

Analiza gubitka elastične stabilnosti vitkih elemenata

Jakšić, Ela

Undergraduate thesis / Završni rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:

University of Split, Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy / Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:123:438607>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-09**



Repository / Repozitorij:

[FCEAG Repository - Repository of the Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy, University of Split](#)



UNIVERSITY OF SPLIT



DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

**SVEUČILIŠTE U SPLITU
FAKULTET GRAĐEVINARSTVA, ARHITEKTURE I GEODEZIJE**

ZAVRŠNI RAD

Ela Jakšić

Split, 2016

SVEUČILIŠTE U SPLITU
FAKULTET GRAĐEVINARSTVA, ARHITEKTURE I GEODEZIJE

Analiza gubitka elastične stabilnosti vitkih elemenata

Završni rad

Split, 2016

SVEUČILIŠTE U SPLITU

FAKULTET GRAĐEVINARSTVA, ARHITEKTURE I GEODEZIJE

Split, Matice hrvatske 15

STUDIJ: **PREDDIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
GRAĐEVINARSTVA**

KANDIDAT: ELA JAKŠIĆ

BROJ INDEKSA: 4173

KATEDRA: **Katedra za otpornost materijala i ispitivanje konstrukcija**

PREDMET: **Otpornost materijala II**

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Tema: Analiza gubitka elastične stabilnosti vitkih elemenata

Opis zadatka: Potrebno je analizirati gubitak elastične stabilnosti vitkih elemenata izloženih tlačnom opterećenju. Pri tome je potrebno analizirati izvijanje u elastičnom području (izračunati kritičnu Eulerovu silu), izvijanje u plastičnom području, te pokazati utjecaj geometrijskih i strukturnih imperfekcija na otpornost vitkih elemenata izloženih tlačnom opterećenju. Potrebno je prikazati osnovne fizikalne postavke i matematička rješenja za zadani problem te ih primijeniti na zadanom primjeru.

U Splitu, travanj, 2016.g.
Voditelj Završnog rada:

Izv.prof.dr.sc. Mirela Galić

SADRŽAJ:

1) Uvod	5
2) Izvijanje štapa u elastičnom području	6
2.1. Eulerova kritična sila.....	8
2.1.1. Štap obostrano zglobno pridržan	9
2.1.2. Štap na jednom kraju upet, a na drugom slobodan	12
2.1.3. Štap na jednom kraju upet a na drugome slobodno oslonjen	15
2.1.4. Štap upet na oba kraja.....	19
2.2. Duljina izvijanja.....	23
2.3. Kritično naprezanje.....	24
3. Izvijanje štapa u plastičnom području	27
4. Empirijski izrazi za kritična naprezanja	36
5. Dokaz nosivosti prema χ -postupku (otpornost tlačnog elementa)	38
5.1. Klasifikacija poprečnog presjeka	38
5.2. Otpornost poprečnog presjeka	44
5.3. Otpornost elementa na izvijanje	45
6. Zaključak	49
7. Popis literature	50
8. Popis slika	51
9. Popis tablica.....	52

1) UVOD

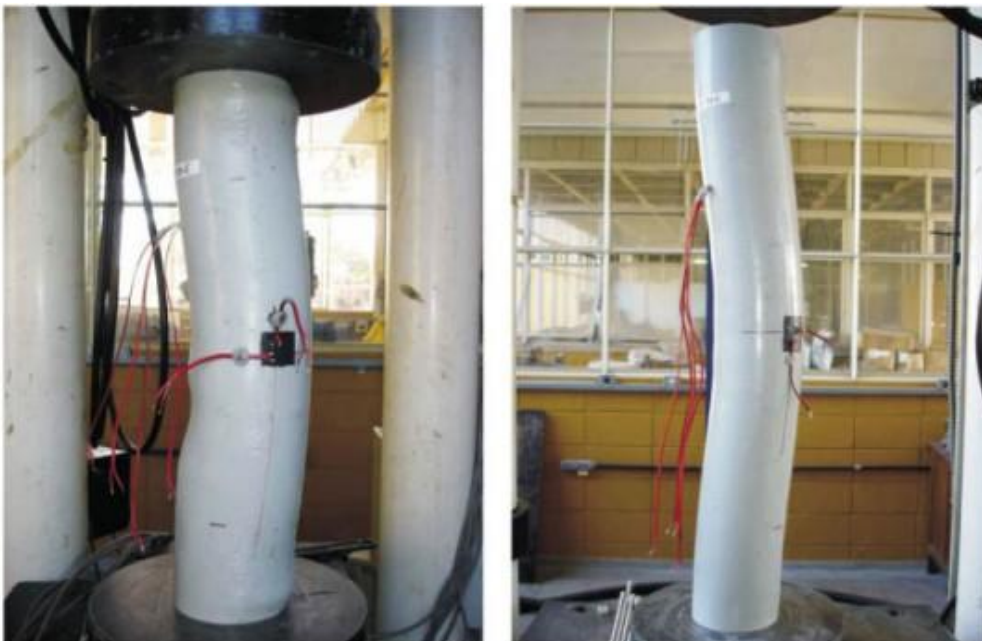
U ovom radu je analizirano izvijanje štapa, što je pojava gubitka stabilnosti ravnog štapa usljed opterećenja tlačnom silom, a manifestira se njegovim savijanjem.

Analiza je provedena za izvijanje u elastičnom i plastičnom području.

U elastičnom području, promotrit ćemo četiri osnovna slučaja izvijanja prema načinu učvršćenja krajeva iz kojih slijedi izraz kritične ili Euler-ove sile izvijanja. S obzirom da njegovi izvodi vrijede samo za područje elastičnosti, odvojeno se promatra izvijanje štapa u području plastičnosti.

Problemom izvijanja štapa u plastičnom području se prvi bavio Engesser, koji je uveo tangenti, a potom reducirani modul elastičnosti. Tada svi Eulerovi izrazi vrijede i u plastičnom području uz zamjenu s reduciranim modulom elastičnosti.

Dokazom nosivosti prema χ -postupku iz Eurocode-a 3 je riješen primjer, za sva četiri načina pridržanja štapa. Postupak se sastoji od: klasifikacije poprečnog presjeka štapa, računanja otpornosti poprečnog presjeka i otpornosti elementa na izvijanje. S obzirom na različite duljine izvijanja štapova, koje ovise o načinu pridržanja, imamo i različite otpornosti elementa, odnosno kritične sile izvijanja.



Slika 1.1. Izvijeni štap uslijed tlačne sile [4]

2) IZVIJANJE ŠTAPA U ELASTIČNOM PODRUČJU

Pretpostavljamo da je štap idealno ravan, idealno centrično opterećen i da je izrađen od homogenog materijala. Ukoliko takav štap opteretimo centričnom tlačnom silom F , štap će se skratiti, ali će zadržati ravan oblik. Pri tome je štap u položaju stabilne ravnoteže, što znači ako na njega djelujemo bočnom silom i izazovemo bočne pomake, oni nestaju uklanjanjem takvog djelovanja. Ako međutim pritisna sila raste i dostigne kritičnu vrijednost, pravolinijski deformirani oblik štapa prestaje biti stabilan. Rastom bočnog djelovanja rastu i progibi koji ostaju nakon prestanka njegovog djelovanja tj. štap se ne vraća u prvobitni oblik. Prelazak štapa u savijeni ravnotežni oblik nazivamo izvijanje, a silu pritiska pri kojoj se ono javlja, kritična sila izvijanja [2].

U stvarnosti konstrukcijski element otkazuje neelastičnim izvijanjem prije dostizanja vrijednosti kritične sile zbog različitih imperfekcija elementa, kao što su:

-ekscentrični unos sile (nesavršenost spojeva):



Slika 2.1. Ekscentrični unos sile [1]

-lokalna početna deformacija:



Slika 2.2. Lokalna početna deformacija [1]

-početni deformirani položaj štapa



Slika 2.3. Početni deformirani položaj [1]

Osim toga, potrebno je uzeti u obzir nesavršenosti strukture promatranog elementa, a to su:

- vlastiti naponi (uzrokovani valjanjem ili zavarivanjem profila)
- promjena granice popuštanja po poprečnom presjeku

Da bi bili na strani sigurnosti, kritičnu silu pri kojoj dolazi do izvijanja, smanjujemo s koeficijentom sigurnosti za izvijanje (v):

$$F_{i,dop} = \frac{F_{kr}}{v}. \quad (2.1)$$

Za rješavanje problema stabilnosti, potrebno je odrediti kritičnu silu, koja ovisi o vrsti materijala, načinu pridržanja i geometrijskim karakteristikama elementa.

2.1. EULEROVA KRITIČNA SILA

Stabilnost štapa aksijalno opterećenog na tlak, prvi je proučavao *Leonhard Euler* 1774. godine. On je izveo izraz za kritičnu silu, gdje je pokazao da ona ovisi o načinu učvršćenja krajeva štapa.

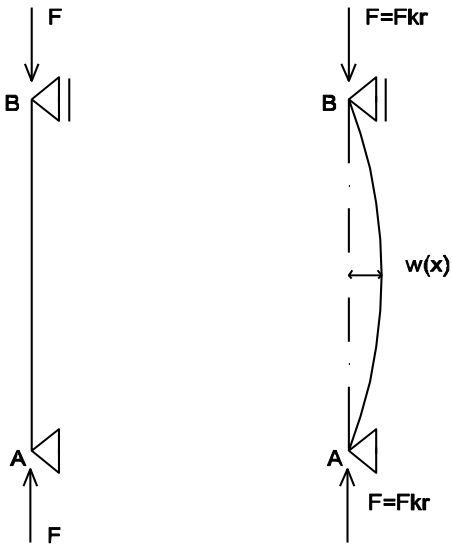
Razlikujemo četiri osnovna slučaja učvršćenja krajeva štapova:

- štap obostrano zglobno pridržan
- štap na jednom kraju upet a na drugom slobodan
- štap na jednom kraju upet, a na drugom zglobno oslonjen
- štap obostrano upet



Slika 2.4. Slučajevi pridržanja: 1) slobodno oslonjen, 2) obostrano upet, 3) na jednoj strani upet, a na drugoj zglobno oslonjen, 4) konzola [5]

2.1.1. ŠTAP OBOSTRANO ZGLOBNO PRIDRŽAN



Slika 2.5. Izvijanje obostrano zglobno pridržanog štapa [6]

Promatrajmo gredu zglobno oslonjenu na oba kraja koja se pod djelovanjem kritične sile nalazi u izvijenom ravnotežnom položaju. Dok je centrična tlačna sila manja od kritične, štap ostaje ravan, a kad je dostigne, podjednako je moguć i krivocrtan oblik štapa.

U nekom presjeku izvijenog štapa pojavljuje se moment savijanja:

$$M = F \cdot x \quad (2.2)$$

Približna linearna diferencijalna jednačba elastične linije, uz pretpostavku da su posrijedi mali progibi:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = - \frac{F \cdot w}{EI_{min}} \quad (2.3)$$

U jednadžbu ulazi minimalni moment tromosti poprečnog presjeka (I_{\min}), jer izvijanje nastaje u ravnini najmanje savojne krutosti štapa.

Uvodimo oznaku, pa slijedi:

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_{\min}} \rightarrow \frac{d^2w}{dx^2} + \alpha^2 w = 0$$

Opće rješenje ove homogene diferencijalne jednadžbe 2. reda glasi:

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x \quad (2.4.)$$

Konstante integracije A i B odredit ćemo iz rubnih uvjeta, koji su također homogeni i glase:

$$1) \quad w(0) = 0$$

$$2) \quad w(l) = 0$$

Iz prvog uvjeta dobivamo da je $B=0$, te izraz (2.4) prima oblik:

$$w = A \sin \alpha x \quad (2.5.)$$

Iz drugog uvjeta dobivamo:

$$A \sin \alpha l = 0. \quad (2.6.)$$

Moguća su dva slučaja : 1) $A = 0$ ili 2) $\sin \alpha l = 0$

Za prvi dobivamo da je $w(x) = 0$, što pokazuje da je ravan oblik štapa jedan od mogućih ravnotežnih oblika štapa. Budući da je za izvijeni oblik štapa $A \neq 0$, mora biti:

$$\sin \alpha l = 0.$$

Odatle dobivamo uvjet za kritično stanje štapa:

$$\alpha l = n\pi \rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Jednadžba elastične linije glasi:

$$w = A \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (2.7.)$$

Vrijednost sile pri kojoj nastupa izvijanje štapa:

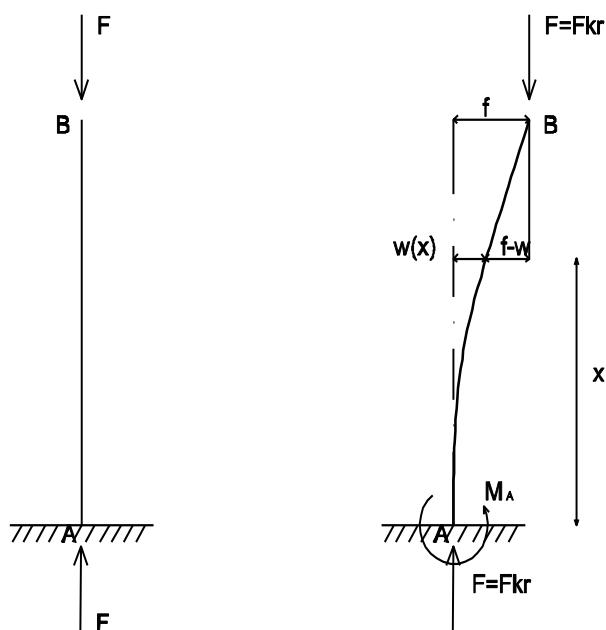
$$F = \frac{n^2 \pi^2 EI_{min}}{l^2}, \quad (2.8.)$$

a najmanja moguća vrijednost kritične sile pri kojoj postoji mogućnost izvijanja je za $n=1$ i iznosi:

$$F = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2} \quad (2.9.)$$

(Eulerova kritična sila za štap zglobno oslonjen na oba kraja).

2.1.2. ŠTAP NA JEDNOM KRAJU UPET, A NA DRUGOM SLOBODAN



Slika 2.6. Izvijanje štapa koji je na jednom kraju upet a na drugom slobodan [6]

Neka je konzola pritisnuta kritičnom silom izvijanja prešla u izvijeni položaj kao što je prikazano na slici (2.6).

U nekom presjeku izvijenog štapa se pojavljuje moment savijanja:

$$M = -F(f - w)., \quad (2.10.)$$

Diferencijalna jednačina elastične linije glasi:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{F}{(EI_{min})(f-w)}, \quad (2.11.)$$

ili u obliku:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha^2 w = \alpha^2 f, \quad (2.12.)$$

gdje je:

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_{min}}.$$

Opće rješenje ove nehomogene diferencijalne jednačine drugog reda s konstantnim koeficijentima je:

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + f \quad (2.13.)$$

Rubni uvjeti su :

$$1) w(0) = 0$$

$$2) w'(0) = 0$$

gdje za slobodni kraj vrijedi:

$$3) w(l) = f.$$

Iz prva dva uvjeta dobivamo:

$$B = -f, A = 0,$$

tako da je:

$$w = f(1 - \cos \alpha x). \quad (2.14.)$$

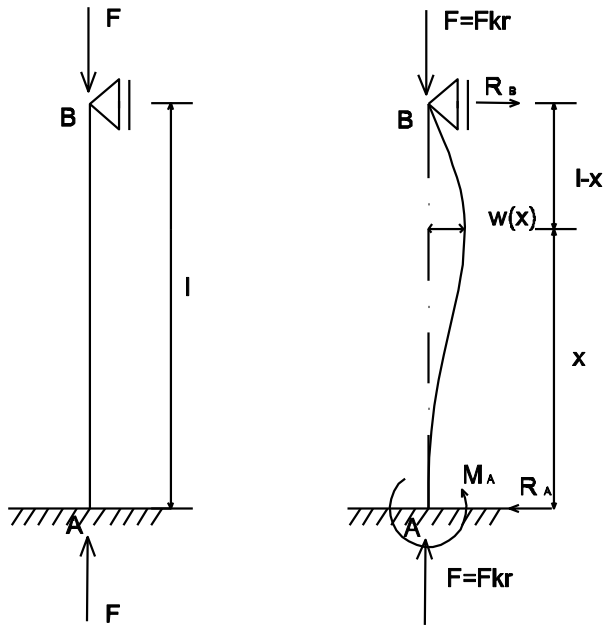
Iz trećeg uvjeta slijedi:

$$\cos \alpha l = 0. \quad (2.15.)$$

Dobivamo da je u ovom slučaju najmanja vrijednost kritične sile za $n=1$:

$$F = \frac{\pi^2 EI_{min}}{4l^2}. \quad (2.16.)$$

2.1.3. ŠTAP NA JEDNOM KRAJU UPET A NA DRUGOME SLOBODNO OSLONJEN



Slika 2.7. Izvijanje štapa koji je na jednom kraju upet, a na drugome slobodno oslonjen [6]

Promatramo izvijeni oblik štapa opterećenog kritičnom silom, kao što je prikazano na slici (2.6.).

Moment savijanja u nekom presjeku štapa jest:

$$M = Fw - R_B(l - x), \quad (2.17.)$$

gdje je R_B reakcija na zglobnom osloncu.

Diferencijalna jednačina elastične linije glasi:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{F \cdot w}{EI_{min}} = \frac{R_B}{EI_{min}} (l - x). \quad (2.18.)$$

Uvođenjem oznake:

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_{min}},$$

dobivamo:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha^2 w = \frac{R_B}{F} \alpha^2 (l - x).$$

Opće rješenje nehomogene jednačine glasi:

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{R_B}{F} (l - x) \quad (2.19.)$$

Zadatak je jedanput statički neodređen, pa je uz konstante integracije A i B, nepoznata i reakcija R_B .

Rubni uvjeti su:

$$1) w(0) = 0,$$

$$2) w'(0) = 0,$$

$$3) w(l) = 0.$$

Deriviranjem općeg rješenja dobivamo:

$$\frac{dw}{dx} = \alpha A \cos \alpha x - \alpha B \sin \alpha x - \frac{R_B}{F}. \quad (2.20.)$$

Iz prvog rubnog uvjeta nalazimo:

$$B + \frac{R_B l}{F} = 0 \rightarrow B = -\frac{R_B l}{F}.$$

Drugi rubni uvjet daje :

$$\alpha A - \frac{R_B}{F} = 0 \rightarrow \alpha A = \frac{R_B}{F}.$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti za integracijske konstante A i B u izraz rješenja diferencijalne jednačbe, dobivamo :

$$w = \frac{R_B}{F} \left[\frac{1}{\alpha} \sin \alpha x - l \cos \alpha x + (l - x) \right]. \quad (2.21.)$$

Iz trećeg rubnog uvjeta dobivamo:

$$\frac{R_B}{F} \left(\frac{1}{\alpha} \sin \alpha l - l \cos \alpha l \right) = 0, \quad (2.22.)$$

a budući da je

$$\frac{R_B}{F} \neq 0,$$

to je (2.22) :

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l$$

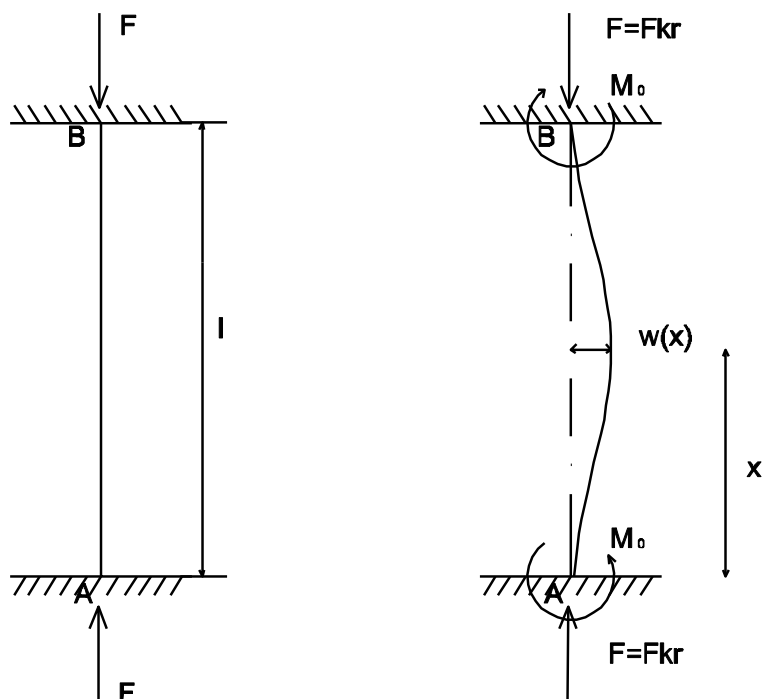
Najmanji korijen te jednačbe ima vrijednost :

$$\alpha l = 4,493.$$

Kritična sila izvijanja je:

$$F_{kr} = \alpha^2 EI_{min} = \frac{4,493^2 EI_{min}}{l^2} = \frac{20,187 EI_{min}}{l^2} \approx \frac{2\pi^2 EI_{min}}{l^2} \quad (2.23)$$

2.1.4. ŠTAP UPET NA OBA KRAJA



Slika 2.8. Izvijanje štapa upetog na oba kraja [6]

Pretpostavljamo da je oblik izvijenog štapa simetričan, momenti upetosti (M_0) su na oba kraja jednaki.

U nekom presjeku izvijenog štapa pojavljuje se moment savijanja:

$$M = Fw - M_0. \quad (2.24.)$$

Diferencijalna jednačina elastične linije glasi:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{F}{EI_{min}} w = \frac{M_0}{EI_{min}} . \quad (2.25.)$$

Uvodimo oznaku:

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_{min}} ,$$

pa slijedi:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha^2 w = \frac{M_0}{F} \alpha^2 .$$

Opće rješenje ove jednačine glasi:

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{M_0}{F} . \quad (2.26.)$$

Rubni uvjeti su:

- 1) $w(0) = 0,$
- 2) $w'(0) = 0,$
- 3) $w(l) = 0,$
- 4) $w'(l) = 0.$

Deriviranjem rješenja dif. jednačbe dobivamo:

$$\frac{dw}{dx} = \alpha A \cos \alpha x - \alpha B \sin \alpha x . \quad (2.27.)$$

Prvi rubni uvjet daje:

$$B + \frac{M_0}{F} = 0 \rightarrow B = -\frac{M_0}{F} .$$

Iz uvjeta 2) slijedi :

$$A = 0$$

Sad rješenje jednačbi (2.26.) i (2.27.) izgleda:

$$w = \frac{M_0}{F} (l - \cos \alpha x),$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{M_0}{F} \alpha \sin \alpha x.$$

Uvrštavanjem trećeg rubnog uvjeta u prethodnu jednačbu za progib dobivamo:

$$w(l) = \frac{M_0}{F} (l - \cos \alpha l) = 0 . \quad (2.28.)$$

Budući da je:

$$\frac{M_0}{F} \neq 0 \rightarrow \cos \alpha l = 1 .$$

Četvrti uvjet daje:

$$w'(l) = \frac{M_0}{F} \alpha \sin \alpha l = 0 , \quad (2.29.)$$

odnosno:

$$\sin \alpha l = 0 .$$

Jednadžbe:

$$\cos \alpha l = 1$$

$$\sin \alpha l = 0$$

su zadovoljene za: $\alpha l = 2n\pi$, pa za $n = 1$ dobivamo najmanju vrijednost kritične sile koja iznosi:

$$F = \frac{4\pi^2 EI_{min}}{l^2} \quad (2.30.)$$

2.2. DULJINA IZVIJANJA

Općeniti izraz za najmanju vrijednost kritične sile možemo napisati:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_i^2}, \quad (2.31.)$$

E - Young-ov modul elastičnosti

I_{min} - manji moment tromosti

l_i - duljina izvijanja

Duljina izvijanja je udaljenost dviju susjednih točaka infleksije elastične linije izvijenog štapa. Za četiri različita načina učvršćenja štapa glasi:

- 1) Štap zglobno učvršćen na oba kraja: $l_i = l$
- 2) Štap na jednom kraju upet, a na drugom slobodan: $l_i = 2l$
- 3) Štap na jednom kraju upet, a na drugom slobodno oslonjen: $l_i = 0,7l$
- 4) Štap upet na oba kraja: $l_i = 0,5l$

Iz vrijednosti kritične sile u elementu, dolazimo do kritičnog naprezanja u presjeku.

2.3. KRITIČNO NAPREZANJE

Kritično naprežanje u štapu u trenutku izvijanja, kad još zadržava ravan oblik je:

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_i^2 A} . \quad (2.32.)$$

Uzimajući u obzir da vrijedi:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} , \quad (2.33.)$$

možemo napisati:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{l_i^2} \quad (2.34.)$$

ili:

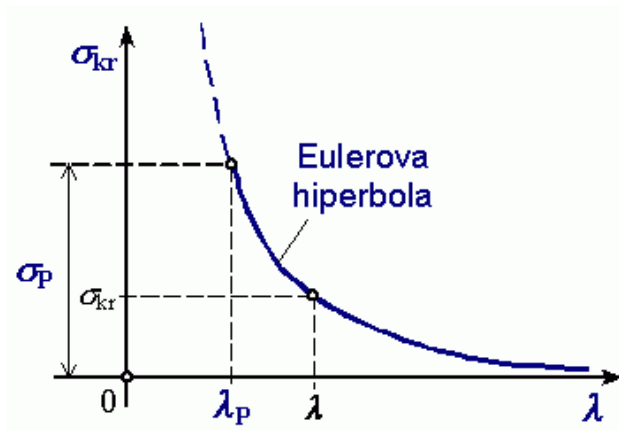
$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} ,$$

gdje je:

$$\lambda = \frac{l_i}{i_{mn}} \quad (2.35.)$$

bezdimezionalna karakteristika štapa i naziva se vitkost štapa. Iz izraza vidimo da kritično naprežanje ovisi o svojstvima materijala i vitkosti štapa.

Eulerovom hiperbolom je prikazana ovisnost kritičnog napreznja i vitkosti.



Slika 2.9. Eulerova hiperbola [7]

Pri velikoj vitkosti, kritično napreznje teži nuli, dok pri maloj vitkosti ide u beskonačnost i u jednom trenu prelazi granicu proporcionalnosti. S obzirom da su Eulerovi izrazi zasnovani na linearnoj diferencijalnoj jednadžbi elastične linije kao i na valjanosti Hookeova zakona (linearna ovisnost napreznja i deformacija), znači da izrazi vrijede samo za kritično napreznje koje ne prelazi granicu proporcionalnosti materijala pri jednoosnom pritisku.

Koeficijent vitkosti (λ) na granici proporcionalnosti ($\sigma_p = 21 \text{ kN/cm}^2$) iznosi:

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 21000}{21}} = 99 \quad (2.36.)$$

te vrijedi:

$$\lambda_{dop} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{dop}}} \quad (2.37.)$$

$$\sigma_{dop} = \frac{\sigma_{kr}}{k_i} \quad (2.38.)$$

Primjećujemo, da slijedeće izvedeni izrazi vrijede za koeficijent vitkosti veći od $\lambda_p=99$, a manji od λ_{dop} koji se dobije iz dopuštenih naprezanja za najmanju kritičnu silu izvedenu za različite načine pridržanja. Štapovi čiji je koeficijent vitkosti manji od λ_p se izvijaju u plastičnom području.

3. IZVIJANJE ŠTAPA U PLASTIČNOM PODRUČJU

Problemom izvijanja štapa u plastičnom području prvi se bavio Engesser, polazeći od osnovnih pretpostavki koje su:

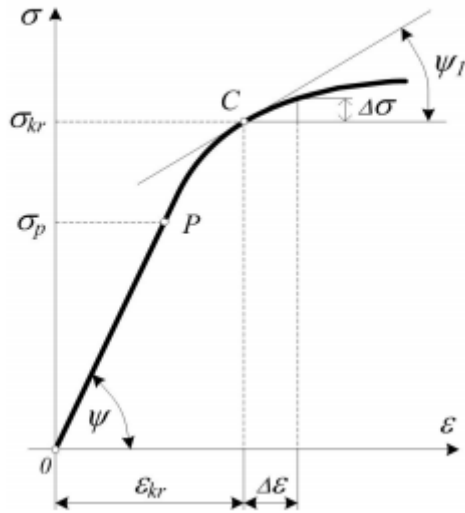
- štap je idealno ravan,
- izrađen od homogenog materijala,
- zglobno učvršćen na krajevima,
- idealno centrično opterećen na tlak
- progibi od savijanja su mali,
- Bernoullijeva hipoteza ravnih presjeka vrijedi u području plastičnosti,
- modul elastičnosti se u nekoj točki σ - ε dijagrama izražava tangentskim modulom elastičnosti.

Tangentski modul elastičnosti je definiran izrazom:

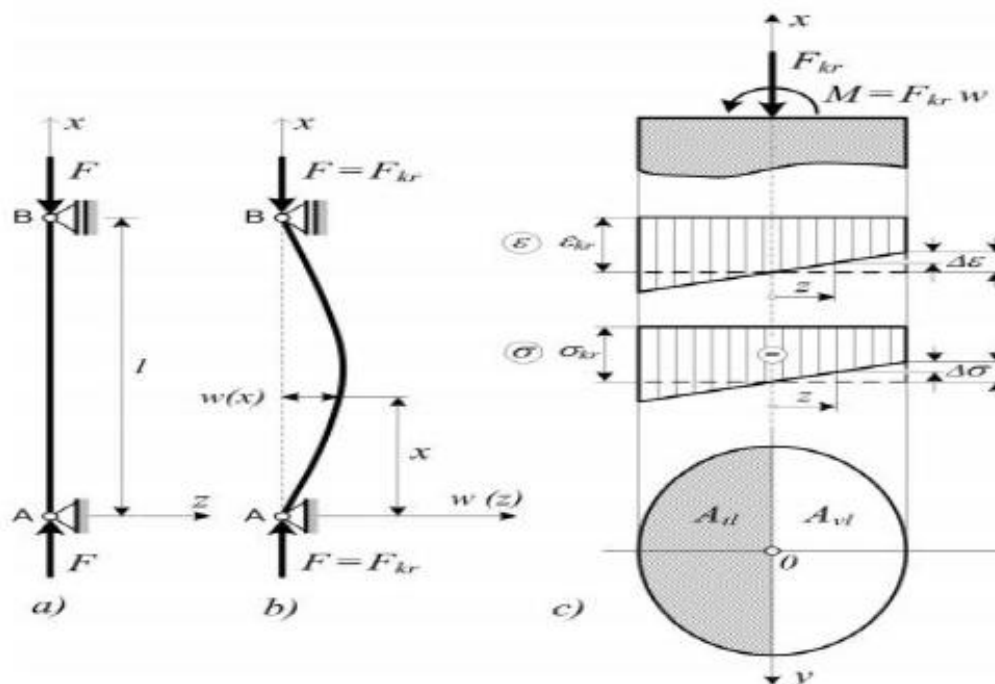
$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \operatorname{tg} \psi_1, \quad (3.1.)$$

ψ_1 - nagib tangente

te se pretpostavlja da je u okolici točke dijagrama konstantan, odnosno da se linija rasterećenja poklapa sa linijom opterećenja.

Slika 3.1. σ - ϵ dijagram, okolina točke C [3]

Prilikom opterećenja tlačnom silom u presjeku se javlja jednoliko raspoređeno tlačno naprezanje. Ako uzmemo neki presjek u središtu nosača gdje imamo moment savijanja $M = F_{kr} \cdot w$, raspodjela naprezanja postaje linearna zbog pojave dodatnog tlačnog naprezanja u jednom dijelu nosača i pojave vlačnih naprezanja. Naprezanja su još uvijek jednoznačna, jer su progibi mali (ekscentricitet sile) te se još uvijek sile nalaze u jezgri presjeka.



Slika 3.2. izvijeni, slobodno oslonjeni štap i prikaz stanja naprezanja u "x" presjeku [3]

Dopunska deformacija zbog savijanja:

$$\Delta \varepsilon = \frac{z}{\rho}, \quad (3.2.)$$

a naprezanja:

$$\Delta \sigma = E_t \cdot \Delta \varepsilon = E_t \frac{z}{\rho}. \quad (3.3.)$$

Ukupno naprezanje u nekoj točki presjeka je:

$$\sigma = \sigma_{kr} + \Delta\sigma = \sigma_{kr} + E_t \frac{z}{\rho} . \quad (3.4.)$$

Iz uvjeta ravnoteže promatranog dijela štapa $\Sigma F_x = 0$ dobivamo:

$$\begin{aligned} \int_A \sigma dA &= \int_A (\sigma_{kr} + \Delta\sigma) dA = \int_A \left(\sigma_{kr} + E_t \frac{z}{\rho} \right) dA \\ &= \int_A \sigma_{kr} \cdot dA + E_t \frac{z}{\rho} \int_A z \cdot dA = F_{kr} + \frac{E_t}{\rho} \int_A z \cdot dA = F_{kr} \end{aligned} \quad (3.5.)$$

slijedi:

$$\int_A z dA = 0 \quad (3.6.)$$

što znači da neutralna os prolazi težištem poprečnog presjeka zbog djelovanja momenta savijanja.

Iz uvjeta ravnoteže $\Sigma M_y = 0$, dobivamo :

$$\begin{aligned} M &= \int_A \sigma \cdot z \cdot dA = \int_A (\sigma_{kr} + \Delta\sigma) \cdot z \cdot dA = \int_A \left(\sigma_{kr} + E_t \frac{z}{\rho} \right) \cdot z \cdot dA = \\ &= \sigma_{kr} \cdot \int_A z \cdot dA + \frac{E_t}{\rho} \int_A z^2 \cdot dA = F \cdot w \end{aligned} \quad (3.7.)$$

$$\int_A z^2 \cdot dA = I_y = I_{min} \quad (3.8.)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{F \cdot w}{E_t \cdot I_{min}} \quad (3.9.)$$

Uz pretpostavku da su progibi mali, zakrivljenost možemo izraziti približnim izrazom:

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.10.)$$

Tako dobivamo diferencijalnu jednačbu elastične linije štapa izvijenog u plastičnom području:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{F \cdot w}{E_t \cdot I_{min}} = 0 . \quad (3.11.)$$

Razlika s elastičnim područjem je samo u modulu elastičnosti, koji je u plastičnom području zamjenjen tangentnim modulom. Izraz za kritičnu silu glasi:

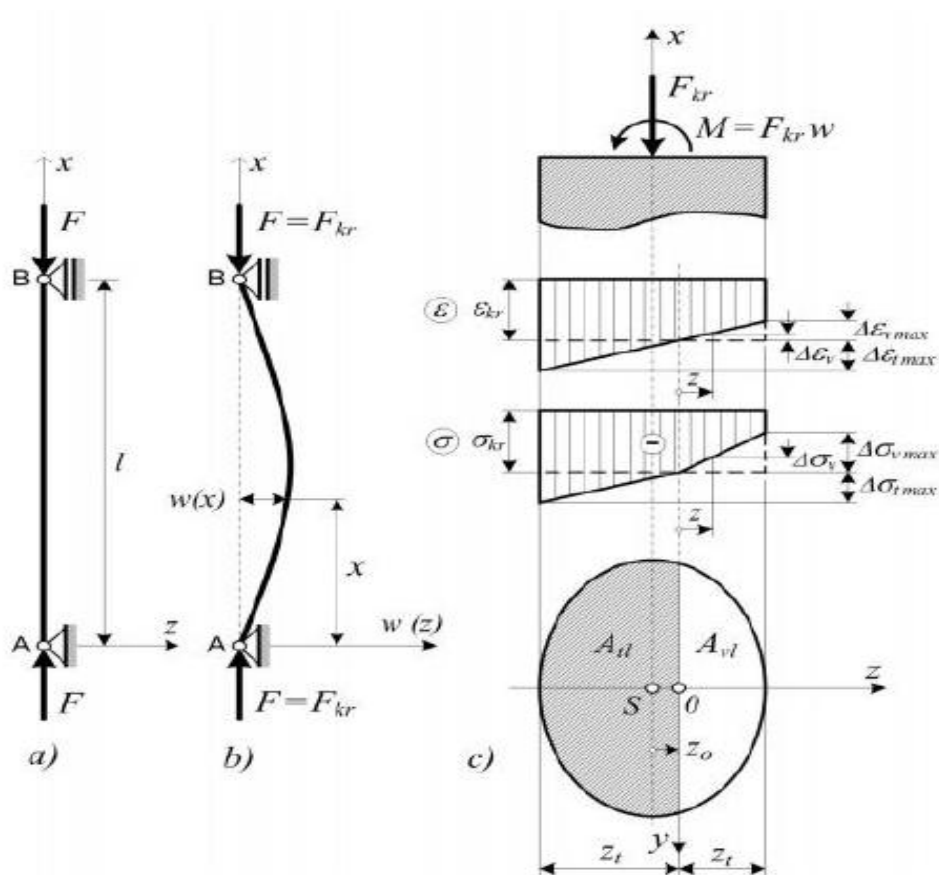
$$F = \frac{\pi^2 E_t I_{min}}{l_i^2}, \quad (3.12.)$$

a kritična naprezanja:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} \quad (3.13.)$$

Pri savijanju će dio presjeka biti rasterećen naprezanjima zbog savijanja i za njega će vrijediti modul elastičnosti E , dok će u drugom dijelu presjeka vrijediti tangenti modul E_t .

Dopunska beskonačna mala naprezanja zbog savijanja u vlačnoj i tlačnoj zoni presjeka štapa u kritičnom stanju jesu:



Slika 3.3. Izvijeni, slobodno oslonjeni štapa i dopunska naprezanja zbog savijanja u presjeku "x" [3]

$$\Delta\sigma_t = E_t \cdot \Delta\varepsilon = E_t \frac{z}{\rho} \quad (3.14.)$$

$$\Delta\sigma_v = E \cdot \Delta\varepsilon = E \frac{z}{\rho} \quad (3.15.)$$

Pri beskonačno malim progibima štapa uzdužna je sila u poprečnom presjeku konstantna.

Zato je:

$$\int_A \sigma \, dA = 0 \quad (3.16.)$$

$$1) \int_A \Delta\sigma \cdot dA = \int_{A_v} \sigma_v \, dA - \int_{A_t} \sigma_t \, dA = \frac{E}{\rho} \int_{A_v} z \cdot dA - \frac{E_t}{\rho} \int_{A_t} z \cdot dA = 0. \quad (3.17)$$

Iz uvjeta ravnoteže promatranog dijela štapa $\Sigma M_y = 0$ dobivamo :

$$2) \int_A \Delta\sigma \cdot z \cdot dA = \int_{A_v} \sigma_v \cdot z \cdot dA + \int_{A_t} \sigma_t \cdot z \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_{A_v} z^2 \cdot dA + E_t \rho A z^2 \cdot dA = M = F \cdot w$$

(3.18.)

Moment aksijalne sile F je uzet s obzirom na težišnu os, dok je moment unutarnjih sila uzet s obzirom na neutralnu os y .

Prvu jednadžbu možemo napisati:

$$ES_v - E_t S_t = 0 , \quad (3.19.)$$

gdje su S_v i S_t statički momenti površine, a A_v i A_t tlačne i vlačne zone presjeka s obzirom na neutralnu os y .

Iz druge jednadžbe dobivamo:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{F \cdot w}{E_r I_{min}} , \quad (3.20.)$$

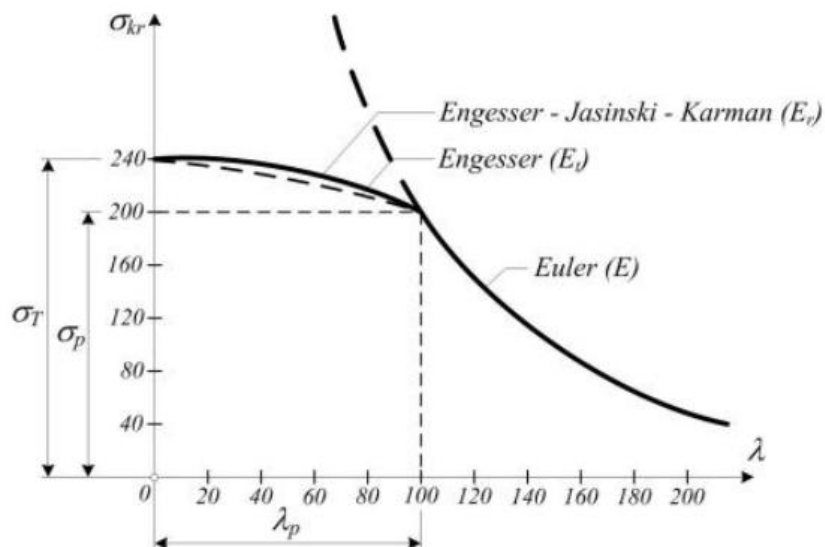
gdje je:

$$E_r = \frac{1}{I_{min}} (EI_v + E_t I_t) \quad (3.21.)$$

reducirani modul ili Engesser-Karmanov modul elastičnosti koji ovisi o kritičnom naprezanju i karakteristikama poprečnog presjeka.

Jednadžbe za kritičnu silu i kritična naprezanja su ista kao i u elastičnom području, samo se umjesto modula elastičnosti E , koristi reducirani modul elastičnosti E_r .

Krivulja kritičnih naprezanja izgleda:



Slika 3.4. Krivulja kritičnih naprezanja [3]

Na slici uočavamo da za štapove čija je vitkost veća od λ_p vrijedi Eulerova hiperbola za određivanje kritičnih naprezanja, dok za ove manje vitkosti vrijede spomenute krivulje.

4. EMPIRIJSKI IZRAZI ZA KRITIČNA NAPREZANJA

Za problem stabilnosti tlačnih štapova provedena su i eksperimentalna istraživanja, koja su sva potvrdila Eulerov izraz za kritična naprezanja pri izvijanju u elastičnom području. Za izvijanje u plastičnom području predloženi su empirijski izrazi koji se zasnivaju na rezultatima eksperimentalnih istraživanja.

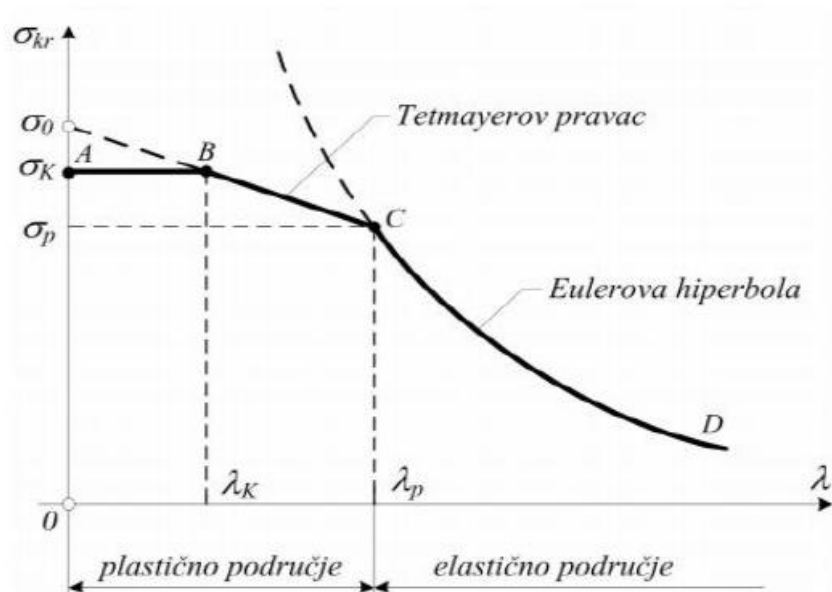
Tetmayer, a zatim i Jasinski, predložili su linearnu ovisnost između kritičnog naprezanja i vitkosti štapa u plastičnom području:

$$\sigma_{kr} = a - b\lambda \quad (4.1.)$$

$$\lambda_K \leq \lambda \leq \lambda_p$$

a, b - koeficijenti koji ovise o svojstvima materijala, a određuju se eksperimentalno.

Ovisnost naprezanja i vitkosti u plastičnom području je prikazana Tetmayerovim prevcem. Pri vitkosti λ_p kritično naprezanje odgovara granici proporcionalnosti σ_p , a pri vitkosti λ_K kritično naprezanje dostiže granicu tečenja σ_K (σ_T) kod elastoplastičnih materijala, odnosno granicu čvrstoće σ_M kod krhkih materijala. Dijagram se sastoji od tri dijela, horizontalnog pravca AB, Tetmayerovog pravca BC i Eulerove hiperbole CD. Po tome razlikujemo štapove male $0 < \lambda < \lambda_K$, srednje $\lambda_K < \lambda < \lambda_p$ i velike vitkosti $\lambda_p < \lambda$.

Dijagram $\sigma_{kr} - \lambda$ za elastoplastični i krhki materijal

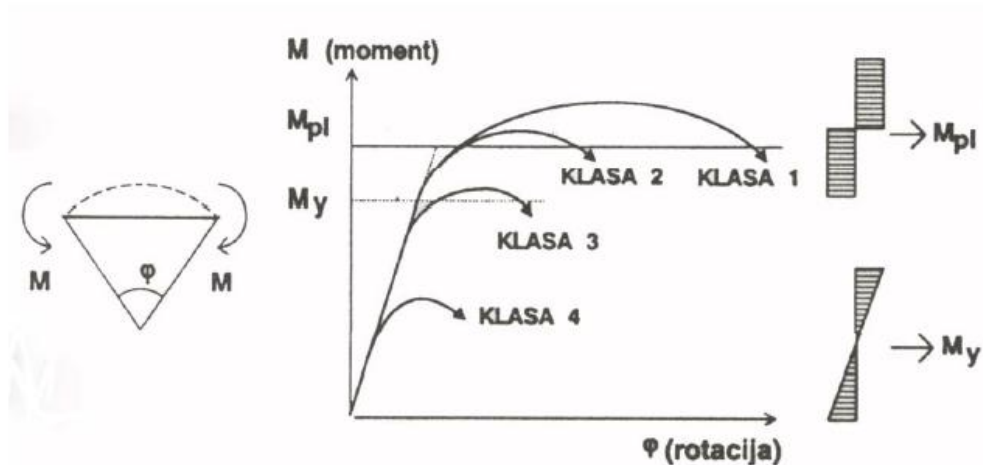
Slika 4.1. Tetmayerov pravac [3]

5. DOKAZ NOSIVOSTI PREMA X-POSTUPKU (OTPORNOST TLAČNOG ELEMENTA)

U suvremenoj regulativi (Eurocode3) se poprečni presjeci po svojim karakteristikama svrstavaju u četiri klase po kojima slijedi daljni proračun provjere otpornosti poprečnog presjeka pa i elementa na zadano djelovanje. Element izložen tlačnom djelovanju se provjerava na: otpornost poprečnog presjeka i otpornost elementa na izvijanje. Za zadani primjer ćemo provjeriti poprečni presjek i otpornost na izvijanje za 4 već spomenuta slučaja pridržanja.

5.1. KLASIFIKACIJA POPREČNOG PRESJEKA

U ovom tipu analize konstrukcijskog elementa, vrlo je bitno ponašanje poprečnog presjeka elementa. Prema Eurocode 3 imamo četiri klase poprečnih presjeka, s obzirom na mogućnost rotacije:



Slika 5.1. Klase poprečnih presjeka elemenata čeličnih konstrukcija [1]

Klasa 1 (plastičan ili duktilan poprečni presjek) - sposoban razviti plastični zglob i ima vrlo izražen rotacijski kapacitet

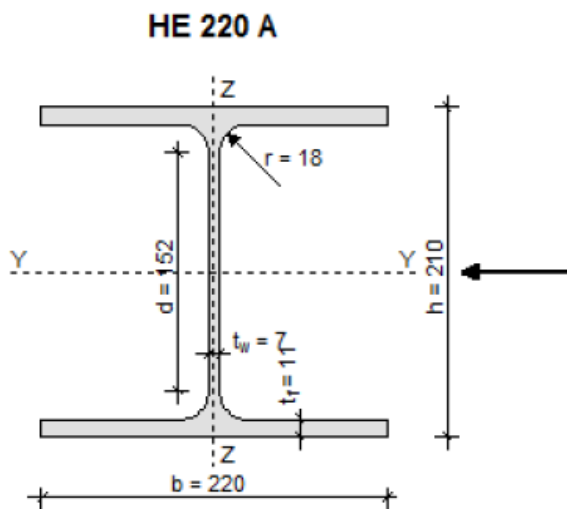
Klasa 2 (kompaktni poprečni presjek) - može razviti plastični zglob ali s ograničenim rotacijskim kapacitetom

Klasa 3 (polukompaktni poprečni presjeci) - rubna vlakanca mogu doseći granicu popuštanja, međutim lokalno izbočavanje sprječava razvijanje momenta pune plastične upetosti

Klasa 4 (vitki poprečni presjeci) - prerana pojava lokalnog izbočavanja tlačnih dijelova presjeka sprječava dostizanje granice popuštanja materijala

U prve dvije klase se provjera provodi plastičnom metodom, dok se u druga dva rabi elastična metoda s time da se za klasu 3 razmatra bruto presjek, a za klasu 4, efektivni.

ZADANI POPREČNI PRESJEK:



Slika 5.2.

Karakteristike poprečnog presjeka:

$$A = 64.3 \text{ cm}^2$$

$$I_y = 5409.7 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 1954.6 \text{ cm}^4$$

$$i_y = 9.2 \text{ cm}$$

$i_z = 5.5 \text{ cm}$

Materijal:

$f_y = 355 \text{ N/mm}^2$

$E = 210000 \text{ N/mm}^2$

Zadana sila opterećenja: $N = -100 \text{ kN}$

Prvo se klasificiraju hrbat i pojasnica odvojeno:

a) Hrbat opterećen na tlak

(a) Dijelovi hrpta: (obostrano pridržani dijelovi okomito na os savijanja)

Klasa	Hrbat opterećen na savijanje	Hrbat opterećen na tlak	Hrbat opterećen na savijanje i tlak	
Raspodjela naprezanja po dijelu presjeka (tlak pozitivan)				
1	$d/t_w \leq 72 \varepsilon$	$d/t_w \leq 33 \varepsilon$	für $\alpha > 0,5$: $d/t_w \leq 396 \varepsilon / (13\alpha - 1)$ für $\alpha < 0,5$: $d/t_w \leq 36 \varepsilon / \alpha$	
2	$d/t_w \leq 83 \varepsilon$	$d/t_w \leq 38 \varepsilon$	für $\alpha > 0,5$: $d/t_w \leq 456 \varepsilon / (13\alpha - 1)$ für $\alpha < 0,5$: $d/t_w \leq 41,5 \varepsilon / \alpha$	
Raspodjela naprezanja po dijelu presjeka (tlak pozitivan)				
3	$d/t_w \leq 124 \varepsilon$	$d/t_w \leq 42 \varepsilon$	für $\psi > -1$: $d/t_w \leq 42 \varepsilon / (0,67 + 0,33\psi)$ für $\psi < -1$: $d/t_w \leq 62 \varepsilon (1 - \psi)(-\psi)^{0,5}$	
$\varepsilon = \sqrt{235/f_y}$	f_y	235	275	355
	ε	1	0,92	0,81

Tablica 5.1. Maksimalni

odnosi d/t za tlačne dijelove presjeka [8]

-uvjet za klasu 1:

$$\frac{d}{t_w} \leq 33\varepsilon = 33 \cdot 0,81 = 26,73 \quad (5.1)$$

$$\varepsilon = \sqrt{235/f_y} = \sqrt{\frac{235}{355}} = 0,81 \quad (5.2)$$

$$\frac{d}{t_w} = \frac{h-2t_f-2r}{t_w} = \frac{210-2 \cdot 11-2 \cdot 18}{7} = 21,71$$

$$21,71 < 26,73$$

Uvjet je zadovoljen, hrbat je klase 1!

b) Pojasnica izložena tlaku

(c) Dijelovi pojasa: (jednostrano oslonjeni dijelovi)

Klas	Oblik poprečnog presjeka	Pojas opterećen na tlak	Pojas opterećen na savijanje i tlak		
			Kraj pojasa u tlaku	Kraj pojasa u vlaku	
Raspodjela naprezanja po dijelu presjeka (tlak pozitivan)					
1	Valjani Zavareni	$c/t_f \leq 10 \epsilon$ $c/t_f \leq 9 \epsilon$	$c/t_f \leq 10 \epsilon/\alpha$ $c/t_f \leq 9 \epsilon/\alpha$	$c/t_f \leq 10 \epsilon/(\alpha^{1.5})$ $c/t_f \leq 9 \epsilon/(\alpha^{1.5})$	
2	Valjani Zavareni	$c/t_f \leq 11 \epsilon$ $c/t_f \leq 10 \epsilon$	$c/t_f \leq 11 \epsilon/\alpha$ $c/t_f \leq 10 \epsilon/\alpha$	$c/t_f \leq 11 \epsilon/(\alpha^{1.5})$ $c/t_f \leq 10 \epsilon/(\alpha^{1.5})$	
Raspodjela naprezanja po dijelu presjeka (tlak pozitivan)					
3	Valjani Zavareni	$c/t_f \leq 15 \epsilon$ $c/t_f \leq 14 \epsilon$	$c/t_f \leq 23 \epsilon k_\sigma^{0.5}$ $c/t_f \leq 21 \epsilon k_\sigma^{0.5}$ <i>k_σ siehe Kapitel III Tabelle 4.2</i>		
$\epsilon = \sqrt{235/f_y}$		f_y	235	275	355
		ϵ	1	0,92	0,81

Tablica 5.2. Maksimalni odnosi d/t za tlačne dijelove presjeka [8]

-uvjet za klasu 1:

$$\frac{c}{t_f} \leq 9\epsilon = 9 \cdot 0,81 = 7,29 \quad (5.3.)$$

$$\frac{c}{t_f} = \frac{(b-t_w-2r)/2}{t_f} = \frac{(200-7-2\cdot 18)/2}{11} = 8,05$$

$$8,09 > 7,29$$

Uvjet nije zadovoljen!

-uvjet za klasu 2:

$$\frac{c}{t_f} \leq 10\varepsilon = 10 \cdot 0,81 = 8,1 \quad (5.4.)$$

$$\frac{c}{t_f} = 8,05$$

$$8,05 < 8,1$$

Uvjet je zadovoljen, pojasnica je klase 2!

Poprečni presjek je klase 2, jer se svrstava u najnepovoljniju klasu ! Za određivanje otpornosti poprečnog presjeka i metode proračuna (elementa klase 2), koristi se postupak "ELASTIČNO-PLASTIČNO". Rezne sile računaju se prema teoriji elastičnosti, a otpornost se računa iskorištavajući plastični moment otpornosti poprečnog presjeka, odnosno plastičnu interakciju momenta savijanja, uzdužne i poprečne sile. [1]

5.2. OTPORNOST POPREČNOG PRESJEKA

Dimenzioniranje prema teoriji plastičnosti koristi izraz granične otpornosti poprečnog presjeka. Potrebno je promotriti potpunu plastifikaciju poprečnog presjeka od pojedinih djelovanja reznih sila.[1]

Svi poprečni presjeci, opterećeni samo uzdužnom silom, dostižu stanje potpune plastifikacije ukoliko je :

$$N_{pl} = A \cdot f_y \quad (5.5.)$$

-Tlačna otpornost poprečnog presjeka :

$$N_{c,Rd} = \frac{\beta \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M0}}, \quad (5.6.)$$

$\beta=1$, za klase 1,2,3

f_y - granica tečenja

γ_{M0} - parcijalni koeficijent sigurnosti

$$\gamma_{M0} = 1,0$$

$$N_{c,Rd} = \frac{1,0 \cdot 64,3 \cdot 35,5}{1,0} = 2282,65 \text{ kN} \quad (5.7.)$$

$$N_{c,Rd} = 2282,65 > N_{Ed} = 100 \text{ kN}$$

Uvjet otpornosti poprečnog presjeka zadovoljava!

Slijedi provjera elementa na stabilnost, odnosno izvijanje, kao mogući način otkazivanja nosivosti elementa.

5.3. OTPORNOST ELEMENTA NA IZVIJANJE

Promatramo izvijanje oko slabije osi z, za koje ćemo dobiti manju otpornost. Da su elementi različito pridržani oko te dvije osi, odnosno da su različite duljine izvijanja, morali bi provjeriti i izvijanje oko osi y.

Postupak računanja:

1) Duljina izvijanja - ovisi o krajnjim pridržanjima, za osnovna četiri slučaja je dobivena iz Eulerovih izvoda

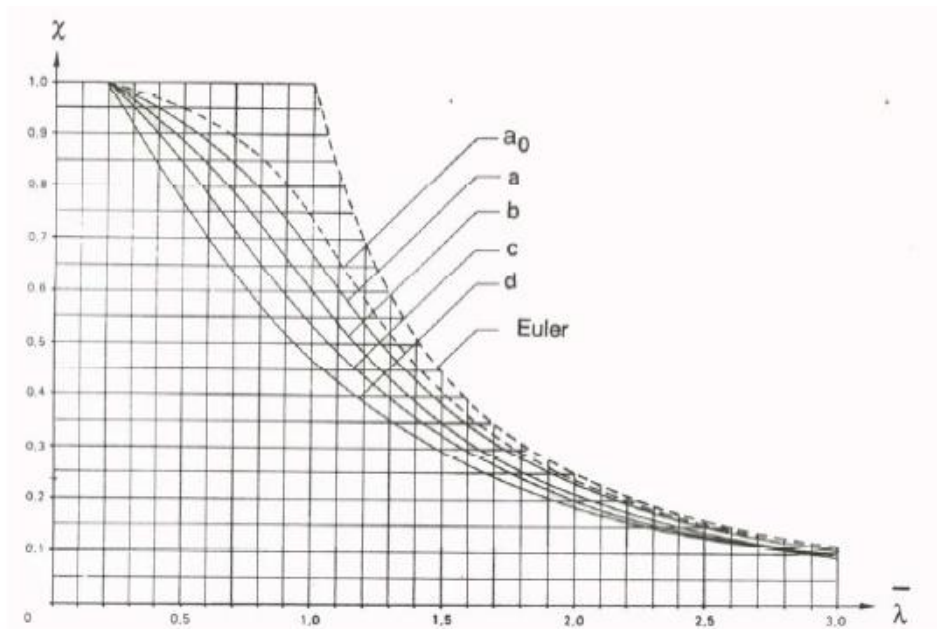
2) Eulerova kritična sila:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_i^2} \quad (5.8)$$

3) Svedena vitkost ($\bar{\lambda}$):

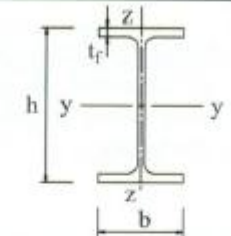
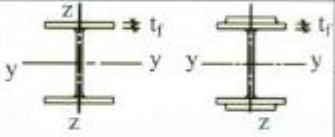

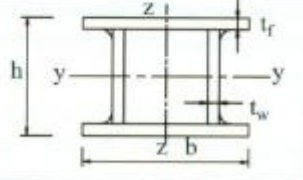
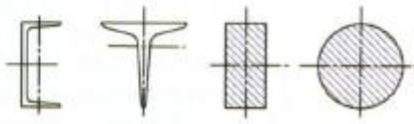

$$\bar{\lambda}_z = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr,z}}} \quad (5.9)$$

4) Određivanje mjerodavne linije izvijanja (dobivene eksperimentalnim istraživanjem):



Slika 5.3. Linije izvijanja [1]

Linije izvijanja se odabiru iz sljedeće tablice:

Poprečni presjeci	Ograničenja	Izvijanje oko osi	Linija izvijanja		
			S 235 S 275 S 355 S 420	S 460	
Valjani presjeci 	$h/b > 1,2$	$t_f \leq 40 \text{ mm}$ y-y z-z	a b	a ₀ a ₀	
		$40 \text{ mm} < t_f \leq 100$ y-y z-z	b c	a a	
		$h/b \leq 1,2$	$t_f \leq 100 \text{ mm}$ y-y z-z	b c	a a
			$t_f > 100 \text{ mm}$ y-y z-z	d d	c c
Zavareni I profili 	$t_f \leq 40 \text{ mm}$ $t_f > 40 \text{ mm}$	y-y z-z	b c	b c	
		y-y z-z	c d	c d	
Šuplji presjeci 	vruće dogotovljeni	bilo koje	a	a ₀	
	hladno oblikovani	bilo koje	c	c	
Zavareni sandu-časti presjeci 	općenito (osim kao ispod)	bilo koje	b	b	
	debljina vara: $a > 0,5t_f$ $b/t_f < 30$ $b/t_w < 30$	bilo koje	c	c	
U-, T- i puni presjeci 		bilo koje	c	c	
L - presjeci 		bilo koje	b	b	

Tablica 5.3. Određivanje linije izvijanja [8]

$$\frac{h}{b} = \frac{210}{220} = 0,95 < 1,2 \rightarrow t_f = 11\text{mm} < 100\text{mm} \rightarrow \text{izvijanje oko osi } z \rightarrow \text{linija } c$$

Krivulja izvijanja	a ₀	a	b	c	d
Faktor imperfekcije α	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

Tablica 5.4. Tablica za odabir faktora imperfekcije α [8]

krivulja izvijanja $c \rightarrow \alpha = 0,49$

4) Faktor redukcije (χ)- izračunavamo analitički prema izrazu (5.3) i (5.4.) ili iz tablica za vrijednosti linije izvijanja.

$$\Phi_z = 0,5 \left[1 + \alpha(\bar{\lambda}_z - 0,2) + \bar{\lambda}_z^2 \right] \quad (5.10.)$$

$$\chi_z = \frac{1}{\Phi_z + \sqrt{\Phi_z^2 + \bar{\lambda}_z^2}} \quad (5.11.)$$

5) Otpornost elementa na izvijanje ($N_{b,Rd}$) - jednaka je otpornosti poporečnog presjeka, smanjenoj za faktor redukcije:

$$N_{b,Rd} = \chi \cdot N_{c,Rd} \quad (5.12.)$$

Vrijednosti za sva četiri slučaja pridrzanja:

Način pridrzanja	Duljina izvijanja- l_i (cm)	Kritična sila izvijanja N_{cr}	$\bar{\lambda}_z$	Φ_z	χ_z	$N_{b,Rd}$ (kN)
1	1200	281,04	2,85	5,21	0,09	204,74
2	600	1124,18	1,42	1,82	0,24	553,61
3	420	2294,24	0,997	1,19	0,36	830,72
4	300	4496,7	0,71	0,88	0,5	1135

Tablica 5.5. Tablica izračunatih parametara i otpornosti elemenata na izvijanje [9]

Uvjet da je element stabilan na izvijanje:

$$N_{Ed} < N_{b,Rd}$$

$$N_{Ed} = 100kN$$

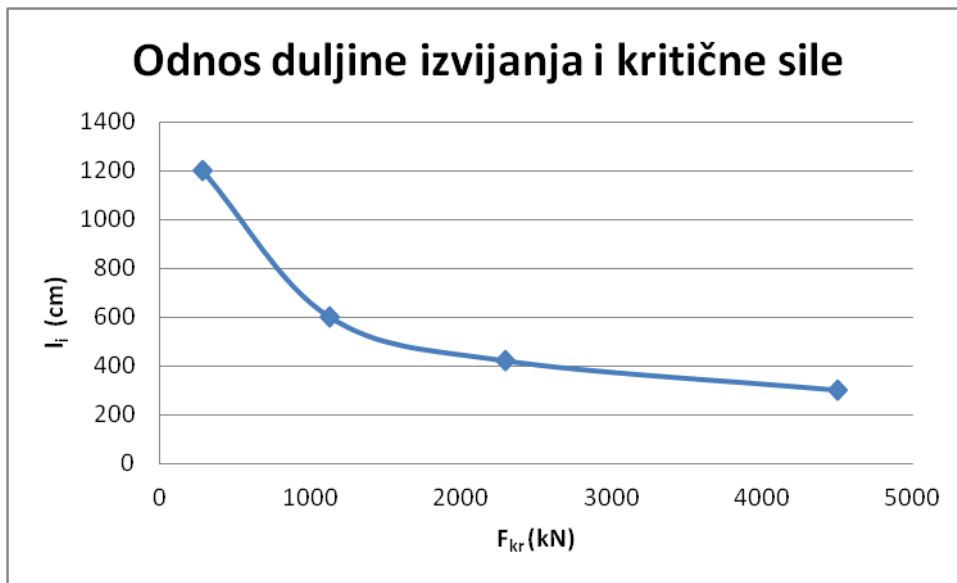
U sva četiri slučaja je element stabilan na izvijanje!

	Duljina izvijanja l_i (cm)	λ	σ (kN/cm ²)
1	1200	218,1818	3,393185
2	600	109,0909	1,696593
3	420	76,36364	1,187615
4	300	54,54545	0,848296

Tablica 5.6. Tablica izračunatih vitkosti i naprezanja [9]

6. ZAKLJUČAK

Iz tablice 5.5. vidimo da je u svim slučajevima pridržanja štapa, zadana sila, manja od otpornosti elementa na izvijanje. Uočavamo da element obostrano zglobno učvršćen, s najvećom duljinom izvijanja, ima i najmanji faktor redukcije pa tako i najmanju otpornost na izvijanje. Što je duljina izvijanja manja, veća je otpornost, pa ako imamo problem izvijanja oko određene osi, dodatnim pričvršćenjima okomito na tu os, smanjujemo duljinu izvijanja.



Slika 6.1. Odnos duljine izvijanja i kritične sile [9]

Iz izraza (2.36.), znamo da je vitkost na granici proporcionalnosti : $\lambda_p = 99$. Prema tome se prvi i drugi elementi izvijaju u području elastičnosti, a preostali u području plastičnosti.

7. POPIS LITERATURE

- [1] Boris Androić, Darko Dujmović, Ivica Džeba; Metalne konstrukcije 1, Institut građevinarstva Hrvatske, Zagreb 1994.
- [2] V. Lubarda; Otpornost materijala
- [3] V. Šimić; Otpornost materijala II; Školska knjiga; Zagreb 2002.
- [4] <http://www.civildb.com/images/tuular-column-buckling-540x350.jpg>
- [5] <https://hr.wikipedia.org/wiki/%C4%8Cvrsto%C4%87a#/media/File:Buckledmodel.JPG>
- [6] AutoCAD - 2015.
- [7] http://www.sfsb.unios.hr/ksk/statika/cvrstoca/M_izvijanje/b_euler/M_s_221.htm
- [8] I. Boko: nastavne prezentacije
- [9] Microsoft Office Excel 2007

8. POPIS SLIKA

Slika 1.1. Izvijeni štap uslijed tlačne sile [4]

Slika 2.1. Ekscentrični unos sile [1]

Slika 2.2. Lokalna početna deformacija [1]

Slika 2.3. Početni deformirani položaj [1]

Slika 2.4. Slučajevi pridrzanja: 1) slobodno oslonjen, 2) obostrano upet, 3) na jednoj strani upet, a na drugoj zglobno oslonjen, 4) konzola [5]

Slika 2.5. Izvijanje obostrano zglobno pridrzanog štapa [6]

Slika 2.6. Izvijanje štapa koji je na jednom kraju upet a na drugom slobodan [6]

Slika 2.7. Izvijanje štapa koji je na jednom kraju upet, a na drugom slobodno oslonjen [6]

Slika 2.8. Izvijanje štapa upetog na oba kraja [6]

Slika 2.9. Eulerova hiperbola [7]

Slika 3.1. σ - ϵ dijagram, okolina točke C [3]

Slika 3.2. Izvijeni, slobodno oslonjeni štap i prikaz stanja naprezanja u "x" presjeku [3]

Slika 3.3. Izvijeni, slobodno oslonjeni štap i dopunska naprezanja zbog savijanja u presjeku "x" [3]

Slika 3.4. Krivulja kritičnih naprezanja [3]

Slika 4.1. Tetmayerov pravac [3]

Slika 5.1. Klase poprečnih presjeka elemenata čeličnih konstrukcija [1]

Slika 5.3. Linije izvijanja [1]

Slika 6.1. Odnos duljine izvijanja i kritične sile [9]

9. POPIS TABLICA

Tablica 5.1. Maksimalni odnosi d/t za tlačne dijelove presjeka [8]

Tablica 5.2. Maksimalni odnosi d/t za tlačne dijelove presjeka [8]

Tablica 5.3. Određivanje linije izvijanja [8]

Tablica 5.4. Tablica za odabir faktora imperfekcije α [8]

Tablica 5.5. Tablica izračunatih parametara i otpornosti elemenata na izvijanje [9]

Tablica 5.6. Tablica izračunatih vitkosti i naprezanja [9]