

# Analiza nosača izrađenog od različitih materijala bez i s uključenjem materijalne nelinearnosti

---

**Kordić, Marin**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:*

**University of Split, Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy / Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:123:306383>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-26**



*Repository / Repozitorij:*

[FCEAG Repository - Repository of the Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy, University of Split](#)



UNIVERSITY OF SPLIT



**SVEUČILIŠTE U SPLITU**  
**FAKULTET GRAĐEVINARSTVA, ARHITEKTURE I**  
**GEODEZIJE**

**ZAVRŠNI RAD**

**Marin Kordić**

**Split, 2023./24.**

**SVEUČILIŠTE U SPLITU**  
**FAKULTET GRAĐEVINARSTVA, ARHITEKTURE I**  
**GEODEZIJE**

**ANALIZA NOSAČA IZRAĐENOG OD**  
**RAZLIČITIH MATERIJALA BEZ I S**  
**UKLJUČENJEM MATERIJALNE**  
**NELINEARNOSTI**

**Završni rad**

**Split, 2023./24.**



STUDIJ: **SVEUČILIŠNI PRIJEDIPLOMSKI STUDIJ GRAĐEVINARSTVO**

KANDIDAT: Marin Kordić

MATIČNI BROJ (JMBAG): 0083228929

KATEDRA: Katedra za otpornost materijala i ispitivanje konstrukcija

KOLEGIJ: Otpornost materijala 2

## ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Tema: Analiza nosača izrađenog od različitih materijala bez i s uključenjem materijalne nelinearnosti

Opis zadatka: Potrebno je analizirati naprezanja i deformacije nosača izrađenog od dva različita materijala. U prvom dijelu rada je potrebno definirati sve parametre potrebne za analitički proračun te pokazati matematičku formulaciju svih karakterističnih izraza. U drugom dijelu rada ilustrirati pokazani proračun na primjeru armirano betonskog nosača i to provesti analitički proračun i numerički, računalnim programom. U numeričkom proračunu je potrebno provesti analizu bez i s uključenjem materijalne nelinearnosti. Nakon provedenih analiza usporediti dobivene rezultate analitičkog i numeričkog proračuna te definirati zaključke.

U Splitu, 20.03. 2024.g.

Mentor: Prof.dr.sc. Mirela Galić

Komentor: Dr.sc. Gabrijela Grozdanić

*Mirela Galić*  
*G. Grozdanić*

**Sažetak:** U ovom radu pokazana je analiza nosača sastavljenog od dva različita materijala. U prvom dijelu rada definirani su i pokazani svi ključni parametri potrebni za analizu i uključanje doprinosa obje vrste materijala. Primjena je pokazana na armiranobetonskom nosaču izloženom ravnom savijanju koji je analiziran analitički i numerički računalnim programom SCIA Engineer. U dijelu analitičkog proračuna uključeno je samo linearno-elastično ponašanje materijala i primijenjena je redukcija modula elastičnosti u poprečnom presjeku kojom je definiran doprinos svakog materijala. Numerički proračun je proveden računalnim programom SCIA Engineer diskretizirajući nosač jednodimenzionalnim konačnim elementima sa zadanim poprečnim armiranobetonskom presjekom. U ovoj analizi uključena je i materijalna nelinearnost te su na temelju provedenih analiza izneseni zaključci.

**Ključne riječi:** armiranobetonski nosač, savijanje, analiza deformacije, analitička i numerička metoda, teorija elastičnosti, SCIA Engineer

## **Analysis of a beam made from different materials with and without the inclusion of material nonlinearity**

**Abstract:** In this work, we analyse the behaviour of reinforced concrete beam consisting of two different materials. In the first part, all relevant parameters crucial for the analysis and implementation of both materials are introduced. The application is demonstrated by using a reinforced concrete beam subjected to bending, which is further analysed analytically and numerically in SCIA Engineer software. In the analytical analysis, the element is considered linear-elastic, with a reduced Young's modulus applied to consider the contribution of each material. The numerical analysis is performed in SCIA Engineer using discretization with one-dimensional finite elements and a defined cross-section. Material nonlinearity is incorporated in the numerical analysis, and based on the results, conclusions are drawn.

## Sadržaj

1. UVOD .....	3
2. NOSAČI SASTAVLJENI OD RAZLIČITIH MATERIJALA .....	4
2.1. Analiza deformacija prema teoriji elastičnosti .....	5
2.2 Analiza deformacija metodom graničnih stanja nosivosti .....	8
3. PRORAČUN ARMIRANOBETONSKOG NOSAČA.....	12
3.1 Analitički proračun metodom reduciranih presjeka .....	12
3.2 Dimenzioniranje poprečnog presjeka nosača .....	15
3.3 Numerički postupak (SCIA Engineer).....	17
3.4 Usporedba i analiza rezultata analitičkog i numeričkog postupka .....	24
4. ZAKLJUČAK .....	25
5. LITERATURA .....	26

## 1. UVOD

U analizi nosača izloženog savijanju izrađenog od različitih materijala koristit će se kao primjer armiranobetonska greda, pravokutnog poprečnog presjeka. Greda koja je opterećena momentom savijanja, analizirat će se analitičkom i numeričkom metodom.

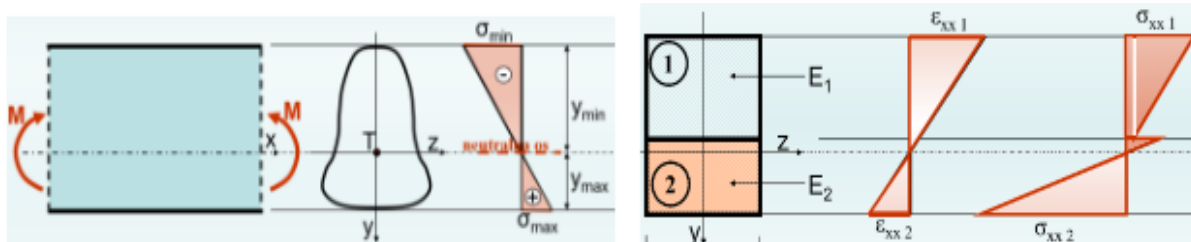
Na samom početku rada spomenut će se nosač sastavljen od različitih materijala, drugim riječima kompozitni nosač. Uz općenite pojedinosti o njima, opisat će se proces dimenzioniranja presjeka uz korištenje teorije elastičnosti i metode graničnih stanja.

Analiza nosača provedena je analitičkim i numeričkim postupkom. Analitički izračun temelji se na dimenzioniranju prema teoriji elastičnosti, dok je numerička analiza provedena računalnim programom SCIA Engineer.

Na kraju je pokazana usporedba dobivenih rezultata i formuliran zaključak.

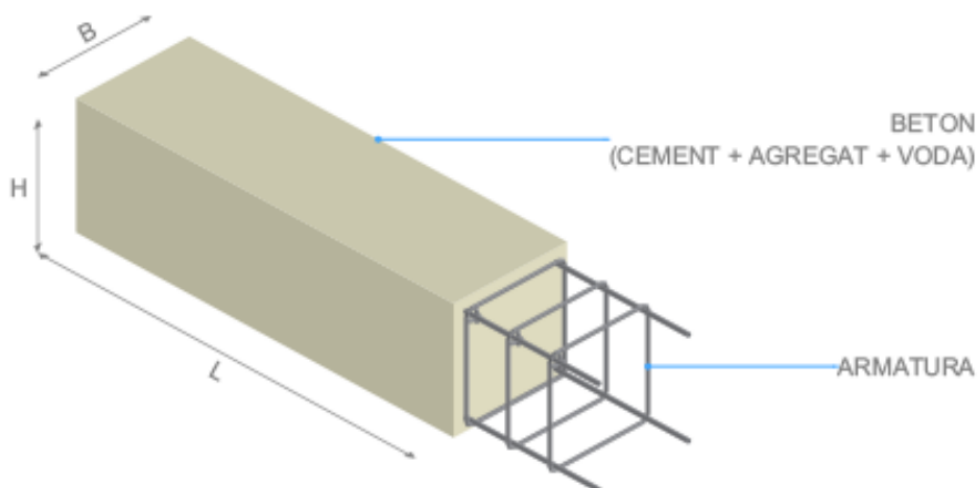
## 2. NOSAČI SASTAVLJENI OD RAZLIČITIH MATERIJALA

Nosači izrađeni od najmanje dva različita materijala nazivaju se kompozitnim nosačima. Jedan od najpoznatijih primjera takvog nosača je armiranobetonski nosač, sastavljen od betona, koji preuzima tlačna naprezanja, i čelika, koji preuzima vlačna naprezanja.



slika 1. shematski prikaz homogenog i kompozitnog poprečnog presjeka nosača [3]

Kompozitni presjeci, neovisno o svom sastavu ili strukturi, izrađuju se da bi se poboljšala i unaprijedila već poznata svojstva materijala. Tako i u ovom slučaju, armiranobetonska greda ima veću trajnost, relativno male troškove održavanja, mogućnost izrade najraznovrsnijih oblika te nije zapaljiva jer beton, koji je otporniji na djelovanje požara, štiti čelik od visokih temperatura.

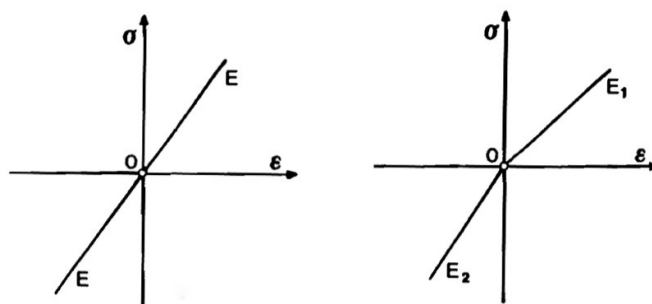


slika 2. armiranobetonska greda [6]



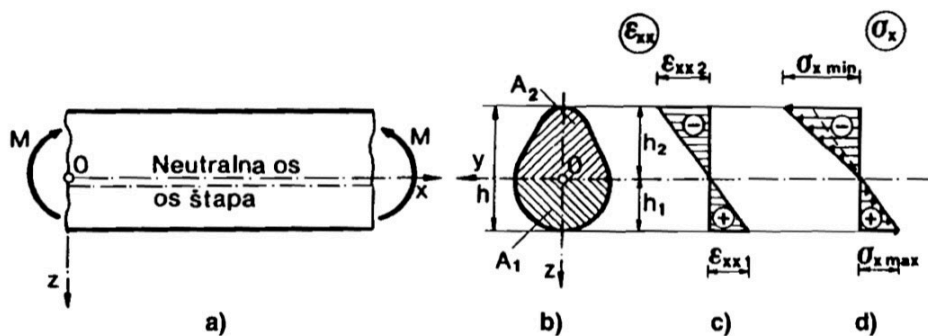
## 2.1. Analiza deformacija prema teoriji elastičnosti

Nosači izrađeni od dva različita materijala, koji se ponašaju prema Hookeovu zakonu, imaju različite module elastičnosti na rastezanje i pritisak. Pripadajući dijagram naprežanja i deformacija tada se sastoji od dva pravca, što je i prikazano na slici 3.



slika 3. ponašanje materijala s različitim modulima elastičnosti [1]

Prilikom čistog savijanja ravnog kompozitnog nosača pravokutnog poprečnog presjeka, moment savijanja djeluje u ravnini simetrije xz poprečnog presjeka koja je ujedno i ravnina savijanja nosača. Os y predstavlja neutralnu os poprečnog presjeka.



slika 4. čisto ravno savijanje štapa sa pripadajućom deformacijom i naprežanjem [1]

Iz uvjeta simetrije slijedi da pri čistom savijanju vrijedi hipoteza ravnih poprečnih presjeka, odnosno da pravokutni poprečni presjeci pri deformaciji štapa ostaju ravni i okomiti na os sustava.

Shodno tomu, deformacije  $\epsilon_{xx}$  uzdužnih vlakana razmjerne su njihovoj udaljenosti od neutralnog položaja i dane su izrazom:

$$\epsilon_{xx} = \frac{z}{\rho} \quad (1)$$

gdje  $z$  predstavlja udaljenost od neutralne osi, a  $\rho$  predstavlja polumjer zakrivljenosti.

Hookeovim zakonom stvorena je veza između naprezanja i deformacija u poprečnom presjeku koja glasi:

$$\sigma_x = E_1 \varepsilon_{xx} \quad \text{za} \quad \varepsilon_{xx} > 0 \quad (2)$$

$$\sigma_x = E_2 \varepsilon_{xx} \quad \text{za} \quad \varepsilon_{xx} < 0$$

Uvrštavanjem izraza (1) u izraz (2), dobiven je novi oblik jednadžbe:

$$\sigma_x = \frac{E_1}{\rho} z \quad \text{za} \quad \sigma_x > 0 \quad (3)$$

$$\sigma_x = \frac{E_2}{\rho} z \quad \text{za} \quad \sigma_x < 0$$

Vidljivo je da se normalna naprezanja po visini tlačne i vlačne zone pravokutnog poprečnog presjeka mijenjaju po linearnom zakonu.

Dijagram pripadnih deformacija i normalnih naprezanja prikazan je na slici 4.

Dvije jednadžbe ravnoteže postavljene za navedeni poprečni presjek glase:

$$\sum F_x = 0; \quad \int_A \sigma_x dA = \int_{A_1} \sigma_{x1} dA + \int_{A_2} \sigma_{x2} dA = 00 \quad (4)$$

$$\sum M_y = 0; \quad \int_A \sigma_x z dA = \int_{A_1} \sigma_{x1} z dA + \int_{A_2} \sigma_{x2} z dA = M \quad (5)$$

gdje A označava površinu cjelokupnog poprečnog presjeka, A<sub>1</sub> površinu vlačne zone, a A<sub>2</sub> površinu tlačne zone presjeka.

Ostale četiri jednadžbe ravnoteže su automatski zadovoljene.

Ako se u prvu jednadžbu ravnoteže (4) uvrsti izraz (3), izvedena jednadžba određuje položaj neutralne osi:

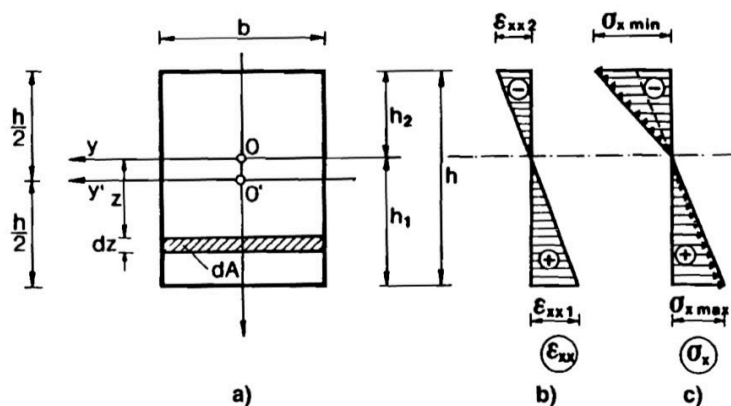
$$E_1 \int_{A_1} z dA + E_2 \int_{A_2} z dA = 0 \quad (6)$$

Isto tako, uvrštavanjem izraza (3) u drugu jednadžbu ravnoteže (5), dobiveno je:

$$M = \frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} z^2 dA + \frac{E_2}{\rho} \int_{A_2} z^2 dA \quad (7)$$

odnosno:

$$M = \frac{1}{\rho} \left( E_1 \int_{A_1} z^2 dA + E_2 \int_{A_2} z^2 dA \right) \quad (8)$$



slika 5. dijagrami deformacija i naprezanja pravokutnog poprečnog presjeka [1]

Iz slike 5. slijedi:

$$dA = b dz$$

pa jednačba neutralne osi (6) poprima oblik:

$$E_1 \int_0^{h_1} b z dz + E_2 \int_{-h_2}^0 b z dz = 0 \quad (9)$$

Iz toga se da zaključiti:

$$E_1 h_1^2 = E_2 h_2^2 \quad (10)$$

Rješavanjem jednačbe (10), imajući na umu da je  $h_1 + h_2 = h$ , izračunati su izrazi za  $h_1$  i  $h_2$ :

$$h_1 = \frac{h\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}} \quad (11)$$

$$h_2 = \frac{h\sqrt{E_1}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}}$$

koji određuju položaj neutralne osi.

Ako se u jednačbu (8) uvrsti izraz  $dA = b dz$ , ona onda glasi:

$$M = \frac{b}{3\rho} (E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3) \quad (12)$$

Daljnijim uvrštavanjem izraza (11) u jednačbu (12), nakon sređivanja ona izgleda:

$$M = \frac{bh^3}{3\rho} \cdot \frac{E_1 E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2} = \frac{bh^3}{12\rho} \cdot \frac{4E_1 E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2} \quad (13)$$

Budući da je moment tromosti poprečnog presjeka  $I_y = \frac{bh^3}{12}$ , jednačba (13) poprima oblik:

$$M = \frac{I_y}{\rho} \cdot \frac{4E_1 E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2} \quad (14)$$

ili:

$$M = \frac{I_y \cdot E_{red}}{\rho} \quad (15)$$

pri čemu je:

$$E_{red} = \frac{4E_1E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2} \quad (16)$$

reducirani modul elastičnosti, čija se vrijednost uvijek nalazi između dvaju modula  $E_1$  i  $E_2$ .

Preko izraza (15) dobiven je novi izraz za zakrivljenost presjeka glasi:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{I_y \cdot E_{red}} \quad (17)$$

Izraz za normalno naprezanje u bilo kojoj točki poprečnog presjeka može se dobiti uvrštavanjem izraza (17) u izraz (3):

$$\sigma_x = \frac{E_1}{E_{red}} \cdot \frac{M}{I_y} z \quad \text{za} \quad \sigma_x > 0 \quad (18)$$

$$\sigma_x = \frac{E_2}{E_{red}} \cdot \frac{M}{I_y} z \quad \text{za} \quad \sigma_x < 0$$

Ekstremne vrijednosti normalna naprezanja poprimaju u krajnjim vlakancima, koja su najudaljenija od neutralne osi:

$$\sigma_{x,max} = \frac{E_1}{E_{red}} \cdot \frac{M}{I_y} \cdot h_1 \quad (19)$$

$$\sigma_{x,min} = \frac{E_2}{E_{red}} \cdot \frac{M}{I_y} \cdot h_2$$

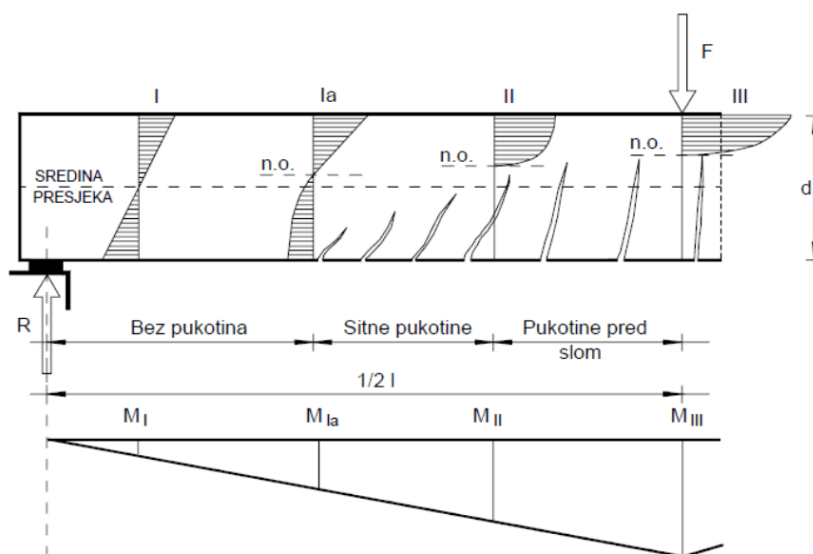
## 2.2 Analiza deformacija metodom graničnih stanja nosivosti

U ovom će se poglavlju metoda graničnog stanja nosivosti ispitivati na armiranobetonskoj gredi pravokutnog poprečnog presjeka. Svaka armiranobetonska greda ima utvrđenu nosivost koja je definirana kao najveće moguće opterećenje koju greda može sama preuzeti. Nosivost našeg elementa je zadovoljena ako se ustvrdi da je računaska vrijednost maksimalnog vanjskog opterećenja manja ili jednaka od računске otpornosti odnosno nosivosti elementa:

$$E_d \leq R_d \quad (20)$$

Izraz (20) je primjenjiv za sve vrste reznih sila koje mogu stvoriti vanjsko opterećenje na gredu. Shodno tome, moguće ga je raspisati i na sljedeće načine:

$$\begin{aligned} M_{Ed} &\leq M_{Rd} \\ V_{Ed} &\leq V_{Rd} \\ N_{Ed} &\leq N_{Rd} \\ T_{Ed} &\leq T_{Rd} \end{aligned} \quad (21)$$



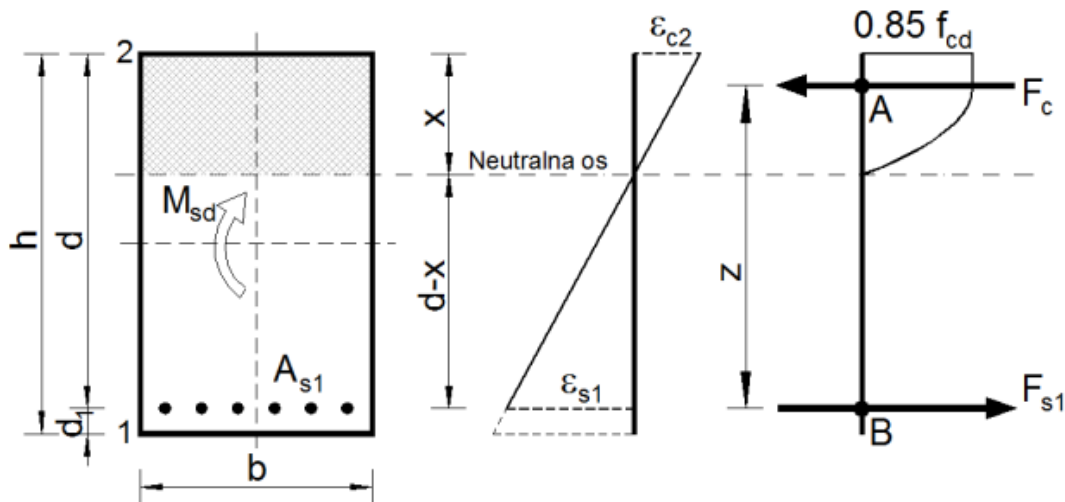
**slika 6. osnovna stanja naprezanja u armiranobetonskog gredi pod opterećenjem [2]**

Iz slike 6. izdvojiti će se i opisati nekoliko osnovnih stanja naprezanja armiranobetonske grede prije sloma, koja je opterećena tlačnom vanjskom silom F.

Iz stanja I iščitava se da je raspodjela naprezanja linearna što govori da su tlačna i vlačna naprezanja mala. U pod stanju Ia primjećuje se da je vlačna čvrstoća betona pred popuštanjem što sugerira raspodjelu vlačnih naprezanja koja je zaobljena po nekakvoj krivulji, dok tlačna naprezanja po raspodjeli ostaju linearna. Stanje II okarakterizirano je pukotinama u vlačnoj zoni što znači da se ona isključuju iz nosivosti, pri čemu u tlačnoj zoni naprezanja više nisu linearna nego poprimaju oblik krivulje. Konačno, iz stanja III vidljivo je povećavanje pukotina u vlačnoj zoni, pored toga neutralna os se pomiče prema gore smanjujući tlačni pojas koji i dalje ima oblik krivulje.

Armiranobetonska greda, pravokutnog poprečnog presjeka, opterećena je na savijanje. Prema tome, opisać će se slučaj prilikom dimenzioniranja takvog elementa:

- **Jednostruko armirani pravokutni poprečni presjek**



*slika 7. jednostruko armirani pravokutni poprečni presjek [2]*

Dimenzioniranje se vrši preko uvjeta ravnoteže koji za slučaj savijanja glasi:

$$M_{Ed} = M_{Rd}$$

$M_{Ed}$  - računski moment savijanja

$M_{Rd}$  - računski moment nosivosti presjeka

Rješavanju problema pristupat će se računajući sumu momenata u točkama A i B, te izjednačavajući sumu horizontalnih sila u presjeku.

$$\sum M_A = \sum M_B = 0 \quad M_{Ed} = F_c \cdot z = F_{s1} \cdot z \quad (22)$$

$$\sum H = 0 \quad F_c = F_{s1}$$

$F_c$  – sila od betona

$F_{s1}$  – sila od armature

$$z = \zeta \cdot d \quad \text{– krak unutrašnjih sila} \quad (23)$$

Slijedeći korak je računanje položaja neutralne osi:

$$\frac{x}{\varepsilon_{c2}} = \frac{d}{\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{s1}}$$

odakle izlučujemo pravilnim izlučivanjem dobijemo izraz:

$$x = \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{s1}} \cdot d = \xi \cdot d \quad (24)$$

$x$  – udaljenost neutralne osi od tlačnog ruba

$\varepsilon_{c2}$ ,  $\varepsilon_{s1}$  - deformacije betona na tlačnom rubu i armature u težištu vlačnih šipki

$\xi$  - koeficijent položaja neutralne osi

Formule za sile u betonu i armaturi glase:

$$F_{s1} = A_{s1} \cdot f_{yd} \quad (25)$$

$$F_c = \alpha \cdot \alpha_v \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} = 0.85 \cdot \alpha_v \cdot \xi \cdot d \cdot b \cdot f_{cd} \quad (26)$$

$A_{s1}$  - površina vlačne armature

$f_{yd}$  - proračunska granica popuštanja armature

$f_{cd}$  - računski čvrstoća betona

$b$  - širina poprečnog presjeka

$\alpha$  - za pravokutne presjeka = 0.85

Uvrštavajući izraze (23) i (26) u jednadžbu (22), nova formula za računski moment nosivosti presjeka izgleda ovako:

$$M_{Ed} = 0.85 \cdot \alpha_v \cdot \xi \cdot d \cdot b \cdot f_{cd} \cdot \zeta \cdot d \quad (27)$$

Bezdimenzionalna vrijednost momenta savijanja prije i nakon uvrštavanja izraza (27) glasi:

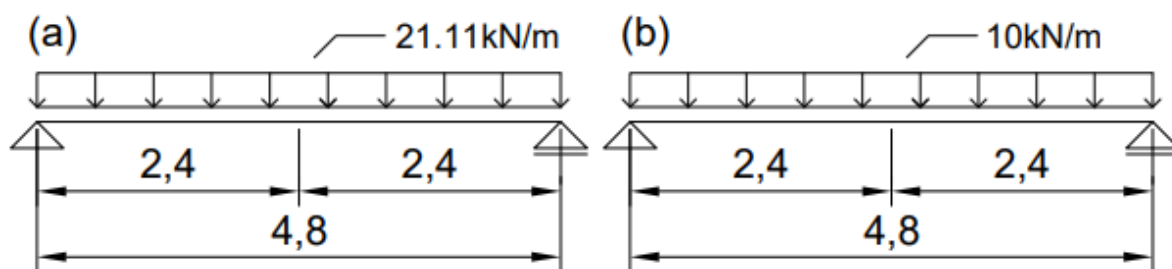
$$\mu_{Ed} = 0.85 \cdot \alpha_v \cdot \xi \cdot \zeta = \frac{M_{Ed}}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} \quad (28)$$

Naposljetku, jednadžba za potrebnu površinu vlačne armature ( $A_{s1}$ ) se izlučuje iz izraza (22) u koji su prethodno uvrštene jednadžbe (23) i (24):

$$M_{Ed} = F_{s1} \cdot z = A_{s1} \cdot f_{yd} \cdot \zeta \cdot d$$
$$A_{s1} = \frac{M_{Ed}}{\zeta \cdot d \cdot f_{yd}} \quad (29)$$

### 3. PRORAČUN ARMIRANOBETONSKOG NOSAČA

#### 3.1 Analitički proračun metodom reduciranih presjeka



slika 8. uzdužni presjek armiranobetonskog nosača sa opterećenjem: (a)  $q_1=21.11\text{kN/m}$  i (b)  $q_2=10\text{kNm}$  [5]

#### - Ulazni podaci

Tablica 1. ulazni podaci za proračun preko metode reduciranih presjeka

$q_1 = 21.11 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$	$q_2 = 10 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$	raspodijeljeno opterećenje
$L = 4.8\text{m}$		raspon nosača
$E_B = 35000\text{MPa} = 3500 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$		modul elastičnosti betona
$E_{\check{c}} = 210000\text{MPa} = 21000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$		modul elastičnosti čelika
$h = 45\text{cm}$		visina poprečnog presjeka
$b = 25\text{cm}$		širina poprečnog presjeka

#### - Ležajne reakcije

$$\text{za } q_1 = 21.11 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad F_{A1} = F_{B1} = \frac{q_1 \cdot l}{2} = \frac{21.11 \cdot 4.8}{2} = 50.66\text{kN}$$

$$\text{za } q_2 = 10 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad F_{A2} = F_{B2} = \frac{q_2 \cdot l}{2} = \frac{10 \cdot 4.8}{2} = 24\text{kN}$$



- **Maksimalni moment savijanja**

$$\text{za } q_1 = 21.11 \frac{kN}{m} \quad M_{\max 1} = \frac{q_1 \cdot l^2}{8} = \frac{21.11 \cdot 4.8^2}{8} = 60.80 kNm$$

$$\text{za } q_2 = 10 \frac{kN}{m} \quad M_{\max 2} = \frac{q_2 \cdot l^2}{8} = \frac{10 \cdot 4.8^2}{8} = 28.8 kNm$$

- **Maksimalna poprečna sila**

$$\text{za } q_1 = 21.11 \frac{kN}{m} \quad V_{\max 1} = \frac{q_1 \cdot l}{2} = \frac{21.11 \cdot 4.8}{2} = 50.66 kN$$

$$\text{za } q_2 = 10 \frac{kN}{m} \quad V_{\max 2} = \frac{q_2 \cdot l}{2} = \frac{10 \cdot 4.8}{2} = 24 kN$$

- **Položaj neutralne osi**

$$h_1 = h \cdot \frac{\sqrt{E_B}}{\sqrt{E_{\check{c}}} + \sqrt{E_B}} = \frac{45}{1 + \sqrt{\frac{21000}{3500}}} = 13.05 cm$$

$$h_2 = h \cdot \frac{\sqrt{E_{\check{c}}}}{\sqrt{E_{\check{c}}} + \sqrt{E_B}} = \frac{45}{1 + \sqrt{\frac{3500}{21000}}} = 31.95 cm$$

- **Moment tromosti poprečnog presjeka**

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{25 \cdot 45^3}{12} = 189843.75 cm^4$$

- **Reducirani modul elastičnosti**

$$E_{red} = \frac{4E_{\check{c}}E_B}{(\sqrt{E_{\check{c}}} + \sqrt{E_B})^2} = \frac{4 \cdot 3500}{\left(1 + \sqrt{\frac{3500}{21000}}\right)^2} = 7059.43 \frac{kN}{cm^2}$$

- **Maksimalna vlačna i tlačna normalna naprezanja**

za  $q_1=21.11\text{kN/m}$

$$\sigma_{v,max} = \frac{E_{\check{c}}}{E_{red}} \cdot \frac{M_{max}}{I_y} \cdot h_1 = \frac{21000 \cdot 6080}{7059.43 \cdot 189843.75} \cdot 13.05 = 1.24 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 12.4\text{MPa}$$

$$\sigma_{t,max} = \frac{E_B}{E_{red}} \cdot \frac{M_{max}}{I_y} \cdot h_2 = \frac{3500 \cdot 6080}{7059.43 \cdot 189843.75} \cdot 31.95 = 0.51 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 5.1\text{MPa}$$

za  $q_2=10\text{kN/m}$

$$\sigma_{v,max} = \frac{E_{\check{c}}}{E_{red}} \cdot \frac{M_{max}}{I_y} \cdot h_1 = \frac{21000 \cdot 2880}{7059.43 \cdot 189843.75} \cdot 13.05 = 0.59 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 5.9\text{MPa}$$

$$\sigma_{t,max} = \frac{E_B}{E_{red}} \cdot \frac{M_{max}}{I_y} \cdot h_1 = \frac{3500 \cdot 2880}{7059.43 \cdot 189843.75} \cdot 31.95 = 0.24 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 2.4\text{MPa}$$

- **Maksimalni progib nosača**

za  $q_1=21.11\text{kN/m}$

a) s reduciranim modulom elastičnosti ( $E_{red}=7059.43\text{kN/cm}^2$ )

$$w_{max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{I_y \cdot E_{red}} = \frac{5 \cdot 0.2111 \cdot 480^4}{384 \cdot 189843.75 \cdot 7059.43} = 0.109\text{cm} = 1.09\text{mm}$$

b) s modulom elastičnosti za beton ( $E_B=3500\text{kN/cm}^2$ )

$$w_{max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{I_y \cdot E_B} = \frac{5 \cdot 0.2111 \cdot 480^4}{384 \cdot 189843.75 \cdot 3500} = 0.219\text{cm} = 2.19\text{mm}$$

za  $q_2=10\text{kN/m}$

a) s reduciranim modulom elastičnosti ( $E_{red}=7059.43\text{kN/cm}^2$ )

$$w_{max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{I_y \cdot E_{red}} = \frac{5 \cdot 0.10 \cdot 480^4}{384 \cdot 189843.75 \cdot 7059.43} = 0.052\text{cm} = 0.52\text{mm}$$

b) s modulom elastičnosti za beton ( $E_B=3500\text{kN/cm}^2$ )

$$w_{max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{I_y \cdot E_B} = \frac{5 \cdot 0.10 \cdot 480^4}{384 \cdot 189843.75 \cdot 3500} = 0.104\text{cm} = 1.04\text{mm}$$

## 3.2 Dimenzioniranje poprečnog presjeka nosača

### - Ulazni podaci

Tablica 2. vrijednosti ulaznih podataka za proračun po metodi graničnih stanja

$L = 4.8m$	raspon nosača
$q = 21.11 \frac{kN}{m}$	raspodijeljeno opterećenje
$M_{max} = 60.80kNm$	maksimalni moment savijanja
$V_{max} = 50.66kNm$	maksimalna poprečna sila
C 40/50	klasa betona
B 500B	klasa čelika za armaturu
$f_{yd} = 43.48 \frac{kN}{cm^2}$	proračunska granica popuštanja armature
$f_{cd} = 2.67 \frac{kN}{cm^2}$	računska čvrstoća betona
$\frac{b}{h} = \frac{25}{45} cm$	dimenzije poprečnog presjeka

### - Proračun i dimenzioniranje na moment savijanja za opterećenje $q_1=21.11kN/m$

$$M_{Ed} = 60.80kNm$$

$$\mu_{Ed} = \frac{M_{Ed}}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{6080}{25 \cdot 40^2 \cdot 2.67} = 0.057$$

$$\text{Očitano: } \varepsilon_{s1} = 10\text{‰}, \varepsilon_{c2} = 1.5\text{‰}, \xi_{lim} = 0.953, \zeta_{lim} = 0.130$$

$$A_{s1} = \frac{M_{Ed}}{\xi \cdot d \cdot f_{yd}} = \frac{6080}{0.953 \cdot 40 \cdot 43.48} = 3.67cm^2$$

**Odabrana armatura:  $3\phi 14$  ( $4.62cm^2$ )**

- Proračun i dimenzioniranje na poprečnu silu za opterećenje  $q_1=21.11\text{kN/m}$

$$V_{Ed} = 50.66\text{kN}$$

$$d_1 = 5\text{cm}$$

$$N_{Ed} = 0\text{kN}$$

$$V_{Rd,c} = \left[ c_{Rdc} \cdot k \cdot (100 \cdot \varphi_1 \cdot f_{ck})^{\frac{1}{3}} + k_1 \cdot \sigma_{cp} \right]^1 \cdot b_w \cdot d$$

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} = 1 + \sqrt{\frac{200}{400}} = 1.71$$

$$k_1 = 0.15$$

$$\sigma_{cp} = 0$$

$$c_{Rdc} = \frac{0.18}{\gamma_c} = \frac{0.18}{1.5} = 0.12$$

$$\sum A_s = 3\phi 14 = 4.62\text{cm}^2$$

$$\varphi_1 = \frac{\sum A_s}{A_c} = \frac{4.62}{25 \cdot 35} = 0.00528$$

$$V_{Rd,c} = 56.72\text{kN}$$

$$V_{Rd,c} \geq (v_{min} + k_1 \cdot \sigma_{cp}) \cdot b_w \cdot d$$

$$v_{min} = 0.035 \cdot k^{\frac{3}{2}} \cdot f_{ck}^{\frac{1}{2}} = 0.035 \cdot 1.71^{\frac{3}{2}} \cdot 40^{\frac{1}{2}} = 0.49$$

$$V_{Rd,c} \geq 0.49 \cdot 250 \cdot 400$$

$$V_{Rd,c} \geq 49\text{kN}$$

$$V_{Rd,max} = 0.5 \cdot v \cdot b_w \cdot d \cdot f_{cd}$$

$$v = 0.6 \cdot \left[ 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] = 0.6 \cdot \left[ 1 - \frac{40}{250} \right] = 0.504$$

$$V_{Rd,max} = 672.08\text{kN}$$

$$\frac{V_{Ed}}{V_{Rd,max}} = \frac{50.66}{672.08} = 0.08$$

$$s_{max} = \min(0.75 \cdot d; 30\text{cm}) = \min(0.75 \cdot 40 = 30\text{cm}; 30\text{cm})$$

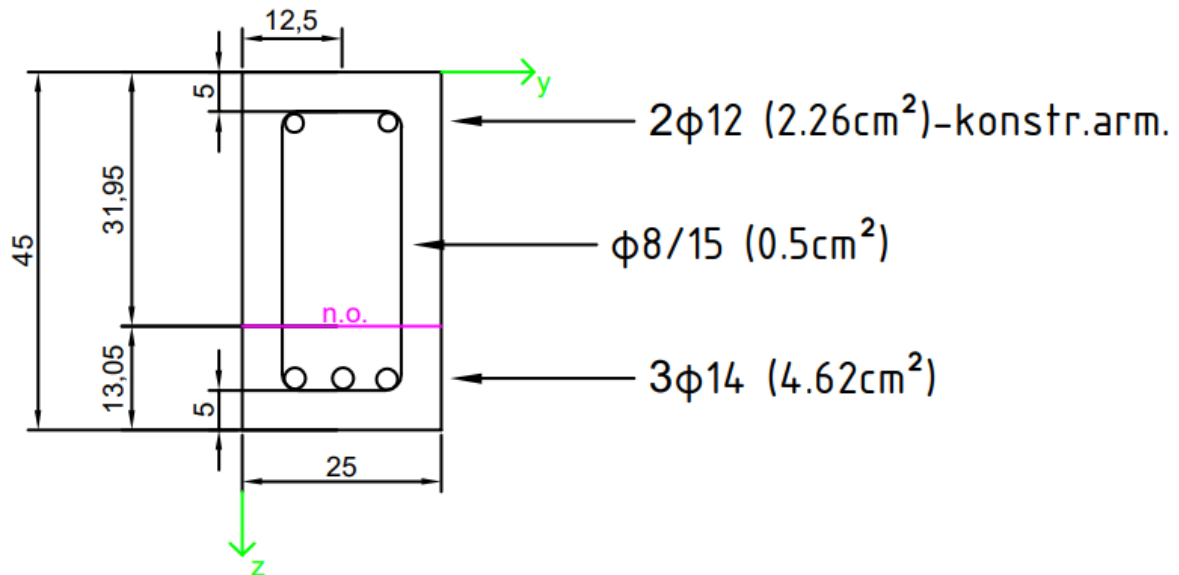
$$s_{max} = 30\text{cm}$$

$$\varphi_{min} = 0.0011$$

$$A_{sw,min} = \frac{\varphi_{min} \cdot s_w \cdot b_w}{m} = \frac{0.0011 \cdot 30 \cdot 25}{2} = 0.413 \text{ cm}^2$$

Odabrane vilice:  $\phi 8 / 15 \text{ cm}$  ( $0.5 \text{ cm}^2$ )

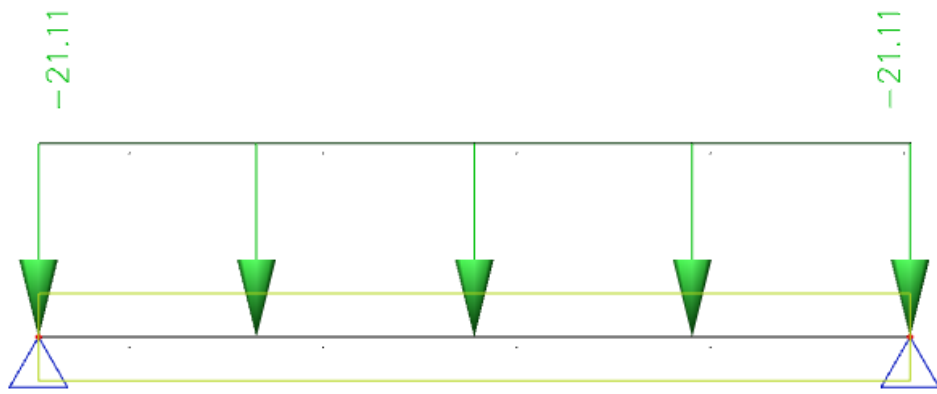
- Izgled poprečnog presjeka



slika 9. pravokutni poprečni presjek sa pripadnom armaturom [5]

### 3.3 Numerički postupak (SCIA Engineer)

U računalnom programu izvršena je analiza armiranobetonskog nosača raspona 4.8 metara sa pripadajućom armaturom i opterećenjima  $q_1=21.11 \text{ kN/m}$  i  $q_2=10 \text{ kN/m}$ . Poprečni presjek je zadan visinom od 45 cm te širinom koja iznosi 25 cm. Armatura vlačne zone iznosi  $3\phi 14$ .



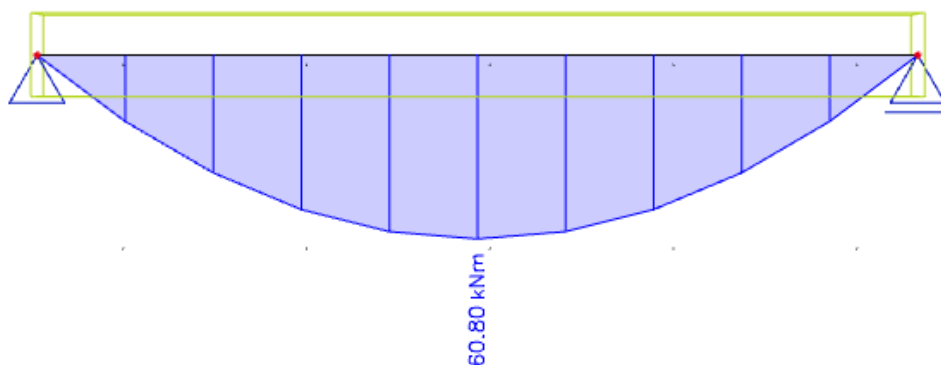
slika 10. armiranobetonski nosač sa raspodijeljenim opterećenjem  $q_1=21.11 \text{ kN/m}$  [4]

- Reakcije na ležajevima pri opterećenju  $q_1=21.11\text{kN/m}$



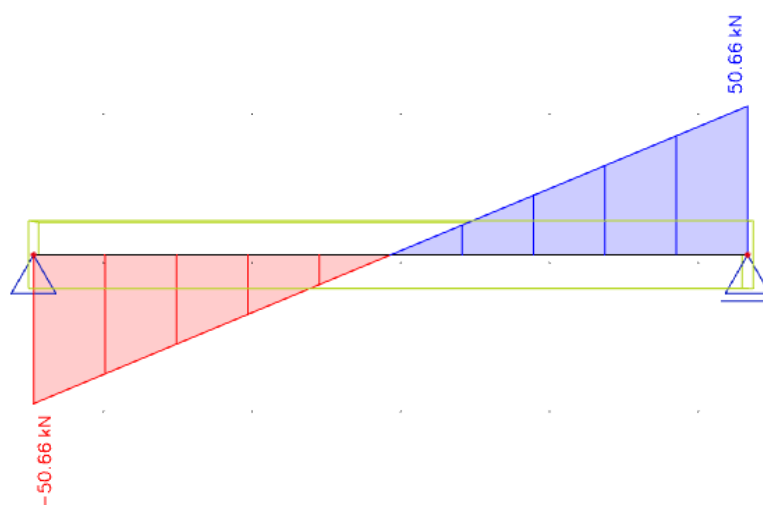
slika 11. reakcije na ležajevima uzrokovane opterećenjem  $q_1=21.11\text{kN/m}$  [4]

- Dijagram momenta savijanja (M) pri opterećenju  $q_1=21.11\text{kN/m}$



slika 12. momentni dijagram savijanja za opterećenje  $q_1=21.11\text{kN/m}$  [4]

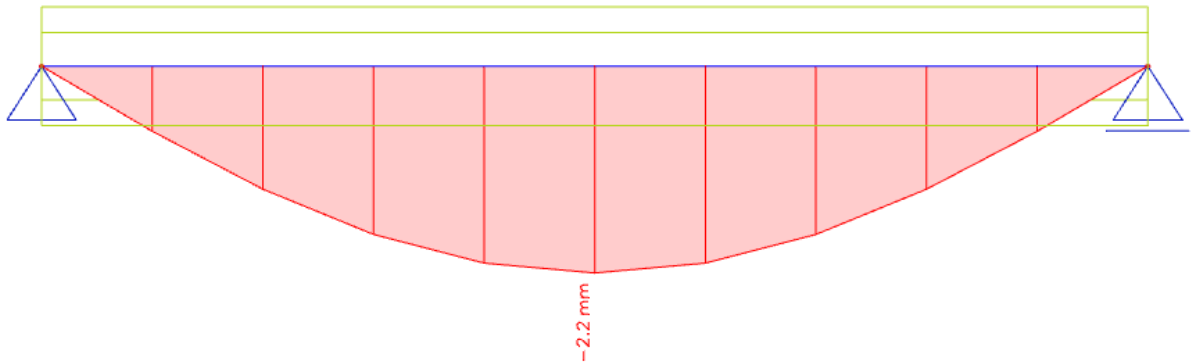
- Dijagram poprečnih sila (V) pri opterećenju  $q_1=21.11\text{kN/m}$



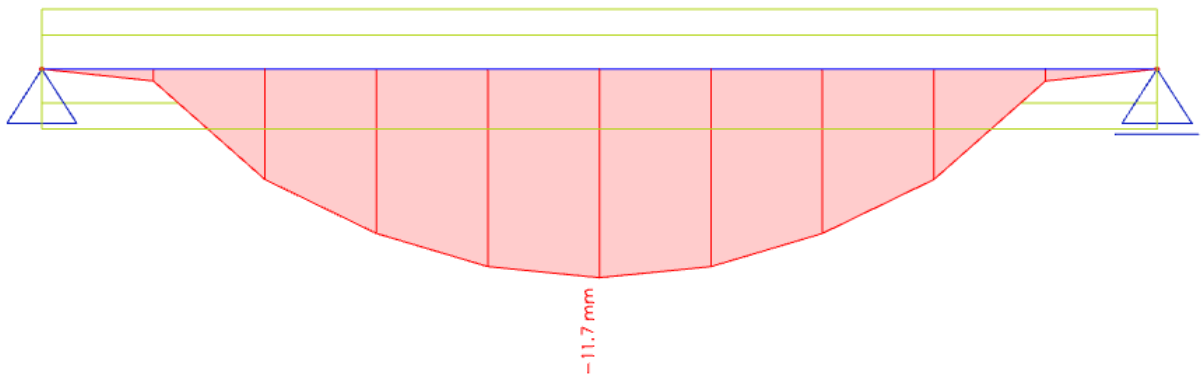
slika 13. dijagram poprečnih sila za opterećenje  $q_1=21.11\text{kN/m}$  [4]

- **Elastična linija nosača i veličina maksimalnog progiba**

za  $q_1=21.11\text{kN/m}$

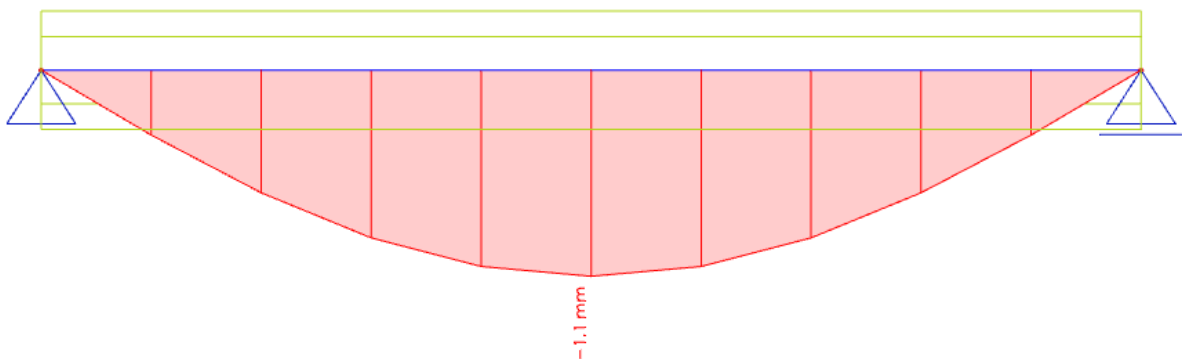


*slika 14. vrijednost maksimalnog progiba nosača bez utjecaja armature pri opterećenju  $q_1=21.11\text{kN/m}$  [4]*

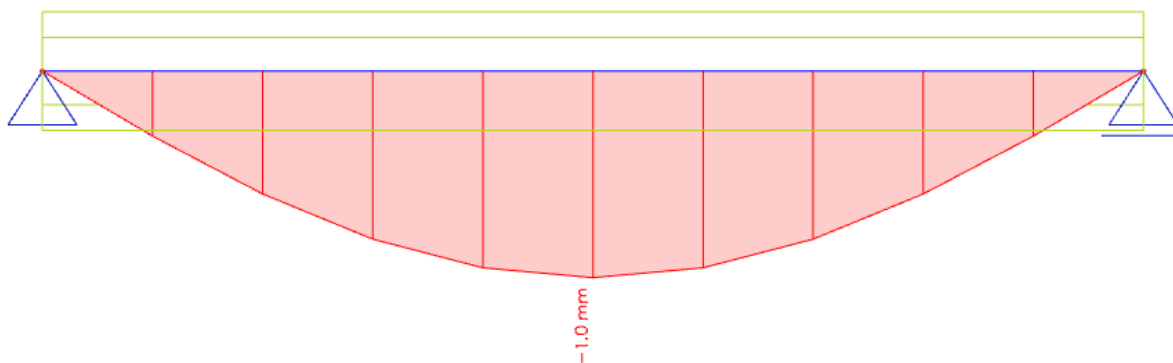


*slika 15. vrijednost maksimalnog progiba armiranobetonskog nosača pri opterećenju  $q_1=21.11\text{kN/m}$  [4]*

za  $q_2=10\text{kN/m}$



*slika 16. vrijednost maksimalnog progiba nosača bez utjecaja armature pri opterećenju  $q_2=10\text{kN/m}$  [4]*



slika 17. vrijednost maksimalnog progiba armiranobetonskog nosača pri opterećenju  $q_2=10\text{kN/m}$  [4]

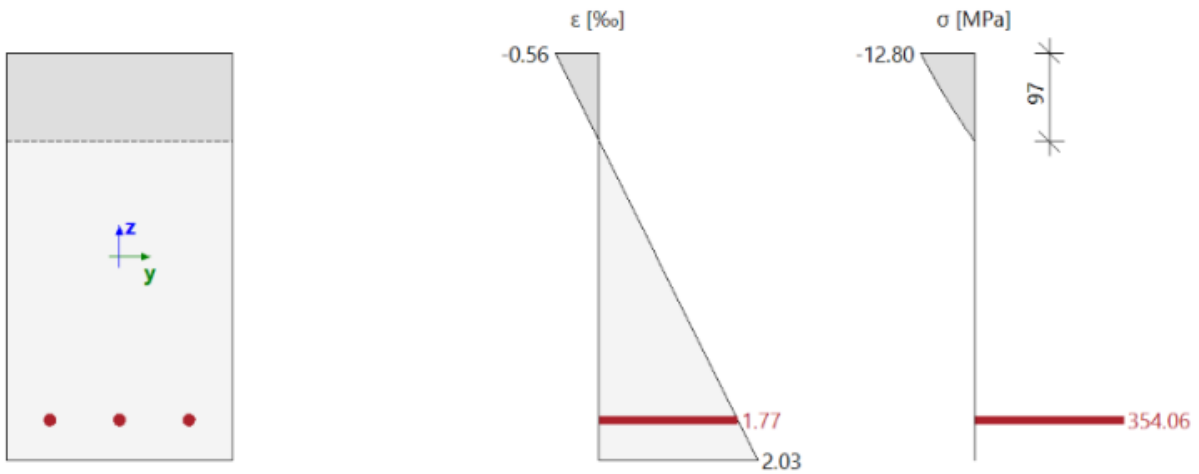
- Raspodjela naprezanja i deformacija u karakterističnom poprečnom presjeku ( $x=2.4\text{m}$ ) za  $q_1=21.11\text{kN/m}$

Section SC1		Rectangle (450; 250)	
EN 1992-1-1:2004/A1:2014		Beam B1 [dx = 2.4 m]	
<b>Member length:</b>	L = 4.8 m	<b>Concrete: C40/50</b>	
Buckling $y-y^\perp$	$L_y = 4.8\text{ m (sway)}$	Bi-linear stress-strain diagram	
Buckling $z-z^\perp$	$L_z = 4.8\text{ m (sway)}$	Exposure class: XC3	
		<b>Longitudinal reinforcement: B 500B</b>	
			Bi-linear with an inclined top branch
			$3\phi 14\ (462\text{ mm}^2)$
			$\rho_l = 0.411\ \% \ (3.63\text{ kg/m})$
		<b>Shear reinforcement: B 500B</b>	
		Bi-linear with an inclined top branch	
		$2\phi 8/147\ (684\text{ mm}^2/\text{m})$	
		$\rho_w = 0.274\ \% \ (5.37\text{ kg/m})$	
		<b>Cover (stirrup)</b>	
		Top: 50 mm	
		Bottom: 50 mm	
		Left: 50 mm	
		Right: 50 mm	

slika 18. prikaz podataka o poprečnom presjeku armiranobetonskog nosača [4]



### Stress and strain distribution



slika 19. dijagrami deformacija i naprezanja u poprečnom presjeku za opterećenje  $q_1=21.11\text{kN/m}$  [4]

### Verification of cracks in cross-section

Load	Type of module	$E_c$ [MPa]	Combi.	$N_{Ed}$ [kN]	$M_{Edy}$ [kNm]	$M_{Edz}$ [kNm]	$\sigma_{ct}$ [MPa]	$h$ [mm]	$f_{ct,eff}$ [MPa]	Cracks appear
Short	$E_c$	0	Char.	0	60.8	0	6.78	450	3.5	YES

### Stress limitation in concrete

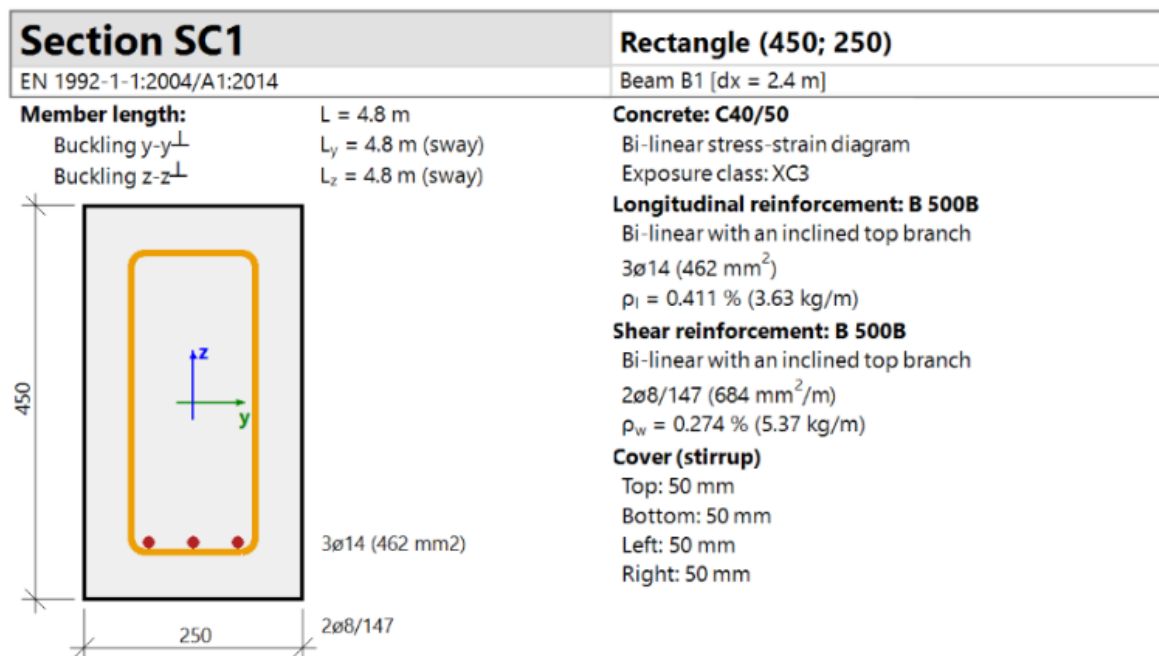
Check type	Load	$N_{Ed}$ [kN]	$M_{Edy}$ [kNm]	$M_{Edz}$ [kNm]	$y_i$ [mm]	$z_i$ [mm]	$\sigma_c$ [MPa]	$\sigma_{c,lim}$ [MPa]	$\sigma_c/\sigma_{c,lim}$ [-]	Status
§7.2(2) Char.	Short	0	60.8	0						OFF
§7.2(3) Q.-P.	Short	0	60.8	0	0.13	0.23	-15.7	-18	0.87	OK

### Stress limitation in non-prestressed reinforcement

Check type	Load	$N_{Ed}$ [kN]	$M_{Edy}$ [kNm]	$M_{Edz}$ [kNm]	$y_i$ [mm]	$z_i$ [mm]	$\sigma_s$ [MPa]	$\sigma_{s,lim}$ [MPa]	$\sigma_s/\sigma_{s,lim}$ [-]	Status
§7.2(5) Char.	Short	0	60.8	0	-0.08	-0.18	349	400	0.872	OK

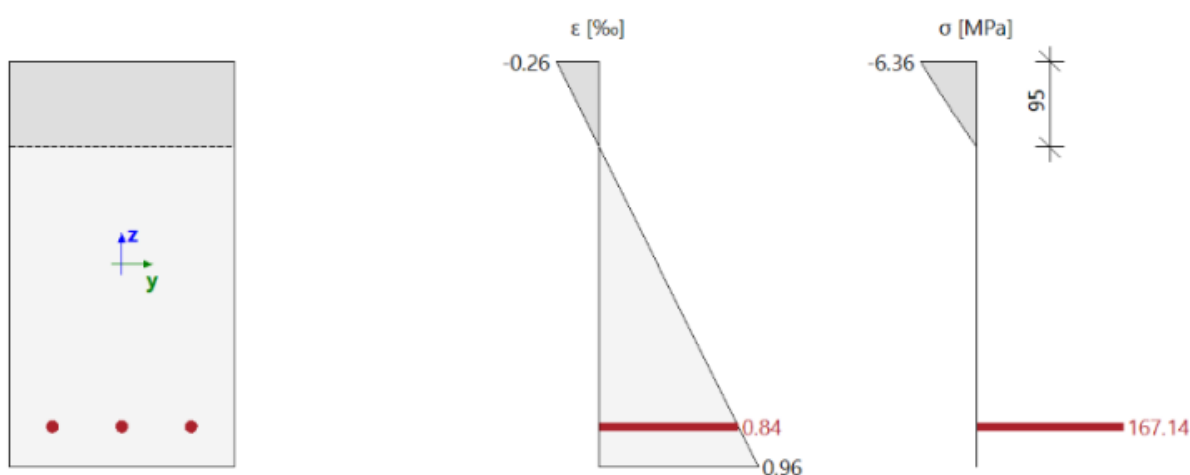
slika 20. tablični prikaz pojave pukotina i raspodjele naprezanja unutar armiranobetonskog poprečnog presjeka pri opterećenju  $q_1=21.11\text{kN/m}$

- Raspodjela naprezanja i deformacija u karakterističnom poprečnom presjeku ( $x=2.4\text{m}$ ) za  $q_2=10\text{kN/m}$



slika 21. prikaz podataka o poprečnom presjeku armiranobetonskog nosača [4]

### Stress and strain distribution



slika 22. dijagrami deformacija i naprezanja u poprečnom presjeku za opterećenje  $q_2=10\text{kN/m}$  [4]

### Verification of cracks in cross-section

Load	Type of module	$E_c$ [MPa]	Combi.	$N_{Ed}$ [kN]	$M_{Edy}$ [kNm]	$M_{Edz}$ [kNm]	$\sigma_{ct}$ [MPa]	$h$ [mm]	$f_{ct,eff}$ [MPa]	Cracks appear
Short	$E_c$	0	Char.	0	28.8	0	3.21	450	3.5	NO

### Stress limitation in concrete

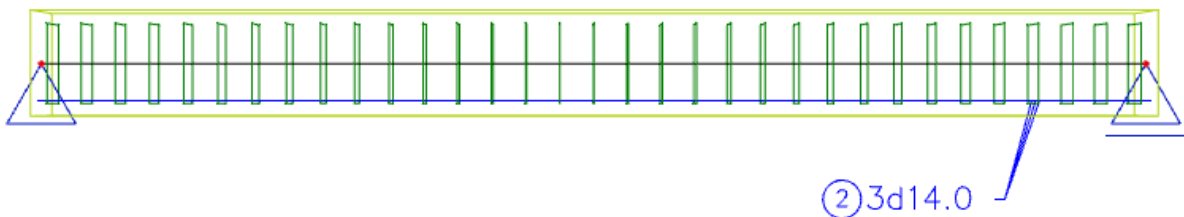
Check type	Load	$N_{Ed}$ [kN]	$M_{Edy}$ [kNm]	$M_{Edz}$ [kNm]	$y_i$ [mm]	$z_i$ [mm]	$\sigma_c$ [MPa]	$\sigma_{c,lim}$ [MPa]	$\sigma_c/\sigma_{c,lim}$ [-]	Status
§7.2(2) Char.	Short	0	28.8	0						OFF
§7.2(3) Q.-P.	Short	0	28.8	0	0.13	0.23	-3.33	-18	0.185	OK

### Stress limitation in non-prestressed reinforcement

Check type	Load	$N_{Ed}$ [kN]	$M_{Edy}$ [kNm]	$M_{Edz}$ [kNm]	$y_i$ [mm]	$z_i$ [mm]	$\sigma_s$ [MPa]	$\sigma_{s,lim}$ [MPa]	$\sigma_s/\sigma_{s,lim}$ [-]	Status
§7.2(5) Char.	Short	0	28.8	0	-0.08	-0.18	14.5	400	0.036	OK

slika 23. tablični prikaz pojave pukotina i raspodjele naprezanja unutar armiranobetonskog poprečnog presjeka pri opterećenju  $q_2=10\text{kN/m}$  [4]

- Prikaz analiziranog i dimenzioniranog armiranobetonskog nosača



slika 24. armiranobetonski nosač sa definiranom armaturom i sponama [4]

Na slici 24. primjetno je da su duž cijelog nosača postavljene armaturne vilice profila  $\phi 8$ , međusobno razmaknute 15cm. Navedene vilice preuzimaju opterećenje izazvano poprečnim silama.

Isto tako, uklonjena je konstruktivna armatura  $2\phi 12$  iz numeričkog proračuna kako bi se napravila ista simulacija kao i u analitičkom proračunu, u kojem sudjeluje samo armatura vlačne zone  $3\phi 14$ .

### 3.4 Usporedba i analiza rezultata analitičkog i numeričkog postupka

Tablica 3. usporedba rezultata maksimalnih progiba iz analitičkog i numeričkog proračuna

	<b>METODA REDUCIRANIH PRESJEKA</b>				<b>SCIA ENGINEER</b>			
	$q_1=21.11\text{kN/m}$		$q_2=10\text{kN/m}$		$q_1=21.11\text{kN/m}$		$q_2=10\text{kN/m}$	
	$E_B$	$E_{red}$	$E_B$	$E_{red}$	$\delta_{lin}$	$\delta_{tot}$	$\delta_{lin}$	$\delta_{tot}$
<b>MAKSIMALNI PROGIBI [mm]</b>	<b>2.19</b>	<b>1.09</b>	<b>1.04</b>	<b>0.52</b>	<b>2.2</b>	<b>11.7</b>	<b>1.1</b>	<b>1</b>

Analitički proračun je proveden podrazumijevajući linearno-elastično ponašanje materijala.

Kao što je moguće primijetiti iz rezultata numeričkog proračuna, za opterećenje  $q_1=21.11\text{kN/m}$  progib ostvaren u linearnom proračunu ( $\delta_{lin}$ ) odgovara iznosu analitičkog progiba koji je izračunat koristeći samo modul elastičnosti betona ( $E_B$ ). Progib označen s  $\delta_{tot}$  određen je uzimajući u obzir nelinearno ponašanje materijala, pojavu pukotina i utjecaj armature. Usporedbom analitičkog progiba koji je određen koristeći reducirani modul elastičnosti ( $E_{red}$ ) i numeričkog progiba  $\delta_{tot}$  može se primijetiti očekivano značajno odstupanje jer analitički proračun vrijedi u području linearno-elastičnog ponašanja materijala. Za opterećenje  $q_1=21.11\text{kN/m}$  dolazi do prekoračenja vlačnih naprezanja u betonu materijal ulazi u nelinearno područje ponašanja, što rezultira pojavom pukotina. Dobivene maksimalne progibe nije moguće usporediti s vrijednostima analitičkog proračuna zbog njihove značajne razlike u usvojenim utjecajima. Vlačno naprezanje u presjeku je preuzela armatura, dok su se

u betonu pojavile pukotine koje utječu na geometriju poprečnog presjeka reducirajući ga te pospješuju efekt povećanja progiba.

Nadalje, iz tablice 3. je vidljivo da za smanjeno opterećenje  $q_2=10\text{kN/m}$  navedeni efekti se ne javljaju u numeričkom proračunu (slika 23.) što znači da materijal ostaje u linearnom području. Progib određen linearnim numeričkim proračunom  $\delta_{lin}$  približno je jednak kao i analitički progib određen koristeći modul elastičnosti betona ( $E_B$ ). Međutim progib definiran numeričkim proračunom koji uzima u obzir sve nelinearne efekte ( $\delta_{tot}$ ) veći je od analitičkog progiba definiranog s reduciranim modulom elastičnosti ( $E_{red}$ ) što je posljedica neaktivacije armature u numeričkom proračunu, dok je doprinos iste uzet u obzir koristeći ( $E_{red}$ ).

## 4. ZAKLJUČAK

Proveden je proračun i analiza armiranobetonskog nosača, pravokutnog poprečnog presjeka, opterećenog na savijanje.

U prvom dijelu rada je pokazan analitički postupak proračuna za linearno elastično ponašanje materijala, dok je u drugom dijelu uključena materijalna nelinearnost te je ukazano na razlike.

Sve usporedbe i komentari su pokazani u odjeljku usporedbe i analize rezultata analitičkog i numeričkog postupka koji su jasno pokazali važnost razumijevanja svih uključenih parametara u numeričku analizu kako bi se ispravno interpretirali dobiveni rezultati.

## 5. LITERATURA

- [1] Šimić, V., Otpornost materijala I, Školska knjiga, Zagreb, 2002.
- [2] Harapin, A., Radnić, J., Interna skripta, Osnove betonskih konstrukcija, FGAG, Split, 2020.
- [3] Marović, P., Galić, M., Nastavna predavanja, Otpornost materijala I, FGAG, Split, 2022./2023.
- [4] SCIA Engineer legacy, Student licence, 2022.
- [5] AutoCAD, Student licence, 2023.
- [6] Gradnja.me, Platforma arhitekture i građevinarstva <raspoloživo na: <https://www.gradnja.me/utrosak-materijala-u-gradjevinarstvu/armirana-betonska-greda>>, (23.08.2024.)