 104^\circ 36' 22''$$

$$H_P = ?$$

$$\Delta h_{CP} = -31,181 \text{ m}$$

$$H_P = 321,073 \text{ m}$$

**Zadatak 3.** Poznate su koordinate točaka  $A$  i  $B$  u koordinatnom sustavu HTRS96/TM. Na terenu je teodolitom, koji je centriran na točki  $A$ , izmjeren zenitni kut prema signalu visine 2,000 m na točki  $B$  koji iznosi  $87^\circ 10' 00''$ . Izmjerena je i visina instrumenta od 1,700 m. Ako je poznata nadmorska visina točke  $A$  koja iznosi 2,100 m, potrebno je iz zadanih i mjerenih podataka izračunati nadmorsku visinu točke  $B$ .

$$A (487\ 254,28 \text{ m}; 5\ 002\ 251,00 \text{ m})$$

$$B (483\ 254,44 \text{ m}; 5\ 009\ 327,91 \text{ m})$$

**Rješenje:**

$$r = 2,000 \text{ m}$$

$$z = 87^\circ 10' 00''$$

$$i = 1,700 \text{ m}$$

$$H_A = 2,100 \text{ m}$$

$$H_B = ?$$

$$d_H = d_{AB} = \sqrt{(3999,84)^2 + (7076,91)^2} = 8129,045 \text{ m}$$

$$\Delta h_{AB} = 402,017 \text{ m}$$

$$H_B = 404,117 \text{ m}$$

## 7.4. Pitanja za ponavljanje

- 1) Koje dvije vrste vertikalnih kutova se mjere pomoću teodolita ili mjerne stanice?
- 2) Kako je definiran visinski kut i koje dvije vrste visinskih kutova postoje?
- 3) Kako je definiran zenitni kut?
- 4) Koji su elementi potrebni da bi se odredila visinska razlika između dviju točaka primjenom trigonometrijskog nivelmana?
- 5) Koliko bi trebao iznositi zbroj zenitnih kutova iz prvog i drugog položaja instrumenta prema istoj vizurnoj točki?
- 6) Koju je veličinu, uz visinsku razliku između dviju točaka, potrebno poznavati kako bi se odredila nadmorska visina jedne od točaka?



## LITERATURA

Ghilani, Charles D.; Wolf, Paul R.; Gidudu, Anthony (2015): Elementary surveying : an introduction to geomatics. Četrnaesto izdanje. Pearson.

Irvine, W. (1995): Surveying for construction – 4th edition, McGraw hill, pp 413.

Kapović, Z. (2010): Geodezija u niskogradnji, Geodetsko fakultet Sveučilišta u Zagrebu, pp 185.

Macarol, S. (1960): Praktična geodezija, Tehnička knjiga, pp 723.

Marijanović Kavanagh, R. (2008): Geodezija za rudare i geologe, Sveučilište u Zagrebu, Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Zagreb, pp 149.

Nathanson, J.; Lanzafama, M. T.; Kissam, P. (2011): Surveying Fundamentals and Practice - 6th edition, Pearson Education International, pp 343.

Paul, R.; Whyte, W. (2006): Basic Surveying – 4th edition, Elsevier, pp 335.

Pavasović, M.; Marjanović, M.; Bašić, T. (2016): Towards the new Croatian Terrestrial Reference Frame Based on CROPOS – Preliminary Results, Tehnički vjesnik 23, 3 (2016), 893-897., DOI: 10.17559/TV-20141114153027

Pribičević, B.; Medak, D. (2003): Geodezija u građevinarstvu, Sveučilište u Rijeci, pp 256.

Schofield, W.; Breach, M. (2007): Engineering Surveying - 6th edition, Routledge, pp 638.

Williams, J. B. (1855): Practical geodesy, Bibliobazaar, pp 272.

Wirshing, J. R.; Wirshing, R. H. (1985): Introductory Surveying, McGraw hill - Schaum's Outlines, pp 360.

<https://www.euspa.europa.eu/galileo/services>

<http://en.beidou.gov.cn/SYSTEMS/System/>

<https://www.euspa.europa.eu/european-space/egnos/what-egnos>

[http://kejian1.cmatc.cn/vod/comet/GIS/gravity\\_intro\\_2](http://kejian1.cmatc.cn/vod/comet/GIS/gravity_intro_2)