

Analiza vitkih elemenata izloženih izvijanju

Perić, Antonio

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:

University of Split, Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy / Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:123:191509>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-26**



Repository / Repozitorij:

[FCEAG Repository - Repository of the Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy, University of Split](#)



UNIVERSITY OF SPLIT



**SVEUČILIŠTE U SPLITU
FAKULTET GRAĐEVINARSTVA, ARHITEKTURE I GEODEZIJE**

ZAVRŠNI RAD

Antonio Perić

Split, 2024

SVEUČILIŠTE U SPLITU
FAKULTET GRAĐEVINARSTVA, ARHITEKTURE I GEODEZIJE

Analiza vitkih elemenata izloženih izvijanju

Završni rad

Split, 2024

Analiza vitkih elemenata izloženih izvijanju

Sažetak: U ovom radu analizirani su vitki elementi opterećeni u svojoj ravnini s obzirom na četiri različita načina učvršćenja. U prvom dijelu je detaljno je objašnjen analitički postupak izračunavanja kritične i dopuštene veličine sile te pripadajućih naprezanja. Također, analizirano je i izvijanje elementa u dva područja izvijanja tj. elastičnom i plastičnom području, nakon čega je detaljno objašnjeno i dimenzioniranje elemenata opterećenih na izvijanje. Osim analitičkim postupkom, svi primjeri su riješeni i programom SCIA Engineering, nakon čega su dobiveni rezultati analizirani i uspoređeni s prethodno dobivenim rezultatima u analitičkom postupku. Na samom kraju su navedeni pripadajući zaključci i sva korištena literatura.

Ključne riječi: vitki elementi, izvijanje, kritična sila, učvršćenje, analitički i numerički postupak, SCIA Engineer

Analysis of Slender Elements Subjected to Buckling

Abstract: In this paper, slender elements loaded in their plane are analyzed with respect to four different fixation methods. The first part explains in detail the analytical procedure for calculating the critical and allowable force and the corresponding stresses. Additionally, the buckling of the element in two buckling regions, the elastic and plastic regions, is analyzed, followed by a detailed explanation of the dimensioning of elements subjected to buckling. Besides the analytical method, all examples are also solved using the SCIA Engineering software, and the obtained results are analyzed and compared with the previously derived results from the analytical procedure. Finally, the corresponding conclusions and all the references used are listed.

Keywords: slender elements, buckling, critical force, fixation, analytical and numerical procedure, SCIA Engineer



STUDIJ: SVEUČILIŠNI PRIJEDIPLOMSKI STUDIJ GRAĐEVINARSTVO

KANDIDAT: Antonio Perić

MATIČNI BROJ (JMBAG): 00832287269

KATEDRA: Katedra za otpornost materijala i ispitivanje konstrukcija

KOLEGIJ: Otpornost materijala 2

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Tema: Analiza vitkih elemenata izloženih izvijanju

Opis zadatka: Potrebno je provesti analizu utjecaja različitih parametara na ponašanje vitkih elemenata izloženih izvijanju. U prvom dijelu je potrebno detaljno objasniti analitički postupak izračunavanja sile izvijanja u elastičnom i plastičnom području ponašanja materijala te navesti parametre koji utječu na nosivosti ovakvih elemenata. Pokazati sve karakteristične izraze za izračunavanje kritične sile i pripadajućih naprezanja. Prikazane postupke primijeniti na zadanim primjerima, koje je potrebno analizirati i numerički, računalnim programom, te usporediti dobivene rezultate

U Splitu, 20.03.2024.g.

Mentor: Prof.dr.sc. Mirela Galić

Sadržaj

1. UVOD	1
2. IZVIJANJE, GUBITAK ELASTIČNE STABILNOSTI	2
2.1 VRSTE RAVNOTEŽE I KRITIČNO OPTEREĆENJE	2
2.2 IZVIJANJE ŠTAPA U ELASTIČNOM PODRUČJU, EULEROVA KRITIČNA SILA	5
2.3 KRITIČNO NAPREZANJE	17
2.4 IZVIJANJE ŠTAPA U PLASTIČNOM PODRUČJU	19
2.5 EMPIRIJSKI IZRAZ ZA KRITIČNO NAPREZANJE	26
2.6 DIMENZIONIRANJE ŠTAPOVA OPTEREĆENIH NA IZVIJANJE.....	27
3. NUMERIČKI PRIMJER – PRIMJENA ANALITIČKOG POSTUPKA	30
3.1. IZVIJANJE OVISNO O NAČINU PRIDRŽANJA	30
3.2. IZVIJANJE OVISNO O PODRUČJU VITKOSTI	38
4. NUMERIČKI PRIMJER – ANALIZA U RAČUNALNOM PROGRAMU SCIA ENGINEER	41
5. USPOREDBA DOBIVENIH REZULTATA	50
6. ZAKLJUČAK	52
7. LITERATURA	53

1. UVOD

U ovom radu analizirani su vitki elementi opterećeni u ravnini uzimajući u obzir četiri različita načina učvršćenja odnosno pridržanja. Dakle, jedan dio rada se odnosi na detaljno opisivanje i pojašnjavanje samog problema te definiranje svih analitičkih izraza koji su potrebni za rješenje. Drugi dio rada će se odnositi na primjenu navedenih izraza u primjerima. Analiza numeričkog primjera je također napravljena i numerički u računalnom programu SCIA Engineer nakon čega će se usporediti dobiveni rezultati.

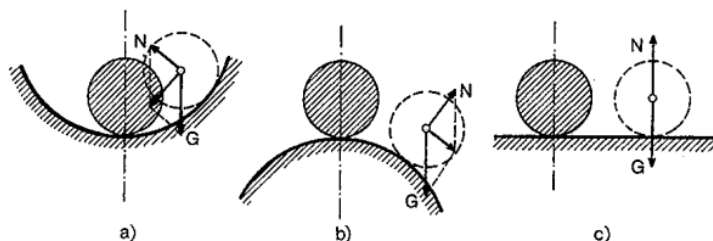
Kod obje metode tj. analitičkog proračuna i proračuna pomoću programa Scia Engineering, postupak je prikazan na numeričkim primjerima. Pri tom su se dobiveni rezultati mijenjali ovisno o načinu pridržanja odnosno sam je postupak proveden posebno za svaki od njih. Korišteni su I poprečni presjeci izrađeni od čelika, a dužina elementa je izabrana tako da za sve načine pridržanja vitkost bude veća od vitkosti na granici proporcionalnosti kako bi se u analitičkom proračunu mogla primijeniti Euler-ov izraz za proračun kritične sile.

Otpornost materijala je dio mehanike koji se bavi proučavanjem krutosti, stabilnosti i čvrstoće materijala. U ovom radu glavna tema je analiza ispunjenja uvjeta stabilnosti elementa. Stabilnost je sposobnost konstrukcije da zadrži početan ravnotežni oblik pri čemu se gubitak te stabilnosti naziva izvijanje. Taj problem je posebno izražen kod vitkih elemenata zbog čega je prilikom dimenzioniranja potrebno obratiti pažnju na to. To nam je zapravo nulti uvjet bez kojeg nije moguće izgraditi konstrukciju koja je kvalitetna i sigurna. U ovom radu, analitička metoda provela se primjenom izraza izvedenih za kritičnu silu, kritično naprezanje i ostalih pripadajućih vrijednosti. Pri tom, da bi sam postupak bio valjan, moraju biti zadovoljeni uvjet sigurnosti i uvjet stabilnosti. S druge strane, isti postupak je proveden u računalnom programu SCIA Engineer, koji se temelji na metodi konačnih elemenata. Ova metoda omogućava detaljnu i preciznu analizu složenih konstrukcijskih problema. S obzirom da je sam proračun izveden na dva različita načina, u nastavku će se ponajprije detaljno pokazati analiza analitičkog postupka sa svim pripadajućim izrazima i grafovima te pripadajući proračun, nakon čega će se isto ponoviti i za SCIA Engineer program.

2. IZVIJANJE, GUBITAK ELASTIČNE STABILNOSTI

2.1 VRSTE RAVNOTEŽE I KRITIČNO OPTEREĆENJE

Ravnoteža tijela može biti stabilna, labilna i indiferentna što nam je poznato iz mehanike krutog tijela. Sve tri navedene vrste možemo prikazati na primjeru kugle koja se nalazi na konkavnoj, konveksnoj i horizontalnoj podlozi (sl. 2.1.1).

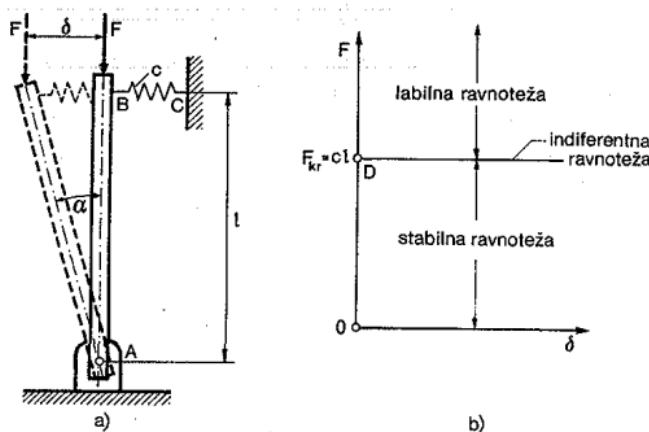


Slika 2.1.1. Stabilnost kugle [1]

Ukoliko se kugla nalazi na konkavnoj podlozi (sl. 2.1.1.a) kažemo da je ona u stabilnoj ravnoteži. Kada se kugla pomakne iz tog ravnotežnog položaja i dozvoli se slobodno gibanje, ona se vraća u prvobitni ravnotežni položaj. Za kuglu koja se nalazi na konveksnoj podlozi (sl. 2.1.1.b) kažemo da je u labilnoj (nestabilnoj) ravnoteži. Ako se kugla i najmanje pomakne iz ravnoteže, ona se neće moći sama vratiti u prvobitni položaj, nego će doći do sve većeg udaljavanja od položaja ravnoteže. U oba navedena slučaja mijenja se potencijalna energija.

Kod kugle koja se nalazi na horizontalnoj podlozi (sl. 2.1.1.c) može se reći da je u indiferentnoj ravnoteži. Kad se kugla pomakne iz položaja ravnoteže, ona se neće vratiti u prvobitni položaj, već će postići ravnotežu u nekom novom položaju koji se nalazi blizu tog prethodnog. Pri tom se potencijalna energija neće promijeniti.

Nakon prethodno navedenih tvrdnji, možemo promotriti i primjer ravnoteže ravnog, apsolutno krutog štapa AB koji je prikazan na sl. 2.1.2.a. Štap je na donjemu kraju zglobovno oslonjen, a na gornjem pridrжан elastičnom oprugom i uzdužno opterećen silom F .



Slika 2.1.2. Ravnoteža apsolutno krutog štapa [1]

Ukoliko štap AB nije pridrzan oprugom BC, imamo labilan vertikalni položaj štapa, jer dolazi do rotacije štapa oko točke A i pri najmanje bočnom pomaku δ u točki B. Pri tom se štap više ne može sam vratiti u prvobitni položaj. Ako imamo bočno opterećenje koje je kratkog trajanja i koje uzrokuje mali bočni pomak δ , na štap djeluje moment $F\delta$ koji teži udaljiti štap od vertikalna ravnotežnog položaja moment elastične sile opruge $c\delta l$ (gdje je c krutost opruge) koji nastoji štap vratiti u početni vertikalni položaj. Kod dovoljno male sile F vrijedi $\delta < c\delta l$, a štap se ponovno vraća u vertikalni položaj koji u ovom slučaju označava položaj stabilne ravnoteže. Ukoliko se sila F poveća do neke vrijednosti za koju je ispunjeno:

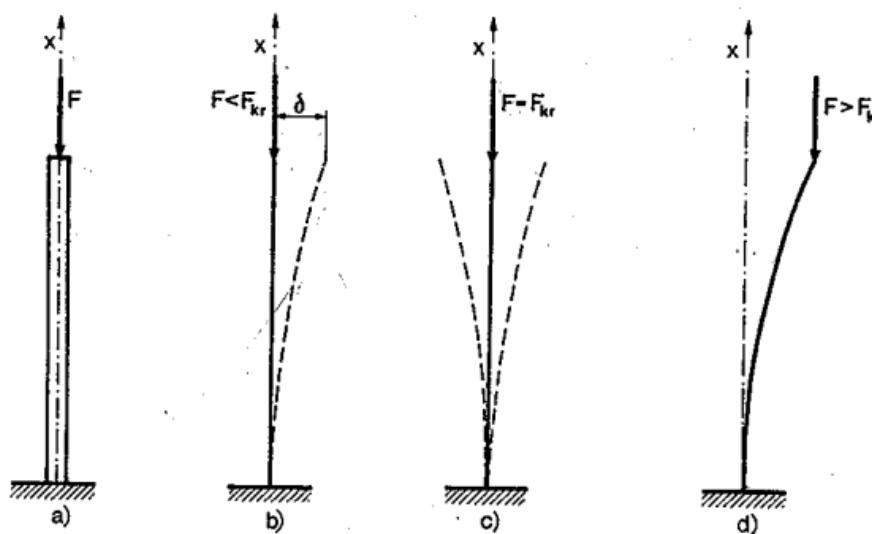
$$F\delta = c\delta l$$

štap će, nakon što prestane djelovati bočno opterećenje koje je uzrokovalo mali bočni pomak δ , zadržati novi položaj definiran bočnim pomakom δ koji je zadan. To je položaj indiferentne ravnoteže. Iz prethodnog izraza dobiva se definicija kritičnog opterećenja (sile).

$$F_{kr} = cl$$

Kritično opterećenje (silu) možemo odrediti pomoću dvije metode tj. statičkom ili energijskom metodom. Sličan problem stabilnosti ravnoteže javlja se i kod elastičnog odnosno deformabilnog tijela. Pod djelovanjem opterećenja dolazi do deformacije elastičnog tijela sve dok se ne uspostavi ravnoteža vanjskih i unutarnjih sila. Ovisno o tome ravnotežni deformirani oblik tijela može biti stabilan, labilan ili indiferentan, što ovisi o veličini opterećenja koje djeluje na tijelo.

Možemo promotriti elastičnu ravnotežu ravnoga štapa koji je aksijalno centrično opterećen na tlak (sl. 2.1.3.a). Pritom pretpostavljamo da je promatrani štap idealno ravan, idealno centrično opterećen te da je izrađen od homogenog materijala. Pri djelovanjem tlačne sile F dolazi do skraćanja štapa, ali se zadržava ravan oblik (sl. 2.1.3.a).



Slika 2.1.3. Elastična ravnoteža ravnog tlačno opterećenog štapa [1]

Ukoliko su vrijednost i sile F relativno male (manje od neke kritične vrijednosti, $F < F_{kr}$) ravan je oblik ravnoteže štapa stabilan (sl. 2.1.3.b).

Ako se kratkotrajnim djelovanjem nekog manjeg bočnog opterećenja štap pomakne iz njegova ravnotežnog položaja, nakon prestanka djelovanja tog opterećenja, štap se vraća u prethodni ravni oblik koji predstavlja njegov stabilni oblik ravnoteže. S druge strane, pri kritičnoj vrijednosti sile F (označavamo s $F = F_{kr}$) štap se ne vraća u prvobitni ravan oblik nakon prestanka djelovanja bočnog opterećenja, već zadržava novi oblik koji je izazvan tim opterećenjem (sl. 2.1.3.c). Tada govorimo o kritičnom stanju štapa.

U slučaju da sila F prijeđe kritičnu vrijednost ($F > F_{kr}$), ravan oblik ravnoteže štapa postaje labilan (sl. 2.1.3.d). Tada vrlo malo bočno opterećenje stvara velike progibe. Nakon prestanka djelovanja opterećenja ti progibi ne iščezavaju već i dalje rastu zbog aksijalnog opterećenja.

Opisana pojava gubitka stabilnosti ravnoga štapa opterećena centričnom tlačnom silom naziva se **izvijanje**. Granična vrijednost centrične tlačne sile, do koje je prvobitni ravan oblik ravnoteže štapa još stabilan, naziva se **kritičnom silom** i označava se s F_{kr} . Ako promatramo stvarne uvjete, izvijanje štapa nastupa čim tlačna sila F dostigne kritičnu vrijednost. Kako bi smo bili sigurni da neće doći do izvijanja, odnosno do gubitka stabilnosti štapa koji je opterećen centričnom tlačnom silom F , sljedeći uvjet stabilnosti mora biti ispunjen:

$$F \leq F_{i\ dop}$$

gdje je:

$$F_{i\ dop} = \frac{F_{kr}}{k_i}$$

pri čemu se k_i naziva koeficijentom sigurnosti protiv izvijanja. Uzima se da je koeficijent sigurnosti protiv izvijanja nešto veći od koeficijenta sigurnosti čvrstoće, zbog toga što postoje i dodatni faktori koji mogu utjecati na sigurnost protiv izvijanja. Iz navedenog možemo zaključiti kako se proračun stabilnosti štapa svodi na ponajprije određivanje kritične sile F_{kr} za različite oblike i dimenzije štapova koji mogu biti izrađeni od različitih materijala. Pri određivanju kritične sile služimo se teorijom drugog reda.

2.2 IZVIJANJE ŠTAPA U ELASTIČNOM PODRUČJU, EULEROVA KRITIČNA SILA

Leonhard Euler je 1774. godine prvi istražio stabilnost štapova koji su aksijalno opterećeni na tlak. On je tada izveo izraz za kritičnu silu i pokazao kako ona ovisi o načinu učvršćenja na krajevima štapa. Glavna ideja Eulerove metode sastoji se u određivanju sile uslijed koje su jednako mogući ravan i krivocrtan oblik štapa. Prema načinu učvršćivanja krajeva štapa razlikujemo četiri osnovna slučaja izvijanja štapa.

a) Štap zglobno učvršćen na oba kraja (sl. 2.2.1.a)

Glavna tvrdnja je da, dok je god centrična tlačna sila F manja od kritične sile F_{kr} štap ostaje ravan (sl. 2.2.1.a). S druge strane, ukoliko sila F dostigne kritičnu vrijednost F_{kr} , onda je osim ravnog oblika podjednako moguć i krivocrtan oblik štapa (sl. 2.2.1.b). Moment savijanja koji se pojavljuje u nekom od presjeka izvijenog štapa prikazujemo izrazom:

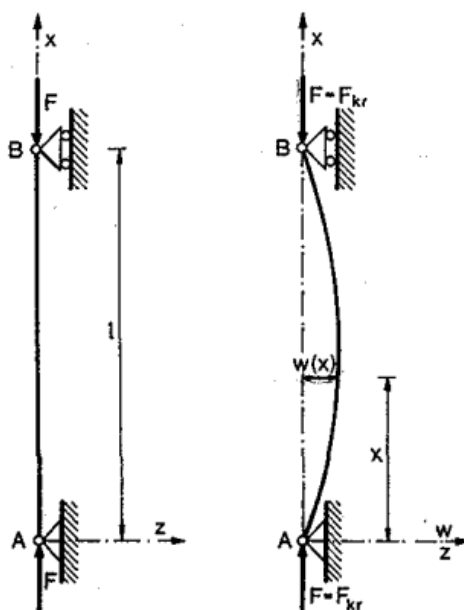
$$M = F \cdot w$$

Diferencijalna jednadžba elastične linije u tom slučaju glasi:

$$\frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{M}{EI_{min}} = -\frac{F \cdot w}{EI_{min}} \quad (2.2.1)$$

Uz pretpostavku da se radi o malim progibima, jednadžbu (2.2.1) možemo zamijeniti približnom linearnom diferencijalnom jednadžbom:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{F \cdot w}{EI_{min}} \quad (2.2.2)$$



Slika 2.2.1. Djelovanje tlačne sile na štap zglobno učvršćen na oba kraja [1]

Iz svega možemo zaključiti kako izvijanje štapa nastaje u ravnini najmanje savojne krutosti štapa (zato u izraz (2.2.1) ulazi I_{min} - minimalni moment tromosti poprečnoga presjeka štapa). Predznak minus na desnoj strani diferencijalne jednačbe (2.2.1) koristimo zbog toga što su vrijednosti $\frac{d^2w}{dx^2}$ i w imaju suprotne predznake bez obzira na izbor pozitivnog smjera koordinatne osi z . Ako uvedemo oznaku:

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_{min}} \quad (2.2.3)$$

onda dobijemo da je:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha^2 w = 0 \quad (2.2.4)$$

Ta jednačba naziva se homogena diferencijalna jednačba 2. reda s konstantnim koeficijentima. Opće rješenje te jednačbe glasi:

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x \quad (2.2.5)$$

Iz rubnih uvjeta koji su također homogeni dobivamo konstante integracije A i B , a oni glase:

$$w(0) = 0 \quad i \quad w(l) = 0 \quad (2.2.5)$$

Iz prvog uvjeta dobivamo da je $B = 0$. Izraz (2.2.4) poprima sljedeći oblik:

$$w = A \sin \alpha x \quad (2.2.7)$$

Iz drugog uvjeta proizlazi:

$$A \sin \alpha l = 0 \quad (2.2.8)$$

U ovom trenutku su moguća dva različita slučaja: $A = 0$ ili $\sin \alpha l = 0$. U slučaju da je $A = 0$ dobijemo trivijalno rješenje oblika $w(x) = 0$, koje pokazuje da je ravan oblik štapa jedan od mogućih ravnotežnih oblika štapa. Budući da za izvijeni oblik štapa vrijedi $A \neq 0$, onda je:

$$\sin \alpha l = 0 \quad (2.2.9)$$

Iz toga slijedi uvjet za kritično stanje štapa:

$$\alpha l = n\pi \quad ili \quad \alpha = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.2.10)$$

Jednačba elastične linije glasi:

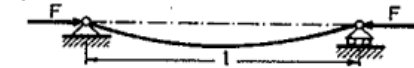
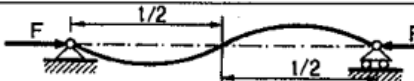
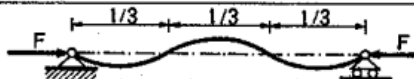
$$w = A \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (2.2.11)$$

Na temelju dvaju izraza (2.2.3) i (2.2.9) dobit ćemo da je sila pri kojoj se događa izvijanje:

$$F = \frac{n^2 \pi^2 EI_{min}}{l^2} \quad (2.2.12)$$

U tablici 2.1 navedene su vrijednosti kritične sile i prikazani odgovarajući oblici elastične linije štapa za $n = 1, 2$ i 3 .

Tablica 2.1

n	Jednadžba elastične linije	Oblik elastične linije	F
1	$w = A \sin \frac{\pi x}{l}$		$\frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2}$
2	$w = A \sin \frac{2\pi x}{l}$		$\frac{4\pi^2 EI_{min}}{l^2}$
3	$w = A \sin \frac{3\pi x}{l}$		$\frac{9\pi^2 EI_{min}}{l^2}$

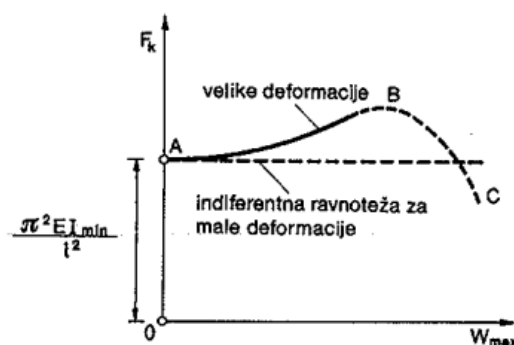
Tablica 2.1. Prikaz kritičnih sila i odgovarajućih oblika elastične linije [1]

Nas zanima najmanja moguća vrijednost kritične sile pri kojoj postoji mogućnost izvijanja štapa. Pri tom, najmanju vrijednost kritične sile F_{kr} dobit ćemo za $n = 1$ i ona iznosi:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2} \quad (2.2.13)$$

Tu silu nazivamo **Eulerova kritična** sila za štap koji je zglobno oslonjen na oba kraja. Jednadžba (2.2.11) nam pri tom daje samo oblik elastične linije dok progib ostaje neodređen. To se dogodilo zbog toga što smo zakrivljenost elastične linije izrazili približnim izrazom i promatrali samo linearnu diferencijalnu jednadžbu (2.2.2), pri čemu ona vrijedi samo za male pomake (teorija drugoga reda). Ukoliko želimo odrediti i veličinu progiba, potrebno je uzeti točan izraz za zakrivljenost i pritom riješiti nelinearnu diferencijalnu jednadžbu (2.2.1), (teorija trećeg reda).

Rješenje jednadžbe (2.2.1) prikazano je na sl. 2.2.2. krivuljom AB, a crtkanom krivuljom BC za izvijanje u plastičnom području.



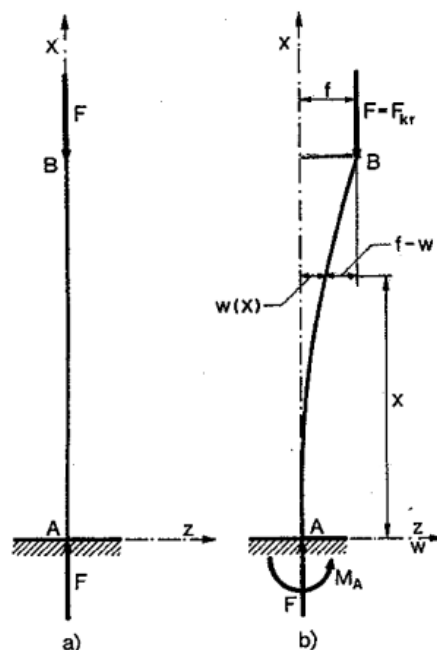
Slika 2.2.2. Rješenje nelinearne diferencijalne jednadžbe [1]

Iz prethodnih zaključaka proizlazi da se rješenje problema izvijanja svodi na integriranje homogene diferencijalne jednačbe, da bi se došlo do rješenja koje ovisi o nekom parametru (ovdje α^2), pri homogenim rubnim uvjetima. Takav matematički problem naziva se problem vlastitih vrijednosti. Svakoj vlastitoj vrijednosti odgovara određeno rješenje diferencijalne jednačbe, tzv. vlastita funkcija.

b) Štap na jednome kraju upet, a na drugome slobodan (sl. 2.2.3.a)

Ako se progib gornjega kraja štapa koji nam nije poznat označi s f , tada se u nekom presjeku izvijenoga štapa (sl. 2.2.3.b) pojavljuje sljedeći moment savijanja:

$$M = -F(f - w)$$



Slika 2.2.3. Djelovanje tlačne sile na štap koji je na jednom kraju upet, a na drugome slobodan [1]

Tada diferencijalna jednačba elastične linije glasi:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{F}{EI_{min}}(f - w) \quad (2.2.14)$$

a možemo je zapisati i u obliku:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha^2w = \alpha^2f \quad (2.2.15)$$

pri čemu je:

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_{min}} \quad (2.2.16)$$

Jednadžba (2.2.15) je nehomogena diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima. Opće rješenje te jednadžbe ima oblik:

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + f \quad (2.2.17)$$

Štap koji je prikazan na sl. 2.2.3.b ima sljedeće rubne uvjete:

$$w(0) = 0 \quad i \quad w'(0) = 0 \quad (2.2.18)$$

a za slobodni kraj vrijedi:

$$w(l) = f \quad (2.2.19)$$

Iz uvjeta (2.2.17) dobijemo da je $B = -f$, $A = 0$, tako da je:

$$w = f(1 - \cos \alpha X) \quad (2.2.20)$$

Iz uvjeta (2.2.19) dobivamo:

$$\cos \alpha l = 0 \quad (2.2.21)$$

Od tu vrijedi sljedeći uvjet za kritično stanje štapa:

$$\alpha l = (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.2.22)$$

U ovom slučaju najmanja vrijednost kritične sile bit će kad je $n = 1$, tj. kada vrijedi $\alpha l = \frac{\pi}{2}$:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{4l^2} \quad (2.2.23)$$

Jednadžba (2.2.15) pritom nije homogena. Kako bi smo prikazali da se i u ovom slučaju radi o problemu vlastitih vrijednosti, dvostrukim deriviranjem jednadžbe (2.2.15) dobit ćemo:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \alpha^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (2.2.24)$$

s rubnim uvjetima:

$$w(0) = w'(0) = 0 \quad i \quad w''(l) = w'''(l) = 0$$

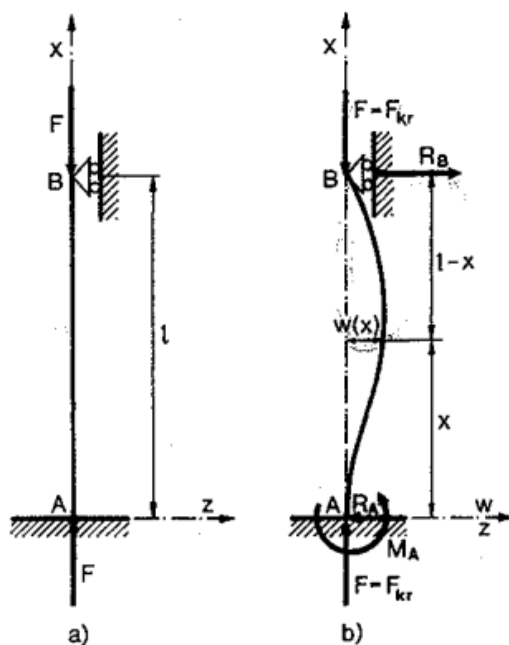
c) Štap na jednome kraju upet, a na drugome slobodno oslonjen (sl. 2.2.4.a)

U trenutku kada sila F dostigne kritičnu vrijednost, uočavamo kako je osim ravnog oblika jednako moguć i izvijeni oblik štapa (sl. 2.2.4.b). Pri tom se kod izvijanja pojavljuju ležajne reakcije $R_A = R_B$ i reaktivni moment M_A . Moment savijanja u nekom presjeku štapa glasi:

$$M = F_w - R_B(l - x)$$

a diferencijalna jednačba elastične linije dana je izrazom:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{Fw}{EI_{min}} = \frac{R_B}{EI_{min}}(l - x) \quad (2.2.25)$$



Slika 2.2.4. Djelovanje tlačne sile na štap koji je na jednom kraju upet, a na drugome slobodno oslonjen [1]

Uvedemo li oznaku:

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_{min}} \quad (2.2.26)$$

onda ćemo dobiti da je:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha^2 w = \frac{R_B}{F} \alpha^2 (l - x) \quad (2.2.27)$$

Opće rješenje nehomogene jednačbe (2.2.27) im sljedeći oblik:

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{R_B}{F} (l - x) \quad (2.2.28)$$

S obzirom da je sam zadatak jedanput statički neodređen, uz konstante integracije A i B , i reakcija R_B je nepoznata, pa su u ovom slučaju rubni uvjeti:

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 & (a) \\ w'(0) &= 0 & (b) \\ w(l) &= 0 & (c) \end{aligned} \tag{2.2.29}$$

Deriviranjem izraza (2.2.28) proizlazi:

$$\frac{dw}{dx} = \alpha A \cos \alpha x - \alpha B \sin \alpha x - \frac{R_B}{F} \tag{2.2.30}$$

Iz rubnog uvjeta (2.2.29.a) nalazimo:

$$B + \frac{R_B l}{F} = 0$$

odakle je:

$$B = -\frac{R_B l}{F} \tag{2.2.31}$$

Iz rubnog uvjeta (2.2.29.b) vrijedi:

$$\alpha A - \frac{R_B}{F} = 0$$

ili

$$\alpha A = \frac{R_B}{F} \tag{2.2.32}$$

Ako dobivene vrijednosti uvrstimo za integracijske konstante A i B u izraz (2.2.28) dobit ćemo jednadžbu elastične linije koja ima oblik:

$$w = \frac{R_B}{F} \left[\frac{1}{\alpha} \sin \alpha x - l \cos \alpha x + (l - x) \right] \tag{2.2.33}$$

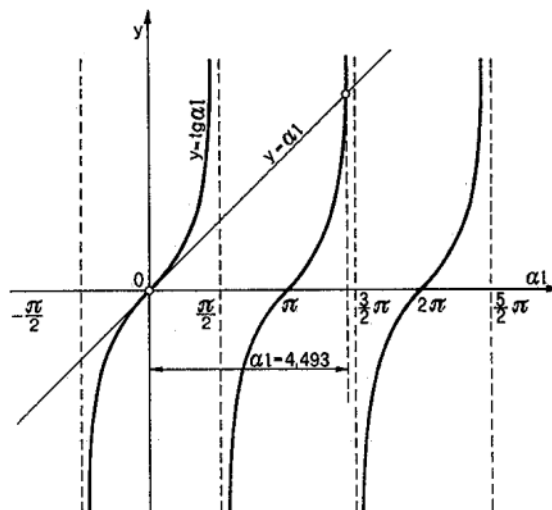
Iz rubnog uvjeta (2.2.29.c) dobivamo:

$$\frac{R_B}{F} \left(\frac{1}{\alpha} \sin \alpha l - l \cos \alpha l \right) = 0$$

S obzirom da je $\frac{R_B}{F} \neq 0$, onda je:

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l \tag{2.2.34}$$

Rješenje te transcendentne jednadžbe možemo dobiti grafičkim putem (sl. 2.2.5). U tom slučaju korijenima jednadžbe (2.2.34) odgovaraju apscise sjecišta pravca $y = \alpha l$ i funkcije $y = \operatorname{tg} \alpha l$, a najmanji korijen te jednadžbe ima vrijednost $\alpha l = 4,493$.



Slika 2.2.5. Rješenje transcendentne jednadžbe ($\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l$) [1]

Kritična sila izvijanja ima oblik:

$$F_{kr} = \alpha^2 EI_{min} = \frac{4,493^2 EI_{min}}{l^2} = \frac{20,187 EI_{min}}{l^2} \approx \frac{2\pi^2 EI_{min}}{l^2} \quad (2.2.35)$$

d) Štap upet na oba kraja (sl. 2.2.6.a)

U slučaju da pretpostavimo da je oblik izvijenoga štapa simetričan, (sl. 2.2.6.b), momenti upetosti su onda na oba kraja štapa jednaki. U nekom presjeku izvijenoga štapa u tom slučaju pojavljuje se sljedeći moment savijanja:

$$M = F w - M_0$$

Diferencijalna jednadžba elastične linije glasi:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{F}{EI_{min}} w = \frac{M_0}{EI_{min}} \quad (2.2.36)$$

Ako uvedemo oznaku:

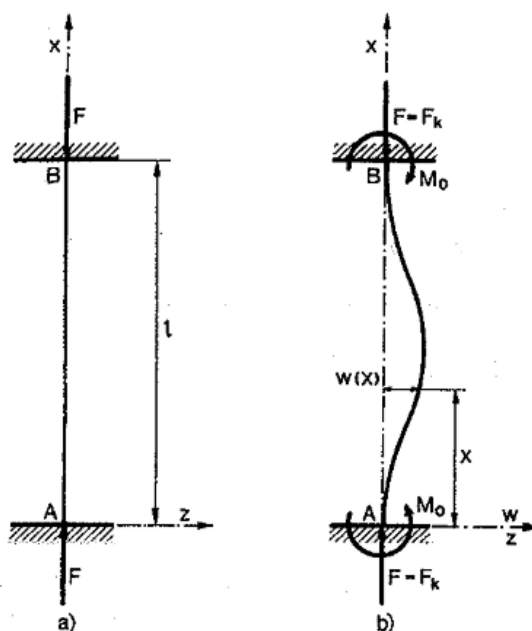
$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_{min}} \quad (2.2.37)$$

dobit ćemo da je:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha^2 w = \frac{M_0}{F} \alpha^2 \quad (2.2.38)$$

Opće rješenje ove jednadžbe glasi:

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{M_0}{F} \quad (2.2.39)$$



Slika 2.2.6. Djelovanje tlačne sile na štup upet na oba kraja [1]

Rubni uvjeti u tom slučaju su:

$$w(0) = 0 \quad (a)$$

$$w'(0) = 0 \quad (b) \quad (2.2.40)$$

$$w(l) = 0 \quad (c)$$

$$w'(l) = 0 \quad (d)$$

Ako deriviramo izraz (2.2.39), dobit ćemo da je:

$$\frac{dw}{dx} = \alpha A \cos \alpha x - \alpha B \sin \alpha x$$

Rubni uvjet (2.2.40.a) daje:

$$B + \frac{M_0}{F} = 0 \quad \text{ili} \quad B = -\frac{M_0}{F}$$

Iz uvjeta (2.2.40.b) dobit ćemo da je $A = 0$. Nakon toga jednadžbu (2.3.39) možemo prikazati u sljedećem obliku:

$$w = \frac{M_0}{F} (1 - \cos \alpha x) \quad (2.2.41)$$

ili kao:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{M_0}{F} \alpha \sin \alpha x$$

Iz rubnog uvjeta (2.2.40.c) dobivamo:

$$w(l) = \frac{M_0}{F} (1 - \cos \alpha l) = 0$$

S obzirom da je $\frac{M_0}{F} \neq 0$, onda vrijedi:

$$\cos \alpha l = 1 \quad (2.2.42)$$

Uvjet (2.2.40.d) nam daje:

$$w'(l) = \frac{M_0}{F} \alpha \sin \alpha l = 0$$

odnosno:

$$\sin \alpha l = 0 \quad (2.2.43)$$

Pri tom su jednadžbe (2.2.42) i (2.2.43) zadovoljene za:

$$\alpha l = 2n\pi, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Najmanju vrijednost kritične sile dobit ćemo kada je $n = 1$, tj.:

$$F_{kr} = \frac{4\pi^2 EI_{min}}{l^2} \quad (2.2.44)$$

Ako usporedimo izraze (2.2.13), (2.2.23), (2.2.35) i (2.2.44), primjećujemo da u svim navedenim slučajevima izraz za kritičnu silu možemo prikazati u općem obliku:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2} \quad (2.2.45)$$

gdje je μ koeficijent duljine izvijanja štapa koji iznosi:

$$\mu = \frac{1}{n} \quad (2.2.46)$$

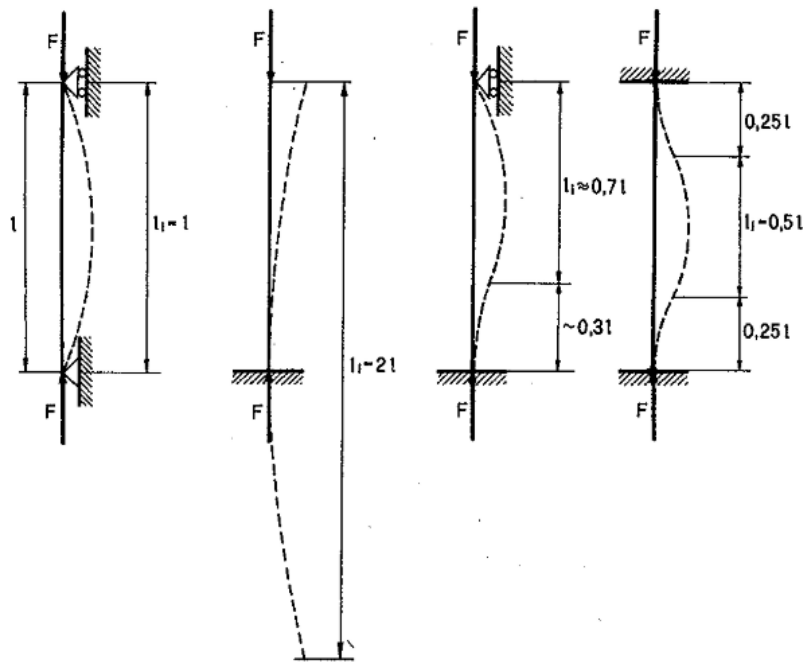
gdje je n broj poluvalova sinusoide elastične linije izvijena štapa. Ako označimo:

$$l_i = \mu l \quad (2.2.47)$$

onda izraz (2.2.45) možemo napisati u sljedećem obliku:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_i^2} \quad (2.2.48)$$

pri čemu je l_i duljina izvijanja. Duljina izvijanja je zapravo dio duljine nekog štapa na kojoj će se pojaviti jedan poluval sinusoide, tj. duljina između dviju susjednih točaka infleksije elastične linije izvijenoga štapa. Na sl. 2.2.7. prikazana su četiri osnovna načina učvršćenja štapa na krajevima s odgovarajućim duljinama izvijanja l_i .



Slika 2.2.7. Četiri osnovna načina učvršćenja štapa i pripadajuća izvijanja [1]

$n = 1$	$n = \frac{1}{2}$	$n = \frac{3}{2}$	$n = 2$
$\mu = 1$	$\mu = 2$	$\mu \approx 0,7$	$\mu = 0,5$
$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2}$	$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(2l)^2}$	$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(0,7l)^2}$	$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(0,5l)^2}$

(2.2.49)

Iz izraza (2.2.48) uočavamo kako kritična sila ovisi o materijalu štapa, poprečnome presjeku štapa, duljini štapa i o načinu učvršćenja njegovih krajeva. Četiri osnovna načina učvršćenja štapa prikazan su na sl. 2.2.7. Međutim, u konstrukciji su ipak rijetko ostvareni ti idealni načini učvršćenja, te je sam štap najčešće na kraju elastično upet ili elastično oslonjen.

2.3 KRITIČNO NAPREZANJE

Štap koji je opterećen na pritisak aksijalno, nastavlja zadržavati ravan oblik ravnoteže u kritičnom stanju, pa kritično naprežanje u štapu u trenutku izvijanja iznosi:

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_i^2 A} \quad (2.3.1)$$

Ako uzmemo u obzir da je minimalni polumjer tromosti presjeka:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$$

možemo napisati:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{l_i^2}$$

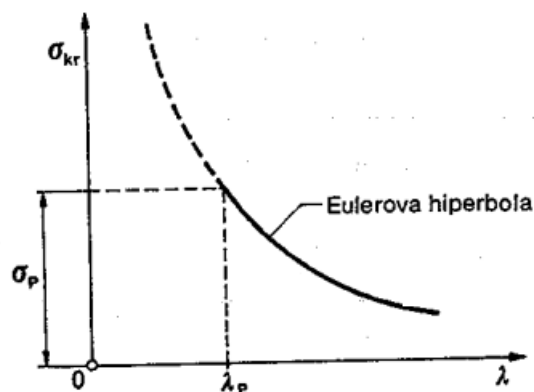
ili:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (2.3.2)$$

pri čemu je:

$$\lambda = \frac{l_i}{i_{min}} \quad (2.3.3)$$

bezdimenzijska karakteristika štapa koja se naziva vitkost štapa.



Slika 2.3.1. Eulerova hiperbola [1]

Iz izraza (2.3.2) možemo uočiti da kritično naprežanje σ_{kr} ovisi o svojstvima materijala i o vitkosti štapa. Funkcionalna ovisnost (2.3.2) između kritičnog naprežanja σ_{kr} i λ prikazana je

Eulerovom hiperbolom u koordinatnome sustavu λ , σ_{kr} (sl. 2.3.1). Važno je spomenuti kako izraz (2.3.2) možemo primijeniti samo u slučaju kritičnog naprezanja σ_{kr} koje ne prelazi granicu proporcionalnosti σ_p materijala pri jednoosnome pritisku, odnosno razmatramo područje u kojem se materijal ponaša linearno elastično tj. kada vrijedi uvjet:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_p$$

ili:

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \lambda_p$$

gdje je λ_p granična vitkost, te se Eulerovi izrazi za kritičnu silu i kritično naprezanje ne mogu primijeniti ispod te vrijednosti. Na osnovu toga zaključujemo da se štapovi koji imaju velike vitkosti $\lambda \geq \lambda_p$ izvijaju se u elastičnom području, dok se štapovi male i srednje vitkosti:

$$\lambda < \lambda_p, \sigma_{kr} > \sigma_p$$

izvijaju u plastičnom području. Iz raznih pokusa se može uočiti da je stvarno kritično naprezanje za štapove male i srednje vitkosti zapravo uvijek manje od Eulerova kritičnog naprezanja. Sukladno tome, izrazito je opasno i pogrešno za sigurnost konstrukcije, koristiti Eulerove izraze za kritičnu silu i kritično naprezanje za štapove koji se izvijaju u plastičnom području.

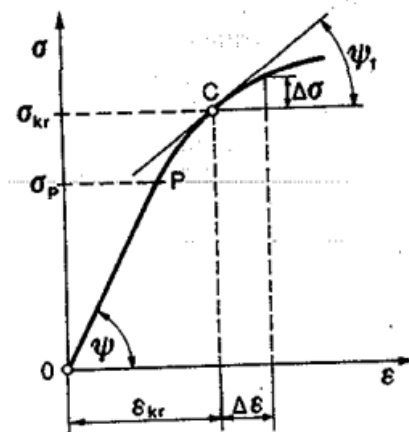
2.4 IZVIJANJE ŠTAPA U PLASTIČNOM PODRUČJU

Problem koji predstavlja izvijanja štapa u plastičnom području prvi je istraživao Engesser 1889. godine, te je pritom krenuo od sljedećih pretpostavki:

1. Štap je idealno ravan i izrađen od homogena materijala.
2. Štap je zglobno učvršćen na krajevima i idealno centrično opterećen na tlak.
3. Progibi su zbog savijanja štapa mali.
4. Bernoullijeva hipoteza ravnih presjeka pri savijanju vrijedi i za plastično područje.
5. Modul elastičnosti u nekoj točki C dijagrama $\sigma - \varepsilon$ (sl. 2.4.1.) izražava se tangentnim modulom, koji je definiran izrazom:

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \operatorname{tg}\psi_1 \quad (2.4.1)$$

te je uz to pretpostavio i da je tangentni modul u blizini točke C konstantan, što samim time odgovara pretpostavci da se u blizini točke C linija opterećenja jednaka s linijom rasterećenja.



Slika 2.4.1. $\sigma - \varepsilon$ dijagram (Modul elastičnosti u nekoj točki C dijagrama u kojoj je linija opterećenja jednaka s linijom rasterećenja) [1]

Oblik izvijenoga štapa opterećenog centričnom kritičnom silom F_{kr} prikazan je na sl. 2.4.2.a.

Neka se u nekom presjeku x štapa javlja moment savijanja $M = F_{kr} \cdot w$ te uzdužna sila F_{kr} . Pri tom su dijagrami naprezanja i deformacija u tom promatranom presjeku prikazani na sl. 2.4.2.b. U tim su dijagramima σ_{kr} i ε_{kr} naprezanja i deformacije uzrokovane centričnom silom F_{kr} te odgovaraju točki C na sl. 2.4.1. Također, dopunsku deformaciju zbog savijanja označujemo:

$$\Delta\varepsilon = \frac{z}{\rho} \quad (2.4.2)$$

Zbog savijanja u vlačnoj i tlačnoj zoni pripadajuća dopunska naprezanja poprečnoga presjeka možemo prikazati slično Hookeovu zakonu:

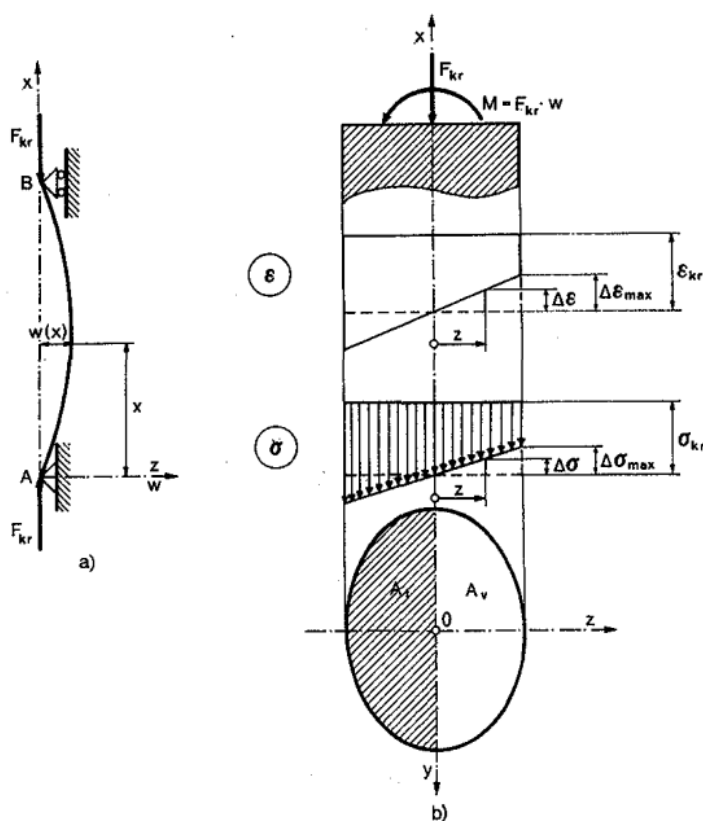
$$\Delta\sigma = E_t \cdot \Delta\varepsilon = E_t \frac{z}{\rho} \quad (2.4.3)$$

Pri tom je ukupno naprezanje u nekoj točki promatranog presjeka:

$$\sigma = \sigma_{kr} \cdot \Delta\sigma = \sigma_{kr} + E_t \frac{z}{\rho} \quad (2.4.4)$$

Uvjet ravnoteže promatranog dijela štapa $\sum F_x = 0$, dovodi do:

$$\int_A \sigma \cdot dA = F_{kr} + \frac{E_t}{\rho} \int_A z \cdot dA$$



Slika 2.4.2. Izvijanje. Deformacija i naprezanje štapa opterećenog kritičnom silom [1]

Iz toga slijedi da je:

$$\int_A z \cdot dA = 0 \quad (2.4.5)$$

što znači da neutralna os ide težištem poprečnog presjeka zbog djelovanja momenta savijanja.

Iz uvjeta $\sum M_y = 0$, dobijemo da je:

$$M = \int_A \sigma \cdot z \cdot dA = \sigma_{kr} \int_A z \cdot dA + \frac{E_t}{\rho} \int_A z^2 \cdot dA = F \cdot w$$

Uzmemo li u obzir izraz (2.4.5) i činjenicu da integral:

$$\int_A z^2 \cdot dA = I_y = I_{min}$$

predstavlja moment tromosti poprečnoga presjeka s obzirom na os najmanje krutosti, dobit ćemo:

$$\frac{1}{\rho} = E_t \cdot I_{min} = F \cdot w$$

odnosno:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{F \cdot w}{E_t \cdot I_{min}} \quad (2.4.6)$$

Ako pri tom pretpostavimo da su progibi mali, zakrivljenost možemo prikazati približnim izrazom:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2w}{dx^2} \quad (2.4.7)$$

Na taj način dobivamo diferencijalnu jednadžbu elastične linije štapa koji se izvija u plastičnom području

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{F \cdot w}{E_t \cdot I_{min}} = 0 \quad (2.4.8)$$

Jedina razlika između diferencijalnih jednadžbi (2.4.8) i (2.2.39) je u tome, što umjesto E u jednadžbi (2.2.39) dolazi E_t u jednadžbi (2.4.8). Iz toga možemo zaključiti da se prethodno dobiveni izrazi za kritičnu silu i naprezanje u elastičnom području tehnički mogu zadržati i u plastičnom ako se modul elastičnosti E zamijeni tangentnim modulom E_t .

Tako dobivamo:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 E_t I_{min}}{l_i^2} \quad (2.4.9)$$

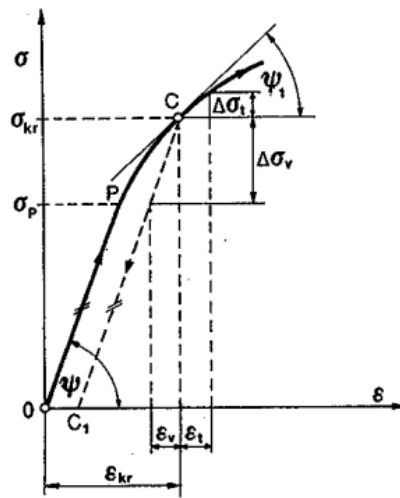
$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} \quad (2.4.10)$$

Izraz (2.4.9) pri tom možemo prikazati na sljedeći način:

$$F_{kr} = \frac{E_t}{E} \cdot \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_i^2} = \frac{E_t}{E} F_c \quad (2.4.11)$$

gdje je F_c Eulerova kritična sila.

F. S. Jasinski upozorio je 1893. godine na činjenicu da je u dijagramu $\sigma - \varepsilon$ linija rasterećenja CC_1 paralelna s pravcem OP (sl. 2.4.3).



Slika 2.4.3. Jasinski $\sigma - \varepsilon$ dijagram (linija rasterećenja CC_1 paralelna s pravcem OC) [1]

Uzimajući u obzir tu primjedbę Engesser je 1895. godine dopunio svoja istraživanja, te je pritom uzeo u obzir da će pri savijanju dio presjeka štapa biti rasterećen napreznjima zbog savijanja i da će za taj dio presjeka vrijediti modul elastičnosti E , ali će na drugom dijelu štapa ipak vrijediti tangenti modul E_t . U nekom presjeku x štapa (sl. 2.4.4.a) raspodjela deformacija i napreznja prikazana je na sl. 2.4.4.b.

Zbog savijanja u tlačnoj i vlačnoj zoni presjeka štapa u kritičnom stanju, dopunska beskonačna mala napreznja su:

$$\Delta\sigma_t = E_t \cdot \Delta\varepsilon = E_t \frac{z}{\rho}, \quad E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = tg\psi_1$$

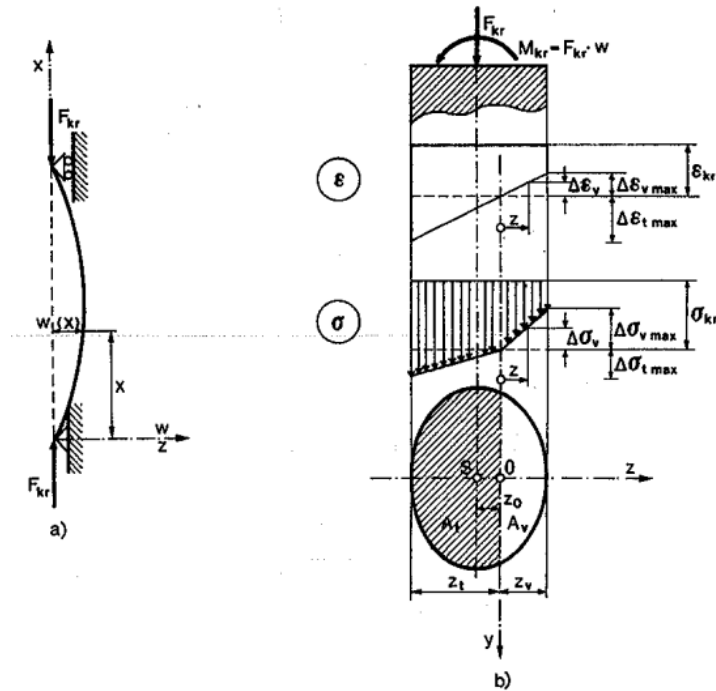
$$\Delta\sigma_v = E \cdot \Delta\varepsilon = E \frac{z}{\rho}, \quad E = tg\psi$$

Uzdužna sila u poprečnome presjeku je konstanta pri beskonačno malim progibima štapa, pri čemu vrijedi da je:

$$\int_A \Delta\sigma \cdot dA = 0$$

ili:

$$\int_A \Delta\sigma \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_{A_v} z \cdot dA - \frac{E_t}{\rho} \int_{A_t} z \cdot dA = 0 \quad (a)$$



Slika 2.4.4. Raspodjela naprezanja i deformacija štapa [1]

Iz uvjeta ravnoteže $\sum M_y = 0$ dobivamo da je:

$$\int_A \Delta\sigma \cdot z \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_{A_v} z^2 \cdot dA + \frac{E_t}{\rho} \int_{A_t} z^2 \cdot dA = M = F \cdot w \quad (b)$$

Moment aksijalne sile F odnosi se na težišnu os, dok smo moment unutarnjih sila uzeli s obzirom na neutralnu os y . Pri tom se jednadžba (a) može napisati kao:

$$ES_v - E_t S_t \quad (2.4.12)$$

pri čemu su S_t i S_v statički momenti površine A_t i A_v tlačne i vlačne zone presjeka (sl. 2.4.4) s obzirom na neutralnu os y .

Iz jednadžbe ravnoteže (b) vrijedi:

$$\frac{1}{\rho} (EI_v + E_t I_t) = F \cdot w \quad (2.4.13)$$

a tu su I_v i I_t momenti tromosti površine A_v odnosno A_t s obzirom na neutralnu os y .

Ako s I_{min} označimo minimalni moment tromosti čitavoga presjeka s obzirom na težišnu os presjeka, onda se jednadžba (2.4.13) može prikazati na sljedeći način:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{F \cdot w}{E_r I_{min}} \quad (2.4.14)$$

gdje je:

$$E_r = \frac{1}{I_{min}} (EI_v + E_t I_t) \quad (2.4.15)$$

reducirani modul ili Engesser-Kármánov modul koji ovisi o obliku poprečnoga presjeka i σ_{kr} .

Tako za poprečni presjek pravokutnog oblika vrijedi:

$$E_r = \frac{4EE_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} \quad (2.4.16)$$

Ako koristimo pretpostavku malih progiba, jednadžbu (2.4.14) možemo prikazati kao:

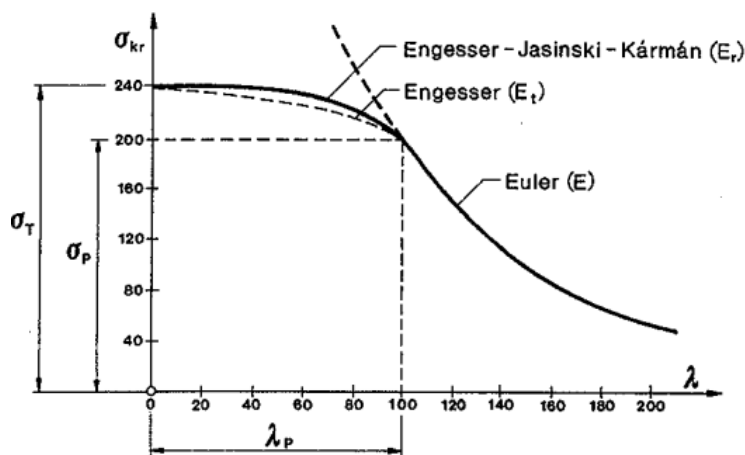
$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{F \cdot w}{E_r I_{min}} = 0 \quad (2.4.17)$$

Izrazi za kritično naprezanje i kritičnu silu pri izvijanju u plastičnom području su:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 E_r I_{min}}{l_t^2} \quad (2.4.18)$$

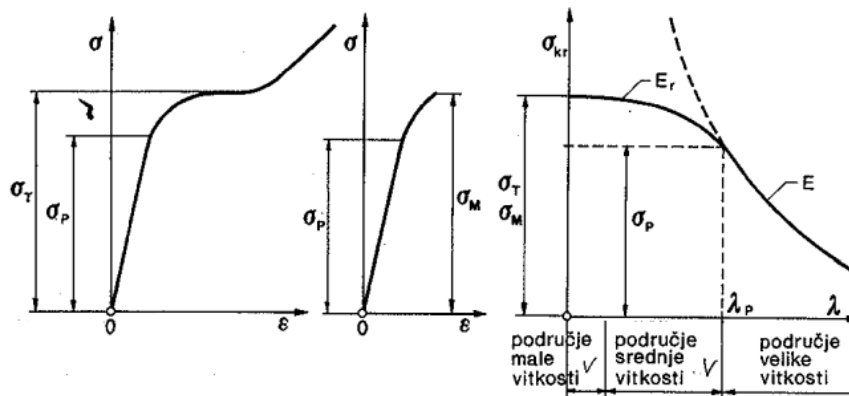
$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E_r}{\lambda^2} \quad (2.4.19)$$

Dijagram kritičnih naprezanja $\sigma_{kr} = f(\lambda)$ za čelik mehaničkih svojstava $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_p = 200$ MPa, $\sigma_t = 240$ MPa prikazan je na sl. 2.4.5.

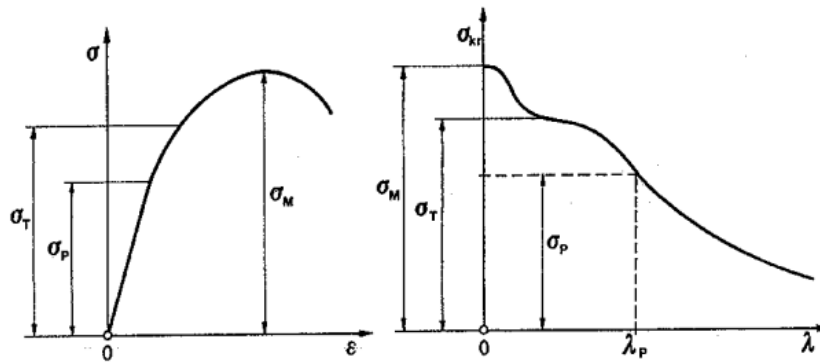


Slika 2.4.5. Dijagram kritičnih naprezanja [1]

S obzirom na to, na osnovu dijagrama pritiska možemo konstruirati dijagrame kritičnih naprežanja za različite materijale (sl. 2.4.6) i (sl. 2.4.7).



Slika 2.4.6. Tri područja vitkosti štapa [1]



Slika 2.4.7. Dijagrami naprežanja štapa [1]

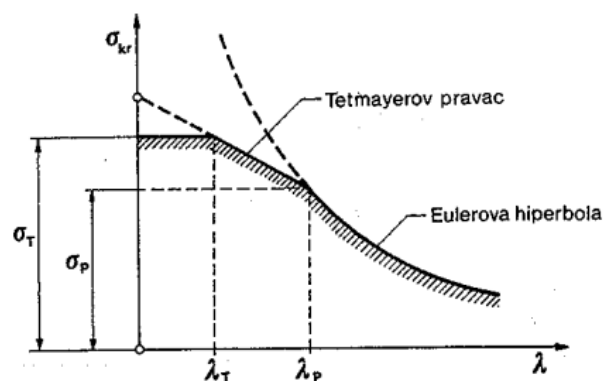
2.5 EMPIRIJSKI IZRAZ ZA KRITIČNO NAPREZANJE

Osim teorijskih istraživanja koja se odnose na problem stabilnosti tlačnih štapova, usporedno su se provodila i eksperimentalna istraživanja, pri čemu se mogu istaknuti Tetmayerova, Jasinskog, Rankinova, Engesserova istraživanja. Točnost Eulerova izraza za kritično naprezanje pri izvijanju u elastičnom području potvrdila su upravo ta istraživanja. Međutim, za kritično naprezanje pri izvijanju u plastičnom području, predloženi su empirijski izrazi koji su izvedeni na osnovu rezultata tih eksperimentalnih istraživanja.

Tetmayer, a iza njega i Jasinski, predložili su linearnu ovisnost između kritičnog naprezanja i vitkosti štapa u plastičnom području:

$$\sigma_{kr} = a - b\lambda, \quad \lambda_T \leq \lambda \leq \lambda_p \quad (2.5.1)$$

pri čemu su a i b koeficijenti koji ovise o svojstvima materijala, a oni su određeni eksperimentalnim putem. Funkcionalna ovisnost prethodno navedene jednadžbe (2.5.1) prikazana je na sl. 2.5.1. pomoću Tetmayerovog pravca. Kritično naprezanje odgovara granici proporcionalnosti σ_p pri vitkosti λ_p , a kod vitkosti λ_T kritično naprezanje dostiže granicu tečenja σ_t kod elastoplastičnih materijala, odnosno granicu čvrstoće σ_M kod krhkih materijala.



Slika 2.5.1. Tetmayerov pravac [1]

Dijagram $\sigma_{kr} = f(\lambda)$ sadrži tri dijela:

- horizontalni pravac za $0 \leq \lambda \leq \lambda_T$,
- Tetmayerov pravac za $\lambda_T \leq \lambda \leq \lambda_p$ i
- Eulerova hiperbola za $\lambda > \lambda_p$.

Samim time razlikujemo:

- štapove male vitkosti $0 \leq \lambda \leq \lambda_T$,
- štapove srednje vitkosti $\lambda_T \leq \lambda \leq \lambda_p$ i
- štapove velike vitkosti $\lambda > \lambda_p$.

2.6 DIMENZIONIRANJE ŠTAPOVA OPTEREĆENIH NA IZVIJANJE

Kod štapa koji je aksijalno opterećen na tlak, slijedeći uvjeti moraju biti ispunjeni:

1. Uvjet čvrstoće:

$$\sigma = \frac{F}{A_{neto}} \leq \sigma_{dop}$$

odnosno:

$$F \leq \sigma_{dop} \cdot A_{neto}$$

gdje je:

$$\sigma_{dop} = \frac{\sigma_K}{k}$$

σ_K predstavlja naprezanje kod kojeg materijal dolazi u nepoželjno stanje. Kod elasto-plastičnih materijala uzima se da je naprezanje σ_K jednako σ_T tj. granici tečenja, a kod krhkih materijala σ_K je obično jednako tlačnoj čvrstoći σ_M . σ_{dop} predstavlja dopušteno tlačno naprezanje, a k je koeficijent sigurnosti čvrstoće. (2.6.1)

2. Uvjet stabilnosti

$$\sigma_i = \frac{F}{A_{bruto}} \leq \sigma_{i\ dop} \quad (2.6.1)$$

odnosno:

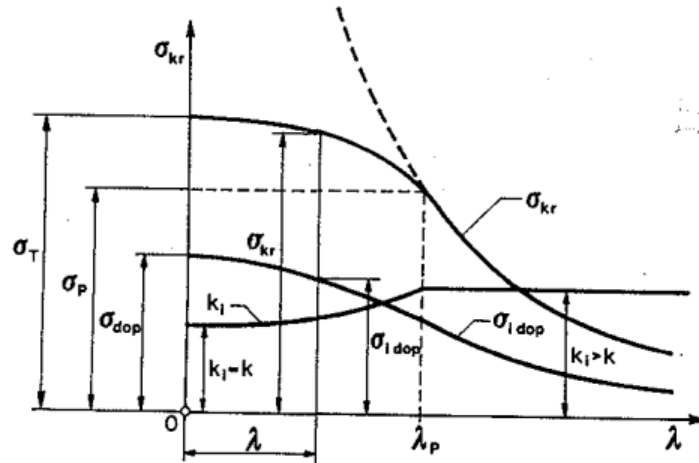
$$F \leq \sigma_{i\ dop} \cdot A_{bruto} = F_{i\ dop} \quad (2.6.2)$$

gdje je:

$$\sigma_{i\ dop} = \frac{\sigma_{kr}}{k_i}, \quad F_{i\ dop} = \frac{F_{kr}}{k_i} \quad (2.6.3)$$

$\sigma_{i\ dop}$ predstavlja dopušteno naprezanje pri izvijanju, a $F_{i\ dop}$ je dopušteno opterećenje pri izvijanju. Koeficijent k_i predstavlja sigurnosti protiv izvijanja.

U slučaju da nam je zadana krivulja $\sigma_{kr} = f(\lambda)$ i koeficijent sigurnosti protiv izvijanja k_i , onda se može konstruirati krivulja dopuštenih naprezanja pri izvijanju $\sigma_{i\ dop} = f(\lambda)$ (sl. 2.6.1).



Slika 2.6.1. Krivulja dopuštenih naprežanja pri izvijanju [1]

Prethodno je već istaknuto kako se koeficijent sigurnosti protiv izvijanja k_i uzima malo veći od koeficijenta sigurnosti čvrstoće k , ($k_i > k$) i u elastičnom području ($\lambda > \lambda_p$) ostaje konstantan. U slučaju da se radi o štapu male vitkosti, mjerodavan je proračun čvrstoće, pa je za $\lambda = 0$, $k_i = k$, pri čemu se koeficijent sigurnosti protiv izvijanja u plastičnom području ($0 \leq \lambda \leq \lambda_p$) mijenja po paraboličnom zakonu, što se može uočiti na sl. 2.6.1.

Sam postupak proračuna štapova na izvijanje može se sastojati i od određivanja dopuštenog opterećenja ili izbora poprečnog presjeka štapa.

- Ako je poprečni presjek štapa zadan, onda odredimo vitkost promatranog štapa i to kao odnos duljine izvijanja i minimalnog polumjera tromosti presjeka koji označavamo i_{min}

$$\lambda = \frac{l_i}{i_{min}}$$

- U slučaju da je $\lambda > \lambda_p$, dopušteno opterećenje možemo izračunati iz Eulerovog izraza, a u slučaju da je $\lambda < \lambda_p$, ne može se primijeniti Eulerov izraz. U tom slučaju možemo primijeniti izraze (2.4.10), (2.4.19) ili (2.5.1).

- Ako je zadano opterećenje štapa, onda metodom postupnog približavanja odabiremo poprečni presjek. Pri samom izboru oblika poprečnoga presjeka težimo tome da je što manja razlika između glavnih središnjih momenata tromosti. Međutim, ako je duljina izvijanja različita u glavnim ravninama (to ovisi o načinu učvršćenja), onda se odabiru različiti momenti tromosti da bi vitkosti bile jednake ili pak približno jednake u tim glavnim ravninama. Minimalni moment tromosti presjeka odredimo iz Eulerovog izraza:

$$I_{min} = \frac{F \cdot k_i \cdot l_i^2}{\pi^2 E}$$

nakon čega odaberemo dimenzije presjeka, koje odgovaraju momentu tromosti I_{min} kojeg smo odredili. Na kraju provjeravamo je li Eulerov izraz primjenjiv tako da izračunamo odgovarajuće vrijednosti i_{min} i λ .

Pri dimenzioniranju štapova opterećenih na izvijanje još se može upotrijebiti i tzv. ω -postupak, gdje se vrši proračun štapa opterećenog na tlak uz sljedeću pretpostavku:

$$\sigma_i = \frac{F}{A_{bruto}} \leq \sigma_{i\ dop}$$

Ako se desna strana gornje jednadžbe pomnoži s $\frac{\sigma_{dop}}{\sigma_{dop}}$, pri čemu sa σ_{dop} označujemo dopušteno tlačno naprezanje, dobit ćemo da je:

$$\frac{F}{A_{bruto}} \leq \sigma_{i\ dop} \cdot \frac{\sigma_{dop}}{\sigma_{dop}}$$

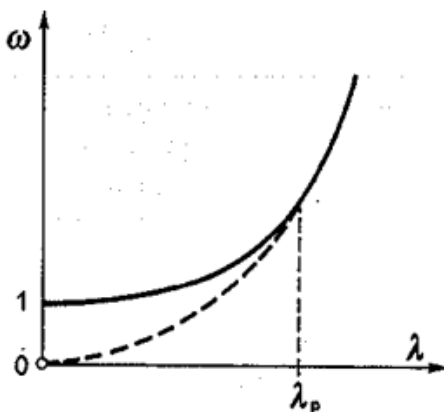
Ako uvedemo oznaku:

$$\omega = \frac{\sigma_{dop}}{\sigma_{i\ dop}} \tag{2.6.4}$$

dobit ćemo:

$$\frac{F \cdot \omega}{A_{bruto}} \leq \sigma_{dop} \tag{2.6.5}$$

Koeficijent ω pri tom nazivamo koeficijentom izvijanja, a on ovisi o vitkosti štapa.



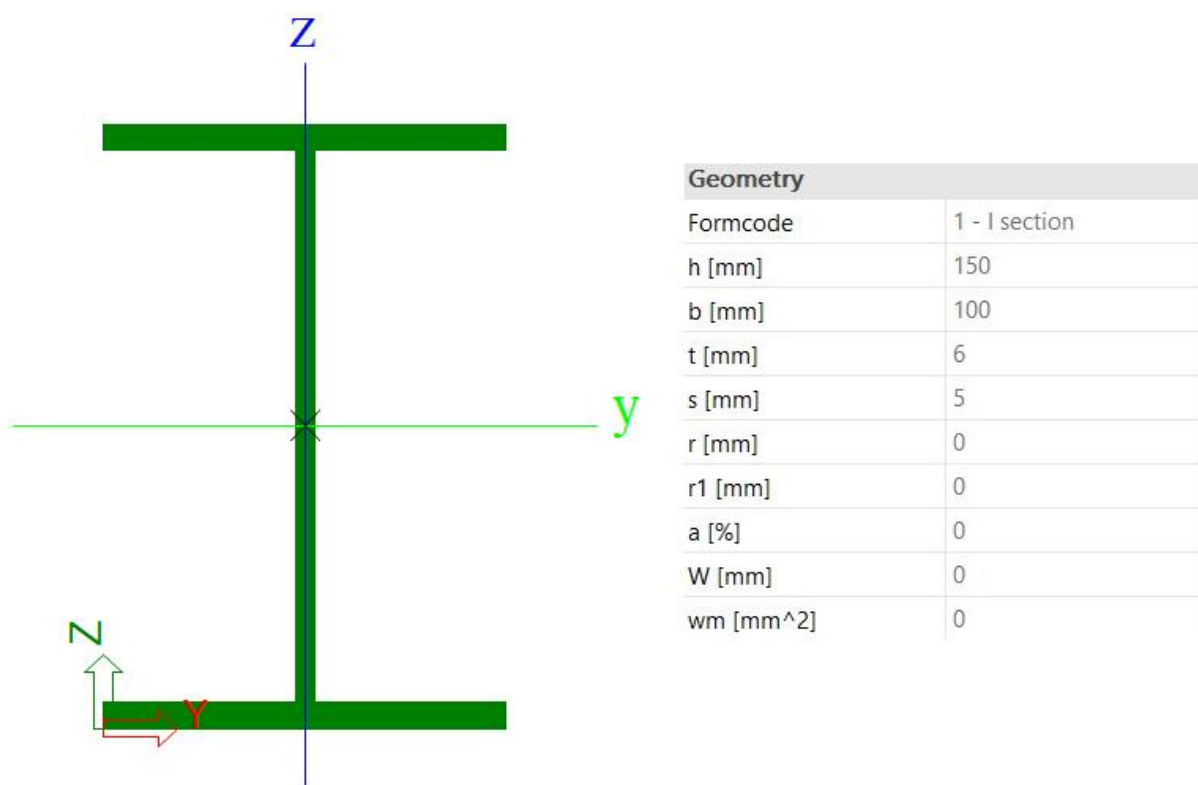
Slika 2.6.2. Dijagram $\omega = f(\lambda)$ pri čemu je ω koeficijent izvijanja a $f(\lambda)$ funkcija vitkosti o kojoj ovisi [1]

3. NUMERIČKI PRIMJER – PRIMJENA ANALITIČKOG POSTUPKA

3.1. IZVIJANJE OVISNO O NAČINU PRIDRŽANJA

U analitičkom postupku će biti prikazano određivanje kritične sile F_{kr} , dopuštenog naprezanja i opterećenja tj. F_{dop} i σ_{dop} . Pritom će se ti parametri određivati u četiri situacije odnosno za četiri različita načina pridrzanja. Na samom kraju će se prikazati utjecaj na nosivost shodno dobivenim rezultatima.

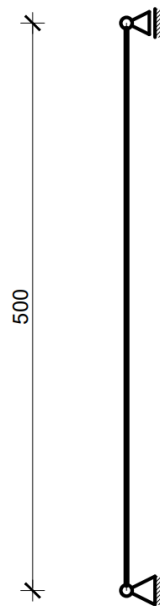
Za sam proračun je uzet štap duljine 5 metra koji se nalazi između oslonaca. Štap/element je čelični (S235), I poprečnog presjeka, odnosno CVS(NBR) 150x15. Granica proporcionalnosti $\sigma_p = 21 \text{ kN/cm}^2$, dok je modul elastičnosti $E = 2.1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$. Dimenzije poprečnog presjeka su $h = 15 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$. Poissonov koeficijent $\nu = 3.0$.



Slika 3.1.1. Karakteristike poprečnog presjeka [4]

Pri tom je s debljina hrbta, a t debljina pojasnice. h' predstavlja visinu poprečnog presjeka između pojasnica. Površina poprečnog presjeka je $A = 18.9 \text{ cm}^2$.

a) Štap zglobno učvršćen na oba kraja



Slika 3.1.2. Štap zglobno učvršćen na oba kraja [2]

Karakteristike poprečnog presjeka

- za izvijanje je kritičan minimalni moment tromosti:

$$I_{min} = \frac{b^3 t}{6} + \frac{s^3 h'}{12} = \frac{10^3 \cdot 0.6}{6} + \frac{0.5^3 \cdot 13.8}{12} = 100.14 \text{ cm}^4$$

Duljina izvijanja

- za štap zglobno učvršćen na oba kraja:

$$L_i = L = 500 \text{ cm}$$

Područje izvijanja:

$$\lambda = \frac{L_i}{i_{min}} = \frac{L_i}{\sqrt{\frac{I_{min}}{A}}} = \frac{500}{\sqrt{\frac{100.14}{18.9}}} = 217.22$$

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2.1 \cdot 10^4}{21}} = 99.35$$

- $\lambda > \lambda_p \rightarrow$ vrijedi izraz za Eulerovu kritičnu silu

Kritična sila:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L_i^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2.1 \cdot 10^4 \cdot 100.14}{500^2} = 83.02 \text{ kN}$$

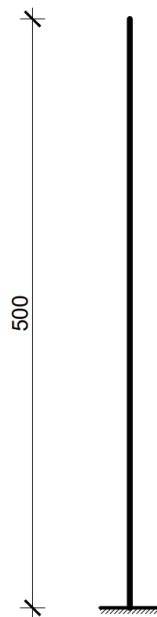
$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L_i^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2.1 \cdot 10^4}{(217.22)^2} = 4.39 \text{ kN/cm}^2$$

Dopuštena sila u štap:

$$F_{dop} = \frac{F_{kr}}{\nu} = \frac{83.02}{3} = 27.67 \text{ kN}$$

$$\sigma_{dop} = \frac{\sigma_{kr}}{\nu} = \frac{4.39}{3} = 1.46 \text{ kN/cm}^2$$

b) Štap na jednome kraju upet, a na drugome slobodan



Slika 3.1.3. Štap na jednome kraju upet, a na drugome slobodan [2]

Karakteristike poprečnog presjeka

- za izvijanje je kritičan minimalni moment tromosti:

$$I_{min} = \frac{b^3 t}{6} + \frac{s^3 h'}{12} = \frac{10^3 \cdot 0.6}{6} + \frac{0.5^3 \cdot 13.8}{12} = 100.14 \text{ cm}^4$$

Duljina izvijanja

- za štap jednome kraju upet, a na drugome slobodan:

$$L_i = 2L = 1000 \text{ cm}$$

Područje izvijanja:

$$\lambda = \frac{L_i}{i_{min}} = \frac{L_i}{\sqrt{\frac{I_{min}}{A}}} = \frac{1000}{\sqrt{\frac{100.14}{18.9}}} = 434.44$$

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2.1 \cdot 10^4}{21}} = 99.35$$

- $\lambda > \lambda_p \rightarrow$ vrijedi izraz za Eulerovu kritičnu silu

Kritična sila:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L_i^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2.1 \cdot 10^4 \cdot 100.14}{1000^2} = 20.76 \text{ kN}$$

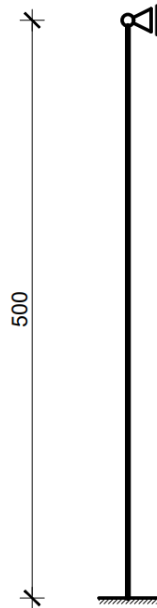
$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L_i^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2.1 \cdot 10^4}{(434.44)^2} = 1.10 \text{ kN/cm}^2$$

Dopuštena sila u štap:

$$F_{dop} = \frac{F_{kr}}{\nu} = \frac{20.76}{3} = 6.92.98 \text{ kN}$$

$$\sigma_{dop} = \frac{\sigma_{kr}}{\nu} = \frac{1.10}{3} = 0.37 \text{ kN/cm}^2$$

c) Štap na jednome kraju upet, a na drugome slobodno oslonjen



Slika 3.1.4. Štap na jednome kraju upet, a na drugome slobodno oslonjen [2]

Karakteristike poprečnog presjeka

- za izvijanje je kritičan minimalni moment tromosti:

$$I_{min} = \frac{b^3 t}{6} + \frac{s^3 h'}{12} = \frac{10^3 \cdot 0.6}{6} + \frac{0.5^3 \cdot 13.8}{12} = 100.14 \text{ cm}^4$$

Duljina izvijanja

- za štap jednome kraju upet, a na drugome kraju slobodno oslonjen:

$$L_i = 0.7L = 350 \text{ cm}$$

Područje izvijanja:

$$\lambda = \frac{L_i}{i_{min}} = \frac{L_i}{\sqrt{\frac{I_{min}}{A}}} = \frac{350}{\sqrt{\frac{100.14}{18.9}}} = 152.05$$

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2.1 \cdot 10^4}{21}} = 99.35$$

- $\lambda > \lambda_p \rightarrow$ vrijedi izraz za Eulerovu kritičnu silu

Kritična sila:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L_i^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2.1 \cdot 10^4 \cdot 100.14}{350^2} = 169.43 \text{ kN}$$

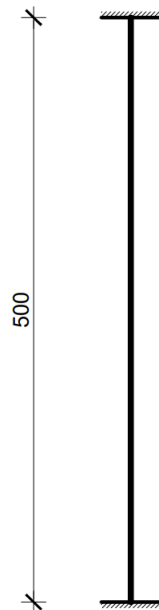
$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L_i^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2.1 \cdot 10^4}{(152.05)^2} = 8.96 \text{ kN/cm}^2$$

Dopuštena sila u štap:

$$F_{dop} = \frac{F_{kr}}{\nu} = \frac{169.43}{3} = 56.48 \text{ kN}$$

$$\sigma_{dop} = \frac{\sigma_{kr}}{\nu} = \frac{8.96}{3} = 2.99 \text{ kN/cm}^2$$

d) Štap upet na oba kraja



Slika 3.1.5. Štap upet na oba kraja [2]

Karakteristike poprečnog presjeka

- za izvijanje je kritičan minimalni moment tromosti:

$$I_{min} = \frac{b^3 t}{6} + \frac{s^3 h'}{12} = \frac{10^3 \cdot 0.6}{6} + \frac{0.5^3 \cdot 13.8}{12} = 100.14 \text{ cm}^4$$

Duljina izvijanja

- za štap upet na oba kraja:

$$L_i = 0.5L = 250 \text{ cm}$$

Područje izvijanja:

$$\lambda = \frac{L_i}{i_{min}} = \frac{L_i}{\sqrt{\frac{I_{min}}{A}}} = \frac{250}{\sqrt{\frac{100.14}{18.9}}} = 108.61$$

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2.1 \cdot 10^4}{21}} = 99.35$$

- $\lambda > \lambda_p \rightarrow$ vrijedi izraz za Eulerovu kritičnu silu

Kritična sila:

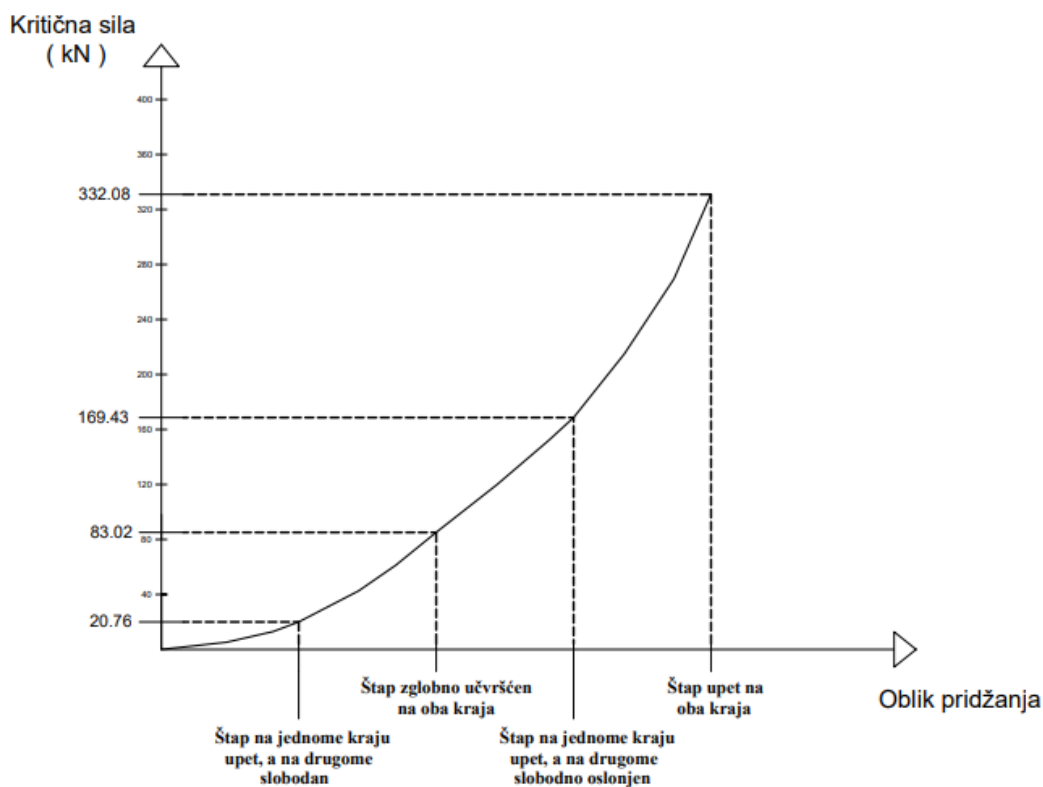
$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L_i^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2.1 \cdot 10^4 \cdot 100.14}{250^2} = 332.08 \text{ kN}$$

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L_i^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2.1 \cdot 10^4}{(108.61)^2} = 17.57 \text{ kN/cm}^2$$

Dopuštena sila u štap:

$$F_{dop} = \frac{F_{kr}}{\nu} = \frac{332.08}{3} = 110.69 \text{ kN}$$

$$\sigma_{dop} = \frac{\sigma_{kr}}{\nu} = \frac{17.57}{3} = 5.86 \text{ kN/cm}^2$$



Slika 3.1.6. Graf kritičnih sila [2]

Na sl. 3.1.6. uočavamo graf koji predstavlja vrijednosti kritičnih sila ovisno o načinu pridržanja. Možemo primijetiti kako kritična sila raste s povećanjem broja veza u ravni.

Štap zglobno učvršćen na oba kraja	Duljina izvijanja: Vitkost: Kritična sila:	$L_i = L = 500 \text{ cm}$ $\lambda = 217.22$ $F_{kr} = 83.02 \text{ kN}$
Štap na jedneme kraju upet, a na drugome slobodan	Duljina izvijanja: Vitkost: Kritična sila:	$L_i = 2L = 1000 \text{ cm}$ $\lambda = 434.44$ $F_{kr} = 20.76 \text{ kN}$
Štap na jedneme kraju upet, a na drugome slobodno oslonjen	Duljina izvijanja: Vitkost: Kritična sila:	$L_i = 0.7L = 350 \text{ cm}$ $\lambda = 152.05$ $F_{kr} = 169.43 \text{ kN}$
Štap upet na oba kraja	Duljina izvijanja: Vitkost: Kritična sila:	$L_i = 0.5L = 250 \text{ cm}$ $\lambda = 108.61$ $F_{kr} = 332.08 \text{ kN}$

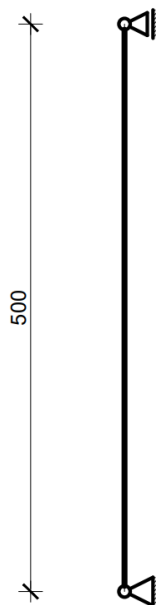
Slika 3.1.7. Tablica dobivenih vrijednosti [2]

3.2. IZVIJANJE OVISNO O PODRUČJU VITKOSTI

U analitičkom postupku će biti prikazano određivanje kritične sile F_{kr} i dopuštene sile F_{dop} u tri različita područja vitkosti, odnosno području velike, srednje i male vitkosti. Na samom kraju će se prikazati utjecaj na nosivost shodno dobivenim rezultatima.

Za sam proračun je uzet štap duljine 5 metra koji se nalazi između oslonaca. Štap/element je čelični (S235), pravokutnog presjeka. Za izvijanje u elastičnom području koristiti ćemo poprečni presjek CVS(NBR) 150x15, dimenzija $h = 15 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$. Za izvijanje u plastičnom području koristiti ćemo štap istog poprečnog presjeka ali duljine 2 metra. U oba slučaja štap će biti zglobno pridrzan na oba kraja. Granica proporcionalnosti $\sigma_p = 21 \text{ kN/cm}^2$, dok je modul elastičnosti $E = 2.1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$. Poissonov koeficijent $\nu = 3.0$.

a) Elastično područje (velika vitkost)



Slika 3.2.1. Štap zglobno učvršćen na oba kraja, elastično područje [2]

Karakteristike poprečnog presjeka

- za izvijanje je kritičan minimalni moment tromosti:

$$I_{min} = \frac{b^3 t}{6} + \frac{s^3 h'}{12} = \frac{10^3 \cdot 0.6}{6} + \frac{0.5^3 \cdot 13.8}{12} = 100.14 \text{ cm}^4$$

Duljina izvijanja

- za štap zglobno učvršćen na oba kraja:

$$L_i = L = 500 \text{ cm}$$

Područje izvijanja:

$$\lambda = \frac{L_i}{i_{min}} = \frac{L_i}{\sqrt{\frac{I_{min}}{A}}} = \frac{500}{\sqrt{\frac{100.14}{18.9}}} = 217.22$$

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2.1 \cdot 10^4}{21}} = 99.35$$

- $\lambda > \lambda_p \rightarrow$ vrijedi izraz za Eulerovu kritičnu silu

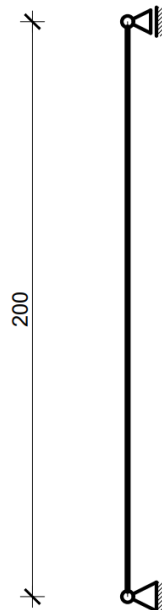
Kritična sila:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L_i^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2.1 \cdot 10^4 \cdot 100.14}{500^2} = 83.02 \text{ kN}$$

Dopuštena sila u štap:

$$F_{dop} = \frac{F_{kr}}{\nu} = \frac{83.02}{3} = 27.67 \text{ kN}$$

b) Plastično područje (srednja i mala vitkost)



Slika 3.2.2. Štap zglobno učvršćen na oba kraja, plastično područje [2]

Karakteristike poprečnog presjeka

- za izvijanje je kritičan minimalni moment tromosti:

$$I_{min} = \frac{b^3 t}{6} + \frac{s^3 h'}{12} = \frac{10^3 \cdot 0.6}{6} + \frac{0.5^3 \cdot 13.8}{12} = 100.14 \text{ cm}^4$$

Duljina izvijanja

- za štap zglobno učvršćen na oba kraja:

$$L_i = L = 200 \text{ cm}$$

Područje izvijanja:

$$\lambda = \frac{L_i}{i_{min}} = \frac{L_i}{\sqrt{\frac{I_{min}}{A}}} = \frac{200}{\sqrt{\frac{100.14}{18.9}}} = 86.89$$

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2.1 \cdot 10^4}{21}} = 99.35$$

- $\lambda < \lambda_p \rightarrow$ ne vrijedi izraz za Eulerovu kritičnu silu

- Daljnji proračun izvijanja proveden je u programu Scia Engineer gdje su nakon unesenih parametara dobiveni sljedeći podatci:

Parametri izvijanja		zz	
Vrsta izvijanja		horizontalni pomak	
Sistemska dužina	L	2,000	m
Faktor izvijanja	k	1,00	
Duljina izvijanja	l_{cr}	2,000	m
Kritična Euler opterećenje	N_{cr}	544,70	kN
Vitkost	λ	85,25	
Relativna vitkost	λ_{rel}	0,91	
granična vitkost	$\lambda_{rel,0}$	0,20	
Krivulja izvijanja		c	
Nesavršenost	α	0,49	
Redukcijski faktor	χ	0,60	
Otpornost na izvijanje	$N_{b,Rd}$	267,10	kN

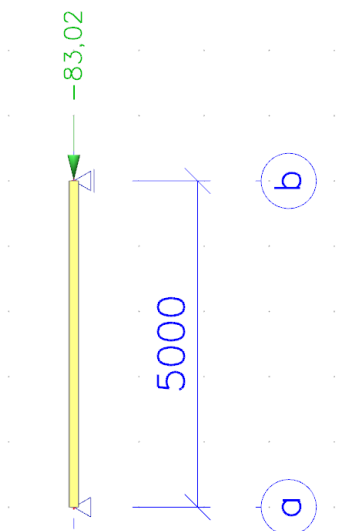
Slika 3.2.3. Tablica s parametrima izvijanja [4]

4. NUMERIČKI PRIMJER – ANALIZA U RAČUNALNOM PROGRAMU SCIA ENGINEER

U numeričkom postupku je isto kao i kod analitičkog postupka koji je proveden prethodno, prikazano određivanje kritične sile F_{kr} . U ovom slučaju sustav je diskretiziran jednodimenzionalnim konačnim elementima s zadanim poprečnim presjekom. Potom je kao i u analitičkom primjeru variran način pridržanja te dobivene vrijednosti za silu izvijanja.

Za proračun je uzet štap duljine 5 metra koji se nalazi između oslonaca. Štap/element je čelični (S235), I poprečnog presjeka, odnosno CVS(NBR) 150x15. Dimenzije poprečnog presjeka su kao i prethodno, $h = 15 \text{ cm}$ i $b = 10 \text{ cm}$.

a) Štap zglobno učvršćen na oba kraja



Slika 4.1.1. Štap zglobno učvršćen na oba kraja [4]

KLASIFIKACIJA ZA IZVIJANJE

- Klasifikacija prema EN 1993-1-1 članak 5.5.2
- Klasifikacija unutarnjih i vanjskih dijelova uglova prema normi EN 1993-1-1

Bilješka: Granica klasifikacije je postavljena prema Semi-Comp+. Poprečni presjek je klasificiran kao Klasa 2

Bilješka: Odlučujući položaj za klasifikaciju stabilnosti temelji se na faktoru iskoristivosti η prema Semi-Comp+.

PROVJERA SAVIJANJE IZVIJANJE

Prema EN 1993-1-1 članak 6.3.1.1

Unutarnja sila: **okomita sila** $N_{ed} = - 83.02$

$$N_{cr,z} = \frac{\pi^2 \times E \times I_z}{l_{cr,z}^2} = \frac{\pi^2 \times 210000,0[\text{MPa}] \times 1,0512 \cdot 10^{-6}[\text{m}^4]}{5,000[\text{m}]^2} = 87,15[\text{kN}]$$

$$\lambda_z = \frac{l_{cr,z}}{i_z} = \frac{5,000[\text{m}]}{23[\text{mm}]} = 213,13$$

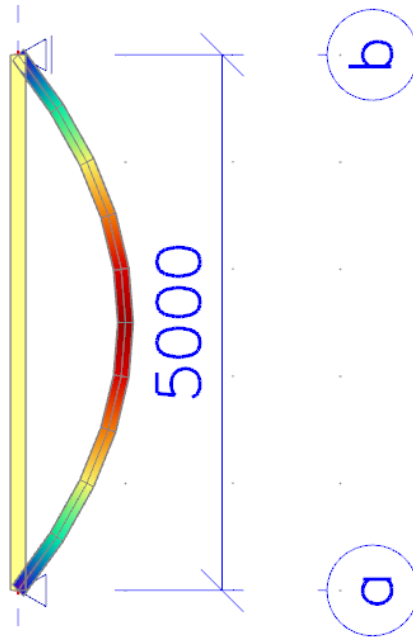
$$\lambda_{rel,z} = \frac{\lambda_z}{\pi \times \sqrt{\frac{E}{f_y}}} = \frac{213,13}{\pi \times \sqrt{\frac{210000,0[\text{MPa}]}{235,0[\text{MPa}]}}} = 2,27$$

$$\chi_z = \min \left(\frac{1}{\varphi_z + \sqrt{\varphi_z^2 - \lambda_{rel,z}^2}}, 1 \right) = \min \left(\frac{1}{3,58 + \sqrt{3,58^2 - 2,27^2}}, 1 \right) = \min(0,16, 1) = 0,16$$

$$N_{b,z,Rd} = \frac{\chi_z \times A \times f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0,16 \times 1,9100 \cdot 10^{-3}[\text{m}^2] \times 235,0[\text{MPa}]}{1,00} = 70,64[\text{kN}]$$

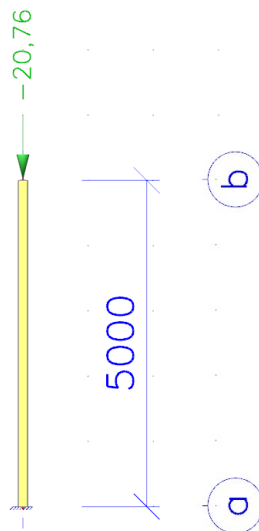
Parametri izvijanja		zz	
Vrsta izvijanja		horizontalni pomak	
Sistemska dužina	L	5,000	m
Faktor izvijanja	k	1,00	
Dužina izvijanja	l_{cr}	5,000	m
Kritična Euler opterećenje	N_{cr}	87,15	kN
Vitkost	λ	213,13	
Relativna vitkost	λ_{rel}	2,27	
granična vitkost	$\lambda_{rel,0}$	0,20	
Krivulja izvijanja		c	
Nesavršenost	α	0,49	
Redukcijski faktor	χ	0,16	
Otpornost na izvijanje	$N_{b,Rd}$	70,64	kN

Slika 4.1.2. Tablica s parametrima izvijanja [4]



Slika 4.1.3. Linija izvijanja [4]

b) Štap na jednome kraju upet, a na drugome slobodan



Slika 4.1.4. Štap na jednome kraju upet, a na drugome slobodan [4]

KLASIFIKACIJA ZA IZVIJANJE

- Klasifikacija prema EN 1993-1-1 članak 5.5.2
- Klasifikacija unutarnjih i vanjskih dijelova uglova prema normi EN 1993-1-1

Bilješka: Granica klasifikacije je postavljena prema Semi-Comp+. Poprečni presjek je klasificiran kao Klasa 2

Bilješka: Odlučujući položaj za klasifikaciju stabilnosti temelji se na faktoru iskoristivosti η prema Semi-Comp+.

PROVJERA SAVIJANJE IZVIJANJE

Prema EN 1993-1-1 članak 6.3.1.1

Unutarnja sila: **okomita sila** $N_{ed} = - 20.76$

$$N_{cr,z} = \frac{\pi^2 \times E \times I_z}{l_{cr,z}^2} = \frac{\pi^2 \times 210000,0[\text{MPa}] \times 1,0512 \cdot 10^{-6}[\text{m}^4]}{10,000[\text{m}]^2} = 21,79[\text{kN}]$$

$$\lambda_z = \frac{l_{cr,z}}{i_z} = \frac{10,000[\text{m}]}{23[\text{mm}]} = 426,25$$

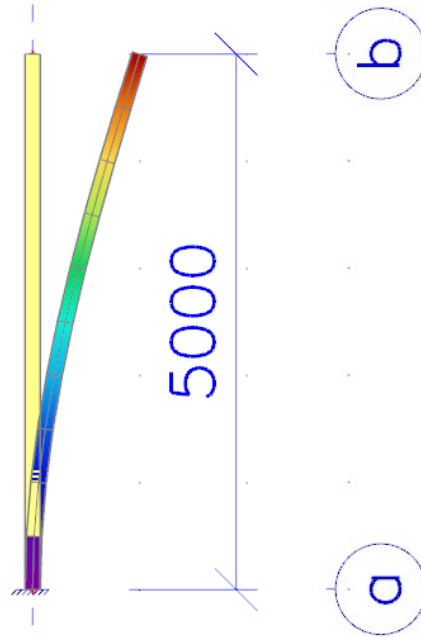
$$\lambda_{rel,z} = \frac{\lambda_z}{\pi \times \sqrt{\frac{E}{f_y}}} = \frac{426,25}{\pi \times \sqrt{\frac{210000,0[\text{MPa}]}{235,0[\text{MPa}]}}} = 4,54$$

$$\chi_z = \min \left(\frac{1}{\varphi_z + \sqrt{\varphi_z^2 - \lambda_{rel,z}^2}}, 1 \right) = \min \left(\frac{1}{11,86 + \sqrt{11,86^2 - 4,54^2}}, 1 \right) = \min(0,04, 1) = 0,04$$

$$N_{b,z,Rd} = \frac{\chi_z \times A \times f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0,04 \times 1,9100 \cdot 10^{-3}[\text{m}^2] \times 235,0[\text{MPa}]}{1,00} = 19,67[\text{kN}]$$

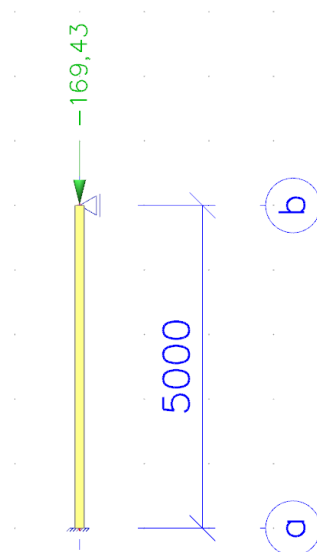
Parametri izvijanja		zz	
Vrsta izvijanja		horizontalni pomak	
Sistemska dužina	L	5,000	m
Faktor izvijanja	k	2,00	
Duljina izvijanja	l_{cr}	10,000	m
Kritična Euler opterećenje	N_{cr}	21,79	kN
Vitkost	λ	426,25	
Relativna vitkost	λ_{rel}	4,54	
granična vitkost	$\lambda_{rel,0}$	0,20	
Krivulja izvijanja		c	
Nesavršenost	α	0,49	
Redukcijski faktor	χ	0,04	
Otpornost na izvijanje	$N_{b,Rd}$	19,67	kN

Slika 4.1.5. Tablica s parametrima izvijanja [4]



Slika 4.1.6. Linija izvijanja [4]

c) Štap na jednome kraju upet, a na drugome slobodno oslonjen



Slika 4.1.7. Štap na jednome kraju upet, a na drugome slobodno oslonjen [4]

KLASIFIKACIJA ZA IZVIJANJE

- Klasifikacija prema EN 1993-1-1 članak 5.5.2
- Klasifikacija unutarnjih i vanjskih dijelova uglova prema normi EN 1993-1-1

Bilješka: Granica klasifikacije je postavljena prema Semi-Comp+. Poprečni presjek je klasificiran kao Klasa 2

Bilješka: Odlučujući položaj za klasifikaciju stabilnosti temelji se na faktoru iskoristivosti η prema Semi-Comp+.

PROVJERA SAVIJANJE IZVIJANJE

Prema EN 1993-1-1 članak 6.3.1.1

Unutarnja sila: **okomita sila** $N_{ed} = -169.43$

$$N_{cr,z} = \frac{\pi^2 \times E \times I_z}{l_{cr,z}^2} = \frac{\pi^2 \times 210000,0[\text{MPa}] \times 1,0512 \cdot 10^{-6}[\text{m}^4]}{3,500[\text{m}]^2} = 177,86[\text{kN}]$$

$$\lambda_z = \frac{l_{cr,z}}{i_z} = \frac{3,500[\text{m}]}{23[\text{mm}]} = 149,19$$

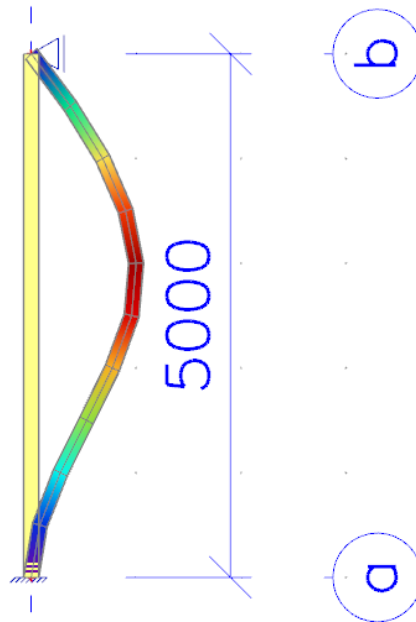
$$\lambda_{rel,z} = \frac{\lambda_z}{\pi \times \sqrt{\frac{E}{f_y}}} = \frac{149,19}{\pi \times \sqrt{\frac{210000,0[\text{MPa}]}{235,0[\text{MPa}]}}} = 1,59$$

$$\chi_z = \min \left(\frac{1}{\varphi_z + \sqrt{\varphi_z^2 - \lambda_{rel,z}^2}}, 1 \right) = \min \left(\frac{1}{2,10 + \sqrt{2,10^2 - 1,59^2}}, 1 \right) = \min(0,29, 1) = 0,29$$

$$N_{b,z,Rd} = \frac{\chi_z \times A \times f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0,29 \times 1,9100 \cdot 10^{-3}[\text{m}^2] \times 235,0[\text{MPa}]}{1,00} = 129,03[\text{kN}]$$

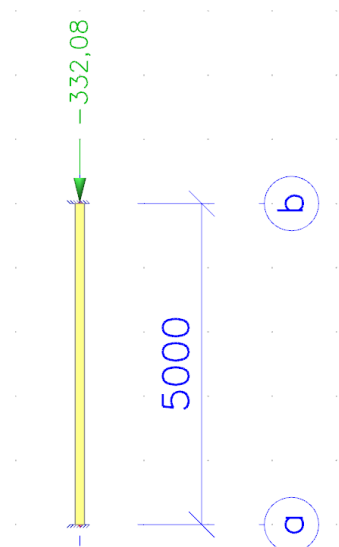
Parametri izvijanja		zz	
Vrsta izvijanja		horizontalni pomak	
Sistemska dužina	L	5,000	m
Faktor izvijanja	k	0,70	
Dužina izvijanja	l_{cr}	3,500	m
Kritična Euler opterećenje	N_{cr}	177,86	kN
Vitkost	λ	149,19	
Relativna vitkost	λ_{rel}	1,59	
granična vitkost	$\lambda_{rel,0}$	0,20	
Krivulja izvijanja		c	
Nesavršenost	α	0,49	
Redukcijski faktor	χ	0,29	
Otpornost na izvijanje	$N_{b,Rd}$	129,03	kN

Slika 4.1.8. Tablica s parametrima izvijanja [4]



Slika 4.1.9. Linija izvijanja [4]

d) Štap upet na oba kraja



Slika 4.1.10. Štap upet na oba kraja [4]

KLASIFIKACIJA ZA IZVIJANJE

- Klasifikacija prema EN 1993-1-1 članak 5.5.2
- Klasifikacija unutarnjih i vanjskih dijelova uglova prema normi EN 1993-1-1

Bilješka: Granica klasifikacije je postavljena prema Semi-Comp+. Poprečni presjek je klasificiran kao Klasa 2

Bilješka: Odlučujući položaj za klasifikaciju stabilnosti temelji se na faktoru iskoristivosti η prema Semi-Comp+.

PROVJERA SAVIJANJE IZVIJANJE

Prema EN 1993-1-1 članak 6.3.1.1

Unutarnja sila: **okomita sila** $N_{ed} = - 332.08$

$$N_{cr,z} = \frac{\pi^2 \times E \times I_z}{l_{cr,z}^2} = \frac{\pi^2 \times 210000,0[\text{MPa}] \times 1,0512 \cdot 10^{-6}[\text{m}^4]}{2,500[\text{m}]^2} = 348,61[\text{kN}]$$

$$\lambda_z = \frac{l_{cr,z}}{i_z} = \frac{2,500[\text{m}]}{23[\text{mm}]} = 106,56$$

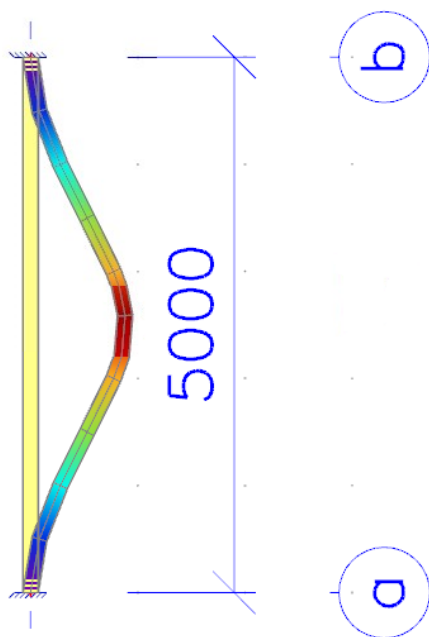
$$\lambda_{rel,z} = \frac{\lambda_z}{\pi \times \sqrt{\frac{E}{f_y}}} = \frac{106,56}{\pi \times \sqrt{\frac{210000,0[\text{MPa}]}{235,0[\text{MPa}]}}} = 1,13$$

$$\chi_z = \min \left(\frac{1}{\varphi_z + \sqrt{\varphi_z^2 - \lambda_{rel,z}^2}}, 1 \right) = \min \left(\frac{1}{1,37 + \sqrt{1,37^2 - 1,13^2}}, 1 \right) = \min(0,47, 1) = 0,47$$

$$N_{b,z,Rd} = \frac{\chi_z \times A \times f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0,47 \times 1,9100 \cdot 10^{-3}[\text{m}^2] \times 235,0[\text{MPa}]}{1,00} = 209,21[\text{kN}]$$

Parametri izvijanja		zz	
Vrsta izvijanja		horizontalni pomak	
Sistemska dužina	L	5,000	m
Faktor izvijanja	k	0,50	
Dužina izvijanja	l_{cr}	2,500	m
Kritična Euler opterećenje	N_{cr}	348,61	kN
Vitkost	λ	106,56	
Relativna vitkost	λ_{rel}	1,13	
granična vitkost	$\lambda_{rel,0}$	0,20	
Krivulja izvijanja		c	
Nesavršenost	α	0,49	
Redukcijski faktor	χ	0,47	
Otpornost na izvijanje	$N_{b,Rd}$	209,21	kN

Slika 4.1.11. Tablica s parametrima izvijanja [4]



Slika 4.1.12. Linija izvijanja [4]

Štap zglobno učvršćen na oba kraja	Duljina izvijanja: Vitkost: Kritična sila:	$L_i = L = 500 \text{ cm}$ $\lambda = 213.13$ $F_{kr} = 87.15 \text{ kN}$
Štap na jednome kraju upet, a na drugome slobodan	Duljina izvijanja: Vitkost: Kritična sila:	$L_i = 2L = 1000 \text{ cm}$ $\lambda = 426.25$ $F_{kr} = 21.79 \text{ kN}$
Štap na jednome kraju upet, a na drugome slobodno oslonjen	Duljina izvijanja: Vitkost: Kritična sila:	$L_i = 0.7L = 350 \text{ cm}$ $\lambda = 149.19$ $F_{kr} = 177.86 \text{ kN}$
Štap upet na oba kraja	Duljina izvijanja: Vitkost: Kritična sila:	$L_i = 0.5L = 250 \text{ cm}$ $\lambda = 106.56$ $F_{kr} = 348.61 \text{ kN}$

Slika 4.1.18. Tablica dobivenih vrijednosti [2]

5. USPOREDBA DOBIVENIH REZULTATA

Rezultati analitičke i numeričke analize približno se podudaraju za oba proračuna, no takav rezultat je i očekivan. Kod proračuna u programu Scia Engineer dobivene sile su malo veće u odnosu na analitički postupak. Sve vrijednosti prikazane su na sl. 5.1.1. i pripadajućem grafu na sl. 5.1.3. za bolju predodžbu samih razlika.

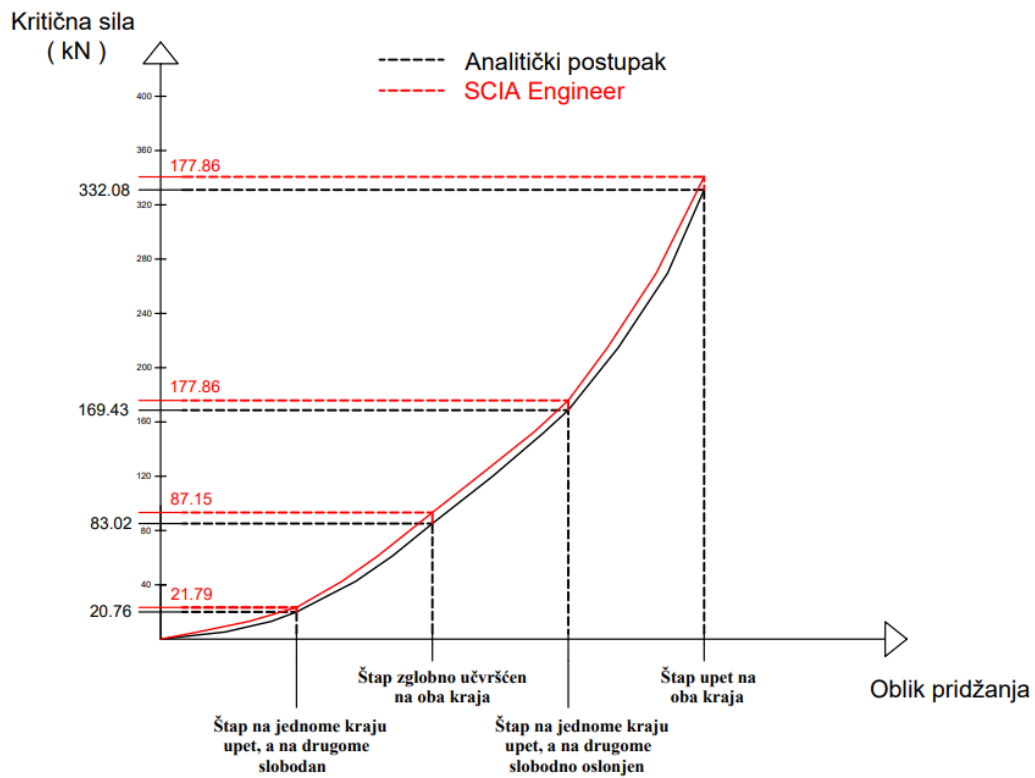
		Analitički postupak	Scia Engineer
Štap zglobno učvršćen na oba kraja $L_i = 500 \text{ cm}$	Vitkost: Kritična sila:	$\lambda = 217.22$ $F_{kr} = 83.02 \text{ kN}$	$\lambda = 213.13$ $F_{kr} = 87.15 \text{ kN}$
Štap na jednome kraju upet, a na drugome slobodan $L_i = 1000 \text{ cm}$	Vitkost: Kritična sila:	$\lambda = 434.44$ $F_{kr} = 20.76 \text{ kN}$	$\lambda = 426.25$ $F_{kr} = 21.79 \text{ kN}$
Štap na jednome kraju upet, a na drugome slobodno oslonjen $L_i = 350 \text{ cm}$	Vitkost: Kritična sila:	$\lambda = 152.05$ $F_{kr} = 169.43 \text{ kN}$	$\lambda = 149.19$ $F_{kr} = 177.86 \text{ kN}$
Štap upet na oba kraja $L_i = 250 \text{ cm}$	Vitkost: Kritična sila:	$\lambda = 108.61$ $F_{kr} = 332.08 \text{ kN}$	$\lambda = 106.56$ $F_{kr} = 348.61 \text{ kN}$

Slika 5.1.1. Tablica dobivenih vrijednosti [2]

Na sl. 5.1.2. prikazana je razlika u podacima u slučaju izvijanja štapa u elastičnom i plastičnom području. Jasno se vidi da je kritična sila u plastičnom području znatno veća od one u elastičnom.

Štap zglobno učvršćen na oba kraja $L_i = 500 \text{ cm}$	Vitkost: Kritična sila:	$\lambda = 217.22$ $F_{kr} = 83.02 \text{ kN}$
Štap zglobno učvršćen na oba kraja $L_i = 200 \text{ cm}$	Vitkost: Kritična sila:	$\lambda = 86.89$ $F_{kr} = 544.70 \text{ kN}$

Slika 5.1.2. Tablica dobivenih vrijednosti [2]



Slika 5.1.3. Graf kritičnih sila [2]

6. ZAKLJUČAK

U ovom radu pokazana je parametarska analiza vitkih elemenata izloženih centričnom tlačnom opterećenju. Analiziran je utjecaj načina pridržanja elemenata te utjecaj različitih vitkosti. U prvom dijelu je detaljno je objašnjen analitički postupak izračunavanja kritične i dopuštene veličine sile te pripadajućih napreznja. Također, analizirano je i izvijanje elementa u dva područja izvijanja tj. elastičnom i plastičnom području, nakon čega je detaljno objašnjeno i dimenzioniranje elemenata opterećenih na izvijanje. Osim analitičkim postupkom, svi primjeri su riješeni i programom SCIA Engineering, nakon čega su dobiveni rezultati analizirani i uspoređeni s prethodno dobivenim rezultatima u analitičkom postupku. Na samom kraju su navedeni pripadajući zaključci i sva korištena literatura.

Nakon provedenog analitičkog proračuna za sva četiri načina učvršćenja štapa, uočavamo različite rezultate, odnosno različite vrijednosti dopuštenog napreznja i opterećenja. Najveću dopuštenu silu F_{dop} kao i napreznje σ_{dop} ima štap koji je upet na oba kraja. Samim time taj štap ima i najveću nosivost. S druge strane, najmanje vrijednosti ovih dvaju parametara dobili smo kod štapa koji je na jednom kraju upet a na drugom slobodan. Taj štap shodno tome ima i najmanju nosivost.

Uočavamo da nosivost samog elementa, u ovom slučaju čeličnog štapa, dosta ovisi o načinu pridržanja. Štap koji je na oba kraja upet vezan je s najviše veza pa je zbog toga i najsigurniji. S druge strane, štap koji na jednom kraju nije pridržan, na tom mjestu ima najveću „slobodu“ a s time i najveću mogućnost izvijanja. Ovisno o pokazanim rubnim uvjetima nosivost elementa eksponencijalno raste.

Sve provedene analize su potvrđene i proračunom u numeričkom programu SCIA Engineering. Analiza je provedena korištenjem jednodimenzionalnih konačnih elemenata s zadanim poprečnim presjekom te uspoređeni dobiveni rezultati.

7. LITERATURA

- [1] Šimić, V. , Otpornost materijala I; Školska knjiga; Zagreb, 2002.
- [2] AutoCad-2023, student licence
- [3] Marović, P. , Interaktivna skripta; FGAG; Split, 2008.
- [4] SCIA Engineer legacy, student licence