

# Numerička analiza zvonika Katedrale Sv. Dujma u Splitu izloženog potresnom djelovanju

---

**Bojčić Maslić, Gorana**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:*

**University of Split, Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy / Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:123:966738>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-24**



*Repository / Repozitorij:*

[FCEAG Repository - Repository of the Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy, University of Split](#)



SVEUČILIŠTE U SPLITU  
FAKULTET GRAĐEVINARSTVA, ARHITEKTURE I GEODEZIJE

**DIPLOMSKI RAD**

Gorana Bojčić Maslić

Split, 2024.

SVEUČILIŠTE U SPLITU  
FAKULTET GRAĐEVINARSTVA, ARHITEKTURE I GEODEZIJE

Gorana Bojčić Maslić

**Numerička analiza zvonika katedrale Sv. Dujma u Splitu  
izloženog potresnom djelovanju**

**Diplomski rad**

**Split, 2024.**

# **Numerička analiza zvonika Sv. Dujma u Splitu izloženog potresnom djelovanju**

## *Sažetak:*

Rad prikazuje seizmičku analizu zidanog zvonika Sv. Dujma koji se nalazi u Splitu, Hrvatska. Analiza je izvršena pomoću kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata, koristeći računalni program Y-2D. Konstrukcija je opterećena potresnim djelovanjem pri čemu su korišteni zapisi izmjerenih oscilacija tla za tri potresa: Petrovac (Crna Gora, 1979.), Campano Lucano (Italija, 1980.) i South Iceland (Island, 2000.). Rezultat proračuna opterećene konstrukcije je dat u obliku dijagrama pomaka konstrukcije u vremenu za pojedino opterećenje te vizualni prikaz oštećenja za svaki vremenski korak. Dobiveni rezultati su omogućili procjenu ponašanja konstrukcije pri pojedinom opterećenju, usporedbu ponašanja za različite vrste potresa te mehanizam loma.

## *Ključne riječi:*

Kombinirana metoda konačno-diskretnih elemenata, diskretni element, konačni element, opterećenje potresom, vršno ubrzanje, pomak, pukotina, slom.

## **Numerical analysis of the bell tower Saint Dujam exposed to seismic load**

## *Summary:*

This paper shows seismic analysis of the bell tower of Saint Dujam located in Split, Croatia. The Analysis is executed with combined finite-discrete element method computer program "Y". Structure is loaded with dynamic load of three earthquakes: Petrovac (Crna Gora, 1979.), Campano Lucano (Italy, 1980.) and South Iceland (Island, 2000.). Results of calculation are time/displacement diagrams for every load individually and simulation of the collapse sequence with the time intervals for each sequence. These results provide insight into behavior of the structure impacted with dynamic load, behavior comparison for each load, fracture process and time necessary for the collapse of the structure.

## *Key words:*

The combined finite-discrete element method, discrete element, finite element, earthquake load, maximum acceleration, displacement, crack, collapse.

**SVEUČILIŠTE U SPLITU  
FAKULTET GRAĐEVINARSTVA, ARHITEKTURE I GEODEZIJE**

Split, Matice hrvatske 15

STUDIJ: PREDDIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
GRAĐEVINARSTVA

KANDIDAT: GORANA BOJČIĆ MASLIĆ

KATEDRA: Katedra za teoriju konstrukcija

PREDMET: Osnove simulacijskog inženjerstva

**ZADATAK ZA DIPLOMSKI RAD**

Tema:

Numerička analiza zvonika katedrale Sv. Dujma u Splitu izloženog potresnom djelovanju

Opis zadatka:

Na temelju zadanog nacrtu istočnog pročelja zvonika Sv. Dujma u Splitu potrebno je izvršiti seizmičku analizu u računalnom programu "Y", koji je baziran na kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata. Za seizmičko opterećenje uzeti zapise tri potresa (Petrovac, Campano Lucano i South Iceland) te ih skalirati na zadane vrijednosti vršnog ubrzanja. Potrebno je usporediti dobivene rezultate te donijeti zaključke o izdržljivosti konstrukcije na temelju istih.

U Splitu, ožujak 2024.

Mentor: dr.sc. Hrvoje Smoljanović

Komentor: izv.prof.dr.sc. Nikolina Živaljić

**SADRŽAJ**

1.	UVOD.....	2
2.	POTRESNO DJELOVANJE.....	4
3.	KOMBINIRANA METODA KONAČNO-DISKRETNIH ELEMENATA .....	6
3.1	UVOD U METODU .....	6
3.2	INTERAKCIJA KONTAKATA DISKRETNIH ELEMENATA .....	7
3.2	KONTAKTNA SILA U 2D POLJU .....	9
3.2.1	Diskretizacija kontaktne sile.....	10
3.2.2	Implementacija diskretizirane kontaktne sile .....	11
3.3	DEFORMABILNOST KONAČNIH ELEMENATA.....	13
3.3.1	Gradijent deformacije .....	13
3.5	KONTINUUM I DISKONTINUUM.....	19
3.5.1	Kontinuum .....	19
3.5.2	Diskontinuum .....	20
3.5.3	Prijelaz iz kontinuuma u diskontinuum.....	20
4	PRIMJENA KOMBINIRANE METODE KONAČNO-DISKRETNIH ELEMENATA NA ZADANI ZVONIK .....	23
4.1	ULAZNI PODACI .....	23
4.1.1	Podjela zvonika na diskretne elemente.....	25
4.1.2	Diskretizacija diskretnih elemenata mrežom konačnih elemenata.....	26
4.1.3	Opterećenje konstrukcije .....	27
5	REZULTATI PRORAČUNA.....	29
5.1	REZULTATI PRORAČUNA ZA POTRES PETROVAC (CRNA GORA, 1979.).....	29
5.2	REZULTATI PRORAČUNA ZA POTRES CAMPANO LUCANO (ITALIJA 1980.) .....	35
5.3	REZULTATI PRORAČUNA ZA POTRES SOUTH ICELAND (ISLAND 2000.)....	40
6	ANALIZA REZULTATA PRORAČUNA .....	45
7	ZAKLJUČAK.....	48
8	LITERATURA .....	49

## 1. UVOD

Ovaj rad prikazuje seizmičku analizu zidanog zvonika, koristeći kombiniranu metodu konačno-diskretnih elemenata. Radi se o kampanelu sv. Duje u Splitu koji je građen od 13. do 16. stoljeća kao dodatak katedralnoj crkvi svetog Dujma. Njegovom izgradnjom se promijenila vizura grada Splita te postaje dominantni i prepoznatljivi simbol do danas.

Nisu poznati izvorni graditelji ni projektant, no poznato je da je u 15. stoljeću Nikola Tvrdoje vodio nastavak gradnje.

Zbog dugog perioda gradnje, građen je u stilu kasne romanike i gotike. U dekorativnim elementima prevladava romanički stil dok arhitektonski pripada gotičkom stilu gradnje, što znači korištenje kamena kao glavnog građevinskog materijala s masivnim i širokim zidovima, koji su osmišljeni kao jedinstvena organska forma. Otvori su polukružni i uski a kapiteli ukrašeni biljnim i figuralnim motivima. Građevinski materijal za gradnju je u velikom dijelu uzet iz kamene građe Dioklecijanove palače. Korištene su različite vrste kamena i mramora kasnoantičkog podrijetla.

Sekundarno korišteni materijali su oslabljeni s vremenom te su procesi propadanja bili progresivniji. Šturi povijesni izvori ukazuju na aktivnosti vezane uz gradnju, popravke i statička ojačanja kao što su: zamjena stupića, mijenjanje elemenata iznad kapitela središnjih dvojnih stupova četvrte etaže, uklanjanje starog popločenja iznad svoda koji spaja zvonik s katedralom, mijenjanje kapitela stupova.

Posljednja veća obnova je zabilježena u razdoblju od 1886. do 1908. godine kada je temeljito i radikalno restauriran, gdje je prvo razgrađen krov, oktogon šestog kata i peti kat. Zatim su uklonjeni četvrti, treći i drugi kat te prvi kat i prizemni dio. Pri ovoj obnovi veliki dio kamene građe je raznešen po nekoliko lokacija a tek manji dio vraćen na izvorni položaj. Oštećeni klesanci su zamjenjeni novim kamenim kvadrima, isklesanim od bračkog i korčulanskog vapnenca, čije vanjsko lice oponaša izvornu obradu. Rascijepani stupovi su se stabilizirali brončanim sidrima ili su se zamijenili novima. Prvi kat zvonika je proširen iz statičkih razloga a završni kat je obnovljen u neoromaničkom stilu.

Katovi zvonika su pravokutnog tlocrtnog oblika osim zadnjeg kata koji je osmerokutnog oblika. Između katova su istaknute profilacije vijenaca. Prvi kat zvonika je rastvoren bačvasto presvođenim prolazom te preuzima ulogu predvorja katedrale.

Područje grada Splita obuhvaća površinu od 76,57 km<sup>2</sup> i nalazi se u potresnoj zoni inteziteta VII° i VIII° Mercallij-Cancani-Siebergove (MSC) ljestvice. Ovaj stupanj inteziteta potresa

može izazvati oštećenja ili potpuno rušenje objekata te ljudske gubitke. Preventivne mjere koje se poduzimaju su projektiranje i gradnja objekata sukladno odgovarajućim tehničkim propisima i hrvatskim/europskim normama.

Kako je kampanel svetog Dujma povijesna građevina stara preko 700 godina te nije projektirana i građena prema sadašnjim tehničkim propisima, svrha ovog rada je predviđanje mehanizma loma i procjena ponašanja pri seizmičkom opterećenju.

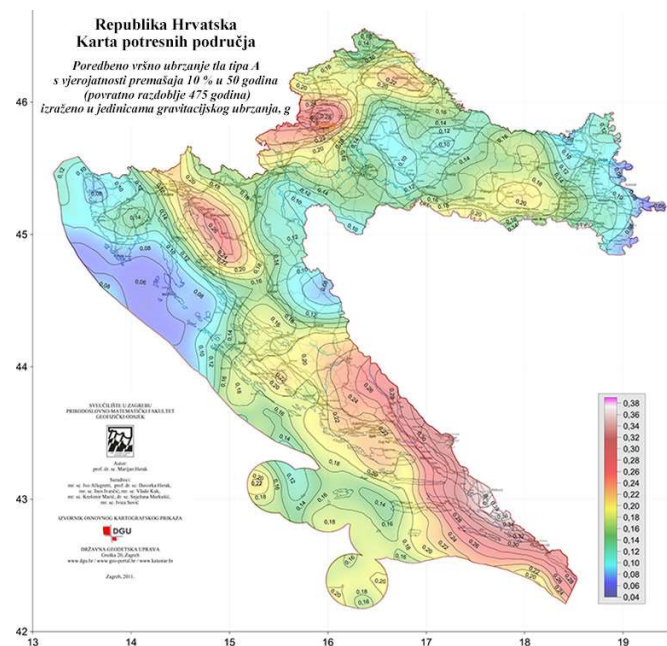


*Slika 1. Kampanel sv. Dujma*

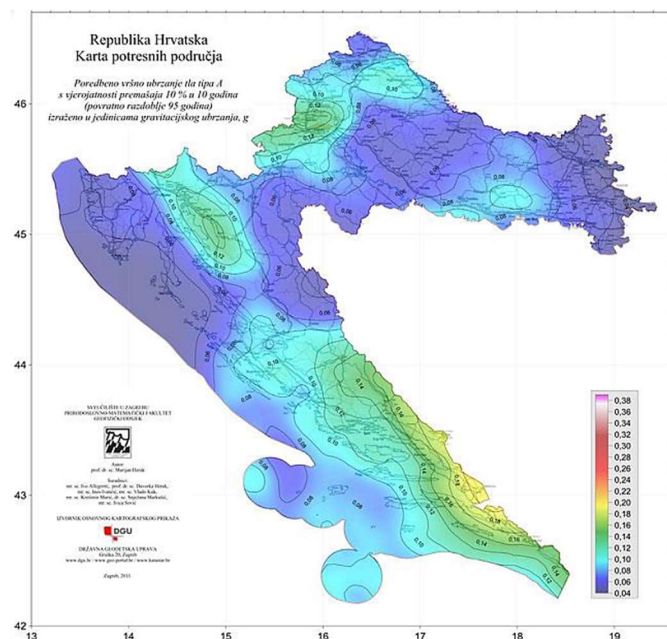


## 2. POTRESNO DJELOVANJE

Potres je prirodna pojava uzrokovana iznenadnim i brzim podrhtavanjem tla. Do podrhtavanja tla dolazi uslijed pucanja stijena u Zemljinoj unutrašnjosti ili pomicanjem tektonskih ploča duž postojećih rasjeda. Posljedice potresa ovise o količini oslobođene energije pri pomacima tla. Svaka zemlja je podijeljena u potresne zone na temelju analiza prirodnih okolnosti i povijesnih i iskustvenih podataka. Potresne zone zemlje se određuju prema vrijednosti vršnog ubrzanja temeljnog tla tipa A (čvrste stijene) u određenom povratnom periodu.[4]



Slika 2. Karta potresnih zona RH, povratni period od 50 godina



Slika 3. Karta potresnih zona RH, povratni period od 95 godina



Slika 4. Vršno ubrzanje temeljnog tla grada Splita za povratne periode od 475 i 95 godina

## 3. KOMBINIRANA METODA KONAČNO-DISKRETNIH ELEMENATA

### 3.1 UVOD U METODU

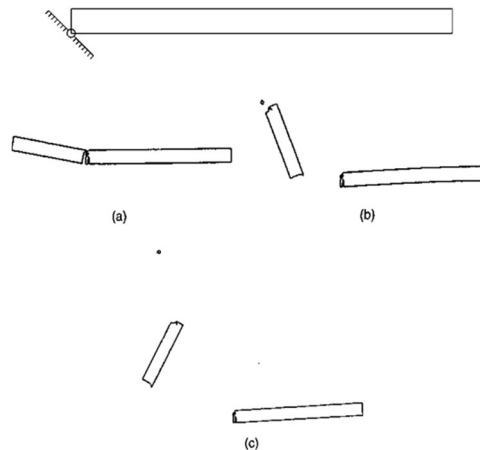
Metoda diskretnih elemenata je jedna od metoda računalne mehanike diskontinuumu, koja se bavi numeričkim rješenjima inženjerskih problema te situacijama u kojima konstitutivni zakoni ne vrijede. Osnova ove metode je modeliranje na bazi čestica mikrostrukturnih elemenata materijala, odnosno elemenata materijala koji nisu vidljivi golim okom. Prema tome, međusobna interakcija i ponašanje čestica postižu emergentno svojstvo praktične važnosti materijala.[1]

Metoda konačnih elemenata je numerička metoda za rješavanje skupa povezanih diferencijalnih jednadžbi. Odnosno metoda za rješavanje skupa povezanih jednadžbi dobivenih aproksimacijom nepoznatih varijabli kontinuiranog područja, skupom nepoznatih varijabli u konačnom broju diskretnih točaka promatranog polja. Temelji se na diskretizaciji promatranog područja podijeljenog na konačne elemente. U proračunu konstrukcija, povezane jednadžbe su jednadžbe ravnoteže a skup varijabli pomaci u čvorovima konačnih elemenata. Postupak rješavanja se svodi na transformaciju diferencijalnih jednadžbi ili parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u ekvivalentne obične diferencijalne jednadžbe.[3]

Kombinirana metoda konačno-diskretnih elemenata je rezultat uparivanja algoritama metode diskretnih elemenata s tehnikama i alatima metode konačnih elemenata. Ovom metodom se simulira ponašanje velikog broja diskretnih elemenata u međusobnoj interakciji, pri čemu je svaki diskretni element diskretiziran s vlastitom mrežom konačnih elemenata. Postavljanjem mreže konačnih elemenata na svaki diskretni element se omogućuje njegova deformabilnost. Modeli kontaktnih elemenata koji su implementirani između konačnih elemenata, omogućavaju materijalnu nelinearnost uključujući pojavu i razvoj pukotina te fragmentaciju diskretnih elemenata.

U okviru kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata razvijeni su algoritmi koji u svakom vremenskom koraku uključuju detekciju i interakciju kontakta, praćenje stanja naprezanja i deformacija u svakom kontaktnom i konačnom elementu, pojavu i razvoj pukotina, integraciju jednadžbe gibanja u vremenu koja uključuje velike pomake i rotacije te vizualizaciju svih spomenutih efekata.[2]

Slika 5 prikazuje simulaciju dobivenu upotrebom kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata na jednostavnom primjeru proste grede, kojoj je desni oslonac uklonjen. Gubitkom desnog oslonca, greda se rotira oko lijevog oslonca te se lomi uslijed djelovanja inercijalne sile i vlastite težine grede, na mjestu maksimalne vrijednosti momenta savijanja. Posljedično tome, lijevi kraj grede se odvaja od oslonca te dolazi do slobodnog pada oba dijela grede.[1]



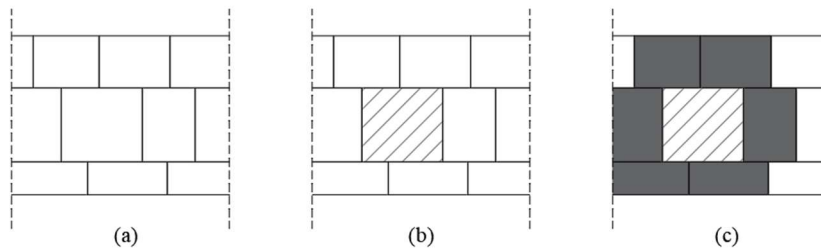
Slika 5. a) lom; b) naknadno oštećenje; c) konačno stanje[1]

### 3.2 INTERAKCIJA KONTAKATA DISKRETNIH ELEMENATA

Kao što je prethodno spomenuto, svaki diskretni element je diskretiziran u mrežu konačnih elemenata kako bi se analizirale deformacije, frakture i fragmentacije. Tako svaki kombinirani konačno-diskretni sustav sadrži velik broj međusobno interaktivnih elemenata koji sadrže individualne mreže konačnih elemenata. Time je elementarni problem razvoja ove metode obrada njihovih međusobnih kontakata.

Pri konstrukciji algoritma ovom problemu se pristupa s dvije točke: detekcija kontakta i interakcija kontakta.

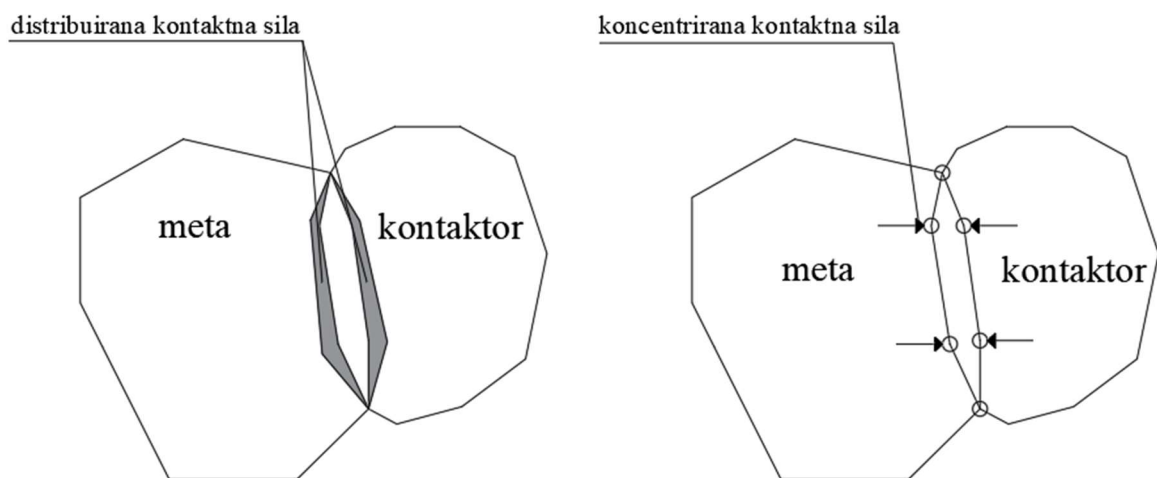
Detekcija kontakta je usmjerena na diskretne elemente koji se nalaze u neposrednoj blizini a eliminiraju se diskretni elementi koji su udaljeni jedni od drugih. Uzmimo za primjer dio zida sa slike 6. Podjela zida na diskretne elemente je uzeta tako da svaki zidni element predstavlja jedan diskretni element (6a). Zatim se fokusiramo na jedan diskretni element (6b) i njegov kontakt s ostalim diskretnim elementima. Promatrajući interakciju jednog diskretnog elementa s ostalim elementima u njegovom okruženju, eliminiramo sve kontakte koji se u tom trenutku ne događaju (6c). Dakle detekcija kontakta diskretnih elemenata reducira rad procesora i RAM-a računala. [6]



Slika 6. Detekcija kontakta: a) diskretni elementi; b) odabiranje jednog diskretnog elementa; c) redukcija kontakta pri izdvajanju jednog diskretnog elementa

Kada je izvršena detekcija kontakta, primjenjuje se algoritam interakcije kontakta pomoću „kaznene metode“ (penalty method). To je određena klasa algoritama koja se koristi za rješavanje problema ograničene optimizacije. Penalty metoda zamjenjuje ograničene optimizacije sa nizom ne ograničenih problema, čija rješenja idealno konvergiraju rješenju izvornog problema.[7]

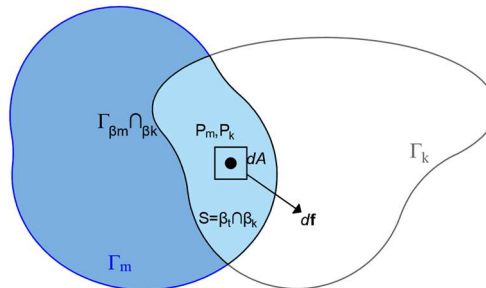
Algoritam interakcije određuje kontaktne sile između promatranih diskretnih elemenata pod pretpostavkom da dva tijela u međusobnom kontaktu prodiru jedan u drugi, odnosno kontaktor prodire u metu. Međusobnim prodiranjem kontaktora u metu, dolazi do kontaktne sile koja može biti distribuirana po području prodora ili koncentrirana u točkama prodora. (slika 7)[1]



Slika 7. Pristup distribuirane i kontaktne sile

### 3.2 KONTAKTNA SILA U 2D POLJU

Prodor kontaktora i mete tvori područje  $S$ , omeđeno krivuljom  $\Gamma$ . Pretpostavka je da da svaka diferencijalno mala prodorna površina kontaktora u metu veličine  $dA$ , rezultira infitezimalno malom kontaktnom silom.[2]



Slika 8. Kontaktna sila uslijed infitezimalnog prodiranja u točkama  $P_m, P_k$

Iz matematike nam je poznato da u konzervativnim poljima, linijski integral polja između neke dvije točke ne ovisi o izboru putanje između njih. Također, svako konzervativno polje može biti prikazano kao gradijent skalarnog polja, pa vrijedi:[7]

$$d\mathbf{f} = [\mathit{grad}\varphi_k(P_k) - \mathit{grad}\varphi_m(P_m)]d\mathbf{A} \quad (1)$$

odnosno

$$d\mathbf{f} = d\mathbf{f}_k - d\mathbf{f}_m \quad (2)$$

Gdje je:

$$d\mathbf{f}_k = -\mathit{grad}\varphi_m(P_m)dA_k, \quad dA_k = dA \quad (3)$$

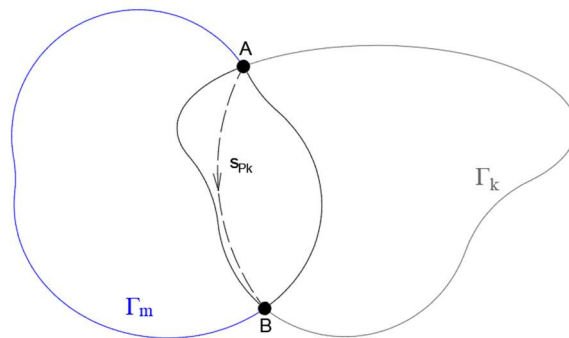
$$d\mathbf{f}_m = -\mathit{grad}\varphi_k(P_k)dA_m, \quad dA_m = dA \quad (4)$$

Slika 8 prikazuje prodor diskretnog elementa kontaktora u diskretni element metu. Ako promatramo put točke kontaktora  $P_k$  pri prodoru u metu, rad sile u točki  $P_k$  neće ovisiti o putanji toga puta.

Neka točka  $P_k$  prodiranjem kroz metu prijeđe put koji počinje točkom A i završava točkom B. Ako se krajnje točke puta A i B nalaze na granici diskretnog elementa mete, prema zakonu očuvanja energije ukupna energija sustava je konstantna, odnosno rad kontaktne sile će biti jednak nula. Tada za krajnje točke puta A i B koje se nalaze na granici diskretnog elementa mete vrijedi:

$$\varphi_m(A) - \varphi_m(B) = 0 \quad (5)$$

$$\varphi_m(A) = \varphi_m(B) \quad (6)$$



Slika 9. Primjer putanje prijeđenog puta točke Pk

Isto vrijedi i za obrnutu situaciju, kada meta prodire kroz kontaktor:

$$\varphi_k(A) - \varphi_k(B) = 0 \quad (7)$$

$$\varphi_k(A) = \varphi_k(B) \quad (8)$$

Prema navedenom, iznos kontaktne sile se može odrediti plošnom integracijom po prodornoj površini S ili krivoljnim integralom po granici prodorne površine  $\Gamma$ . Pa vrijedi:

$$f_k = \int_{S=\beta_m \cap \beta_k} [\text{grad}\varphi_k - \text{grad}\varphi_m] dA \quad (9)$$

$$f_k = \oint_{\Gamma_{\beta_m \cap \beta_k}} n_{\Gamma}(\varphi_k - \varphi_m) d\Gamma \quad (10)$$

Gdje je  $n$  jedinična vanjska normala na granicu prodornog područja  $\Gamma$ . [1]

### 3.2.1 Diskretizacija kontaktne sile

Svaki diskretni element konstrukcije se može prikazati kao unija konačnih elemenata koje sadržava:

$$\beta_k = \beta_{k1} \cup \beta_{k2} \dots \cup \beta_{ki} \dots \cup \beta_{kn} \quad (11)$$

$$\beta_m = \beta_{m1} \cup \beta_{m2} \dots \cup \beta_{mi} \dots \cup \beta_{mm} \quad (12)$$

Gdje je:

$\beta_k, \beta_m$  – diskretni elementi kontaktor i meta

$n, m$  – ukupni brojevi konačnih elemenata koje diskretni elementi sadržavaju

Na jednak način se i potencijali  $\varphi_k$  i  $\varphi_m$  mogu prikazati kao suma potencijala pridruženih odgovarajućim konačnim elementima, pa integracija po plohi prodorne površine može biti prikazana preko sume konačnih elemenata:

$$f_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [\text{grad}\varphi_{ki} - \text{grad}\varphi_{mj}] dA \quad (13)$$

Ili kao suma krivoljnih integrala po granici konačnih elemenata:

$$f_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \oint_{\Gamma_{\beta_{ki} \cap \beta_{mj}}} n_{\Gamma_{\beta_{ki} \cap \beta_{mj}}}(\varphi_{ki} - \varphi_{mj}) d\Gamma \quad (14)$$

Dakle, kontaktna sila pri prodoru diskretnih elemenata se izračunava sumiranjem krivuljnih integrala po rubovima konačnih elemenata, koji sudjeluju u prodoru.[1]

### 3.2.2 Implementacija diskretizirane kontaktne sile

Primjena sume krivuljnih integrala po granici konačnih elemenata uključuje velik broj konačnih elemenata u kontaktu, što povećava vrijeme rada centralnog procesora računala. Zato je važan odabir jednostavnih konačnih elemenata, kako bi se ubrzao proces proračuna kontaktnih sila i sila nastalih deformiranjem elemenata. U 2D polju najjednostavniji konačni element je trokut čija je geometrija definirana koordinatama njegovih vrhova.[2]

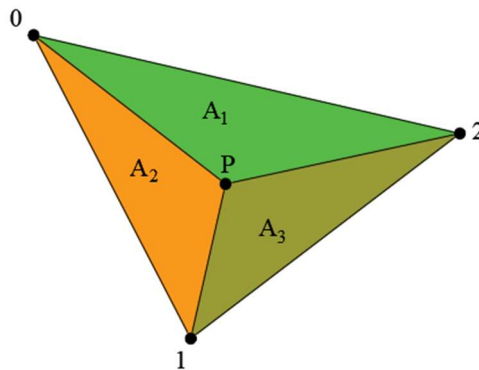
Kako je prethodno navedeno, vrijednost potencijala  $\varphi$  je konstantna na rubovima diskretnih elemenata. Taj uvjet je ispunjen ako definiramo da je vrijednost potencijala  $\varphi$  također konstantana na rubovima konačnih elemenata. Prema tome je pretpostavljena vrijednost potencijala  $\varphi$  u nekoj točki P, unutar trokutnog konačnog elementa:

$$\varphi(P) = \min \left\{ \frac{3A_1}{A}, \frac{3A_2}{A}, \frac{3A_3}{A} \right\} \quad (15)$$

Gdje je:

$A_i (i = 1,2,3)$  – površina podtrokutnog elementa kako je prikazano na slici 10.[2]

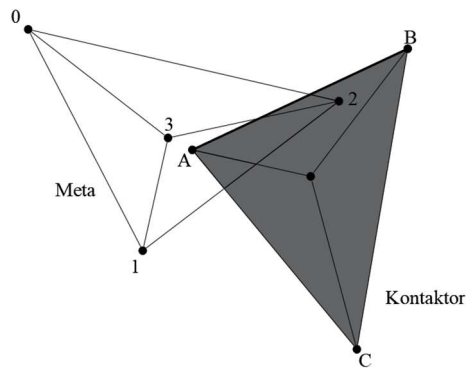
Potencijal  $\varphi$  jednak je 1 u centru trokuta a 0 na rubovima i u točkama izvan trokuta.[1]



Slika 10. Potencijal  $\varphi$  u točki P konačnog elementa

Kako je objašnjeno u prethodnom poglavlju, interakcija između dva trokutna elementa se reducira na interakciju trokuta kontaktora s rubovima trokuta mete, odnosno mete s rubovima kontaktora.

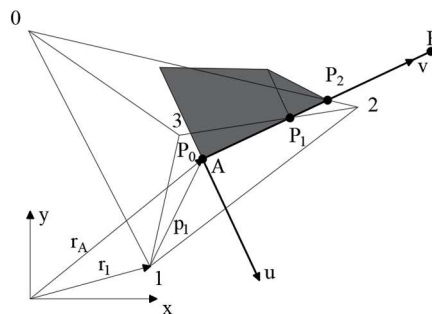




Slika 11. Kontakt trokuta kontaktora i mete i kontakt ruba kontaktora s metom

Na slici 11 su prikazani trokutni elementi u kontaktu s istaknutim bridom AB na kojem se računa kontaktna sila. Na brid AB uvodimo lokalni koordinatni sustav  $uv$  te transformiramo koordinate vrhova mete u isti, kako bi pojednostavnili proračun. Pa vrijedi: [1]

$$p_i = ((r_i - r_A) \cdot u, (r_i - r_A) \cdot v) \quad (16)$$



Slika 12. Distribucija kontaktne sile između trokuta mete i ruba trokuta kontaktora

Potrebno je odrediti karakteristične točke na bridu AB, odnosno točke na sjecištima brida s metom. Zatim je potrebno izračunati potencijale u karakterističnim točkama  $P_0$ ,  $P_1$  i  $P_2$ , primjenom interpolacije između čvorova 0, 1 i 2 u kojima je vrijednost potencijala jednaka 0, s čvorom 3 u kojem je vrijednost potencijala jednaka 1. Površina dijagrama potencijala  $\varphi$  sa slike 12 daje iznos ukupne kontaktne sile na rubu AB, kako je prikazano u slijedećem izrazu:

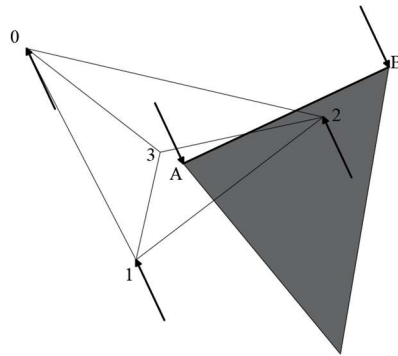
$$f_{k,AB} = \frac{1}{u^2} \cdot u \int_0^L p\varphi(v)dv \quad (17)$$

Gdje je:

$p$  – kazneni (penalty) pojam

$u^2$  – označava da vektori  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{v}$  nisu jedinični vektori [2]

Dobivene kontaktne sile se prezentiraju kao ekvivalentne čvorne sile na vrhovima A i B, zajedno sa odgovarajućim čvornim silama u vrhovima trokuta mete (slika 13).



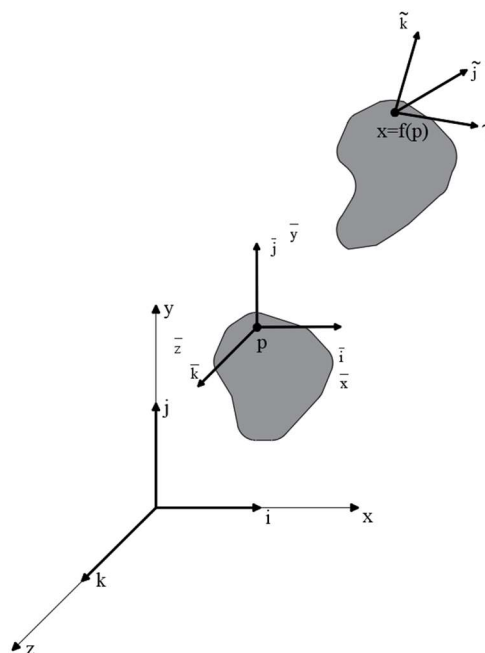
Slika 13. Ekvivalentne čvorne sile

Opisani proces se ponavlja za ostale bridove trokuta kontaktora. Ovim načinom se kontaktne sile uslijed prodora trokuta kontaktora u trokut mete, dobivaju iz potencijala mete  $\varphi_m$ .

Uzimaju se u obzir i kontaktne sile za potencijal  $\varphi_k$  koji je pridružen trokutu kontaktora. Potencijal  $\varphi_k$  je definiran na isti način kao potencijal  $\varphi_m$ , a time i određivanje čvornih sila.[1]

### 3.3 DEFORMABILNOST KONAČNIH ELEMENATA

#### 3.3.1 Gradijent deformacije



Slika 14. Referentni okviri

Gradijentom deformacije se može dobiti veza između lokalnog i deformiranog lokalnog okvira koji su prikazani na slici 14.

Gradijent lokalnog okvira se može prikazati na jednak način kao i gradijent globalnog okvira, koristeći slijedeći matrični zapis:

$$\mathbf{F} = \Delta \mathbf{f} = \nabla \begin{bmatrix} \bar{x} + \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ \bar{y} + \bar{v}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ \bar{z} + \bar{w}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} & 1 + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} & 1 + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Vektori lokalnog okvira su paralelni s osima odgovarajućeg Cartezijevog koordinatnog sustava te mogu biti prikazani u matričnom zapisu:

$$\bar{\mathbf{i}} = 1\bar{\mathbf{i}} + 0\bar{\mathbf{j}} + 0\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\bar{\mathbf{j}} = 0\bar{\mathbf{i}} + 1\bar{\mathbf{j}} + 0\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\bar{\mathbf{k}} = 0\bar{\mathbf{i}} + 0\bar{\mathbf{j}} + 1\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

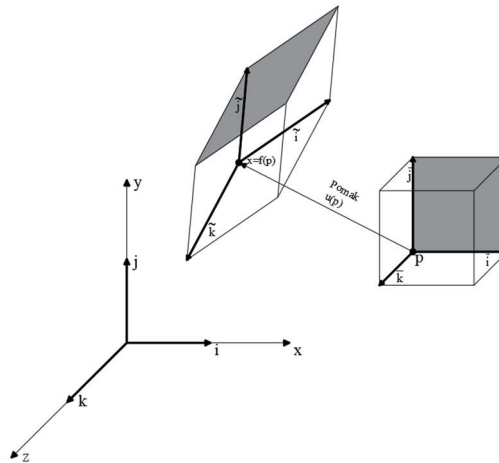
Deformacijom elementa se vektori lokalnog okvira  $(\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}})$  mapiraju u vektore deformiranog lokalnog okvira  $(\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{k}})$ , pa slijedi:

$$\tilde{\mathbf{i}} = \mathbf{F}\bar{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} & 1 + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} & 1 + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \end{bmatrix} = \left(1 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}\right)\bar{\mathbf{i}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}\bar{\mathbf{j}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\bar{\mathbf{k}} \quad (22)$$

$$\tilde{\mathbf{j}} = \mathbf{F}\bar{\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} & 1 + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} & 1 + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \\ 1 + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \end{bmatrix} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}\bar{\mathbf{i}} + \left(1 + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right)\bar{\mathbf{j}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\bar{\mathbf{k}} \quad (23)$$

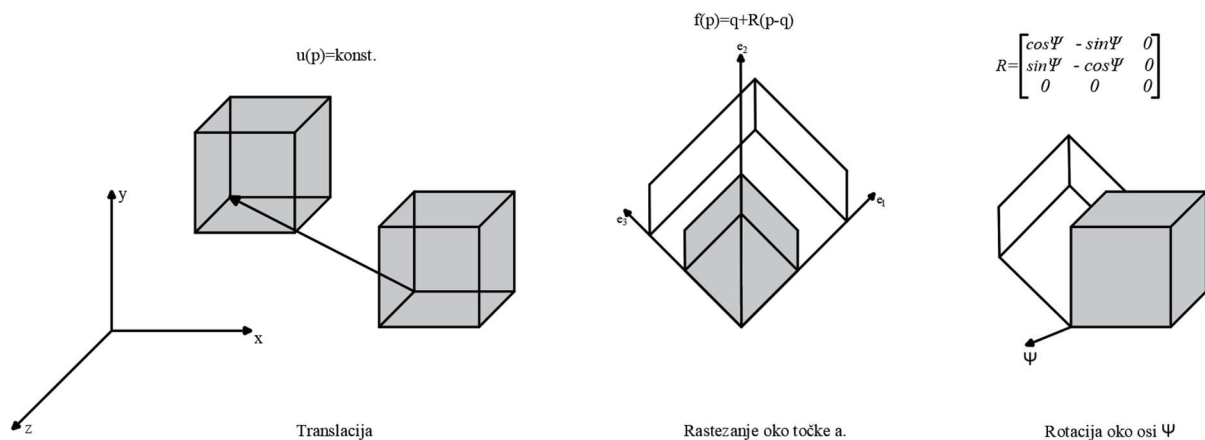
$$\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{F}\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} & 1 + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} & 1 + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \\ 1 + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \end{bmatrix} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}\bar{\mathbf{i}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}\bar{\mathbf{j}} + \left(1 + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right)\bar{\mathbf{k}} \quad (24)$$

Fizikalna interpretacija gradijenta deformacije prikazana je na slici 15., koja prikazuje diskretni element oblika kocke u svom početnom stanju, te njegovo deformirano stanje gdje postiže promjenu oblika i volumena.



Slika 15. Fizikalna interpretacija gradijenta deformacije

Postoje i posebni oblici deformacije: deformacije s konstantnim pomakom i deformacije s konstantnim gradijentom deformacije. Translacija predstavlja deformaciju s konstantnim pomakom pri čemu element ne mijenja oblik ni volumen. Rotacija i rastezanje predstavljaju deformacije s konstantnim gradijentom deformacije, odnosno homogene deformacije. Kod rotacije element također ne mijenja oblik ni volumen već je zarotiran oko određene osi a pri rastezanju, element može biti produžen ili skraćen u tri međusobno ortogonalna smjera. [1]

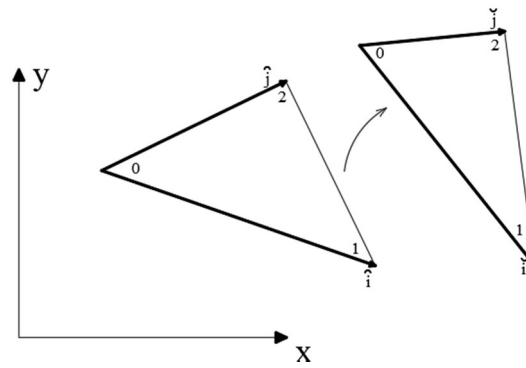


Slika 16. Posebni oblici deformacije

Kao i pri određivanju kontaktnih sila, odabran je trokutni konačni element pri diskretizaciji mrežom konačnih elemenata, zbog svoje geometrijske jednostavnosti.

Pri opisivanju deformacije konačnog elementa usvojena su tri referentna okvira:

globalni ( $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ), inicijalni ( $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ ) i deformirani inicijalni okvir ( $\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{k}}$ ).



Slika 17. Prikaz globalnog, inicijalnog i deformiranog inicijalnog okvira

Polje pomaka nad tročvornim trokutnim elementom:

$$x_c = \alpha_x x_i + \beta_x y_i \quad (25)$$

$$y_c = \alpha_y x_i + \beta_y y_i \quad (26)$$

Vidljivo je da su parcijalne derivacije ovih funkcija po  $x$  i  $y$  konstante a time i gradijent deformiranja  $\mathbf{F}$ .

$x_c$  i  $y_c$  predstavljaju trenutne koordinate na deformiranom položaju a  $x_i$  i  $y_i$  početne koordinate na nedeformiranom položaju.

Gradijent deformiranja  $\mathbf{F}$  je najjednostavnije izračunati u deformiranom inicijalnom okviru:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial \hat{x}_i} & \frac{\partial x_c}{\partial \hat{y}_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial \hat{x}_i} & \frac{\partial y_c}{\partial \hat{y}_i} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Gdje su  $x_c$  i  $y_c$  trenutne koordinate u globalnog okvira a  $\hat{x}_i$  i  $\hat{y}_i$  koordinate inicijalnog okvira.

Deformacija je izražena prema slijedećim uvjetima:

$$x_c = x_c(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \quad (28)$$

$$y_c = y_c(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \quad (29)$$

Kako se bazni vektori inicijalnog okvira podudaraju u smjeru i veličini s bridovima nedeformiranog konačnog elementa, gradijent deformiranja  $\mathbf{F}$  se može izraziti kako slijedi:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial \hat{x}_i} & \frac{\partial x_c}{\partial \hat{y}_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial \hat{x}_i} & \frac{\partial y_c}{\partial \hat{y}_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1c} - x_{0c} & x_{2c} - x_{0c} \\ y_{1c} - y_{0c} & y_{2c} - y_{0c} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Gdje su:

$x_{0c}, y_{0c}$  – trenutne globalne koordinate čvora 0

$x_{1c}, y_{1c}$  – trenutne globalne koordinate čvora 1

$x_{2c}, y_{2c}$  – trenutne globalne koordinate čvora 2

Transformacija koordinata:

$$\begin{bmatrix} \widehat{l}_x & \widehat{j}_x \\ \widehat{l}_y & \widehat{j}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1i} - x_{0i} & x_{2i} - x_{0i} \\ y_{1i} - y_{0i} & y_{2i} - y_{0i} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Gdje su:

$x_{0i}, y_{0i}$  – globalne koordinate čvora 0, nedeformiranog konačnog elementa

$x_{1i}, y_{1i}$  – globalne koordinate čvora 1, nedeformiranog konačnog elementa

$x_{2i}, y_{2i}$  – globalne koordinate čvora 2, nedeformiranog konačnog elementa

Koristeći transformirane koordinate, gradijent deformiranja  $\mathbf{F}$  se može izraziti kako slijedi:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial x_i} & \frac{\partial x_c}{\partial y_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial x_i} & \frac{\partial y_c}{\partial y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial \widehat{x}_i} & \frac{\partial x_c}{\partial \widehat{y}_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial \widehat{x}_i} & \frac{\partial y_c}{\partial \widehat{y}_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{l}_x & \widehat{j}_x \\ \widehat{l}_y & \widehat{j}_y \end{bmatrix}^{-1} \quad (32)$$

Primjenom analogije s tenzorom  $\mathbf{F}$ , na jednak način se može dobiti i gradijent brzine:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_{xc}}{\partial x_i} & \frac{\partial v_{xc}}{\partial y_i} \\ \frac{\partial v_{yc}}{\partial x_i} & \frac{\partial v_{yc}}{\partial y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_{xc}}{\partial \widehat{x}_i} & \frac{\partial v_{xc}}{\partial \widehat{y}_i} \\ \frac{\partial v_{yc}}{\partial \widehat{x}_i} & \frac{\partial v_{yc}}{\partial \widehat{y}_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{l}_x & \widehat{j}_x \\ \widehat{l}_y & \widehat{j}_y \end{bmatrix}^{-1} \quad (33)$$

Gradijent deformiranja se može prikazati kao produkt rotacije i rastezanja ( $\mathbf{F}=\mathbf{R}\mathbf{U}=\mathbf{R}\mathbf{V}$ ). Upotreba lijevog rastezanja  $\mathbf{V}$  je računski učinkovitija, odnosno slučaj kad je konačni element prvo rotiran pa rastegnut. Iz lijevog tenzora rastezanja se može dobiti lijevi Cauchy-Greenov tenzor deformiranja:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial x_i} & \frac{\partial x_c}{\partial y_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial x_i} & \frac{\partial y_c}{\partial y_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial x_i} & \frac{\partial x_c}{\partial y_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial x_i} & \frac{\partial y_c}{\partial y_i} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Brzinu deformiranja možemo dobiti iz gradijenta brzine  $\mathbf{L}$ , tako da u obzir uzmemo samo simetrični dio gradijenta koji sadrži komponente vezane uz brzinu deformiranja pri čemu ignoriramo dio koji sadrži brzinu rotacije. Slijedi:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial v_{xc}}{\partial x_i} & \frac{\partial v_{xc}}{\partial y_i} \\ \frac{\partial v_{yc}}{\partial x_i} & \frac{\partial v_{yc}}{\partial y_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial v_{xc}}{\partial x_i} & \frac{\partial v_{yc}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial v_{xc}}{\partial y_i} & \frac{\partial v_{yc}}{\partial y_i} \end{bmatrix} \right) \quad (35)$$

Iz lijevog Cauchy-Greenovog tenzora deformiranja za male deformacije slijedi Green-St.

Venantov tenzor deformacija:

$$\mathbf{\tilde{E}} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}^2 - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial x_i} & \frac{\partial x_c}{\partial y_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial x_i} & \frac{\partial y_c}{\partial y_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial x_i} & \frac{\partial x_c}{\partial y_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial x_i} & \frac{\partial y_c}{\partial y_i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad (36)$$

Gdje je dio koji se odnosi na promjenu oblika:

$$\check{E}_d = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{V}^2}{|\det \mathbf{F}|} - \mathbf{I} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{B}}{|\det \mathbf{F}|} - \mathbf{I} \right) \left( \frac{1}{|\det \mathbf{F}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial x_i} & \frac{\partial x_c}{\partial y_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial x_i} & \frac{\partial y_c}{\partial y_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial x_i} & \frac{\partial x_c}{\partial y_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial x_i} & \frac{\partial y_c}{\partial y_i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad (37)$$

Dio koji se odnosi na promjenu volumena:

$$\check{E}_s = \frac{1}{2} (\mathbf{V}_s \mathbf{V}_s^T - \mathbf{I}) = \mathbf{I} \left( \frac{|\det \mathbf{F}| - 1}{2} \right) = \left( \frac{|\det \mathbf{F}| - 1}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Kad je poznat tenzor deformacija, moguće je izračunati Cauchyev tenzor naprezanja koristeći Hookeov zakon:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \check{E}_d + \frac{E}{1-2\nu} \check{E}_s + \bar{\mu} \mathbf{D} \quad (39)$$

ili

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \check{E} + \lambda \varepsilon_v \mathbf{I} + \bar{\mu} \mathbf{D} \quad (40)$$

Gdje je:

$\mu, \lambda$  – Laméove konstante

$\varepsilon_v$  – volumenska deformacija  $\varepsilon_v = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$

$\bar{\mu} \mathbf{D}$  – doprinos brzine deformiranja

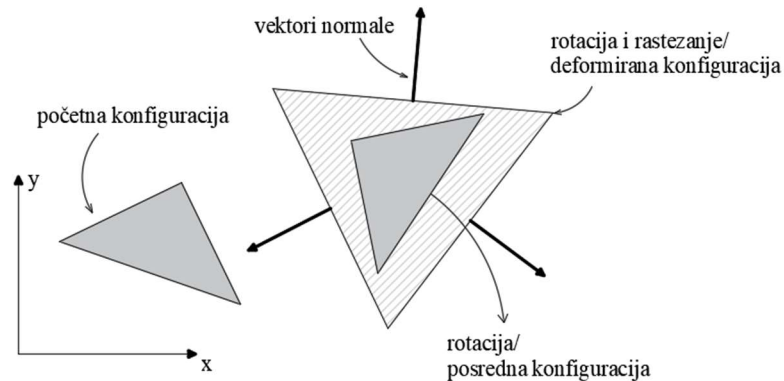
$\bar{\mu}$  – koeficijent prigušenja

Prikazane komponente naprezanja se odnose na deformiranu konfiguraciju, odnosno prikazuju naprezanja u globalnom okviru po jedinici duljine deformiranog konačnog elementa. Prema tome, sile po bridovima konačnog elementa mogu biti izračunate primjenom normale ( $\mathbf{n}$ ) na brid deformiranog elementa, odnosno komponenti normale u globalnom okviru. Sila po jedinici duljine stranice trokutnog konačnog elementa dana je izrazom:

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (41)$$

Ekvivalentna čvorna sila konačnog elementa iznosi:[2,8]

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \mathbf{s} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (42)$$



Slika 18. Vektori normale korišteni u izračunu sila uslijed napreznja

## 3.5 KONTINUUM I DISKONTINUUM

### 3.5.1 Kontinuum

Svi materijali koji se koriste u graditeljstvu su diskontinuirani no u rješavanju inženjerskih problema, mikrostruktura materijala se opisuje kao prosječno svojstvo materijala te nije potrebno uzimati u obzir diskontinuitet materijala, odnosno uzima se da je materijal kontinuiran. [1] Što znači da se materija u tijelu distribuira kontinuirano i ispunjava čitav prostor tijela koji zauzima. Ignorira se činjenica da je materijal sačinjen od atoma, pa na skalama dužine koje su mnogo veće od skale međuatomske udaljenosti, ovkavi modeli su vrlo precizni. Na takvim modelima se primjenjuju osnovni fizički zakoni (očuvanje mase, očuvanje impulsa, očuvanje energije) te se izvode diferencijalne ili integralne jednadžbe koje opisuju njihovo ponašanje. [9]

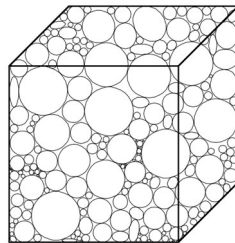
Izvedene jednadžbe uparene s vanjskim opterećenjem i rubnim uvjetima tvore granični problem čije rješenje zadovoljava izvedene jednadžbe te također i zadane rubne uvjete. Rješenje može biti izraženo analitički i numerički. Najnaprednija i najčešće korištena numerička metoda je metoda konačnih elemenata. [1]



### 3.5.2 Diskontinuum

Diskontinuitet materijala je najlakše demonstrirati na sliječem primjeru:

Slika 20 prikazuje stakleni spremnik oblika kvadra, napunjen česticama raznih oblika i veličina.



Slika 19. Spremnik čestica

Volumen prikazanog spremnika je zbroj volumena koji zauzimaju čestice i volumena koji zauzima prazni prostor među njima.

Kada se spremnikпусти da slobodno pada, pri padu, pod utjecajem gravitacije, dolazi do izmjene energije među česticama i između stijenki spremnika s česticama. Pa kad spremnik sleti na nekakvu podlogu, nameće se pitanje je li volumen koji zu zauzele čestice u početnom položaju spremnika, jednak volumenu koje zauzimaju nakon slobodnog pada?

Očigledno je da izrazi za gustoću  $\rho = dm/dV$  i masu tijela  $m = \int_V \rho dV$  u kontinuumu ne vrijede za ovaj slučaj, već je masa spremnika izražena u obliku:[1]

$$m = \sum_{i=1}^N m_i \quad (43)$$

Gdje je:

$N$  – ukupan broj čestica

$m_i$  – masa pojedine čestice

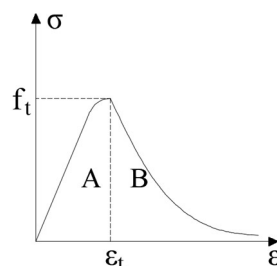
### 3.5.3 Prijelaz iz kontinuuma u diskontinuum

U okviru ove metode, prijelaz iz kontinuuma u diskontinuum nastaje pojavom procesa loma i odlamanja. Pri simulaciji loma konstrukcije, ista je u početnom položaju definirana s određenim brojem diskretnih elemenata. Broj diskretnih elemenata se povećava s pojavom oštećenja.

Pojava pukotine na konstrukciji nastaje kao posljedica popuštanja ili sloma mikrostrukturnih elemenata materijala od kojeg je sačinjena. Kako bi se objasnila složenost pojave pukotine na konstrukciji, potrebno je uzeti u obzir vrstu materijala, promjenu polja naprezanja i deformacija uslijed mikrostrukturnih oštećenja i nastale koncentracije opterećenja.[1]

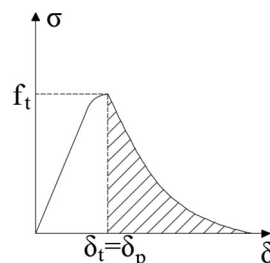
U kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata, pojava i razvoj pukotina ostvarena je modelom diskretnih pukotina. Model je implementiran u kontaktnim elementima konačnih elemenata te je namjenjen simuliranju inicijalizacije i razvoja pukotina pri opterećenju vlakom i posmikom. Model je baziran na aproksimaciji krivulja *naprezanje-deformacija* za beton opterećen direktnim vlakom a mogu se koristiti i za ostale heterogene materijale kao što je kamen.[2]

Dijagram 3 prikazuje dijagram naprezanje-deformacija kamena. Vidljivo je da je površina koju dijagram zatvara s koordinatnim osima podijeljena na područje „A“ i područje „B“. U području „A“ naprezanje raste dok ne dostigne vrijednost graničnog naprezanja. Dijagram je linearan do dosezanja granice plastičnosti te deformacije rastu sve do pojave pukotine. Slijedi područje „B“ u kojem deformacije rastu pri padu naprezanja. Ta pojava se naziva vlačno omekšanje.[1]



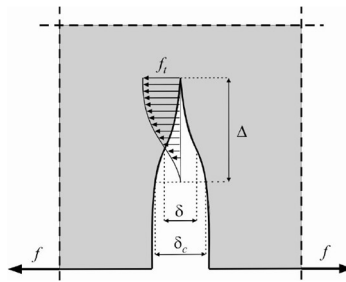
Slika 20. Naprezanje-deformacija/ dostizanje graničnog naprezanja/ vlačno omekšanje

Kada se vlačno omekšanje prikaže na relaciji naprezanje-pomak, površina dijagrama od trenutka pojave pukotine do trenutka u kojem je naprezanje nula, predstavlja energiju loma. to je rad koji je potrebno utrošiti kako bi nastala pukotina jedinične površine.

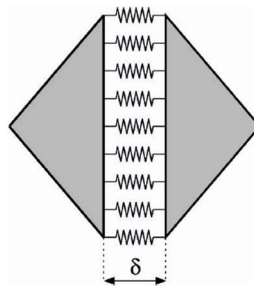


Slika 21. Energija loma

Vlačno omekšanje je modelirano diskretnim modelom pukotine (slika 21). Kako bi se pojednostavnio postupak pretpostavljeno je da se pukotina poklapa s rubom konačnog elementa. Njihovo razdvajanje inducira naprezanje koje se uzima kao funkcija veličine razdvajanja. Odvajanje konačnih elemenata je osigurano na način da nijedan čvor ne pripada dvama konačnim elementima. Osiguranje kontinuiteta između konačnih elemenata je postignuto *penalty* metodom, na način da je po rubu konačnog elementa, u smjeru normale modelirana opruga velike krutosti da vrijedi  $\delta_t = \delta_p$  (slika 22).[2]

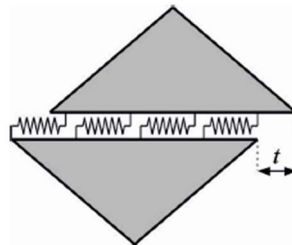


Slika 22. Model pukotine [2]



Slika 23. model vlačne opruge među konačnim elementima [2]

Za pukotine uslijed posmika je pretpostavljeno slično ponašanje kao u vlakcu, odnosno rubovi susjednih konačnih elemenata su pridržani te je kontinuitet među njima održan primjenom *penalty* metode. Rubovi su pridržani posmičnim oprugama te se odvajaju dosezanjem napreznja koje odgovara posmičnoj čvrstoći materijala.



Slika 24. Model posmične opruge[2]

Kada je pukotina opterećena i vlakom i posmikom, usvaja se faktor oštećenja  $D$  te je uvjet loma  $D \leq 1$ .

## 4 PRIMJENA KOMBINIRANE METODE KONAČNO-DISKRETNIH ELEMENATA NA ZADANI ZVONIK

### 4.1 ULAZNI PODACI

Izvršena je seizmička analiza istočnog pročelja zvonika sv. Dujma. Kao što je navedeno u uvodu. Zvonik je izgrađen od kamenih blokova bračkog i korčulanskog vapnenca iako je često nazivan mramorom zbog svoje kvalitete. Karakteristike bračkog i korčulanskog kamena su:

Modul elastičnosti:  $E = 48400 \text{ MPa}$

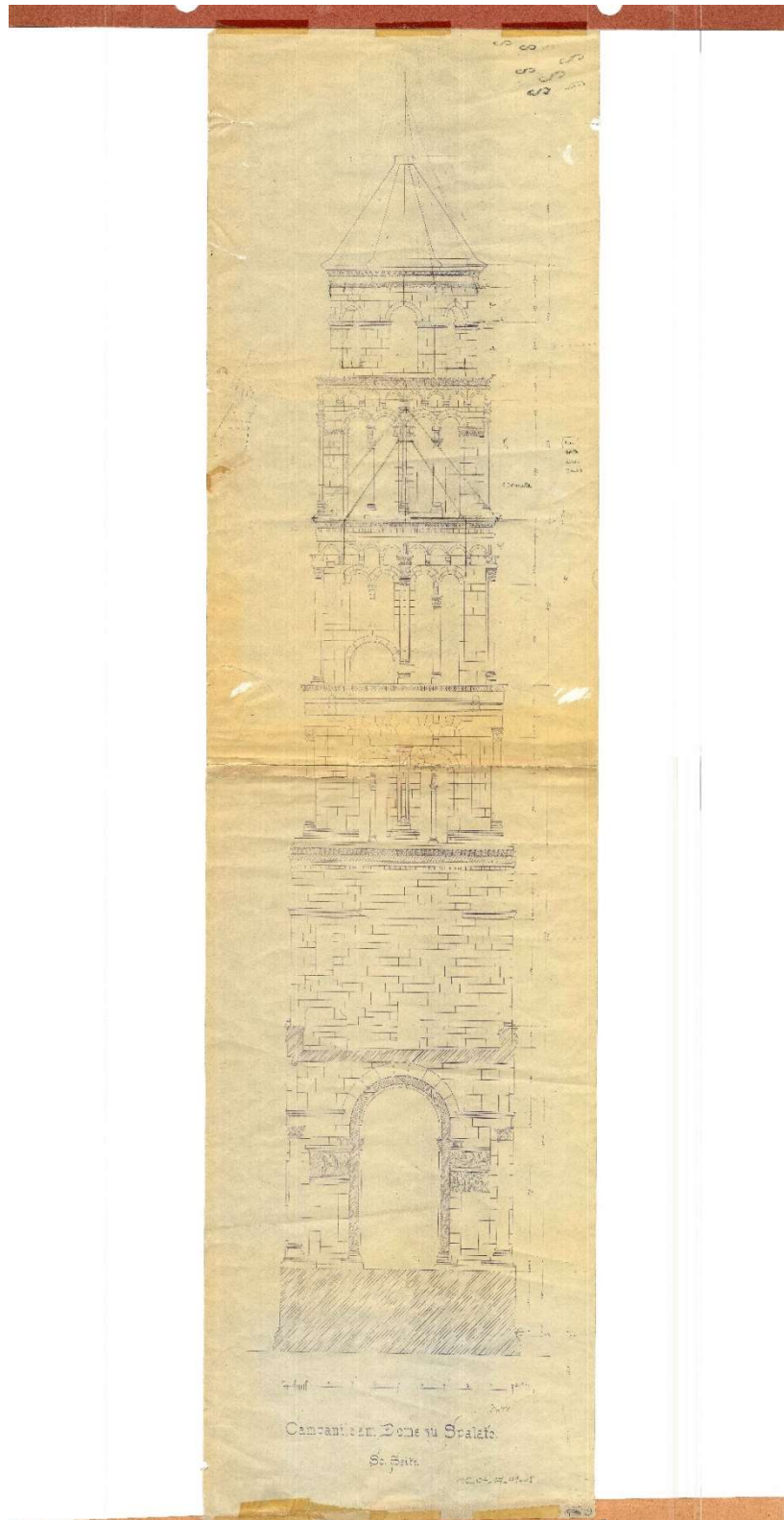
Gustoća:  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$

Statički koeficijent trenja:  $\mu_{st} = 0,6$

Dinamički koeficijent trenja:  $\mu_{din} = 0,6$

Koeficijent prigušenja:  $\bar{\mu} = 4,5 \cdot 10^6$

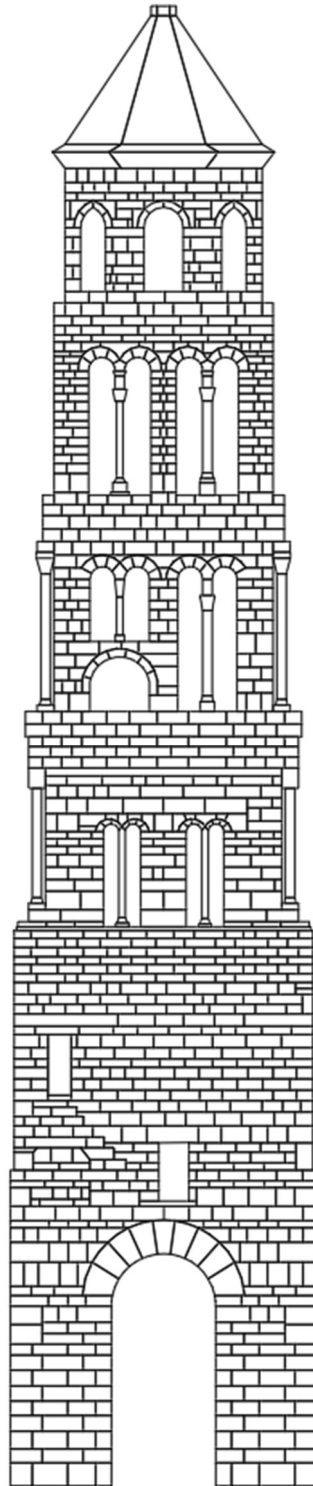
Kao podloga je arhitektonski snimak postojećeg stanja s kraja 19. stoljeća u MJ 1:40, a izradio ga je Alois Hauser te je prikazan na slijedećoj slici (slika 24). Vidljivo je da su zidni elementi različitih dimenzija i oblika te da je pročelje ukrašeno grbovima i vjencima među etažama kao i kapiteli stupova. Svi ti ukrasi nisu uključeni u proračunati model, već je modeliran samo konstruktivni sustav zvonika. Proračun je izvršen u računalnom programu „FEMDEM“ razvijenom u sklopu knjige „The combined finite-discrete element method“, autora dr.sc. Antonija Munjize.



Slika 25. Arhitektonski snimak postojećeg stanja s kraja 19. stoljeća u MJ 1:40, izradio: Alois Hauser [11]

#### 4.1.1 Podjela zvonika na diskretne elemente

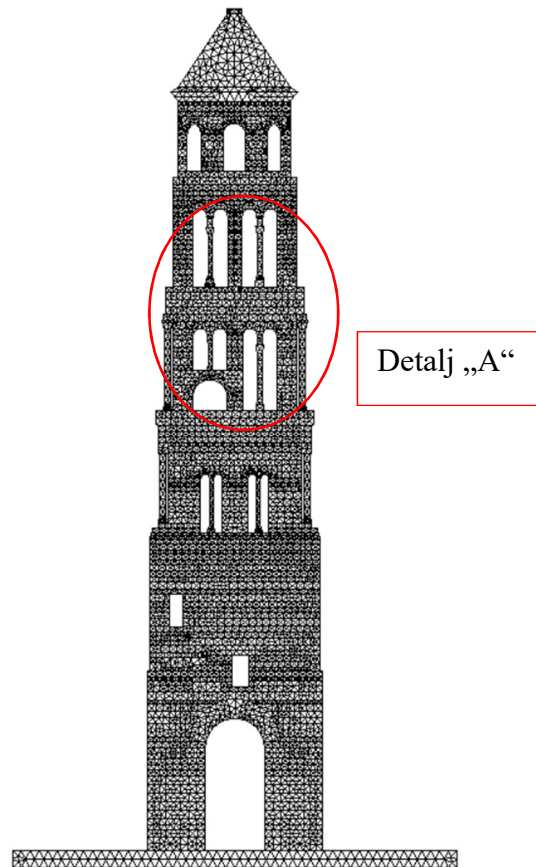
Za diskretne elemente zvonika su uzeti zidni elementi od kojih sažidan. Svaki kameni blok predstavlja jedan diskretni element. Nacrt zvonika podijeljenog na diskretne elemente izrađen je u računalnom programu Autodesk, AutoCad.



*Slika 26. Podjela istočnog pročelja zvonika na diskretne elemente*

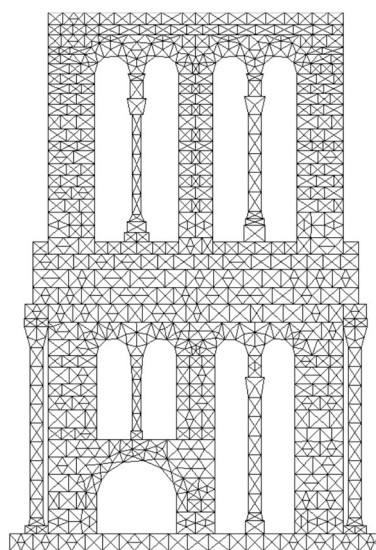
#### 4.1.2 Diskretizacija diskretnih elemenata mrežom konačnih elemenata

Diskretizacija je izvršena korištenjem generatora mreže konačnih elemenata „Gmsh“. Odabrani su konačni elementi oblika trokuta.



Slika 27. Diskretizacija mrežom konačnih elemenata

Detalj „A“:

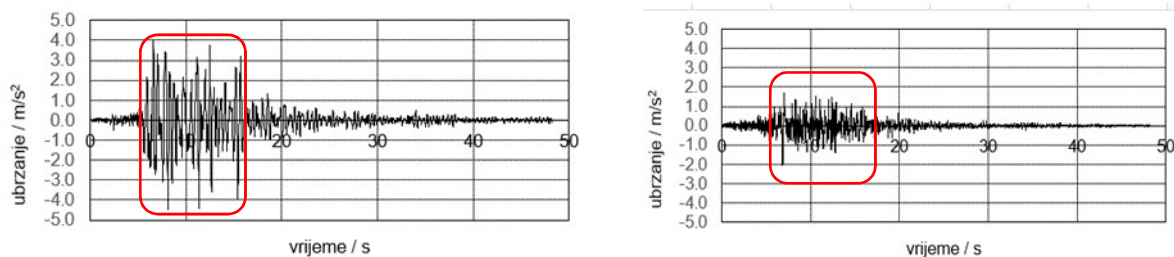


Slika 28. Detalj "A" mreže konačnih elemenata

### 4.1.3 Opterećenje konstrukcije

Konstrukcija je opterećena potresnim opterećenjem, pri čemu su korišteni zapisi ubrzanja tla 3 različita potresa: Petrovac (Crna Gora, 1979.), Campano Lucano (Italija, 1980.) i South Iceland (Island 2000.). Slijedeći dijagrami prikazuju zapise ubrzanja u vremenu horizontalne i vertikalne komponente za navedene potrese, kojima je konstrukcije opterećena. Dijagrami su skalirani na različita vršna ubrzanja  $a_g$  do sloma konstrukcije.

#### Akcelelogrami potresa u Petrovcu (Crna Gora 1979.)

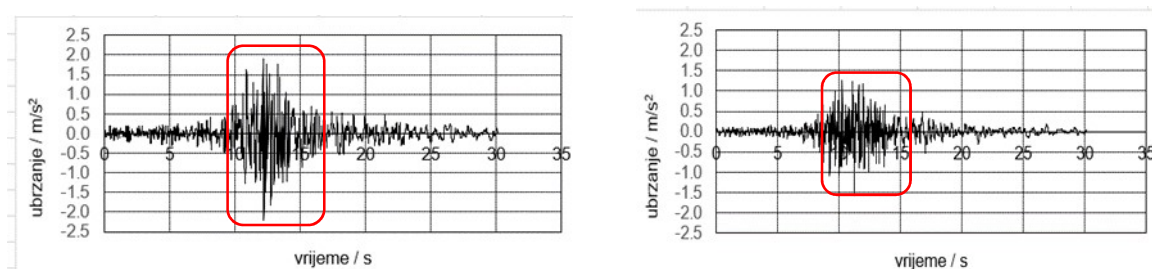


Slika 29. Akcelelogrami Petrovac: lijevo) horizontalna komponenta; desno) vertikalna komponenta

S akcelelograma je vidljiva vrijednost najvećeg postignutog vršnog ubrzanja te vrijeme trajanja maksimalnih ubrzanja tla. U ovom slučaju vrijeme u kojem se postižu maksimalna ubrzanja je od 5. do 15. sekunde, odnosno traje cca 10 sekunda. Maksimalna vrijednost ubrzanja ovog potresa iznosi  $a_g = 4,5 \text{ m/s}^2$  ali maksimalna vrijednost do koje je izvršena analiza ponašanja konstrukcije iznosi  $a_g = 0,4 \text{ m/s}^2$ .

Seizmička analiza zvonika za akcelelogram potresa Petrovac je izvršena za sedam vrijednosti vršnog ubrzanja: 0,1; 0,15; 0,22; 0,3; 0,35; 0,38 i  $0,4 \text{ m/s}^2$

#### Akcelelogrami potresa u Campano Lucianu (Italija 1980.)



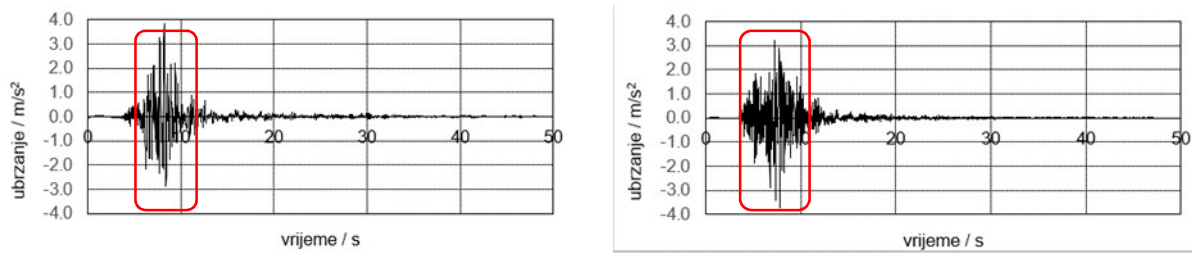
Slika 30. Akcelelogrami Campano Lucano: lijevo) horizontalna komponenta; desno) vertikalna komponenta

Ovdje se maksimalne vrijednosti ubrzanja javljaju u 10. sekundi i traju do 15. sekunde, odnosno cca 5 sekunda. Maksimalna vrijednost ubrzanja ovog potresa iznosi  $a_g = 2,25 \text{ m/s}^2$ , a maksimalna vrijednost na koju je akcelelogram uvećan pri proračunu iznosi  $a_g = 3,0 \text{ m/s}^2$ .

Seizmička analiza je također izvršena za sedam vrijednosti vršnih ubrzanja: 0,5; 0,22; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5 i  $3,0 \text{ m/s}^2$ .



### Akcelelogrami potresa u South Islandu (Island 2000.)



Slika 31. Akcelelogrami South Iceland: lijevo) horizontalna komponenta; desno) vertikalna komponenta

Na akcelelogramu potresa South Iceland trajanje maksimalni ubrzanja iznosi cca 5 sekunda a javljaju se oko 5. sekunde pobude te završavaju oko 10. sekunde pobude. Također se da primijetiti da se horizontalna i vertikalna komponenta ubrzanja tla vrlo malo razlikuju, što nije slučaj kod prethodna dva potresa.

Maksimalno ubrzanje tla pri ovom potresu iznosi  $a_g \cong 4,0 \text{ m/s}^2$  a maksimalna vrijednost ubrzanja na koje je izvršena analiza iznosi  $a_g = 3,0 \text{ m/s}^2$ .

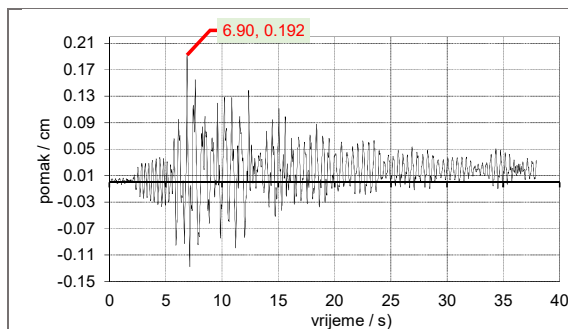
Seizmička analiza je također izvršena za sedam vrijednosti vršnih ubrzanja: 0,5; 0,22; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5 i  $3,0 \text{ m/s}^2$ .

## 5 REZULTATI PRORAČUNA

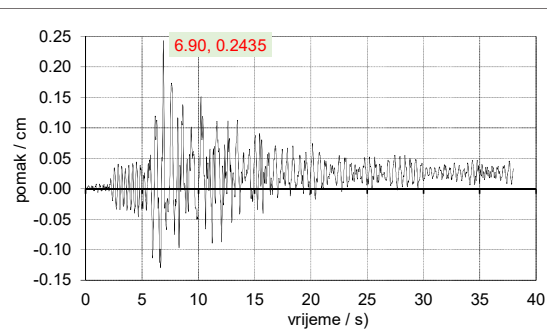
Rezultati proračuna konstrukcije na zadana opterećenja su prikazana u obliku pomaka konstrukcije u vremenu. Za svaku pobudu su prikazani dijagrami pomaka konstrukcije u vremenu, slike konstrukcije pri pojavi i širenju pukotina te po završetku pobude.

### 5.1 REZULTATI PRORAČUNA ZA POTRES PETROVAC (CRNA GORA, 1979.)

Rezultati proračuna pri vršnim ubrzanjima  $a_g = 0.1 m/s^2$  i  $a_g = 0.15 m/s^2$ :

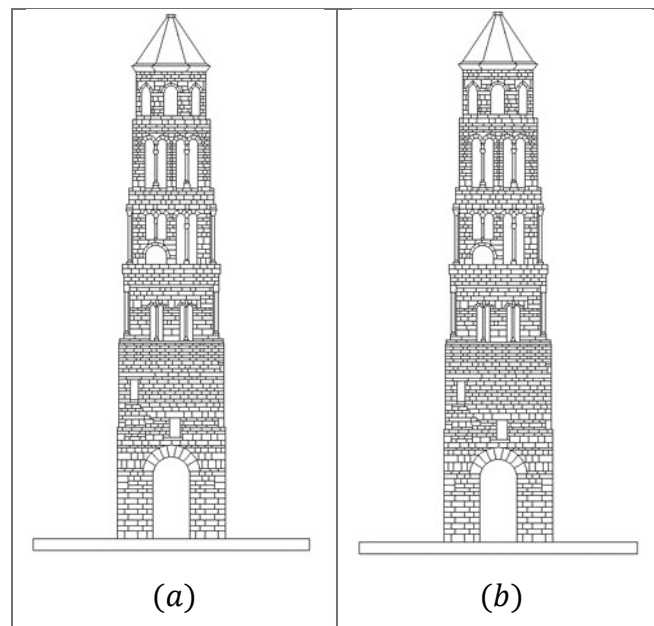


Slika 32. Pomaku u vremenu za Petrovac  $a_g = 0.1 m/s^2$



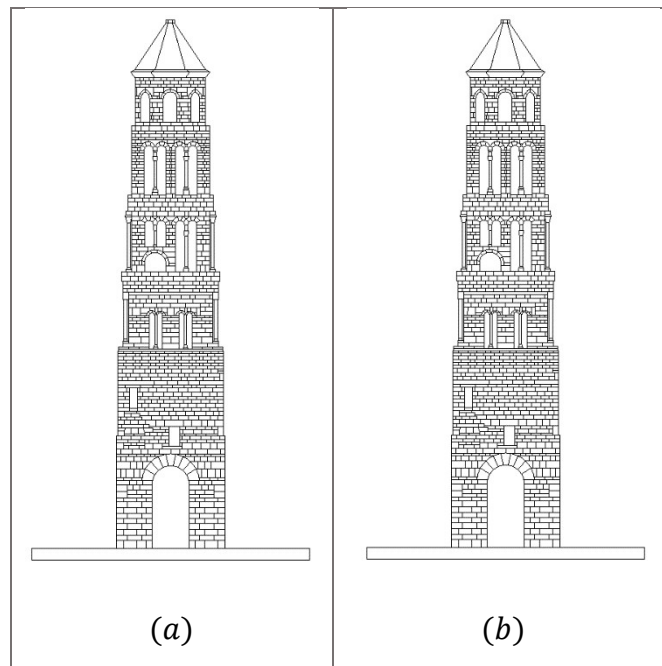
Slika 33. Pomaku u vremenu za Petrova  $a_g = 0.15 m/s^2$

Maksimalna vrijednost pomaka vrha konstrukcije je postignuta u 6.9-oj sekundi. Za vršno ubrzanje  $a_g = 0.1 m/s^2$  iznosi 0,192 cm, a za  $a_g = 0.15 m/s^2$  0,244 cm. Očekivano je da se oštećenja neće pojaviti za tako male vrijednosti pomaka, što je i prikazano na slijedećoj slici.



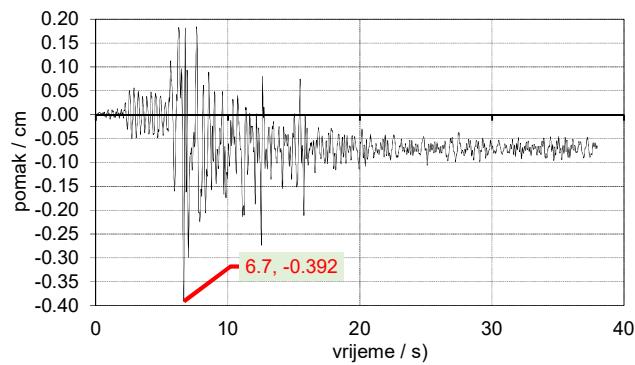
Slika 34. Prikaz stanja konstrukcije u trenutku maksimalnog pomaka za Petrovac: a)  $t=6.9 s$ ,  $a_g = 0.1 m/s^2$ ; b)  $t=6.9 s$ ,  $a_g = 0.15 m/s^2$

Po završetku pobude konstrukcije ostaje ne oštećena za obe vrijednosti vršnog ubrzanja.



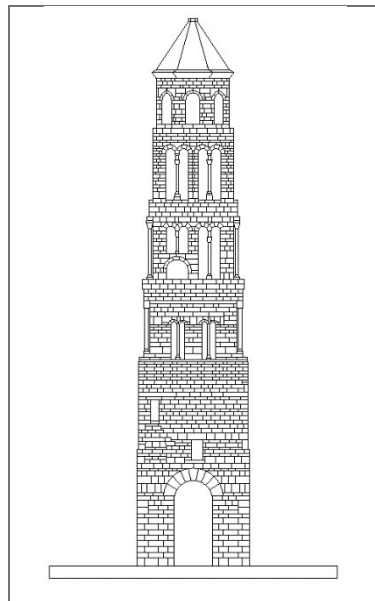
Slika 35. Prikaz stanja konstrukcije pri završetku pobude za Petrovac: a)  $t=51.1$  s,  $a_g = 0.1$  m/s<sup>2</sup>; b)  $t=51.2$  s,  $a_g = 0.15$  m/s<sup>2</sup>

**Rezultati proračuna pri vršnom ubrzanju  $a_g = 0.22$  m/s<sup>2</sup>:**



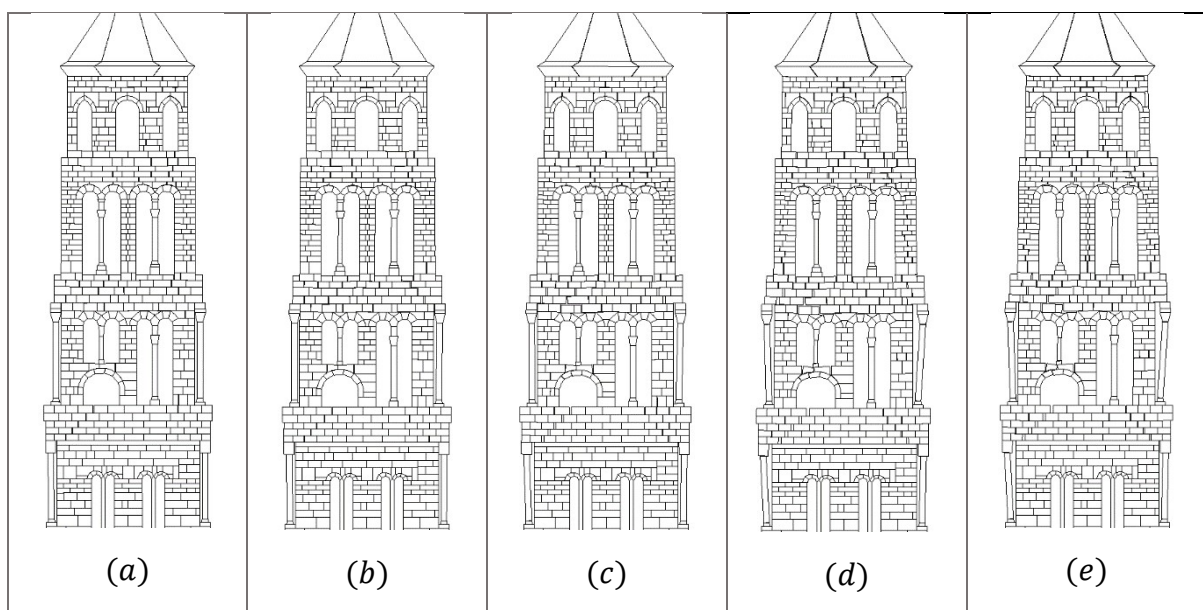
Slika 36. Pomaku u vremenu za Petrovac  $a_g = 0.22$  m/s<sup>2</sup>

Uvećavanjem maksimalnog ubrzanja tla na vrijednost  $a_g = 0.22$  m/s<sup>2</sup>, maksimalni pomak raste na vrijednost 0.39 cm te se postiže u 6.7-oj sekundi. U tom trenutku na konstrukciji nisu vidljive pukotine (slika 37).



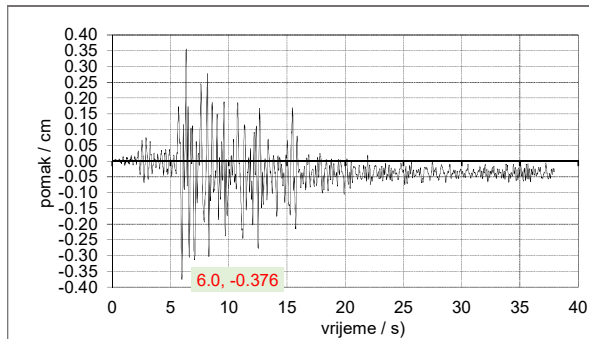
Slika 37. Prikaz stanja konstrukcije pri maksimalnom pomaku za Petrovac:  $t=6.7\text{ s}$ ;  $a_g = 0.22\text{ m/s}^2$

Prve pukotine se pojavljuju u 12.5-oj sekundi na vertikalnim sljubnicama zidnih elemenata 6., 5., 4. i 3. etaže, te se iste šire do 25. sekunde. Od 25. sekunde do kraja djelovanja pobude oštećenja se ne povećavaju. Razvoj nastalih pukotina do kraja pobude je prikazan na slici 38. Vidljivo je međusobno odvajanje zidnih elemenata po vertikalnim sljubnicama iznad lukova otvora. Po završetku pobude je najoštećenije su 4. i 5. etaža, gdje je vidljivo odlamanje blokova prozora i odvajanje stupova na spoju 4. i 5. etaže. Ostala oštećenja su u obliku manjih pukotina. Konstrukcija ostaje stabilna.

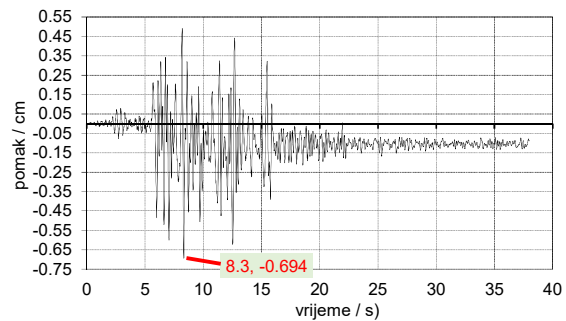


Slika 38. Nastanak i širenje pukotina po vremenskim koracima za Petrovac,  $a_g=0.22\text{ m/s}^2$ : a)  $t=12.5\text{ s}$ ; b)  $t=13.5\text{ s}$ ; c)  $t=15\text{ s}$ ; d)  $t=25\text{ s}$ ; e)  $t=51.2\text{ s}$

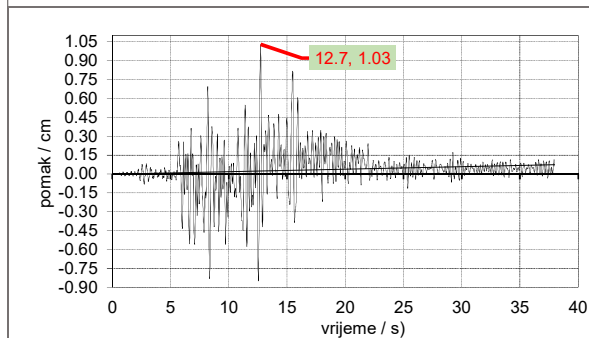
Rezultati proračuna pri vršnim ubrzanjima  $a_g = 0.3 \text{ m/s}^2$ ;  $a_g = 0.35 \text{ m/s}^2$ ;  $a_g = 0.38 \text{ m/s}^2$  i  $a_g = 0.4 \text{ m/s}^2$



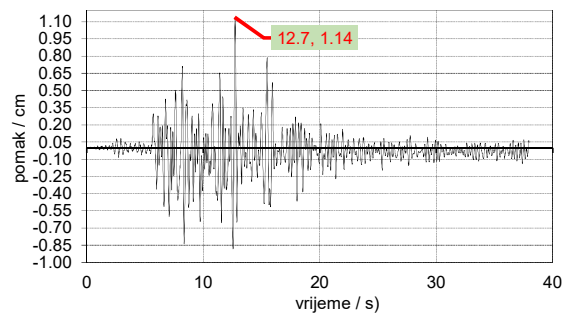
Slika 39. Pomaku u vremenu za Petrovac  $a_g = 0.3 \text{ m/s}^2$



Slika 40. Pomaku u vremenu za Petrovac,  $a_g = 0.35 \text{ m/s}^2$

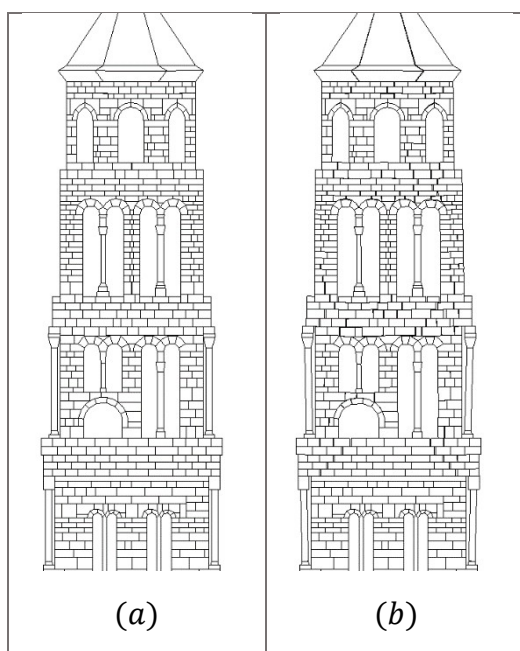


Slika 41. Pomaku u vremenu za Petrovac  $a_g = 0.38 \text{ m/s}^2$



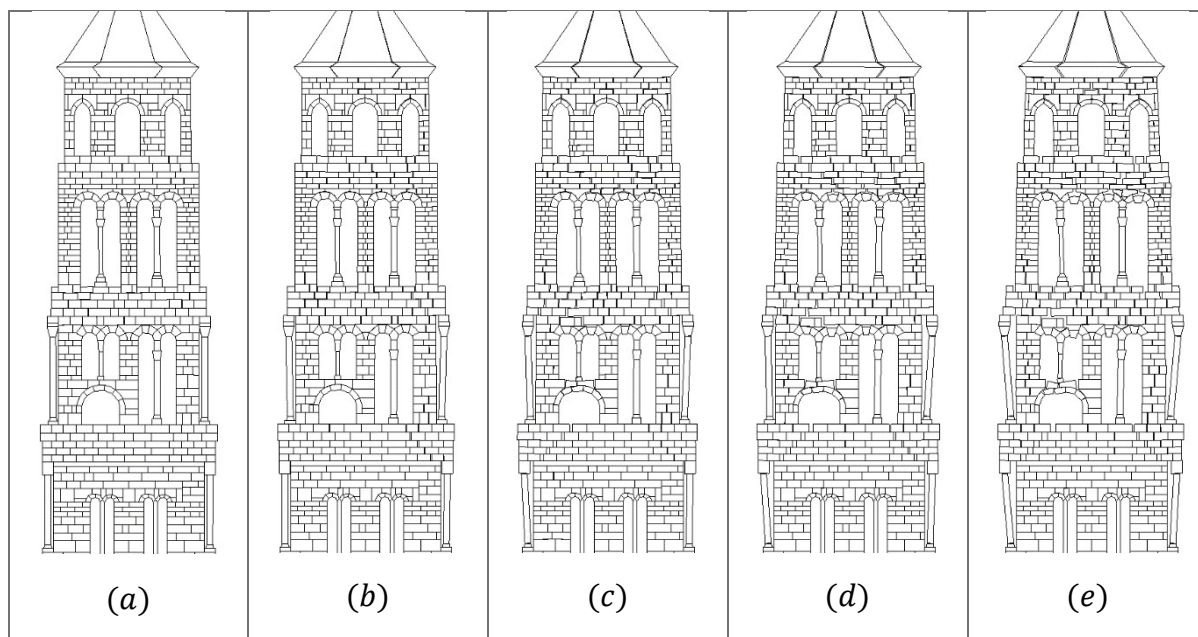
Slika 42. Pomaku u vremenu za Petrovac  $a_g = 0.4 \text{ m/s}^2$

Za vršno ubrzanje  $a_g = 0.3 \text{ m/s}^2$  dobiveni su slični rezultati kao kod prethodnog ubrzanja  $a_g = 0.22 \text{ m/s}^2$ . maksimalni pomak je ostvaren u 6-oj sekundi u i iznosi 0.376 cm (slika 39). Daljnim uvećavanjem vršnog ubrzanja na 0.35 i 0.38  $\text{m/s}^2$ , sa slika 40 i 41 se da primjetiti veći prirast maksimalnog pomaka nego u prethodnim slučajevima. Promotrimo stanje konstrukcije u tim trenucima:



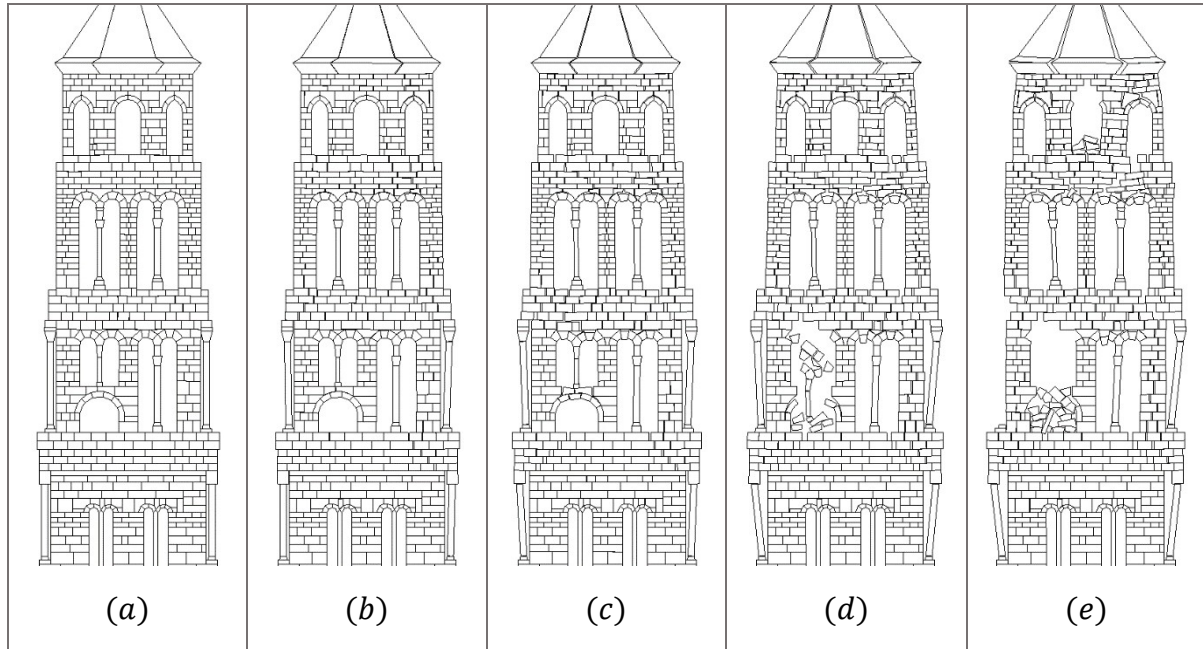
Slika 43. Prikaz stanja konstrukcije u trenutku maksimalnog pomaka za Petrovac: a)  $t = 8.3 \text{ s}$ ,  $a_g = 0.35 \text{ m/s}^2$ ; b)  $t = 12.7 \text{ s}$ ,  $a_g = 0.38 \text{ m/s}^2$

Sa slike 43 je vidljivo da konstrukcija ne poprima oštećenja u trenutku maksimalnog pomaka za vršno ubrzanje od  $0.35 \text{ m/s}^2$ . Pukotine se pojavljuju u 11.5-oj sekundi čiji je širenje prikazano na slici 44. Na kraju pobude na konstrukciji su vidljiva odlamanja zidnih elemenata iznad otvora, pomaci stupova 4. i 3. etaže te odlamanje zida na spoju 4. i 3. etaže što uzrokuje gubitak stabilnosti konstrukcije.



Slika 44. Nastanak i širenje pukotina po vremenskim koracima za Petrovac,  $a_g = 0.35 \text{ m/s}^2$ : a)  $t = 11.5 \text{ s}$ ; b)  $t = 12.5 \text{ s}$ ; c)  $t = 14 \text{ s}$ ; d)  $t = 17.5 \text{ s}$ ; e)  $t = 51.2 \text{ s}$

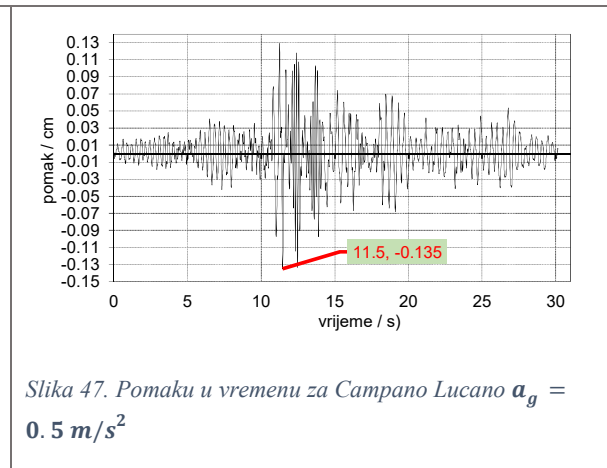
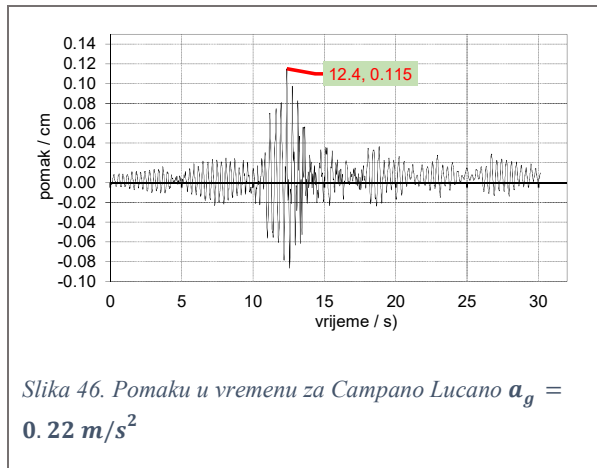
Za vršna ubrzanja  $0.38$  i  $0.40 \text{ m/s}^2$  konstrukcija poprima oštećenja u trenutku maksimalnog pomaka, što za prethodna ubrzanja nije slučaj. Do kraja pobude dolazi do rušenja dijelova konstrukcije a time i potpunog gubitka stabilnosti. Proces loma je prikazan na slici 45.



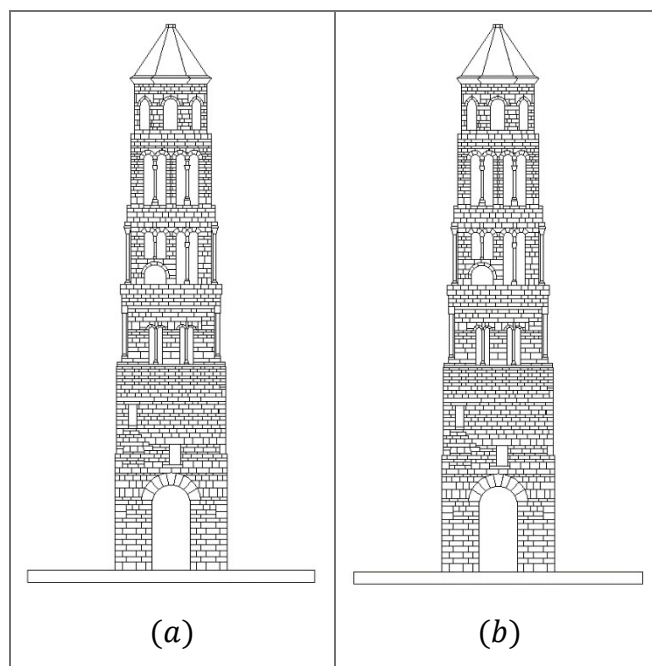
Slika 45. Nastanak i širenje pukotina po vremenskim koracima za Petrovac,  $a_g=0.40 \text{ m/s}^2$ : a)  $t=11.5 \text{ s}$ ; b)  $t=12.5 \text{ s}$ ; c)  $t=14 \text{ s}$ ; d)  $t=19.5 \text{ s}$ ; e)  $t=51.2 \text{ s}$

## 5.2 REZULTATI PRORAČUNA ZA POTRES CAMPANO LUCANO (ITALIJA 1980.)

Rezultati proračuna pri vršnim ubrzanjima  $a_g = 0.22 \text{ m/s}^2$  i  $a_g = 0.5 \text{ m/s}^2$ :



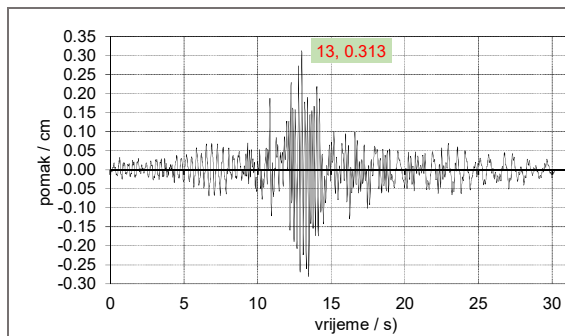
Na slikama 46 i 47 je vidljivo da su maksimalni pomaci za ova vršna ubrzanja postignuti oko 12. sekunde pobude te su vrlo malog iznosa, pa konstrukcija ne poprima oštećenja u tim trenutcima. Konstrukcija ostaje ne oštećena i po završetku pobude, što je prikazano na slici 48.



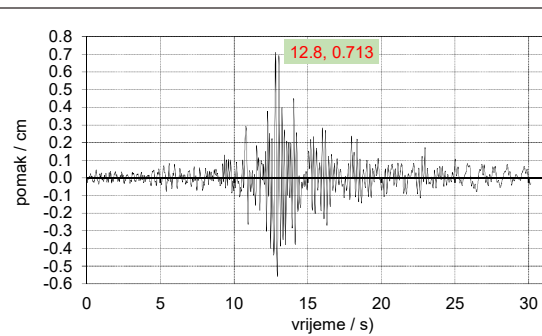
Slika 48. Prikaz stanja konstrukcije pri završetku pobude za Campano Lucano: a)  $t=41.4 \text{ s}$ ,  $a_g = 0.22 \text{ m/s}^2$ ; b)  $t=41.4 \text{ s}$ ,  $a_g = 0.5 \text{ m/s}^2$



Rezultati proračuna pri vršnim ubrzanjima  $a_g = 1.0 m/s^2$  i  $a_g = 1.5 m/s^2$ :

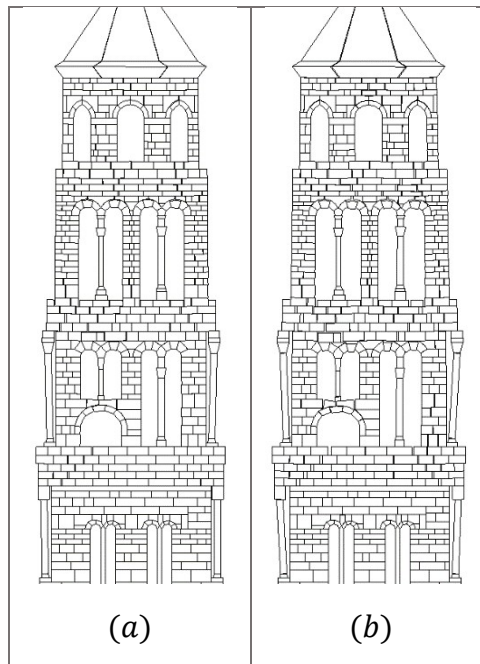


Slika 49. Pomaku u vremenu za Campano Lucano  $a_g = 1.0 m/s^2$



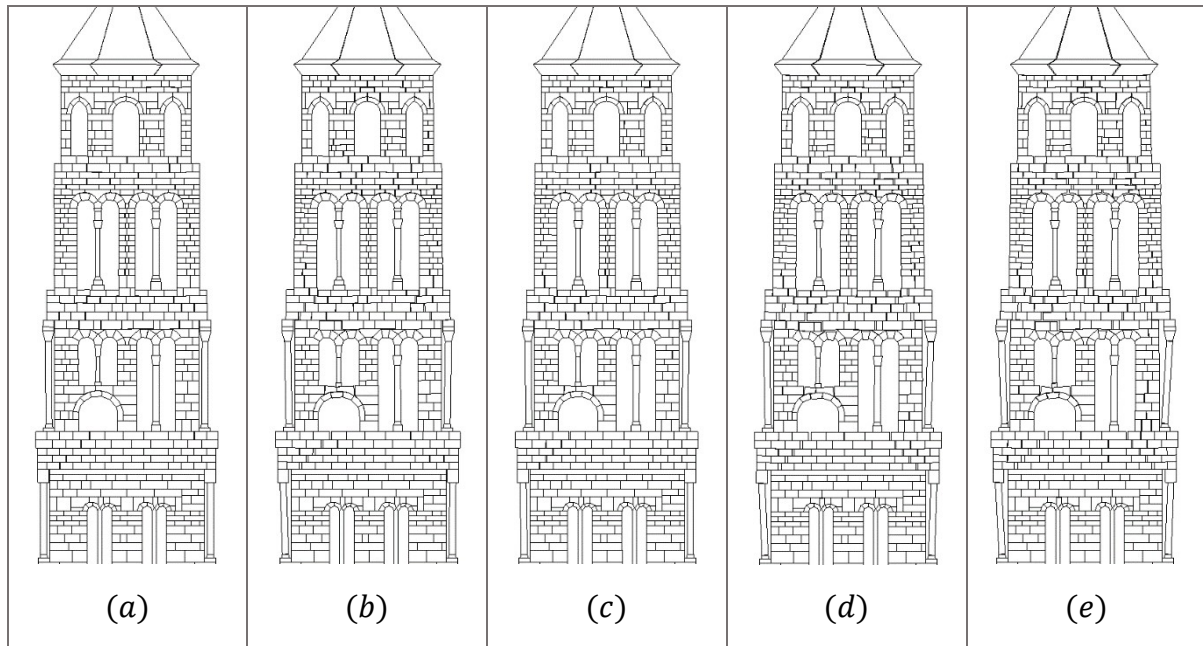
Slika 50. Pomaku u vremenu za Campano Lucano  $a_g = 1.5 m/s^2$

Za ova vršna ubrzanja konstrukcija postiže maksimalni pomak oko 13. sekunde pobude. U trenutcima maksimalnih pomaka nije vidljiva pojava pukotina na konstrukciji. Za vršno ubrzanje  $1.0 m/s^2$  pukotine se pojavljuju u 20. sekundi a za ubrzanje  $1.5 m/s^2$  u 18. sekundi pobude. Iznos maksimalnog pomaka pri vršnom ubrzanju  $1.5 m/s^2$  je više od 2 puta veći u odnosu na pomak pri ubrzanju od  $1.0 m/s^2$  a time su i oštećenja na konstrukciji veća po završetku potresnog djelovanja (slika 51). Konstrukcija ostaje stabilna za vrijednost ubrzanja  $1.0 m/s^2$  dok je moguće urušavanje stupa 4. etaže za vrijednost ubrzanja  $1.5 m/s^2$ .



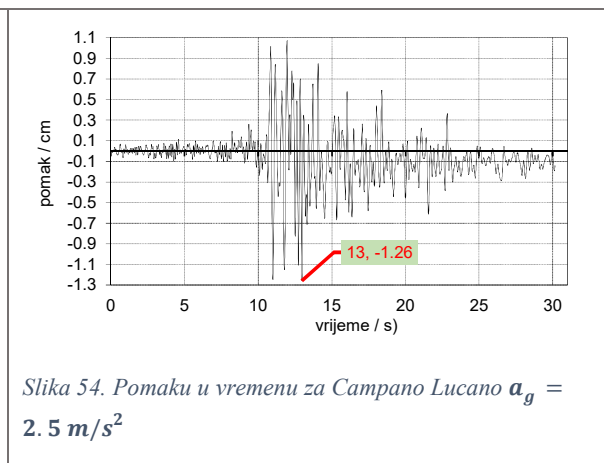
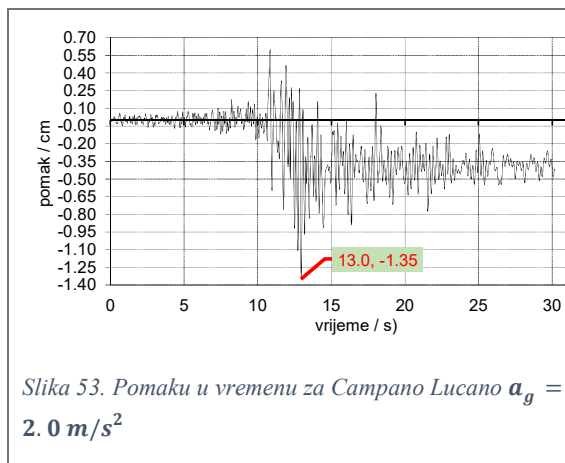
Slika 51/ Prikaz stanja konstrukcije pri završetku pobude za Campano Lucano: a)  $t=41.1 s$ ,  $a_g = 1.0 m/s^2$ ; b)  $t=41.1 s$ ,  $a_g = 1.5 m/s^2$

Detaljniji prikaz nastanka i razvoja pukotina je prikazan na slici 52.



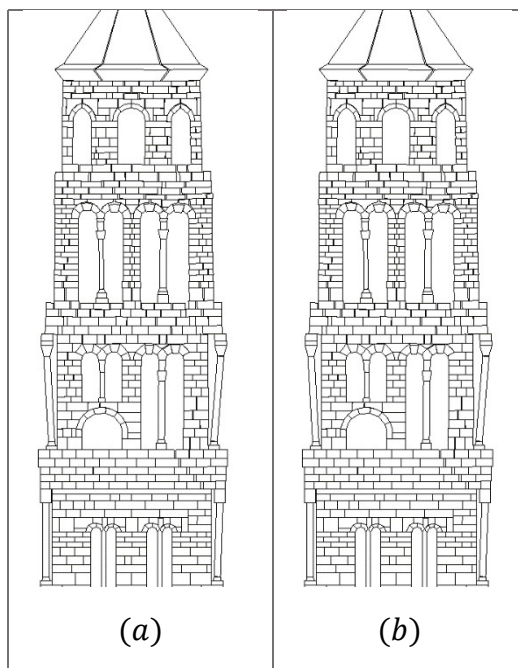
Slika 52. Nastanak i širenje pukotina po vremenskim koracima za Campano Lucano,  $a_g=1.5 \text{ m/s}^2$ : a)  $t=18 \text{ s}$ ; b)  $t=19 \text{ s}$ ; c)  $t=20 \text{ s}$ ; d)  $t=23 \text{ s}$ ; e)  $t=41.1 \text{ s}$

**Rezultati proračuna pri vršnim ubrzanjima  $a_g = 2.0 \text{ m/s}^2$  i  $a_g = 2.5 \text{ m/s}^2$ :**



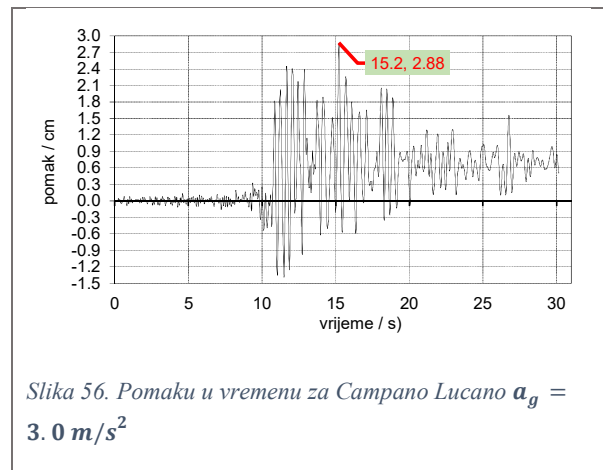
Ako usporedimo slike 49 i 50 sa slikama 53 i 54 možemo primjetiti da su najveće vrijednosti pomaka na slikama 49 i 50 rasprostranjene u znatno manjem vremenskom intervalu nego na slikama 53 i 54, pa time možemo očekivati i znatno veća oštećenja za ovaj slučaj.

Maksimalni pomaci pri ovim vršnim ubrzanjima su postignuti također oko 13. sekunde te su nešto veći od 1 cm, pri čemu konstrukcija ne poprima nikakva oštećenja. Prve pukotine su vidljive oko 15. sekunde. U posljednjem trenutku potresnog djelovanja konstrukcija poprima oštećenja u vidu odlamanja zidnih elemenata i odvajanja stupova kako je prikazano na slici 55. Obzirom na veličinu odvajanja stupa 4. etaže i kamenih blokova na spoju 5. i 6. te 3. i 4. etaže očekivano je da bi došlo do urušavanja.

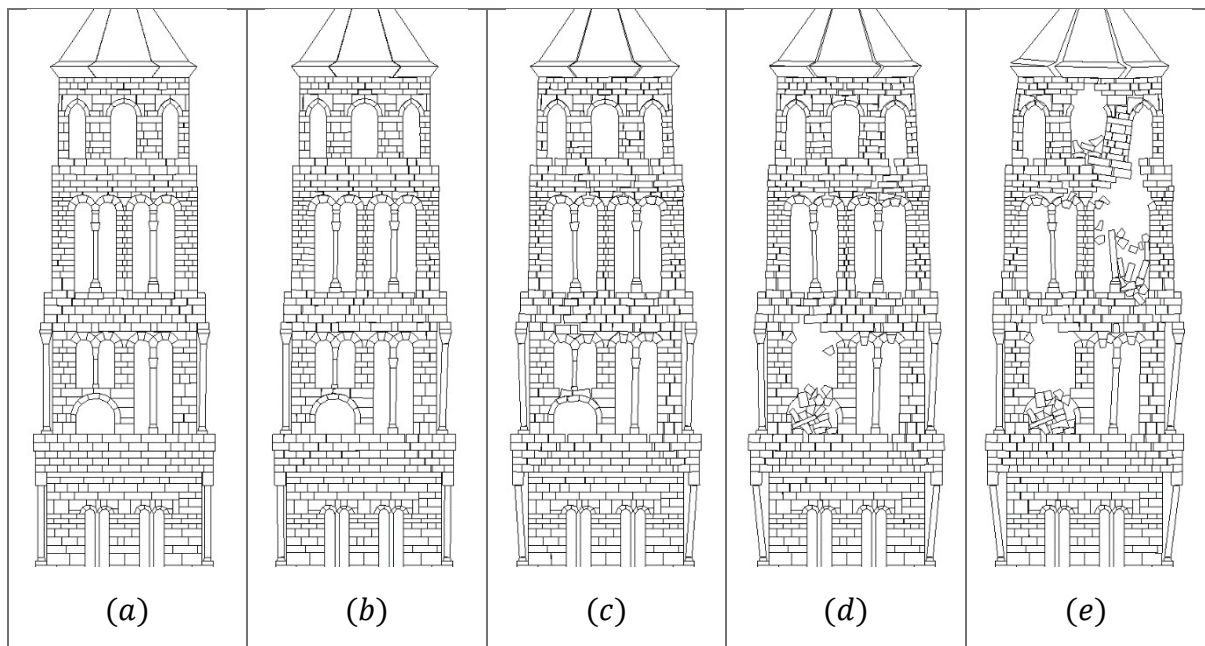


Slika 55/ Prikaz stanja konstrukcije pri završetku pobude za Campano Lucano: a)  $t=41.4\text{ s}$ ,  $a_g = 2.0\text{ m/s}^2$ ; a)  $t=41.4\text{ s}$ ,  $a_g = 2.5\text{ m/s}^2$

Rezultati proračuna pri vršnom ubrzanju  $a_g = 3.0 m/s^2$ :



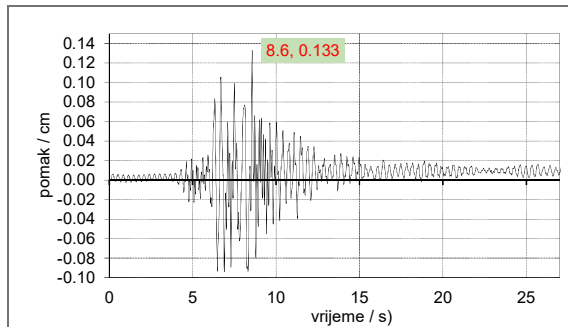
Maksimalni pomak konstrukcije je ostvaren u 15.2-oj sekundi, čija je vrijednost 2.88 cm kako je prikazano na slici 56. U trenutku maksimalnog pomaka konstrukcija poprima pukotine a do kraja pobude se urušava. Proces loma je prikazan na slici 57.



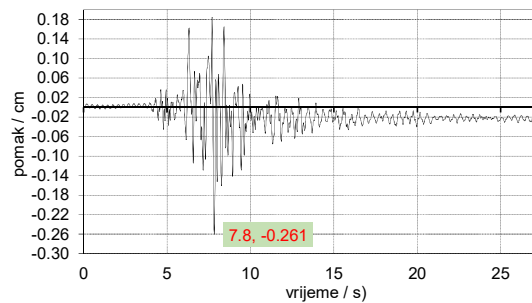
Slika 57/ Nastanak i širenje pukotina po vremenskim koracima za Campano Lucano,  $a_g=3.0 m/s^2$ : a)  $t=16 s$ ; b)  $t=17.5 s$ ; c)  $t=20 s$ ; d)  $t=25 s$ ; e)  $t=41.4 s$

### 5.3 REZULTATI PRORAČUNA ZA POTRES SOUTH ICELAND (ISLAND 2000.)

Rezultati proračuna pri vršnim ubrzanjima  $a_g = 0.22m/s^2$  i  $a_g = 0.5 m/s^2$ :

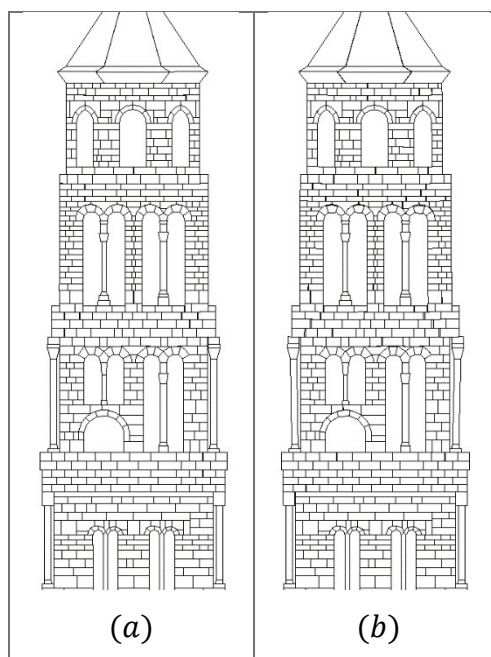


Slika 58. Pomaku u vremenu za South Iceland  $a_g = 0.22 m/s^2$



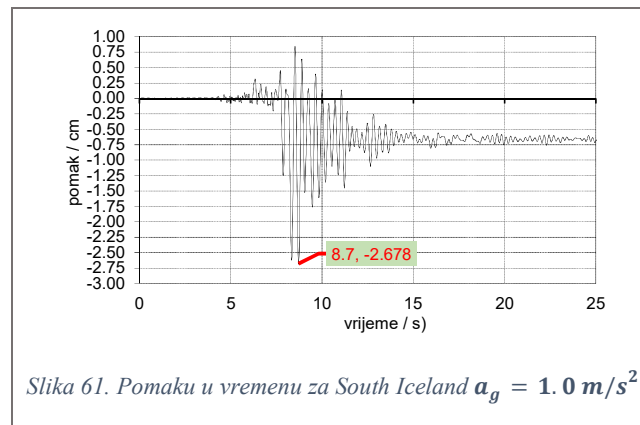
Slika 59. Pomaku u vremenu za South Iceland  $a_g = 0.5 m/s^2$

Vrijednosti maksimalnih pomaka očitanih sa slika 58 i 59 iznose 0.133 i 0.261 cm pri kojima se ne očekuju znatna oštećenja na konstrukciji što je i prikazano na slici 60. Za vrijednost vršnog ubrzanja  $a_g = 0.22m/s^2$  konstrukcija ostaje ne oštećena pri završetku potresnog djelovanja, a za vrijednost  $a_g = 0.5m/s^2$  je vidljiva pojava sitnih pukotina. U oba slučaja konstrukcija ostaje stabilna.

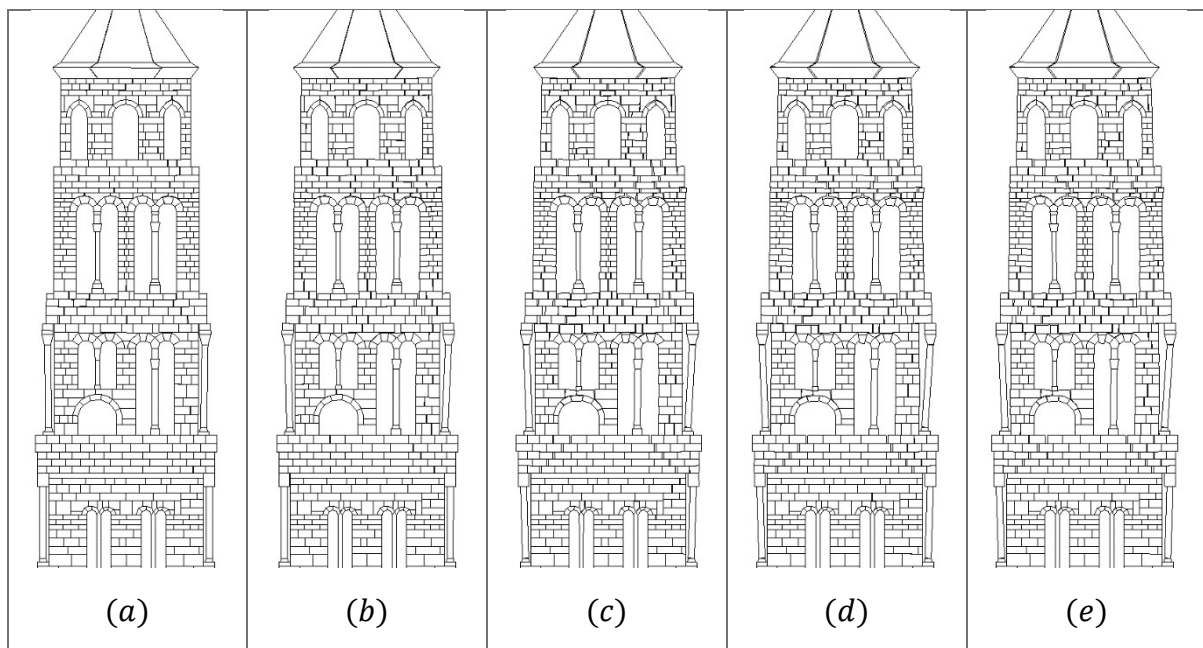


Slika 60/ Prikaz stanja konstrukcije pri završetku pobude za South Iceland: a)  $t=67.95 s$   $a_g = 0.22m/s^2$ ; b)  $t=67.95 s$   $a_g = 0.5m/s^2$

## Rezultati proračuna pri vršnom ubrzanju $a_g = 1.0 m/s^2$

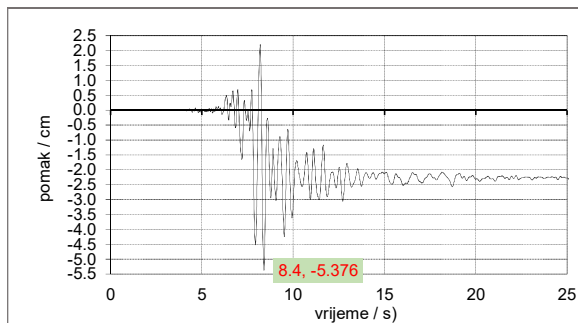


Povećanjem vršnog ubrzanja s vrijednosti  $a_g = 0.5 m/s^2$  na  $a_g = 1.0 m/s^2$  vidljivo je znatno povećanje maksimalnog pomaka konstrukcije, čija vrijednost iznosi 2.678 cm. S obzirom na oštećenja konstrukcije pri ubrzanju  $a_g = 0.5 m/s^2$  može se očekivati gubitak stabilnosti u ovom slučaju. Prve pukotine se pojavljuju oko 12. sekunde pobude a njihov razvoj je prikazan na slici 62. Po završetku pobude konstrukcija poprima oštećenja kao i u prethodnim potresima, u vidu odvajanja stupova i odlamanja zidnih elemenata. Pomak desnog stupa 4. etaže i pomaci zidnih elemenata po 4. i 5. etaži, u posljednjem trenutku pobude, ukazuju na gubitak stabilnosti konstrukcije te je očekivano da će bi se ista urušila.

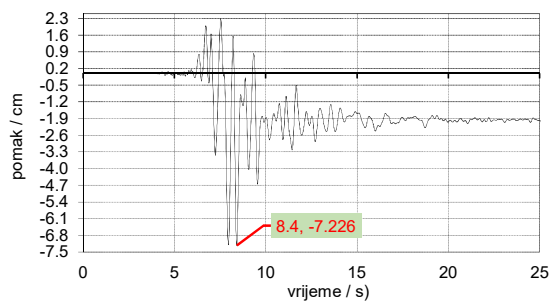


Slika 62/ Nastanak i širenje pukotina po vremenskim koracima za South Iceland  $a_g = 1.0 m/s^2$ : a)  $t = 12.5 s$ ; b)  $t = 14 s$ ; c)  $t = 16 s$ ; d)  $t = 19 s$ ; e)  $t = 67.95 s$

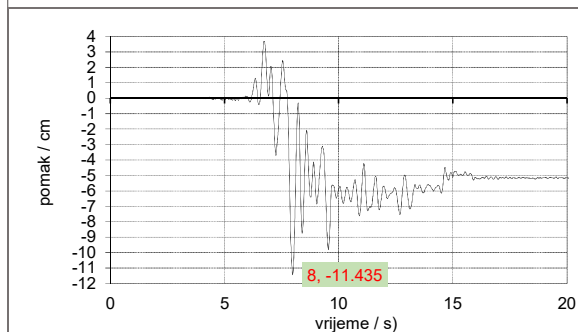
Rezultati proračuna pri vršnim ubrzanjima  $a_g = 1.5 \text{ m/s}^2$ ;  $a_g = 2.0 \text{ m/s}^2$ ;  $a_g = 2.5 \text{ m/s}^2$  i  $a_g = 3.0 \text{ m/s}^2$



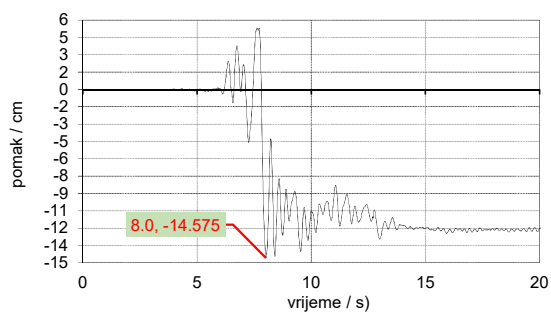
Slika 63. Pomaku u vremenu za South Iceland  $a_g = 1.5 \text{ m/s}^2$



Slika 64. Pomaku u vremenu za South Iceland  $a_g = 2.0 \text{ m/s}^2$



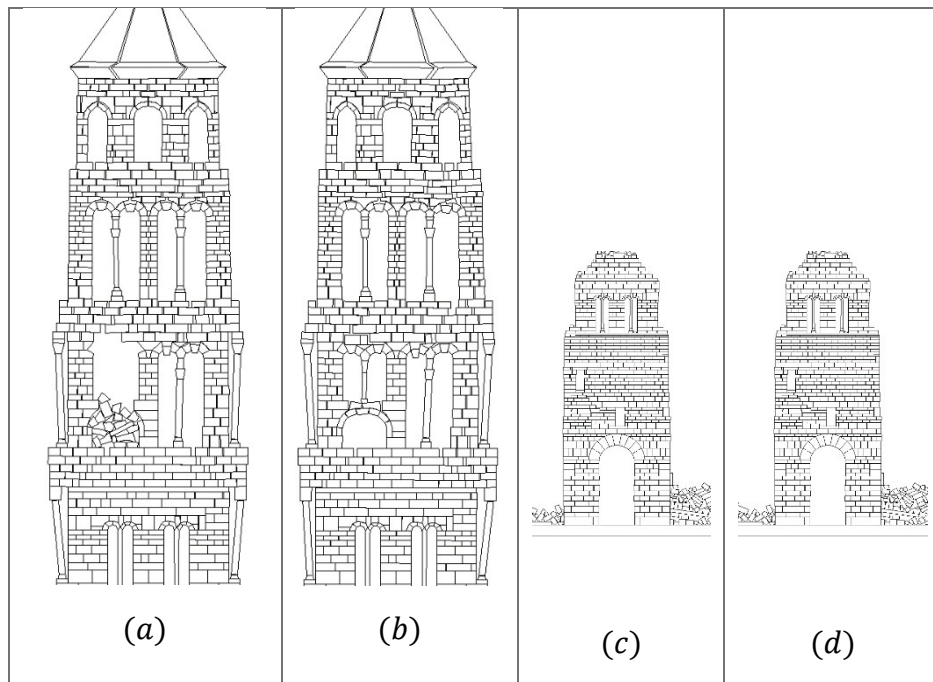
Slika 65. Pomaku u vremenu za South Iceland  $a_g = 2.5 \text{ m/s}^2$



Slika 66. Pomaku u vremenu za South Iceland  $a_g = 3.0 \text{ m/s}^2$

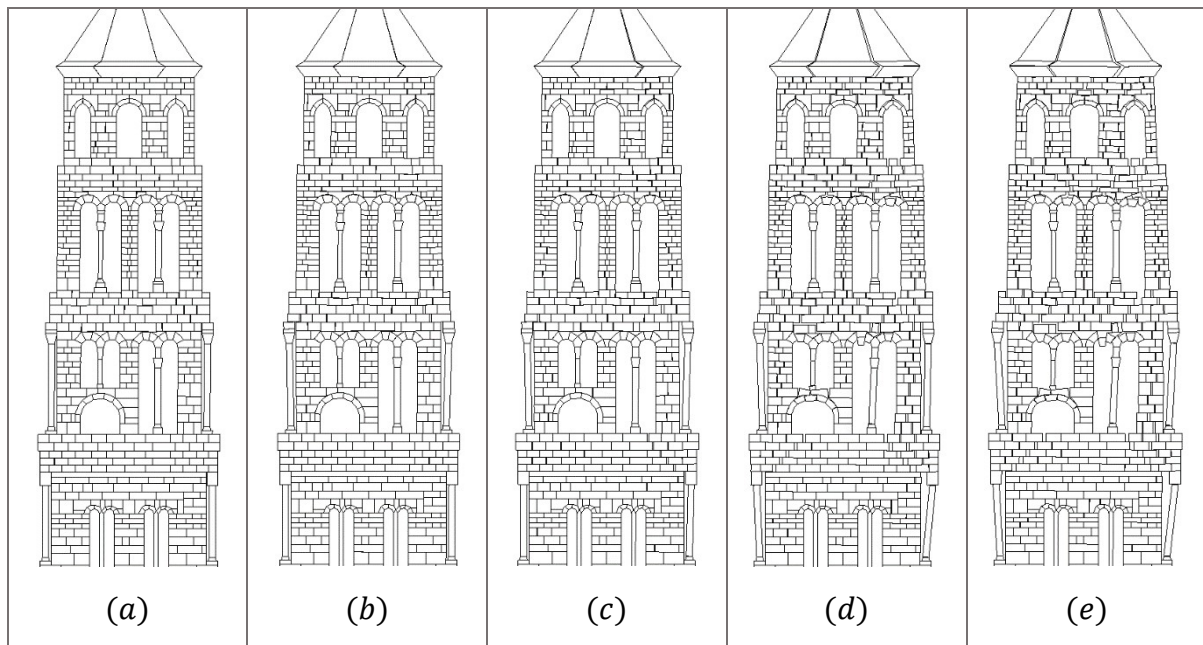
Daljnijm povećanjem vršnog ubrzanja na prikazane vrijednosti raste i vrijednost maksimalnog pomaka konstrukcije a time i oštećenja na konstrukciji. U svim slučajevima konstrukcija gubi stabilnost do kraja pobude a za vrijednosti vršnog ubrzanja  $a_g = 2.5 \text{ m/s}^2$  i  $a_g = 3.0 \text{ m/s}^2$  , do kraja pobude dolazi do potpunog urušavanja svih etaža osim prizemlja.

Na slijedećim slikama su prikazana stanja konstrukcije po završetku pobude za pojedinu vrijednost vršnog ubrzanja ( slika 67).



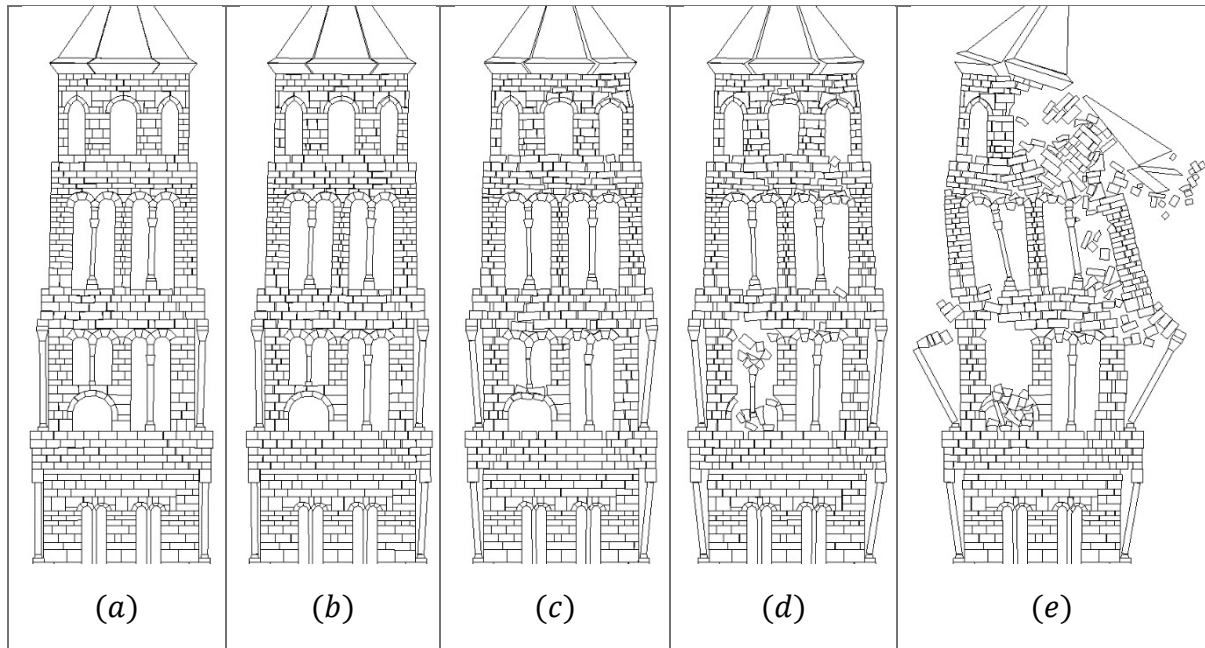
Slika 67. Prikaz stanja konstrukcije pri završetku pobude za South Iceland: a)  $t=67.95$  s,  $a_g = 1.5\text{m/s}^2$ ; b)  $t=67.95$  s,  $a_g = 2.0\text{m/s}^2$ ; c)  $t=59$  s,  $a_g = 2.5\text{m/s}^2$ ; d)  $t=54.25$  s,  $a_g = 3.0\text{m/s}^2$ ;

Nastanak i razvoj pukotina do loma je detaljnije prikazan na slikama 68 i 69.



Slika 68. Nastanak i širenje pukotina po vremenskim koracima za South Iceland  $a_g=2.0\text{ m/s}^2$ : a)  $t=11.75$  s; b)  $t=12$  s; c)  $t=12.5$  s; d)  $t=15$  s; e)  $t=67.95$  s





Slika 69. Nastanak i širenje pukotina po vremenskim koracima za South Iceland  $a_g=3.0 \text{ m/s}^2$ : a)  $t=11.75 \text{ s}$ ; b)  $t=12.5 \text{ s}$ ; c)  $t=13.75 \text{ s}$ ; d)  $t=15 \text{ s}$ ; e)  $t=17.5 \text{ s}$

## 6 ANALIZA REZULTATA PRORAČUNA

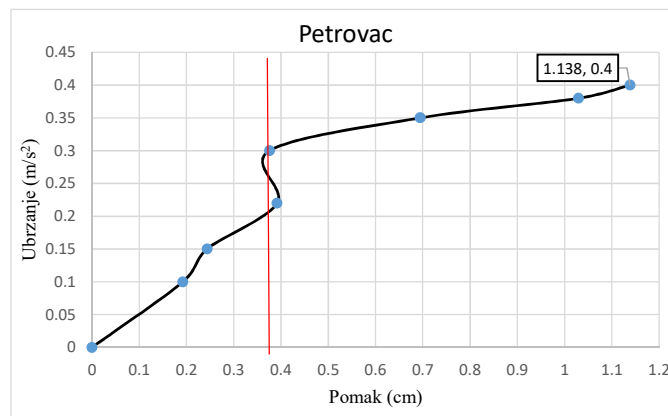
Odabrane su tri vrste potresa pri opterećenju konstrukcije upravo zbog njihove različitosti. Za potres Petrovac najveća ubrzanja pri podrhtavanju tla traju 10ak sekunda a vršno ubrzanje se postiže u 8.1-oj sekundi. Za potres Campano Lucano su maksimalna ubrzanja ostvarena tokom 5 sekunda, a vršno ubrzanje je postignuto u 12.14-oj sekundi. Nešto kraća maksimalna podrhtavanja su ostvarena pri potresu u South Icelandu (nešto manje od 5s) gdje je vršno ubrzanje postignuto u 7.7-oj sekundi.

U nastavku su prikazani dijagrami pomaka konstrukcije s povećanjem vršnog ubrzanja.

Ako promotrimo sliku 70 koja prikazuje dijagram pomaka po ubrzanju za potres Petrovac, možemo ga podijeliti na lijevo i desno područje čija je granica vrijednost ubrzanja  $a_g = 0.3 \text{ m/s}^2$ .

Prirast pomaka pri povećanju ubrzanja je manji u lijevom području te konstrukcija ne gubi stabilnost za ta vršna ubrzanja. Poprima oštećenja za vrijednost  $a_g = 0.22 \text{ m/s}^2$  i  $a_g = 0.3 \text{ m/s}^2$ , dok za prethodne vrijednosti ostaje ne oštećena.

U desnom području je prirast pomaka znatno veći te za vrijednosti vršnog ubrzanja  $a_g = 0.35 \text{ m/s}^2$ ,  $a_g = 0.38 \text{ m/s}^2$  i  $a_g = 0.4 \text{ m/s}^2$  poprima značajnija oštećenja i gubi stabilnost.



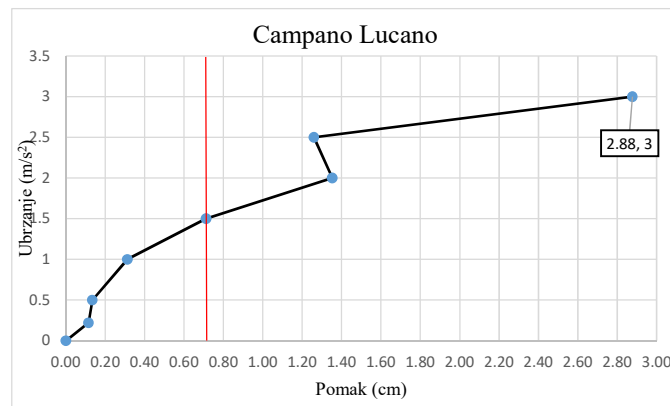
Slika 70. Ubrzanje/pomak za potres Petrovac

Slika 70 prikazuje dijagram pomaka po ubrzanju za potres Campano Lucano.

Granica lijevog i desnog područja je vrijednost vršnog ubrzanja  $a_g = 1.5 \text{ m/s}^2$  za koji konstrukcija poprima značajnija oštećenja te je moguć gubitak stabilnosti iste.

U lijevom području dijagrama konstrukcija ostaje stabilna te poprima oštećenja samo za vršno ubrzanje  $a_g = 1.0 \text{ m/s}^2$ .

Desno područje dijagrama je područje bržeg prirasta maksimalnog pomaka, pri čemu konstrukcija poprima značajna oštećenja za sva vršna ubrzanja te po završetku pobude gubi stabilnost.

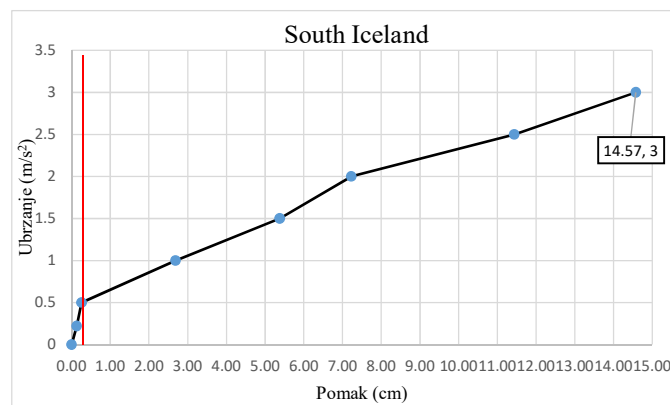


Slika 71. Ubrzanje/pomak za potres Campano Lucano

Pomak po ubrzanju za potres South Iceland je prikazan na slici 71 koji je također podijeljen na lijevo i desno područje.

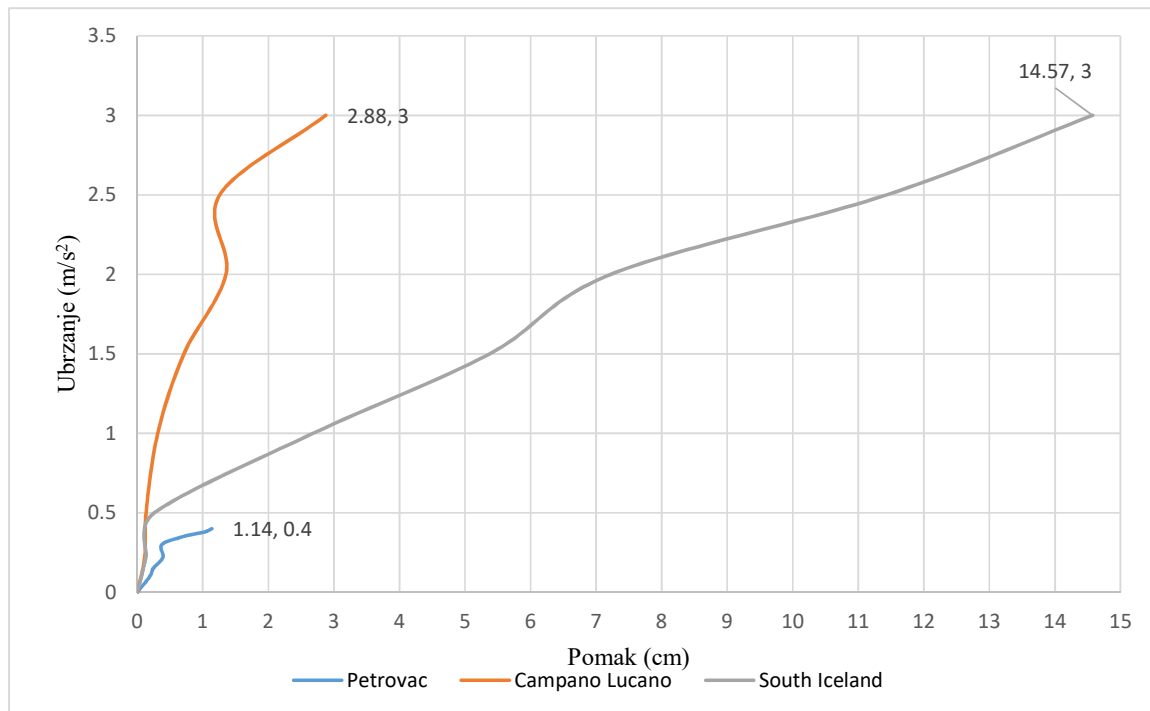
U lijevom području, odnosno za vršna ubrzanja  $a_g = 0.22 \text{ m/s}^2$  i  $a_g = 0.5 \text{ m/s}^2$  konstrukcija ostaje stabilna, a pukotine poprima samo za  $a_g = 0.5 \text{ m/s}^2$ .

Desno područje, odnosno područje većeg prirasta pomaka karakteriziraju značajnija oštećenja na konstrukciji te potpuno urušavanje za  $a_g = 2.5 \text{ m/s}^2$  i  $a_g = 3.0 \text{ m/s}^2$ .



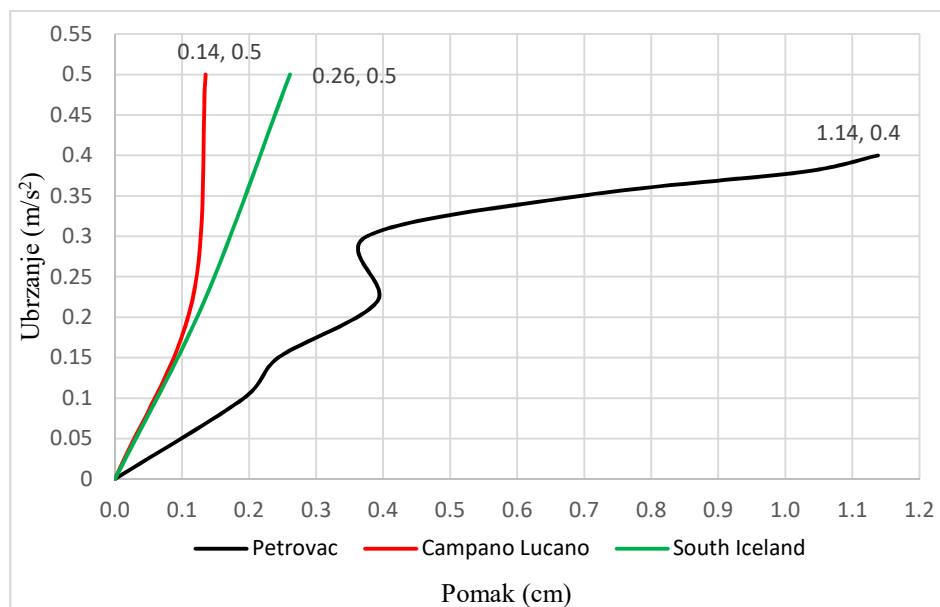
Slika 72. Ubrzanje/pomak za potres South Iceland

### Usporedba pomaka konstrukcije pri povećanju vršnog ubrzanja za sva 3 potresa:



Dijagram 1/ Usporedba odgovora konstrukcije za 3 potresa

Dijagram 28 je reduciran na dijagram 29, zbog lakšeg očitavanja. Dijagram 29 prikazuje krivulje pomaka pri ubrzanju, za maksimalno ubrzanje iznosa  $0.5 m/s^2$ , što omogućuje ljepšu usporedbu pomaka konstrukcije za tri potresa.



Dijagram 2/ Usporedba odgovora konstrukcije do vršnog ubrzanja  $a_g=0.5$

Iz dijagrama 29 je vidljiv znatno veći prirast pomaka i najveći maksimalni pomak za potres Petrovac u odnosu na ostala 2 potresa. Najmanji maksimalni pomak i prirast pomaka je ostvaren pri potresu Campano Lucano.

## 7 ZAKLJUČAK

Provedena je 2D seizmička analiza istočnog pročelja zvonika sv. Dujma u Splitu, primjenom kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata. Primjena navedene metode omogućila je uvid u ponašanje konstrukcije pri seizmičkom opterećenju, odnosno uvid u početak i sam proces loma konstrukcije.

Konstrukcija je opterećena s 3 pobude, pri čemu je svaka skalirana na različite vrijednosti vršnog ubrzanja, pa je za svaku pobudu izvršena analiza za 7 vrijednosti vršnog ubrzanja.

Rezultati su prikazani u obliku pomaka konstrukcije za odgovarajuća ubrzanja, te je izvršena analiza i usporedba rezultata za navedena opterećenja.

Konstrukcija bolje podnosi potrese Campano Lucano i South Iceland od potresa Petrovac. Maksimalno vršno ubrzanje koje je uzeto u obzir pri analizi ponašanja konstrukcije za potres Petrovac iznosi  $0.4 \text{ m/s}^2$  dok za ostala 2 potresa iznosi  $3.0 \text{ m/s}^2$ .

Za vrijednost vršnog ubrzanja  $a_g = 0.4 \text{ m/s}^2$ , pomak konstrukcije pri potresu Petrovac iznosi  $1.14 \text{ cm}$ , za potres Campano Lucano  $0.13 \text{ cm}$  i za potres South Iceland  $0.22 \text{ cm}$ . Dakle pomak konstrukcije pri vršnom ubrzanju  $a_g = 0.4 \text{ m/s}^2$ , za potres Petrovac je 88.6% veći od pomaka pri potresu Campano Lucano i 80.7% od pomaka pri potresu South Iceland. Također valja napomenuti da za vrijednost vršnog ubrzanja grada Splita u povratnom periodu od 475 godina,  $a_g = 0.22 \text{ m/s}^2$ , konstrukcija poprima oštećenja samo za potres Petrovac.

Uspoređujući odgovor konstrukcije pri potresu Campano Lucano i South Iceland, konstrukcija postiže veći pomak te brži prirast pomaka za potres South Iceland, odnosno konstrukcija bolje podnosi potres Campano Lucano.

Maksimalne vrijednosti vršnog ubrzanja pri potresu Campano Lucano su postignute nakon 10. sekunde pobude a trajanje istih je 5 sekunda.

Kod potresa South Iceland trajanje najvećih vrijednosti ubrzanja pobude je slično potresu Campano Lucano ali razlikuju se po trenutku u kojem se ta ubrzanja javljaju. Najveća ubrzanja za potres South Iceland se javljaju 5 sekunda prije.

Za potres Petrovac, pri kojem je odgovor konstrukcije najnepovoljniji, trajanje maksimalnih vrijednosti ubrzanja je najdulje te iznosi 10 sekunda, čiji je početak oko 5. sekunde pobude.

Uzimajući u obzir navedeno, da se zaključiti da konstrukcija analiziranog zvonika lakše održava stabilnost za pobude čija se maksimalna ubrzanja postižu s većom vremenskom odgodom i čije je trajanje kratkotrajnije.

## 8 LITERATURA

- [1] dr.sc. Antonio Munjiza; The combined finite-discrete element method; Jhon Wiley & Sons Ltd; The atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex PO19 8SQ, England 2004
- [2] dr.sc. Hrvoje Smoljanović; Doktorski rad; Seizmička analiza zidanih konstrukcija metodom konačno-diskretnih elemenata; Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije; Split 2013
- [3] Mladen Meštrović; Diplomski rad; Metoda konačnih elemenata; Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet; Zagreb 2020.
- [4] Antonio Šafranko; Diplomski rad; Nelinearni proračun AB prostornog okvira na potres prema EC8; Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije; Split 2012
- [5] Prof.dr.sc. Željana Nikolić; Predavanja iz kolegija, Dinamika konstrukcija i potresno inženjerstvo; Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije;
- [6] dr.sc. Antonio Munjiza; predavanja iz kolegija Osnove simulacijskog inženjerstva; Sveučilište u Spltu; Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije
- [7] [https://en.wikipedia.org/wiki/Penalty\\_method](https://en.wikipedia.org/wiki/Penalty_method)
- [8] dr.sc. Ivana Uzelac; Doktorski rad; metoda konačno-diskretnih elemenata za statičku i dinamičku analizu tankih lukova i ljuski; Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije; Split 2015
- [9] [https://bs.wikipedia.org/wiki/Mehanika\\_kontinuum](https://bs.wikipedia.org/wiki/Mehanika_kontinuum)
- [10] <https://www.hrvatskarijec.rs/vijest/A14043/Bracki-mramor/>
- [11] Alois Hauser; Arhitektonski snimak postojećeg stanja s kraja 19. stoljeća u MJ 1:40