

# Numerička simulacija dinamičkog međudjelovanja tekućine i konstrukcije

---

Harapin, Alen

Doctoral thesis / Disertacija

2000

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:*

**University of Split, Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy / Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije**

<https://doi.org/10.31534/DocT.007.HarA>

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:123:793942>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-12-25**



*Repository / Repozitorij:*

[FCEAG Repository - Repository of the Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy, University of Split](#)



UNIVERSITY OF SPLIT

  
DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

**GRAĐEVINSKI FAKULTET  
SVEUČILIŠTA U SPLITU**



**Mr. sc. Alen Harapin**

**NUMERIČKA SIMULACIJA DINAMIČKOG  
MEĐUDJELOVANJA TEKUĆINE I KONSTRUKCIJE**

**Disertacija**

**Split, 2000.**

Ova disertacija predana je na ocjenu  
Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Splitu  
u svrhu stjecanja akademskog stupnja  
doktora tehničkih znanosti iz znanstvenog  
polja građevinarstvo.

**Mentor:** Prof. dr. sc. Jure Radnić

**Povjerenstvo za ocjenu:**

Prof. dr. sc. Vinko Jović

Prof. dr. sc. Jure Radnić

Prof. dr. sc. Ante Mihanović

Prof. dr. sc. Pavao Marović

**Povjerenstvo za obranu:**

1. Prof. dr. sc. Vinko Jović \_\_\_\_\_

2. Prof. dr. sc. Jure Radnić \_\_\_\_\_

3. Prof. dr. sc. Ante Mihanović \_\_\_\_\_

4. Prof. dr. sc. Pavao Marović \_\_\_\_\_

**Rad je obranjen: 11. srpnja 2000.**

Tajnica:

Božena Mendeš, dipl. iur.

**Rad sadrži:**

181 stranica teksta

117 crteža

11 tablica

169 citiranih referenci

*Ovaj rad posvećujem svojoj majci,  
supruzi i djeci, jer bez njihove pomoći  
i razumijavanja ovog rada ne bi ni  
bilo.*

*Iskrenu zahvalnost za pomoć tijekom izrade ovog rada izražavam:*

*Prof. dr. sc. Juri Radniću za voditeljstvo i svesrdnu pomoć od inicijalne ideje do završetka rada,*

*Prof. dr. sc. Vinku Joviću, Prof. dr. sc. Anti Mihanoviću i Prof. dr. sc. Pavlu Maroviću za podršku koju su mi pružili u toku izrade rada,*

*Prof. dr. Petru Stojiću, koji je prekopao svoju imponantnu arhivu u potrazi za dokumentacijom brane "Grančarevo",*

*svim mojim radnim i inim kolegama koje neću poimenice nabrajati, ali prepoznat će se već oni...*

*...te svima ostalima koji su me hrabрили da započeto i završim.*

Disertacija

## **NUMERIČKA SIMULACIJA DINAMIČKOG MEĐUDJELOVANJA TEKUĆINE I KONSTRUKCIJE**

### **Sažetak:**

U radu je prikazan numerički model simulacije međudjelovanja armirano betonske konstrukcije i tekućine za 3D (prostorne) probleme pod statičkim i dinamičkim opterećenjem.

Konstrukcija je modelirana degeneriranim elementima ljuske, a tekućina prostornim "brick" elementima.

Za opis ponašanja tekućine korišteni su linearni i nelinearni model. Nelinearnim modelom tekućine simulirana je pojava kavitacije.

Za opis ponašanja betona korišten je specijalni model materijala kojim se može simulirati tečenje betona u tlaku te otvaranje i zatvaranje pukotina u vlaknu.

Valjanost modela i razvijenog software-a testirana je na nekoliko numeričkih primjera.

Ph. D. Thesis

## **NUMERICAL SIMULATION OF DYNAMIC INTERACTION BETWEEN FLUID AND CONSTRUCTION**

### **Summary:**

A numerical model of dynamic interaction between fluid and reinforced concrete structure in 3D space is presented in this work.

Degenerated shell elements for construction and 3D brick elements for fluid are used.

Linear and non-linear material model are used for described the fluid behaviour. Non-linear model can be used for simulated phenomena of cavitation.

Special model which can described concrete yielding in compression and crack opening and closing in tension is used for simulated the concrete behaviour.

The efficiency of model and developed software are tested on some numerical examples.



# SADRŽAJ

<b>1. UVOD.....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 OPĆENITO.....</b>	<b>2</b>
<b>1.2 KRATKI OPIS PROBLEMA .....</b>	<b>2</b>
<b>1.3 PREGLED TEMELJNE LITERATURE .....</b>	<b>3</b>
<b>1.4 CILJ I SADRŽAJ RADA .....</b>	<b>4</b>
<b>1.5 METODOLOGIJA RJEŠAVANJA PROBLEMA .....</b>	<b>5</b>
<b>1.6 PRIMJENA RAZVIJENOG MODELA .....</b>	<b>6</b>
<b>2. NUMERIČKA ANALIZA KONSTRUKCIJE.....</b>	<b>8</b>
<b>2.1 UVODNE NAPOMENE .....</b>	<b>9</b>
<b>2.2 USVOJENI ELEMENT LJUSKE .....</b>	<b>10</b>
2.2.1 <i>Degenerirani izoparametrijski elementi.....</i>	<i>11</i>
2.2.2 <i>Geometrija elementa .....</i>	<i>16</i>
2.2.3 <i>Pomaci elementa .....</i>	<i>17</i>
2.2.4 <i>Deformacije elementa.....</i>	<i>19</i>
2.2.5 <i>Veza između pomaka i deformacija elementa (matrica B).....</i>	<i>21</i>
2.2.6 <i>Određivanje unutrašnjih sila.....</i>	<i>22</i>
2.2.7 <i>Određivanje naprezanja .....</i>	<i>23</i>
2.2.8 <i>Matrica elastičnih svojstava materijala .....</i>	<i>24</i>
2.2.9 <i>Korekcija posmika.....</i>	<i>26</i>
2.2.10 <i>Numerička integracija.....</i>	<i>27</i>
2.2.11 <i>Matrica krutosti elementa.....</i>	<i>28</i>
2.2.12 <i>Tipovi konačnih elemenata ljuske i pripadajuće bazne funkcije .....</i>	<i>29</i>
2.2.13 <i>Uslojenost elementa .....</i>	<i>31</i>
2.2.14 <i>Opterećenje elementa .....</i>	<i>32</i>
2.2.15 <i>Uključenje armature.....</i>	<i>33</i>
<b>2.3 MODEL MATERIJALA ZA STATIČKO OPTEREĆENJE.....</b>	<b>35</b>
2.3.1 <i>Općenito .....</i>	<i>35</i>
2.3.2 <i>Modeliranje betona u tlaku .....</i>	<i>36</i>
2.3.3 <i>Modeliranje betona u vlaku.....</i>	<i>42</i>
2.3.4 <i>Modeliranje betona u području tlak-vlak i vlak-tlak.....</i>	<i>50</i>
2.3.5 <i>Modeliranje armature .....</i>	<i>52</i>
<b>2.4 MODEL MATERIJALA ZA DINAMIČKO OPTEREĆENJE .....</b>	<b>55</b>
2.4.1 <i>Općenito .....</i>	<i>55</i>
2.4.2 <i>Model betona.....</i>	<i>55</i>
2.4.3 <i>Model čelika .....</i>	<i>57</i>
<b>2.5 PROVEDBA NUMERIČKE ANALIZE .....</b>	<b>59</b>
2.5.1 <i>Jednadžba dinamičke ravnoteže .....</i>	<i>59</i>
2.5.2 <i>Vremenska integracija jednadžbi gibanja.....</i>	<i>60</i>
2.5.3 <i>Rješenje svojstvene zadaće.....</i>	<i>69</i>
2.5.4 <i>Matrica masa.....</i>	<i>72</i>
2.5.5 <i>Konstruktivsko prigušenje.....</i>	<i>74</i>
2.5.6 <i>Metoda rješenja nelinearnog problema .....</i>	<i>75</i>
2.5.7 <i>Kriterij konvergencije.....</i>	<i>76</i>
<b>2.5 PRIMJER .....</b>	<b>78</b>

<b>3. NUMERIČKA ANALIZA TEKUĆINE .....</b>	<b>91</b>
<b>3.1 OPĆENITO.....</b>	<b>92</b>
3.1.1 <i>Linearni model tekućine .....</i>	<i>92</i>
3.1.2 <i>Nelinearni model tekućine.....</i>	<i>92</i>
3.1.3 <i>Formulacija tekućine.....</i>	<i>93</i>
<b>3.2 JEDNADŽBE GIBANJA TEKUĆINE.....</b>	<b>94</b>
3.2.1 <i>Zakon održanja mase.....</i>	<i>94</i>
3.2.2 <i>Opća dinamička jednađba gibanja realne tekućine.....</i>	<i>95</i>
3.2.3 <i>Navier-Stokes-ove jednađbe.....</i>	<i>96</i>
<b>3.3 LINEARNI MODEL TEKUĆINE.....</b>	<b>98</b>
3.3.1 <i>Općenito .....</i>	<i>98</i>
3.3.2 <i>Formulacija tlakova .....</i>	<i>98</i>
3.3.3 <i>Formulacija potencijala pomaka.....</i>	<i>100</i>
<b>3.4 NELINEARNI MODEL TEKUĆINE .....</b>	<b>103</b>
3.4.1 <i>Općenito .....</i>	<i>103</i>
<b>3.5 SIMULACIJA PRIGUŠENJA TEKUĆINE .....</b>	<b>106</b>
<b>3.6 KONAČNI ELEMENTI ZA TEKUĆINU .....</b>	<b>107</b>
<b>3.7 PRIMJERI .....</b>	<b>109</b>
<b>4. NUMERIČKA SIMULACIJA MEĐUDJELOVANJA TEKUĆINE I KONSTRUKCIJE.....</b>	<b>117</b>
<b>4.1 UVOD .....</b>	<b>118</b>
<b>4.2 KINEMATIČKI OPIS GIBANJA SUSTAVA TEKUĆINA-KONSTRUKCIJA.....</b>	<b>119</b>
<b>4.3 OPIS PROBLEMA MEĐUDJELOVANJA TEKUĆINA- KONSTRUKCIJA.....</b>	<b>121</b>
<b>4.4 PLOHA MEĐUDJELOVANJA TEKUĆINA-KONSTRUKCIJA .....</b>	<b>123</b>
<b>4.5 VREMENSKA INTEGRACIJA KOD PROBLEMA VEZANIH POLJA.....</b>	<b>125</b>
<b>4.6 STATIČKA ANALIZA PROBLEMA VEZANIH POLJA.....</b>	<b>131</b>
<b>4.7 RJEŠENJE SVOJSTVENE ZADAĆE VEZANIH POLJA .....</b>	<b>133</b>
<b>4.8 RJEŠENJE PROBLEMA MEĐUDJELOVANJA TEKUĆINE I KONSTRUKCIJE .....</b>	<b>134</b>
4.8.1 <i>Općenito .....</i>	<i>134</i>
4.8.2 <i>Problemi s linearnim modelom tekućine .....</i>	<i>135</i>
4.8.3 <i>Problemi s nelinearnim modelom tekućine.....</i>	<i>136</i>
<b>4.9 KRATKI PRIKAZ RAZVIJENOG SOFTWARE-a.....</b>	<b>140</b>
<b>4.10 PRIMJERI.....</b>	<b>141</b>
<b>5. ZAKLJUČCI I PREPORUKE ZA DALJNJA ISTRAŽIVANJA.....</b>	<b>168</b>
<b>5.1 ZAKLJUČCI .....</b>	<b>169</b>
<b>5.2 PRAVCI DALJNJEG ISTRAŽIVANJA.....</b>	<b>170</b>
5.2.1 <i>Modeliranje tekućine .....</i>	<i>170</i>
5.2.2 <i>Modeliranje konstrukcije.....</i>	<i>170</i>
5.2.3 <i>Modeliranje interakcije tekućine i konstrukcije .....</i>	<i>171</i>
5.2.4 <i>Općenita poboljšanja.....</i>	<i>171</i>
<b>6. LITERATURA .....</b>	<b>172</b>

# **1. UVOD**

## 1.1 OPĆENITO

Može se reći da problematika cjelokupnog sagledavanja građevine zajedno s okolinom u kojoj se ona nalazi postaje svjetski trend u numeričkom modeliranju, i to ne samo u akademskom već i u praktičnom smislu. Konstrukcija je samo jedan dio sredine u kojoj se nalazi, te praćenje njenog ponašanja u okviru i zajedno s okolinom predstavlja neophodnost ako se želi dobiti stanje što bliže stvarnosti. Stoga je logično da konstrukciju koja je u neposrednom dodiru s tekućinom i tлом treba modelirati skupa s određenim dijelom njenog okoliša, tj. zajedno s konstrukcijom treba modelirati i medije s kojima je ona u doticaju.

Svjedoci smo sve bržeg napretka tehnologije, pojave novih ili poboljšanja postojećih materijala, te pojave novih načina gradnje. Neophodno je da i proračunski modeli slijede te trendove. Kako utrošak materijala i rok izgradnje, a što neposredno utječe na cijenu objekta, predstavljaju osnov tržišne utrke, očito je da tradicionalni načini proračuna složenih inženjerskih konstrukcija ne mogu dati zadovoljavajuće rješenje. Dakle, neophodan je razvoj takvih numeričkih modela koji mogu opisati realno ponašanje konstrukcija.

U ovom je radu prikazan jedan numerički model za simulaciju dinamičke interakcije sustava tekućina-konstrukcija koji značajno približava numeričke rezultate stvarnom ponašanju. Očekuje se da razvijeni model nađe svoju praktičnu primjenu, te doprinese boljem poznavanju ponašanja i preciznijem određivanju sigurnosti armirano betonskih konstrukcija u dodiru s tekućinom.

Izloženim modelom moguće je simulirati trodimenzionalne (3D) probleme. Kod toga je konstrukcija modelirana kao ljuska, a tekućina s tzv. "brick" elementima.

## 1.2 KRATKI OPIS PROBLEMA

Interakcija sustava tekućina-tlo-konstrukcija složena je inženjerska i numerička zadaća, koja ima za cilj praćenje ponašanja konstrukcije pod dinamičkim opterećenjem.

Problem dinamičke interakcije sustava tekućina-tlo-konstrukcija u literaturi se može naći pod pojmom 'vezana zadaća' (eng. 'coupled problem'). Dobrom simulacijom materijala konstrukcije i tla moguće je prikladno simulirati interakciju tla i konstrukcije. Stoga, za većinu problema, nema potrebe odvajati tlo od konstrukcije, već se tlo i konstrukcija mogu tretirati kao jedan cjelovit sustav (konstrukcija u širem smislu). Ovakav pristup je korišten i u ovom radu.

Pojam međudjelovanja tekućine i konstrukcije može se podijeliti na međudjelovanje na plohi, te međudjelovanje kod kojeg se polja (tekućina i konstrukcija) prožimaju (npr. procjeđivanje). U ovom radu obrađen je isključivo prvi tip problema, i to slučaj mirne tekućine i konstrukcije izloženih dinamičkoj pobudi.

U tradicionalnim analizama obično se konstrukcija tretira izdvojeno, opterećena hidrostatičkim i hidrodinamičkim tlakovima tekućine (dobivenim uz pretpostavku neizmjereno krute konstrukcije). Često se pri tom konstrukcija, koja je najčešće armirano betonska, promatra kao linearno elastično tijelo. Ovakve analize, i kad su pomno provedene (s velikim brojem konačnih elemenata i sl.), ne mogu dati pravu sliku ponašanja konstrukcije. Pri tome o praćenju ponašanja tekućine ne može biti ni govora, jer je ona u početku aproksimirana silama i izbačena iz daljnjeg razmatranja.

Realno modeliranje armirano betonske konstrukcije mora uključiti dva osnovna čimbenika nelinearnog ponašanja armiranog betona: tečenje betona u tlaku i otvaranje pukotina u vlaknu. Također, za neke konstrukcije, od bitne važnosti je i uključivanje geometrijske nelinearnosti (lučne brane, rezervoari i druge vitke konstrukcije).

Modeliranje pukotina često se zasniva na modelu tzv. raspodijeljenih pukotina, koji je korišten i u ovom radu. Ovakav model ne može u potpunosti opisati lokalne efekte, ali može dati dobru globalnu sliku pukotinskog stanja.

Kompleksno ponašanje armiranog betona pod dinamičkim opterećenjem, kao i njegovo stohastičko djelovanje, dodatno otežava analize.

Imajući u vidu prethodno navedeno, može se zaključiti da je problem dinamičke interakcije tekućina-tlo-konstrukcija izuzetno složen čak i u slučajevima vrlo jednostavne geometrije i opterećenja.

### 1.3 PREGLED TEMELJNE LITERATURE

U svijetu je do sada razvijeno i publicirano niz numeričkih modela koji simuliraju problem međudjelovanja tekućine, tla i konstrukcije u uvjetima dinamičkog opterećenja. Velika većina tih modela opisuje dvo-dimenzionalne (2D), a manji broj tro-dimenzionalne (3D) probleme. Nadalje, modeli koji i opisuju 3D probleme uglavnom se zasnivaju na klasičnom linearno elastičnom, elasto-plastičnom i elasto-viskoplastičnom ponašanju materijala, što dakako ne zadovoljava potrebe realne simulacije problema.

Izloženi model za simulaciju dinamičke interakcije sustava tekućina-tlo-konstrukcija kod 3D problema temelji se na 2D modelu koji su razradili Paul [P.3], Bathe [B.2], Westergaard [W.3], Von Karman [K.1], Zangar [Z.1, Z.2], Cwang [C.15], Sharan [S.6, S.7],

Wandering [W.1], Sandberg [S.2] i Koh [K.3], te nadopunili Radnić [R.1, R.2, R.3, R.5] i Harapin [H.3]. Osnovni algoritam za ljske (konstrukciju) uzet je prema Owen i Hinton [O.4, O.5], Hinton i Rahman [H.5], Figueiras i Owen [F.2, F.3], Kozulić [K.5] i Huang [H.9]. Opis ponašanja tekućine u osnovi je uzet prema Paul [P.3], Truilo [T.1], Hirt [H.7], Donea [D.4] te Belytschko [B.7, B.8].

Za simulaciju ponašanja armiranog betona korištena je literatura Bangash [B.1], Hofstetter i Mang [H.8], Damjanić [D.1], Hinton i Rahman [H.5], Figueiras i Owen [F.2, F.3] te Radnić [R.1, R.3]. Za izračunavanje tenzora međudjelovanja korištena je literatura Paul [P.3] i Radnić [R.1, R.2, R.3, R.5], pri čemu je njegova razrada u 3D izravni doprinos ovog rada.

## 1.4 CILJ I SADRŽAJ RADA

Cilj rada je izrada numeričkog modela kojim bi se ispravno i djelotvorno moglo pratiti ponašanje prostornih (3D) konstrukcija koje su u dodiru s tekućinom, u uvjetima statičkog i dinamičkog (potresnog) opterećenja. Izloženi model i razvijeni proračunski program testiran je na nekim dostupnim primjerima iz literature, s ciljem i nadom da nađu svoju što širu primjenu u rješavanju praktičnih inženjerskih problema.

Model je prvenstveno namijenjen za dinamičku analizu konstrukcija u dodiru s vodom, ali također i za statičku i dinamičku analizu svih drugih konstrukcija i problema koji se ovim modelom mogu prikladno simulirati.

Rad je podijeljen u 5 poglavlja.

Prvo poglavlje je uvodno, u kojem se ukratko obrazlaže osnovna problematika te iznosi ideja rada.

U drugom poglavlju izložen je numerički model konstrukcije. Poblje je opisan model degeneriranog konačnog elementa ljske, te materijalni modeli betona i armature u uvjetima statičkog i dinamičkog opterećenja. Opisane su tehnike rješavanja i problemi kod provođenja numeričke analize pojedinačnih polja. Model konstrukcije je testiran na nekoliko realnih inženjerskih primjera.

U trećem poglavlju izložen je numerički model tekućine. Opisani su konačni elementi za tekućinu, kao i linearni i nelinearni modeli tekućine. Model je testiran na dva primjera.

U četvrtom poglavlju numerički model tekućine i konstrukcije povezani su u jedinstveni model za analizu međudjelovanja tekućine i konstrukcije. Prikazani su

algoritmi rješenja ovog složenog problema, te je ukratko opisan razvijeni računalni program. U nastavku, izvršena je analiza dva praktična primjera, te su analizirani i komentirani dobiveni rezultati.

U petom poglavlju izloženi su zaključci rada i preporuke za daljnja istraživanja.

Na kraju rada, u šestom poglavlju, dan je pregled korištene literature.

## 1.5 METODOLOGIJA RJEŠAVANJA PROBLEMA

Primjenom zakona dinamičke ravnoteže na sustav tekućina-konstrukcija dobivaju se dvije diferencijalne jednačbe (jedna za opis polja tekućine, a druga za opis polja konstrukcije). Osnovne nepoznanice su: potencijal pomaka za tekućinu i pomak za konstrukciju. Ove dvije jednačbe su vezane preko tenzora međudjelovanja u kojem je opisana ploha dodira tekućine i konstrukcije. Jednačbe je potrebno riješiti za početne i rubne uvjete.

Za opis ponašanja tekućine koristi se linearni materijalni model (mogućnost pojave neograničenih negativnih tlakova) i nelinearni materijalni model (simulacija pojave kavitacije). Tekućina se modelira 20-čvornim (Serendipity) i 27-čvornim izoparametrijskim konačnim elementima (tzv. "brick" elementima Lagrange-ovog tipa).

Rješenje problema međudjelovanja tekućine i konstrukcije u uvjetima dinamičkog opterećenja izvršeno je s pomoću metode zasebnih rješenja, u kojoj se ukupni sustav rastavlja na pojedinačna polja (tekućina i konstrukcija). Polja se dalje analiziraju odvojeno, uzimajući u obzir sile interakcije na kontaktnim ploham. Postupak se provodi iterativno, sve dok se ne zadovolji kriterij konvergencije. Može se reći da je ovaj način rješenja prirodan i jednostavan, a u stvarnosti predstavlja postupak kondenzacije matrica. Ovakav pristup ima i niz prednosti:

- Moguće je koristiti postojeće računalne programe za pojedinačna polja;
- Moguće je koristiti različite metode diskretizacije pojedinih polja;
- Nije nužno moćno računalo i smanjeno je vrijeme trajanja analize;
- Svi fenomeni koje opisuju pojedinačna polja automatski su uključeni i kod simulacije problema dinamičkog međudjelovanja;
- Moguća je brza i jednostavna modifikacija modela pojedinačnih polja, pa tako i problema međudjelovanja;

- Kod rješavanja problema međudjelovanja mogu sudjelovati eksperti poznavanja pojedinačnih polja, a da pri tome ne moraju dublje ulaziti u problematiku poznavanja drugog polja.

Za opis ponašanja betona koristi se modificirani elasto-plastični model materijala, koji simulira pojavu drobljenja u tlaku, te pojavu otvaranja i zatvaranja pukotina nakon prekoračenja vlačne čvrstoće u jednom od smjerova glavnih napreznja. Za opis ponašanja armature koristi se klasični elasto-plastični model, sa simulacijom sloma armature nakon prekoračenja granične deformacije. Konstrukcija se modelira 8-čvornim (Serendipity) i 9-čvornim elementima ljuske (tzv. degenerirani “shell” elementi), s tzv. uslojenim modelom po debljini ljuske (presjeka). Armatura se modelira zasebnim lamelama u okviru osnovnog konačnog elementa betona.

Prostorni model međudjelovanja tekućine i konstrukcije izveden je tehnikom konačnih elemenata iz jake formulacije problema opisanog spomenutim diferencijalnim jednažbama. Za opis gibanja fluida koristi se Euler-ov, a za opis gibanja konstrukcije Lagrange-ov koordinatni sustav.

Potencijal pomaka kod tekućine, te pomaci i zaokreti čvorova za konstrukciju opisani su lokaliziranim baznim funkcijama, uz korištenje Galjerkin-ove tehnike (test funkcije jednake baznim funkcijama).

Integracija napreznja unutar elementa ljuske izvedena je preko svakog sloja materijala, korištenjem Gauss-ovog numeričkog postupka, za svaki vremenski i iteracijski korak nelinearnog postupka. Vremenska integracija jednažbi gibanja izvršena je Newmark-ovim eksplicitno-implicitnim algoritmom. Za tehniku rješavanja sustava jednažbi korišten je “Skyline” postupak.

## 1.6 PRIMJENA RAZVIJENOG MODELA

Razvijeni numerički model i prateći računalni program, kako je ranije naglašeno, može se primjenjivati za sve armirano betonske 3D konstrukcije koje se mogu dovoljno precizno opisati elementima ljuske. Iako je osnovna namjena primjene modela na konstrukcije koje su u neposrednom dodiru s tekućinom (primjerice: lučne brane, gravitacijske brane, vodotornjevi, rezervoari, off shore konstrukcije, obalne konstrukcije i sl.), mogu se analizirati i sve ostale konstrukcije koje nisu u neposrednom dodiru s tekućinom. Može se analizirati i samo tekućina koje je u stanju mirovanja (ne teče) izložena dinamičkoj pobudi.



Ponašanje konstrukcije se može pratiti od faza radnog opterećenja do sloma, kako za statičko tako i za dinamičko opterećenje.

Ponašanje tekućine se može pratiti preko hidrodinamičkih tlakova u linearnom i nelinearnom (pojava kavitacije) području.

## **2. NUMERIČKA ANALIZA KONSTRUKCIJE**

## 2.1 UVODNE NAPOMENE

U ovom je poglavlju izložen jedan model za nelinearnu statičku i dinamičku analizu same konstrukcije. Za modeliranje konstrukcije usvojen je model ljski jer su one vrlo racionalne i široko rasprostranjene konstrukcije. Osim toga, mnoge konstrukcije u dodiru s tekućinom mogu se prikladno simulirati kao ljske (primjerice: lučne brane, rezervoari, off-shore konstrukcije i sl.), što je obuhvaćeno u modelu međudjelovanja tekućina-konstrukcija u Poglavlju 4.

Korišteni su degenerirani 8 i 9-čvorni izoparametrijski elementi ljske, pri čemu svaki čvor ima 5 stupnjeva slobode (tri translacije i dvije rotacije). Usvojeni element ljske je oslobođen tzv. posmičnog i membranskog blokiranja (“locking”), prema Huang [H.9].

Prikazan je specijalni model materijala, prvenstveno namijenjen simulaciji armirano betonskih konstrukcija. Međutim, ovaj se model materijala može uspješno koristiti i za simulaciju nekih vrsta stijena i sličnih materijala. Kao posebni slučajevi, modelom se može opisati klasično elastično i elasto-plastično ponašanje materijala.

Usvojeni model materijala simulira najvažnije nelinearne efekte ponašanja armiranog betona: tečenje u tlaku i razvoj pukotina u vlaklu, te nelinearno ponašanje armature. Kod dinamičkog opterećenja uključen je utjecaj brzine deformacije na mehaničke karakteristike betona i čelika. Po visini element ljske je podijeljen u slojeve, s mogućnošću definiranja različitih svojstava materijala pojedinog sloja. Armatura je definirana kao posebna lamela, s mogućnošću nošenja i krutosti samo u smjeru pružanja šipki. Usvojena je puna kompatibilnost pomaka betona i armature.

Geometrijska nelinearnost konstrukcije je obuhvaćena preko uključanja velikih pomaka. Korištene su tekuće ažurirane (“updated”) koordinate čvorova za definiranje veze pomak-deformacija.

Vremenska integracija jednadžbi gibanja izvršena je eksplicitnim, implicitnim i eksplicitno-implicitnim algoritmima. Prikazano je jedno rješenje svojstvene zadaće, te diskutirani još neki proračunski aspekti provedbe statičke i dinamičke analize.

Na temelju izloženog modela razvijen je proračunski program “**Dak3D**” za statičku i dinamičku analizu ljski. Kao prikaz mogućnosti razvijenog računalnog programa, analiziran je jedan inženjerski primjer posebno za statičko, a posebno za dinamičko opterećenje.

## 2.2 USVOJENI ELEMENT LJUSKE

Primjeri ljuskastih konstrukcija mogu se pronaći posvuda u prirodi. Stoga je logično da se te efektne strukturne forme odavno koriste u građevinarstvu. Pri projektiranju ljuskastih konstrukcija u prošlosti inženjeri su se uglavnom oslanjali na intuiciju i iskustvo prethodnih graditelja, uz provedbu tek nekoliko jednostavnih proračuna. Brzim razvojem tehnologije, naročito računarske tehnologije, situacija se naglo izmijenila. Moderno konstruiranje ljusaka prate proračuni koji variraju od jednostavnih do visoko sofisticiranih analiza. Uz proračune, često se za važnije i složenije konstrukcije usporedno rade i fizikalni modeli koji, uz numeričke simulacije, produbljuju ukupno znanje o ponašanju konstrukcije i materijala.

Analitička rješenja za ljuske ograničena su u primjeni na vrlo jednostavne i pravilne geometrijske oblike, uvjete pridržanja i opterećenja, te linearno elastično ponašanje materijala. Kako ovi uvjeti u praksi redovito nisu ispunjeni, najčešće se koriste numerički postupci proračuna. Kod toga, tehnika konačnih elemenata (TKE), koja je korištena i u ovom radu, ima daleko najširu primjenu. Prve primjene TKE u analizama ploča i ljuski datiraju s početka 60-ih, a znatniji napredak javlja se početkom 80-ih godina [A.5], [Z.5].

Globalno gledano, u razvojnom slijedu tipa konačnog elementa ljuske mogu se razlučiti tri pristupa: (i) ravni trokutasti ili kvadrilateralni elementi, (ii) zakrivljeni 3D elementi formulirani na temelju različitih teorija ljuski, (iii) degenerirani 2D elementi izvedeni iz 3D elemenata.

Trokutasti i kvadrilateralni elementi su se često primjenjivali na analizu ljusaka zbog svoje jednostavnosti. Dobiveni rezultati mogu biti zadovoljavajući ako se koristi gusta mreža elemenata koja može dobro opisati zakrivljenost konstrukcije.

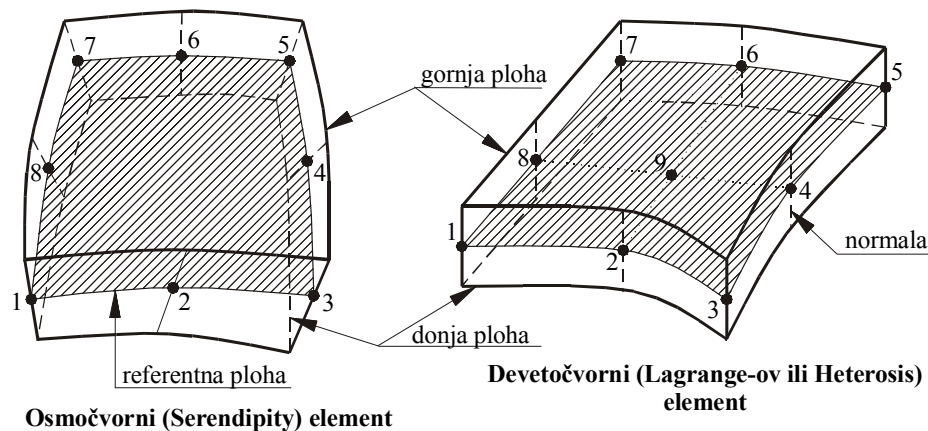
Kod zakrivljenih 3D elemenata, osnovu čini Kirchoff-Loveyeva hipoteza tankih ljuski. Ovi elementi su također prilično popularni, ali pate od raznih ograničenja koji su posljedica nedovoljne decidiranosti teorija na kojima se zasnivaju. Jedan iz skupine takvih elemenata detaljno je opisan u lit. [M.13].

U više pogleda, koncept zasnovan na degeneriranim 2D elementima pokazao se najprikladnijim za uporabu. Razvoj postupka započeo je Ahmad i dr. [A.1], a poboljšanja su uveli Zienkiewicz i drugi [Z.6]. U osnovi, ovi elementi su izvedeni iz prostornih elemenata. Trodimenzionalne jednadžbe mehanike kontinuuma prilagođene su ponašanju ljuskastih konstrukcija, čime su izbjegnute kompleksnosti opće teorije ljuski. Neovisni translacijski pomaci gornjih i donjih čvorova nadomješteni su s pomacima i zaokretima referentne plohe

(što je najčešće srednja ploha elemenata). Pri tome je pretpostavljena nestišljivost elementa s obzirom na srednju plohu. Polja pomaka i zaokreta na elementu su međusobno neovisni što omogućava razmatranje posmičnih deformacija i analizu debelih ljuski. Ovaj koncept primjenjiv je na materijalno i geometrijski nelinearne probleme.

Izoparametrijski elementi ljuske također imaju određene nedostatke koji se pokušavaju izbjeći na razne načine. Osnovni Ahmadovi elementi su se pokazali neučinkoviti pri analizi tankih ljuski. Uzrok tome je slabo strukturirana globalna matrica krutosti u kojoj su posmični članovi za red  $(L/h)^2$  veći od progibnih članova (pri čemu je  $L$  raspon konstrukcije a  $h$  njena debljina). Kod manjih debljina, zbog odnosa  $(L/h)$ , posmični članovi u globalnoj matrici postaju prevladavajući i uzrokuju tzv. posmično blokiranje ("Shear locking"). Taj se problem najčešće rješava selektivnom integracijom.

Osnovni model (elementi), korišten u ovom radu, preuzet je od Figueirasa i Owena, lit. [O.4, O.5, O.6, F.3], nadopunjenim od Huanga [H.9]. Model je zasnovan na tri vrste konačnih elemenata: osmočvornim (Serendipity), devetočvornim Lagrangeovim i Heterosis elementima, prikazanih na Crtežu 2.1 i Crtežu 2.7. Ovi elementi daju zadovoljavajuće rezultate za debele i tanke ploče, te onemogućavaju tzv. posmično i membransko blokiranje. Ovaj model omogućava zadavanje nehomogenih presjeka i nelinearnih materijala pomoću višeslojne diskretizacije.



Crtež 2.1 - Neki izoparametrijski elementi ljuske

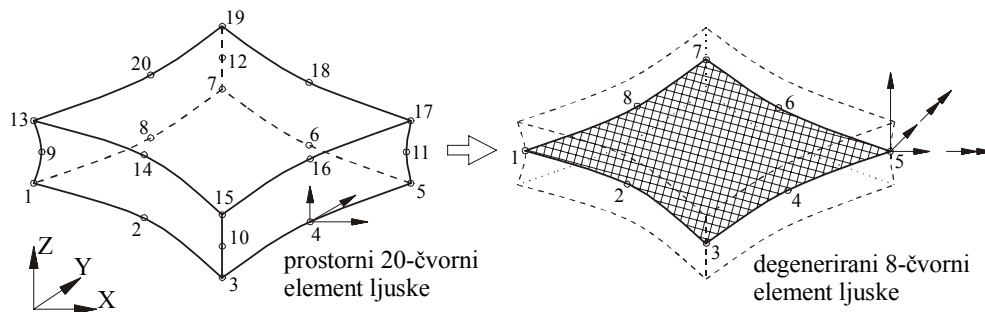
## 2.2.1 Degenerirani izoparametrijski elementi

### 2.2.1.1 Opće pretpostavke

Degenerirani izoparametrijski elementi ljuske imaju za bazne funkcije polje polinoma, a izvedeni su iz trodimenzionalnih elemenata (vidi Crtež 2.2). Neprekidnosti su  $C^0$ , što

znači da su razvijeni po teoriji koja zahtjeva neprekidnost nultih derivacija, odnosno samih baznih funkcija. Dvije su osnovne pretpostavke u ovom pristupu [F.3]:

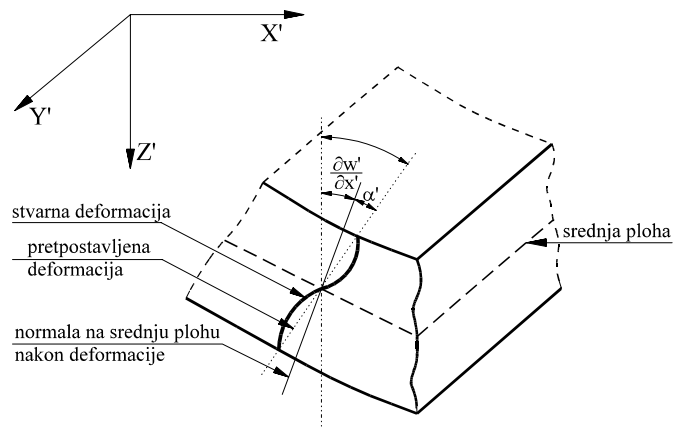
- Normala na srednju plohu ostaje pravac i nakon deformiranja (čak i kod debelih ljuski), premda ne nužno okomita na deformiranu srednju plohu;
- Zanemareno je naprezanje okomito na srednju plohu ljuske (pretpostavlja se ravninsko stanje naprezanja).



**Crtež 2.2** - Element ljuske (8 čvorovi) izveden iz 20 čvornog prostornog elementa

Svaki čvor ima pet stupnjeva slobode: tri translacije i dvije rotacije okomite na srednju plohu ljuske. Nezavisnost rotacijskih od translacijskih pomaka omogućava obuhvaćanje posmičnih utjecaja prema Reissner-Mindlin-ovoj teoriji. Ovakvi elementi mogu veoma dobro opisati zakrivljene oblike ljuski.

Definicija neovisnosti polja pomaka i zaokreta omogućava uzimanje u obzir poprečnih posmičnih deformacija, jer zaokreti nisu povezani s nagibom srednje ravnine, nego samo ovisni o zaokretu normale, Crtež 2.3. Ovaj pristup je ekvivalentan upotrebi opće teorije ljuski i svodi se na Reissner-Mindlin-ovu teoriju ploča [H.5].



**Crtež 2.3** - Deformacija presjeka ljuske

### 2.2.1.2 Koordinatni sustavi

U formulaciji degeneriranog krivocrtnog elementa ljuske koriste se četiri koordinatna sustava: globalni, čvorni, krivocrtni (prirodni) i lokalni, koji su opisani u nastavku.

#### Globalni koordinatni sustav

To je Cartesi-jev koordinatni sustav, proizvoljno izabran. U njemu se iskazuje geometrija konstrukcije (koordinate čvorova i pomaci), te globalna matrica krutosti i vektor opterećenja. Za njegove koordinate upotrebljavaju se sljedeće oznake (Crtež 2.4):

$$\mathbf{X}_i \quad (i=1,2,3) \quad \mathbf{X}_1 = \mathbf{X} \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{Y} \quad \mathbf{X}_3 = \mathbf{Z} \quad (2.1)$$

Komponente vektora pomaka  $\mathbf{u}_i$  proizvoljne točke elementa u globalnom koordinatnom sustavu označavaju se s (Crtež 2.4):

$$\mathbf{u}_i \quad (i=1,2,3) \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u} \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v} \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{w} \quad (2.2)$$

Jedinični vektori se označavaju s:  $\mathbf{X}_i^0 = [\mathbf{X}_1^0, \mathbf{X}_2^0, \mathbf{X}_3^0]$ .

#### Čvorni koordinatni sustav

Čvorni koordinatni sustav je također Cartesi-jev pravokutni ortonormirani desni koordinatni sustav. Definiran je u svakom čvoru, s ishodištem na referentnoj srednjoj plohi (Crtež 2.4). To je referentni sustav za rotacije. Određen je s tri vektora koji su označeni s  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  i  $\mathbf{v}_3$ . Vektor  $\mathbf{v}_{3k}$  je određen čvornim koordinatama gornje i donje površine elementa u čvoru  $k$ :

$$\mathbf{v}_{3k} = \mathbf{X}_k^{\text{gornji}} - \mathbf{X}_k^{\text{donji}} \quad (2.3)$$

gdje je  $\mathbf{X}_k = [\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k, \mathbf{Z}_k]^T$ .

Vektor  $\mathbf{v}_{1k}$  je okomit na  $\mathbf{v}_{3k}$  i paralelan s ravninom XZ u globalnom koordinatnom sustavu. Njegov smjer je stvar dogovora, pa se tako pojedine komponente određuju na slijedeći način:

$$\mathbf{v}_{1k}^X = \mathbf{v}_{3k}^Z \quad \mathbf{v}_{1k}^Y = 0.0 \quad \mathbf{v}_{1k}^Z = -\mathbf{v}_{3k}^X \quad (2.4)$$

ili ako je  $\mathbf{v}_{3k}$  u Y smjeru:

$$\mathbf{v}_{3k}^X = \mathbf{v}_{3k}^Z = 0.0 \quad (2.5)$$

te:

$$\mathbf{v}_{1k}^X = -\mathbf{v}_{3k}^Y \quad \mathbf{v}_{1k}^Y = \mathbf{v}_{1k}^Z = 0.0 \quad (\text{X smjer}) \quad (2.6)$$

Jedinični vektori u smjerovima  $\mathbf{v}_{ik}$  označavaju se s:  $\mathbf{v}_{1k}^0, \mathbf{v}_{2k}^0, \mathbf{v}_{3k}^0$ . Vektor  $\mathbf{v}_{3k}^0$  određuje pravac normale koja nije nužno okomita na srednju plohu u čvoru  $k$ . Vektori  $\mathbf{v}_{1k}^0$  i  $\mathbf{v}_{2k}^0$  definiraju pozitivne smjerove zaokreta pripadajuće normale. Zaokret  $\alpha_A$  je u pozitivnom

smjeru  $\mathbf{v}_{1k}^0$ , a  $\beta_A$  je u pozitivnom smjeru  $\mathbf{v}_{2k}^0$  (Crtež 2.4). Definicija koja se koristi za vektor  $\mathbf{v}_{1k}^0$  omogućava jednostavno utvrđivanje njegovog smjera za općenito zakrivljene ljskaste konstrukcije.

### Krivocrtni koordinatni sustav

U ovom sustavu  $\xi$  i  $\eta$  su dvije krivocrtnne koordinate u srednjoj plohi elementa ljske, a  $\zeta$  je pravocrtna koordinata po debljini, vidjeti Crtež 2.4. Usvojeno je da  $\xi$ ,  $\eta$  i  $\zeta$  variraju između -1 i +1 na pripadajućoj stranici elementa. Ove koordinate se još nazivaju i prirodne koordinate. Kada se konačni element iz globalnog koordinatnog sustava preslika u prirodni koordinatni sustav, dobije se kocka koja ima dužinu stranice 2.0.

Krivocrtni i globalni koordinatni sustav su međusobno povezani s baznim funkcijama (funkcijama preslikavanja). Koordinatni smjer  $\zeta$  je samo približno okomit na srednju plohu elementa jer je koordinata  $\zeta$  definirana kao funkcija čvornog vektora  $\mathbf{v}_{3k}^0$  koji nije idealno okomit na srednju plohu.

### Lokalni koordinatni sustav

Lokalni koordinatni sustav je isto Cartesi-jev koordinatni sustav. Definiran je u svakoj integracijskoj točki elementa s dvije tangente na srednju plohu. Određen je s tri vektora, a za njegove koordinate se upotrebljavaju sljedeće oznake (Crtež 2.4):

$$\mathbf{x}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x} \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{y} \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{z} \quad (2.7)$$

Jednični vektori u njihovim smjerovima označavaju se s:

$$\mathbf{x}'_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3 \quad (2.8)$$

Smjer  $\mathbf{x}_3$  je okomit na srednju plohu i izračunava se kao vektorski produkt tangentskih vektora u  $\xi$  i  $\eta$  smjeru:

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial Z}{\partial \xi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \eta} \\ \frac{\partial Y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial Z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Na ovaj koordinatni sustav vezana su naprezanja i deformacije u integracijskim točkama, te svojstva materijala. Zbog lakšeg pregleda rezultata u integracijskim točkama, te lakšeg zadavanja smjerova ortotropije materijala, potrebno je koristiti konzekventan način određivanja lokalnih koordinatnih sustava za sve integracijske točke. Kada bi vektori  $\mathbf{x}_1$  i  $\mathbf{x}_2$  imali smjer tangenti iz jednadžbe (2.9), lokalni koordinatni sustav bi u svakoj točki bio



drugačiji. Zbog toga se ostala dva vektora određuju jednako kao i kod čvornog sustava. Vektor  $\mathbf{x}_1$  je okomit na  $\mathbf{x}_3$  i paralelan s globalnom ravninom XZ, a komponente su mu:

$$\mathbf{x}_1^X = \mathbf{x}_3^Z \quad \mathbf{x}_1^Y = 0.0 \quad \mathbf{x}_1^Z = -\mathbf{x}_3^X \quad (2.10)$$

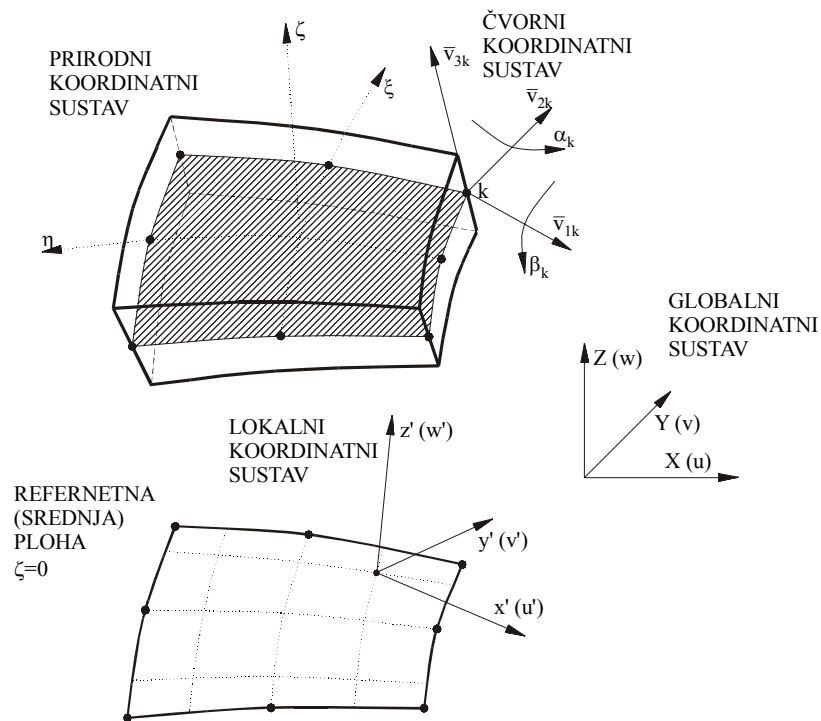
Ako je  $\mathbf{x}_3$  paralelan s globalnom osi Y, tada je:

$$\mathbf{x}_1^X = -\mathbf{x}_3^Y \quad \mathbf{x}_1^Y = \mathbf{x}_1^Z = 0.0 \quad (2.11)$$

Vektor  $\mathbf{x}_2$  je okomit na ravninu definiranu s  $\mathbf{x}_1$  i  $\mathbf{x}_3$ , a određen je vektorskim produktom:

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_1 \quad (2.12)$$

Lokalni koordinatni sustav varira po debljini ljuske na svakoj normalni, zavisno o zakrivljenosti i promjeni debljine ljuske.



Crtež 2.4 - Prikaz koordinatnih sustava na 8-čvornom elementu ljuske

### 2.2.1.3 Veze između koordinatnih sustava

Kod ortogonalnih transformacija u Cartesi-jevom koordinatnom sustavu nove koordinate  $\mathbf{X}_i^*$  se izražavaju preko starih  $\mathbf{X}_j$ :

$$\mathbf{X}_i^* = \mathbf{e}_{ij} \cdot \mathbf{X}_j \quad (2.13)$$

gdje su  $\mathbf{e}_{ij}$  cosinusi smjerova između novih i starih koordinata. Isto vrijedi i za proizvoljni vektor  $\mathbf{u}_i$ .

Poznavajući komponente jediničnih vektora pojedinih koordinatnih sustava, vrlo je jednostavno oformiti vezu među njima. Matrica transformacije je unitarna, tj.:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_{ij} \quad \mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}^T \quad (2.14)$$

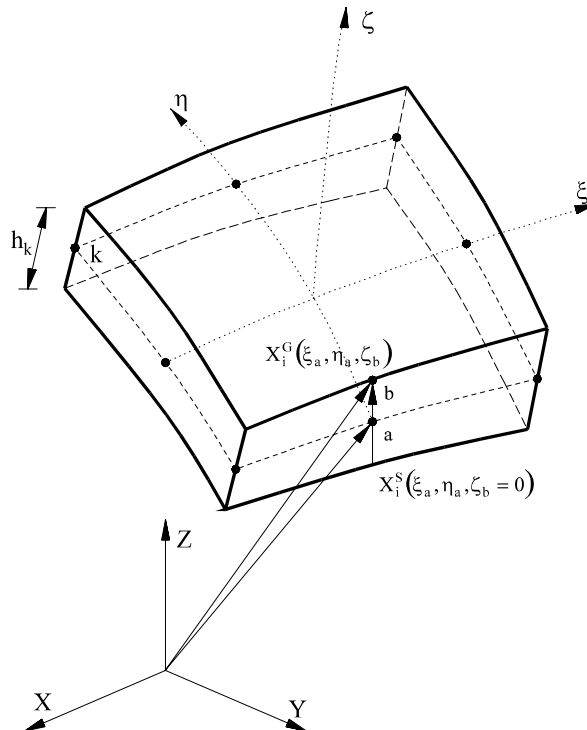
### 2.2.2 Geometrija elementa

Geometrija elementa ljske određuje se iz globalnih koordinata parova točaka na gornjoj i donjoj površini u svakom čvoru elementa ljske. Točka unutar elementa dobiva se pomoću baznih funkcija:

$$X_i = \sum_{k=1}^n N_k \frac{1}{2}(1+\xi) X_{ik}^G + \sum_{k=1}^n N_k \frac{1}{2}(1-\xi) X_{ik}^D \quad (2.15)$$

gdje se  $i=1,2,3$  odnosi na tri globalne osi ( $X, Y, Z$ ),  $n$  je broj čvorova elementa,  $N_k = N_k(\xi, \eta)$  ( $k=1, n$ ) su bazne funkcije elementa,  $h_k$  je debljina ljske u čvoru  $k$  u smjeru jediničnog vektora  $\mathbf{v}_{3k}^0$ , a  $\xi, \eta$  i  $\zeta$  su krivoctne koordinate promatrane točke.

Prvi dio na desnoj strani jednadžbe (2.15) predstavlja položaj normale na srednjoj plohi ljske, dok drugi određuje položaj točke na toj normali (Crtež 2.5).



Crtež 2.5 - Geometrija elementa

Jednadžba (2.15) se može napisati i u širem obliku:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n N_k \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix}_{\text{sred.pl.}} + \sum_{k=1}^n N_k \frac{h_k}{2} \zeta \begin{bmatrix} v_{3k}^X \\ v_{3k}^Y \\ v_{3k}^Z \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

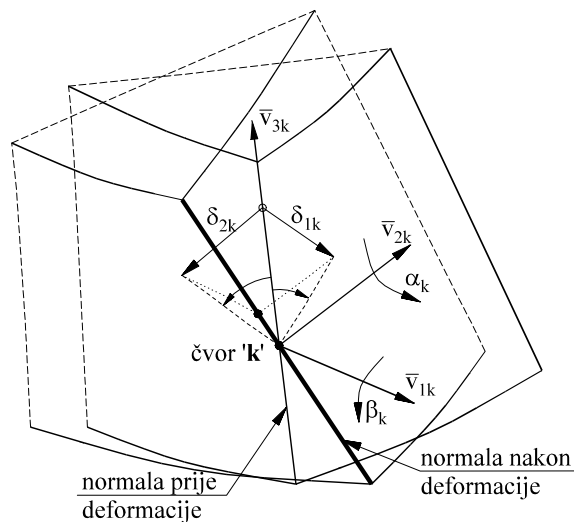
Debljina elementa u bilo kojoj točki određuje se kao funkcija debljina u čvorovima  $h_k$ :

$$h(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) h_k \quad (2.17)$$

### 2.2.3 Pomaci elementa

Polje pomaka elementa ljuske opisano je s pet stupnjeva slobode u svakom čvoru:

- tri pomaka točke koja se nalazi na srednjoj plohi, u smjerovima paralelnim s glavnim koordinatnim osima X, Y i Z (označavaju se s  $\mathbf{u}_{ik}$  ( $i = 1,2,3$ ), pri čemu se indeks  $k$  odnosi na čvor);
- dva zaokreta normale oko čvornih vektora  $\mathbf{v}_{1k}^0$  i  $\mathbf{v}_{2k}^0$  (označavaju se s  $\alpha_k$  i  $\beta_k$  - Crtež 2.6).



Crtež 2.6 - Veza između zaokreta normale i pomaka

Pomaci točke na normali u čvoru  $k$ , uz pretpostavku malih zaokreta, dobivaju se pomoću linearne veze:

$$\begin{aligned} \delta_{1k} &= \zeta \frac{h_k}{2} \alpha_k \\ \delta_{2k} &= \zeta \frac{h_k}{2} \beta_k \end{aligned} \quad (2.18)$$

gdje je  $\delta_{1k}$  pomak u smjeru vektora  $\mathbf{v}_{1k}^0$ , a  $\delta_{2k}$  pomak u negativnom smjeru vektora  $\mathbf{v}_{2k}^0$ .

Komponente vektora pomaka, nastalih zbog zaokreta, su:

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}_{ik})_{\alpha_k} &= \delta_{1k} \mathbf{v}_{1k}^{0i} \\ (\mathbf{U}_{ik})_{\beta_k} &= \delta_{2k} (-\mathbf{v}_{2k}^{0i}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Polje pomaka  $\mathbf{u}_i$  ( $u, v, w$ ) u globalnom koordinatnom sustavu prikazuje se s izrazom:

$$\mathbf{u}_i = \sum_{k=1}^n N_k \mathbf{U}_{ik}^{\text{sred.pl.}} + \sum_{k=1}^n N_k \frac{1}{2} \zeta \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1k}^0 & -\mathbf{v}_{2k}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

ili:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n N_k \begin{bmatrix} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{V}_k \\ \mathbf{W}_k \end{bmatrix}_{\text{sred.pl.}} + \sum_{k=1}^n N_k \frac{h_k}{2} \zeta \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1k}^X & -\mathbf{v}_{2k}^X \\ \mathbf{v}_{1k}^Y & -\mathbf{v}_{2k}^Y \\ \mathbf{v}_{1k}^Z & -\mathbf{v}_{2k}^Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Doprinos čvora  $k$  pomacima proizvoljne točke unutar elementa je:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_k & 0 & 0 & N_k \frac{h_k}{2} \zeta \mathbf{v}_{1k}^X & -N_k \frac{h_k}{2} \zeta \mathbf{v}_{2k}^X \\ 0 & N_k & 0 & N_k \frac{h_k}{2} \zeta \mathbf{v}_{1k}^Y & -N_k \frac{h_k}{2} \zeta \mathbf{v}_{2k}^Y \\ 0 & 0 & N_k & N_k \frac{h_k}{2} \zeta \mathbf{v}_{1k}^Z & -N_k \frac{h_k}{2} \zeta \mathbf{v}_{2k}^Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{V}_k \\ \mathbf{W}_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

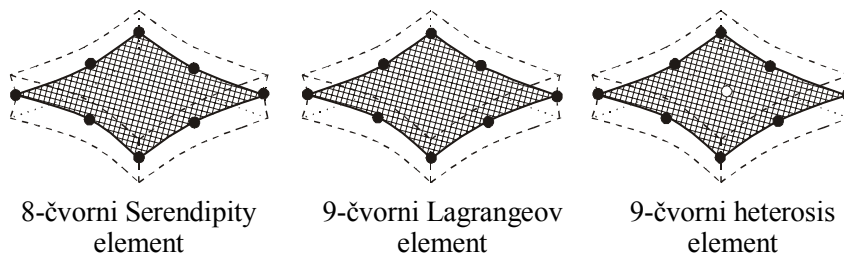
ili:

$$\mathbf{u}_k = N_k \mathbf{U}_k \quad (2.23)$$

Kad se uzmu u obzir doprinosi pomaka svih čvorova jednog elementa, dobiva se:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{U} \quad (2.24)$$

gdje je  $\mathbf{N}$  matrica baznih funkcija sastavljena iz podmatrica  $\mathbf{N}_k$  ( $k=1,n$ ),  $\mathbf{U}$  je vektor svih stupnjeva slobode elementa. Osmočvorni element s pet stupnjeva slobode u svakom čvoru ima 40, devetočvorni (Lagrangeov) 45, a heterosis 42 stupnja slobode (Crtež 2.7).



8-čvorni Serendipity element

9-čvorni Lagrangeov element

9-čvorni heterosis element

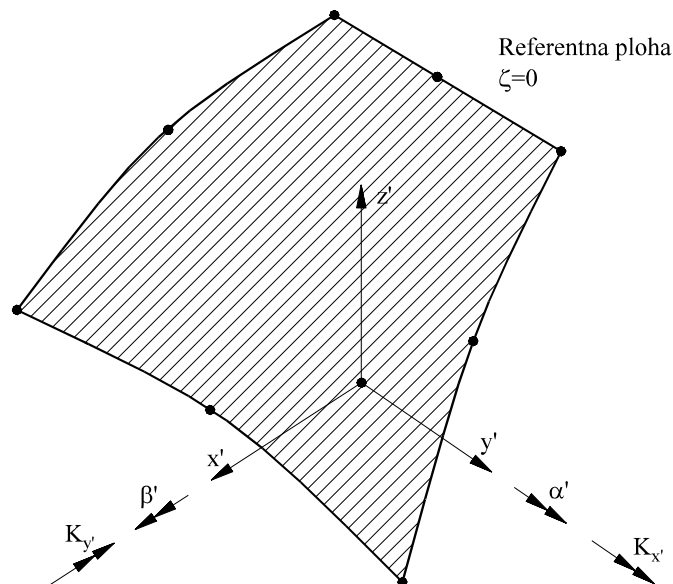
- Čvorovi s  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \alpha, \beta$  stupnjevim slobode
- Čvorovi s  $\alpha, \beta$  stupnjevim slobode

**Crtež 2.7 - Degenerirani konačni elementi ljuske**

### 2.2.4 Deformacije elementa

Komponente deformacija definiraju se u lokalnom koordinatnom sustavu (vektor  $\mathbf{x}_3 \equiv \mathbf{z}'$  je okomit na srednju plohu), kako bi se moglo lakše raditi s pretpostavkom da je normalno naprezanje na srednju plohu jednako nuli ( $\mathbf{z}'$  okomito na ravninu  $\sigma_z = 0$ ).

Deformacijski vektor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ima pet komponentata  $\varepsilon_{x'}$ ,  $\varepsilon_{y'}$ ,  $\gamma_{x'y'}$ ,  $\gamma_{x'z'}$ ,  $\gamma_{y'z'}$ . Kod toga su  $\gamma_{ij}$  inženjerske posmične deformacije ( $2\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij}$ ). Kada se deformacije razdvoje na membranske i savojne [M.7, B.17, K.5], dobije se umjesto pet, osam komponentata deformacijskog vektora koji se označava s  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ :  $\varepsilon_{x'}$ ,  $\varepsilon_{y'}$ ,  $\gamma_{x'y'}$ ,  $K_{x'}$ ,  $K_{y'}$ ,  $K_{x'y'}$ ,  $\gamma_{x'z'}$ ,  $\gamma_{y'z'}$ . Prve tri komponente predstavljaju konstantne deformacije po presjeku i kod membranskog stanja naprezanja su jedine koje se pojavljuju. Ostalih pet komponenti vektora  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  su povezani s progibom.  $K_{x'}$  predstavlja savijanje srednje plohe u promatranoj točki u ravnini koja je paralelna s  $x'z'$ .  $K_{y'}$  je savijanje srednje plohe u ravnini koja je paralelna s ravninom  $y'z'$  (Crtež 2.8). Te deformacije, kao i  $K_{x'y'}$ ,  $\gamma_{x'z'}$ ,  $\gamma_{y'z'}$  se pojavljuju kod progiba konstrukcije.



Crtež 2.8 - Pozitivni smjerovi zaokreta i zakrivljenosti

Pojedine komponente deformacijskog vektora su slijedeće:

$$\varepsilon^* = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{xy'} \\ K_{x'} \\ K_{y'} \\ K_{xy'} \\ \gamma_{xz'} \\ \gamma_{yz'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u'/\partial x' \\ \partial v'/\partial y' \\ \partial u'/\partial y' + \partial v'/\partial x' \\ \partial \alpha'/\partial x' \\ -\partial \beta'/\partial y' \\ \partial \alpha'/\partial y' - \partial \beta'/\partial x' \\ \partial w'/\partial x' + \alpha' \\ \partial w'/\partial y' - \beta' \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

pri čemu veličine:  $u', v', w', \alpha'$  i  $\beta'$  predstavljaju pomake i zaokrete u lokalnom koordinatnom sustavu u promatranoj točki elementa (Crtež 2.8).

Pomaci u lokalnom koordinatnom sustavu dobivaju se transformacijom iz globalnog koordinatnog sustava:

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix} = \theta^T \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Zaokreti u lokalnom koordinatnom sustavu dobiju se pomoću baznih funkcija:

$$\begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n N_k \begin{bmatrix} \psi_{22} & \psi_{21} \\ \psi_{12} & \psi_{11} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

gdje su  $\psi_{ij}$  ( $i, j=1, 2$ ) članovi transformacijske matrice u čvoru  $k$ . Zaokret  $\alpha'$  je u pozitivnom smjeru vektora  $y'$ , a  $\beta'$  u pozitivnom smjeru vektora  $x'$  (Crtež 2.8).

Derivacije lokalnih pomaka i zaokreta po lokalnim koordinatama, koje se javljaju u deformacijskom vektoru (2.25), dobivaju se iz derivacija globalnih pomaka po globalnim koordinatama:

$$\begin{bmatrix} \partial u'/\partial x' & \partial v'/\partial x' & \partial w'/\partial x' \\ \partial u'/\partial y' & \partial v'/\partial y' & \partial w'/\partial y' \\ \partial u'/\partial z' & \partial v'/\partial z' & \partial w'/\partial z' \end{bmatrix} = \theta^T \begin{bmatrix} \partial u/\partial X & \partial v/\partial X & \partial w/\partial X \\ \partial u/\partial Y & \partial v/\partial Y & \partial w/\partial Y \\ \partial u/\partial Z & \partial v/\partial Z & \partial w/\partial Z \end{bmatrix} \theta \quad (2.28)$$

Globalne derivacije globalnih pomaka određuju se pomoću izraza:

$$\begin{bmatrix} \partial u/\partial X & \partial v/\partial X & \partial w/\partial X \\ \partial u/\partial Y & \partial v/\partial Y & \partial w/\partial Y \\ \partial u/\partial Z & \partial v/\partial Z & \partial w/\partial Z \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial u/\partial \xi & \partial v/\partial \xi & \partial w/\partial \xi \\ \partial u/\partial \eta & \partial v/\partial \eta & \partial w/\partial \eta \\ \partial u/\partial \zeta & \partial v/\partial \zeta & \partial w/\partial \zeta \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

gdje je  $\mathbf{J}$  Jacobi-jeva matrica u točki srednje plohe elementa. Pojedini članovi Jacobi-jeve matrice su derivacije globalnih koordinata po krivocrtnim koordinatama:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial u / \partial \xi & \partial v / \partial \xi & \partial w / \partial \xi \\ \partial u / \partial \eta & \partial v / \partial \eta & \partial w / \partial \eta \\ \partial u / \partial \zeta & \partial v / \partial \zeta & \partial w / \partial \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n X_k^S \frac{\partial N_k}{\partial \xi} & \sum_{k=1}^n Y_k^S \frac{\partial N_k}{\partial \xi} & \sum_{k=1}^n Z_k^S \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \\ \sum_{k=1}^n X_k^S \frac{\partial N_k}{\partial \eta} & \sum_{k=1}^n Y_k^S \frac{\partial N_k}{\partial \eta} & \sum_{k=1}^n Z_k^S \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \\ \sum_{k=1}^n (X_k^G - X_k^D) \frac{N_k}{2} & \sum_{k=1}^n (Y_k^G - Y_k^D) \frac{N_k}{2} & \sum_{k=1}^n (Z_k^G - Z_k^D) \frac{N_k}{2} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

gdje su  $X_k^G, Y_k^G, Z_k^G$  koordinate gornje,  $X_k^D, Y_k^D, Z_k^D$  koordinate donje, a  $X_k^S, Y_k^S, Z_k^S$  su koordinate srednje plohe elementa u čvoru  $k$ . Kod toga je:

$$X_k^S = \frac{(X_k^G + X_k^D)}{2} ; \quad Y_k^S = \frac{(Y_k^G + Y_k^D)}{2} ; \quad Z_k^S = \frac{(Z_k^G + Z_k^D)}{2} \quad (2.31)$$

Transponirana i transformirana Jacobi-jeva matrica  $\mathbf{J}'^T$ , čiji su članovi derivacije lokalnih koordinata  $x', y', z'$  po krivocrtnim koordinatama, dobiva se pomoću:

$$\mathbf{J}'^T = \theta^T \mathbf{J}^T ; \quad \mathbf{J}' = \mathbf{J} \theta \quad (2.32)$$

### 2.2.5 Veza između pomaka i deformacija elementa (matrica $\mathbf{B}$ )

Matrica  $\mathbf{B}$  povezuje deformacije u lokalnom koordinatnom sustavu s pomacima i zaokretima čvorova elementa koji su definirani u globalnom koordinatnom sustavu. Ova matrica se određuje u svakoj integracijskoj točki posebno. Ima osam redaka, a broj stupaca joj je jednak ukupnom broju stupnjeva slobode elementa:

$$\varepsilon^* = \sum_{k=1}^n \mathbf{B}_k \begin{bmatrix} U_k \\ V_k \\ W_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{U} \quad (2.33)$$

gdje je:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \dots, \mathbf{B}_n] \quad (2.34)$$

pri čemu je  $n$  broj čvorova elementa.

U članovima matrice  $\mathbf{B}_i$  su derivacije baznih funkcija po koordinatama  $x', y'$  i  $z'$ . Kako su bazne funkcije ovisne o krivocrtnim koordinatama, mora se odrediti matrica  $\mathbf{J}'^{-1}$  koja ima oblik:

$$\mathbf{J}'^{-1} = \begin{bmatrix} \partial \xi / \partial x' & \partial \eta / \partial x' & \partial \zeta / \partial x' \\ \partial \xi / \partial y' & \partial \eta / \partial y' & \partial \zeta / \partial y' \\ \partial \xi / \partial z' & \partial \eta / \partial z' & \partial \zeta / \partial z' \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Doprinos pojedinog čvora matrici  $\mathbf{B}$  za cijeli element može se prikazati kao:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{1u'} & b_{1v'} & b_{1w'} & 0 & 0 \\ b_{2u'} & b_{2v'} & b_{2w'} & 0 & 0 \\ b_{3u'} & b_{3v'} & b_{3w'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{4\alpha'} & b_{4\beta'} \\ 0 & 0 & 0 & b_{5\alpha'} & b_{5\beta'} \\ 0 & 0 & 0 & b_{6\alpha'} & b_{6\beta'} \\ b_{7u'} & b_{7v'} & b_{7w'} & b_{7\alpha'} & b_{7\beta'} \\ b_{8u'} & b_{8v'} & b_{8w'} & b_{8\alpha'} & b_{8\beta'} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Prva tri retka su povezana s membranskim deformacijama, druga tri sa savojnim, a zadnja dva s posmičnim. Prva tri stupca su povezana s lokalnim pomacima, a zadnja dva s lokalnim zaokretima. Članovi gornje matrice, eksplicitno napisani, sadrže članove transformacijskih i Jacobi-jevih matrica.

### 2.2.6 Određivanje unutrašnjih sila

Kako je naprezanje u smjeru  $z'$  zanemareno ( $\sigma_{z'} = 0$ ), tako vektor naprezanja u proizvoljnoj točki unutar elementa ima pet komponentata:  $\sigma_{x'}$ ,  $\sigma_{y'}$ ,  $\tau_{x'y'}$ ,  $\tau_{x'z'}$  i  $\tau_{y'z'}$ . Komponente vektora naprezanja vezane su s komponentama vektora deformacija preko matrice elastičnih konstanti koja je označena s  $\mathbf{D}^*$ :

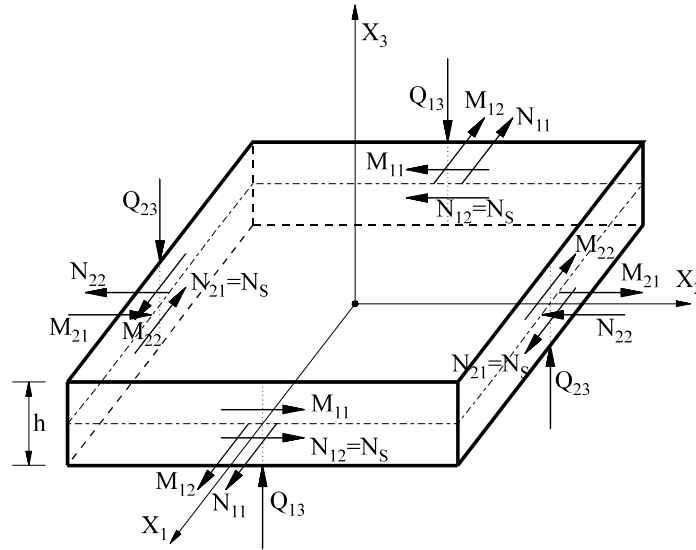
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{bmatrix} = \mathbf{D}^* \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} + z'K_{x'} \\ \varepsilon_{y'} + z'K_{y'} \\ \gamma_{x'y'} + z'K_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{x'}^0 \\ \sigma_{y'}^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

gdje su  $\sigma_{x'}^0$  i  $\sigma_{y'}^0$  početna naprezanja. Integriranjem gornje jednadžbe po debljini elementa, dobiva se, umjesto veze naprezanja i deformacija, veza između rezultanti naprezanja (Crtež 2.9) i deformacija  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ . Pri tome se koristi analitička integracija po debljini elementa. Tim se postupkom mijenja matrica elastičnih konstanti i umjesto pet komponentata vektora naprezanja, dobiva se osam rezultanti naprezanja:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_{x'} \\ N_{y'} \\ N_{x'y'} \\ M_{x'} \\ M_{y'} \\ M_{x'y'} \\ Q_{x'z'} \\ Q_{y'z'} \end{bmatrix} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}^* + \boldsymbol{\varepsilon}^{*0}) \quad (2.38)$$



gdje su s  $\varepsilon^{*0}$  označene početne deformacije, npr. zbog temperature, a  $\mathbf{D}$  je matrica elastičnih konstanti koja će se opisati kasnije.



Crtež 2.9 - Smjerovi rezultanti naprezanja

### 2.2.7 Određivanje naprezanja

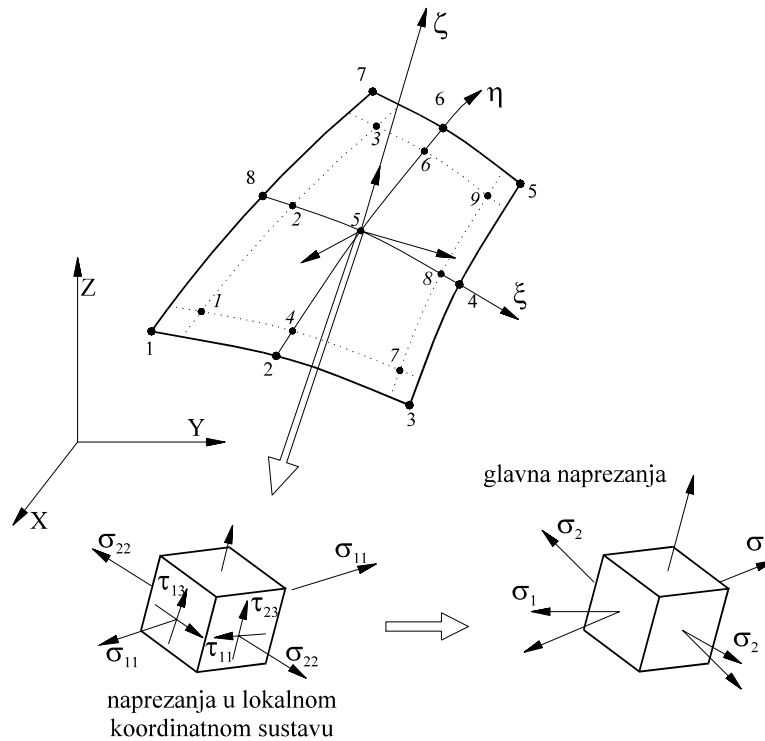
Naprezanja u integracijskim točkama na donjoj i gornjoj plohi elementa određuju se prema sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= (N_{x'} \pm 6M_{x'}/h)/h \\ \sigma_{y'} &= (N_{y'} \pm 6M_{y'}/h)/h \\ \tau_{x'y'} &= (N_{x'y'} \pm 6M_{x'y'}/h)/h\end{aligned}\quad (2.39)$$

gdje je  $h$  debljina ljsuke u integracijskoj točki. Najveća posmična naprezanja su na srednjoj plohi:

$$\begin{aligned}\tau_{x'z'} &= Q_{x'z'}/h \\ \tau_{y'z'} &= Q_{y'z'}/h\end{aligned}\quad (2.40)$$

Naprezanja u proizvoljnoj točki po debljini (Crtež 2.10) dobivaju se pomoću jednadžbe (2.37). Veličine i smjerovi glavnih naprezanja se određuju po izrazima za ravninsko stanje naprezanja.



*Crtež 2.10 - Veza lokalnih i glavnih naprezanja*

### 2.2.8 Matrica elastičnih svojstava materijala

Ako se koristi linearno ili nelinearno-elastični model materijala, potrebno je definirati tzv. matricu elastičnih konstanti koja predstavlja poopćeni Hooke-ov zakon. U ovom radu uzet je Green-ov model za anizotropno hiperelastično tijelo. Opći model ima 21 komponentu, a ortotropni model 9 komponenti. Model koji se upotrebljava za ljuske, zbog zanemarivanja  $\sigma_z$ , ima 7 neovisnih komponenti. Kod materijala ljuske se pod anizotropijom podrazumijeva ortotropija s tri međusobno okomite ravnine simetrije.

Ako se glavne osi ortotropije (1, 2, 3) podudaraju s geometrijskim osima ( $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ), vrijedi:

$$\boldsymbol{\sigma}(x' = 1, y' = 2, z' = 3) = \mathbf{D}^*(x' = 1, y' = 2, z' = 3) \boldsymbol{\varepsilon}(x' = 1, y' = 2, z' = 3) \quad (2.41)$$

Matrica elastičnih konstanti  $\mathbf{D}^*$  za ravninsko stanje naprezanja ima oblik:

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

a pojedini članovi su:

$$\begin{aligned}
d_{11} &= E_1 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) & d_{33} &= G_{12} \\
d_{22} &= E_2 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) & d_{44} &= K_1^* G_{13} \\
d_{12} &= E_2 \nu_{12} / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) & d_{55} &= K_2^* G_{23}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

gdje je  $E_1$  modul elastičnosti u smjeru 1;  $E_2$  modul elastičnosti u smjeru 2;  $\nu_{12}$  i  $\nu_{21}$  su Poissonovi koeficijenti;  $G_{12}$ ,  $G_{13}$  i  $G_{23}$  su moduli posmika u ravninama 12, 13 i 23, a  $K_1^*$  i  $K_2^*$  su posmični korekcijski faktori koji će se objasniti kasnije. Poissonovi koeficijenti  $\nu_{12}$  i  $\nu_{21}$  su povezani jednadžbom:

$$\nu_{21} = \nu_{12} E_2 / E_1 \tag{2.44}$$

U matrici  $\mathbf{D}$  su pojedini članovi pomnoženi s debljinom presjeka pa se, kod množenja s vektorom deformacija, kao rezultat dobivaju unutrašnje sile u promatranoj točki. Zbog toga što su membranski članovi odvojeni od progibnih i posmičnih, matrica  $\mathbf{D}$  je veličine  $8 \times 8$ :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{54} & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{88} \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

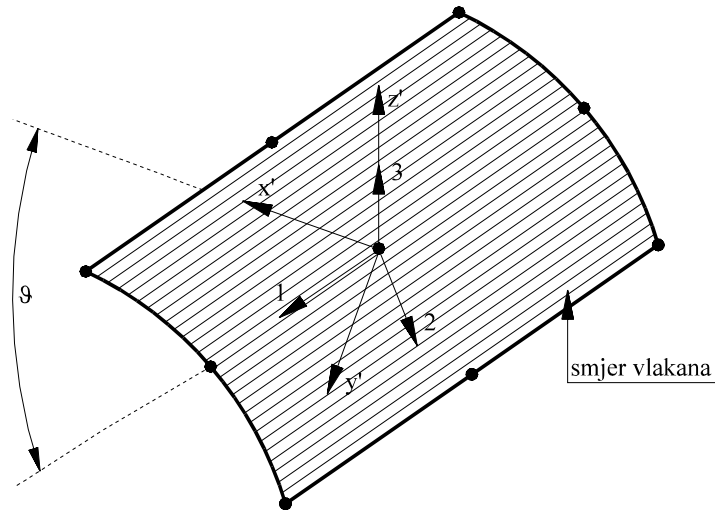
$$\begin{aligned}
D_{11} &= h E_1 / (1 - \nu_{12}^2 E_2 / E_1) = h d_{11} \\
D_{22} &= h E_2 / (1 - \nu_{12}^2 E_2 / E_1) = h d_{22} \\
D_{12} &= h \nu_{12} E_2 / (1 - \nu_{12}^2 E_2 / E_1) = h d_{12} \\
D_{33} &= h G_{12} = h d_{33} \\
D_{44} &= 1/12 h^3 E_1 / (1 - \nu_{12}^2 E_2 / E_1) = 1/12 h^3 d_{11} \\
D_{55} &= 1/12 h^3 E_2 / (1 - \nu_{12}^2 E_2 / E_1) = 1/12 h^3 d_{22} \\
D_{45} &= 1/12 h^3 \nu_{12} E_2 / (1 - \nu_{12}^2 E_2 / E_1) = 1/12 h^3 d_{12} \\
D_{66} &= 1/12 h^3 G_{12} = 1/12 h^3 d_{33} \\
D_{77} &= h K_1^* G_{13} = h d_{44} \\
D_{88} &= h K_2^* G_{23} = h d_{55}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Ako se glavne osi ortotropije 1 i 2 ne podudaraju sa smjerovima lokalnih osiju  $x'$  i  $y'$  već su zarotirane za kut  $\vartheta$ , koji predstavlja kut između 1 i  $x'$  (Crtež 2.25), matrica  $\mathbf{D}^*$  se treba transformirati:

$$\boldsymbol{\sigma}(x' = 1, y' = 2, z' = 3) = \mathbf{T}^T \mathbf{D}^*(x' = 1, y' = 2, z' = 3) \mathbf{T} \boldsymbol{\varepsilon}(x' = 1, y' = 2, z' = 3) \quad (2.47)$$

pri čemu transformacijska matrica  $\mathbf{T}$  ima oblik:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta & \sin^2 \vartheta & \sin \vartheta \cos \vartheta & 0 & 0 \\ \sin^2 \vartheta & \cos^2 \vartheta & -\sin \vartheta \cos \vartheta & 0 & 0 \\ -2 \sin \vartheta \cos \vartheta & 2 \sin \vartheta \cos \vartheta & \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad (2.48)$$



Crtež 2.11 - Materijalne (1,2,3) i geometrijske osi (x',y',z')

### 2.2.9 Korekcija posmika

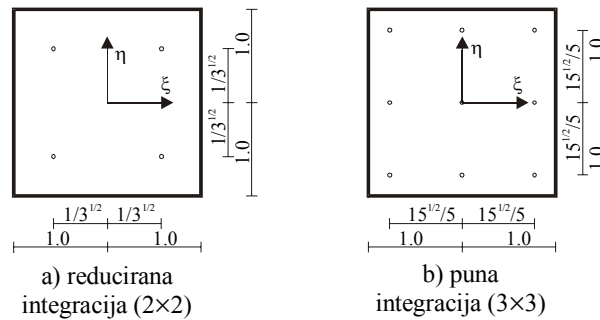
U formulaciji elementa ljuske, kako je već rečeno, prihvaćena je pretpostavka da normala na srednju plohu elementa ostaje ravna i nakon deformiranja, ali ne i nužno okomita na srednju plohu. Ova pretpostavka ima za posledicu da su posmične deformacije konstantne po debljini, što je gruba aproksimacija stvarnog stanja, čak i za homogene poprečne presjeke. Za homogene presjeke je iz cilindričnog savijanja izvedena parabolična raspodijela posmičnih deformacija po visini presjeka.

Poprečne posmične deformacije se, u energetsom smislu, aproksimiraju pomoću korekcijskog posmičnog faktora  $K^*$  [O.7, H.9]. Taj je faktor određen kao kvocijent između posmične deformacijske energije kod pretpostavljene konstantne deformacije i posmične deformacijske energije kod stvarne parabolične deformacije. Za homogene presjeke  $K^* = 5/6$ .

### 2.2.10 Numerička integracija

Po srednjoj plohi ljsuke, kao i po debljini ljsuke vrši se Gauss-ova numerička integracija [J.2]. Pojedini načini numeričke integracije imaju različite prednosti i nedostatke. Općenito je kod elementa ljsuke prisutno više tipova numeričke integracije, koje se u literaturama ([Z.5, F.3]) nazivaju: normalna, selektivna i reducirana.

Normalna (puna) integracija ima  $m \times m$  Gauss-ovih integracijskih točaka, gdje je  $m$  broj čvorova na jednom rubu elementa (Crtež 2.12b). 8-čvorni i 9-čvorni element tako ima  $3 \times 3$  integracijske točke. Kod normalne integracije ljuskastih elemenata često se javlja efekt koji se naziva posmično blokiranje. Ovaj efekt se javlja zbog velikog porasta vrijednosti poprečnih posmičnih članova u matrici krutosti, koji se dobivaju ovom numeričkom integracijom, pa se konstrukcija pri analizi ponaša prekruto.



Crtež 2.12 - Položaj Gauss-ovih integracijskih točaka

Bolje rezultate, naročito za tanke elemente, daje reducirana integracija koja ima  $(m-1) \times (m-1)$  Gauss-ovih točaka na elementu (Crtež 2.12a). Kod ovog integracijskog postupka se mogu, u nekim primjerima, pojaviti nulti energijski oblici. To se može izbjeći upotrebom selektivne integracije.

Tehnikom selektivne integracije se dio matrice krutosti koji se odnosi na progib integrira po normalnom pravilu, a posmični dio matrice se integrira po reduciranom pravilu. Cijeli postupak se provodi u tri koraka:

1. Posmični članovi matrice  $\mathbf{B}_k$  se izračunaju u četiri Gauss-ove točke po  $2 \times 2$  integracijskom pravilu;
2. Izračunati članovi se ekstrapoliraju u devet Gauss-ovih točaka pomoću baznih funkcija  $N_r(\xi, \eta)$ :

$$B_k(\xi, \eta)_n = \sum_{r=1}^4 N_r(\xi, \eta)_n B_k(\xi, \eta)_r \quad (2.49)$$

gdje se  $n$  odnosi na devet točaka za normalno integracijsko pravilo, a  $r$  na četiri točke za reducirano pravilo. Interpolacijske funkcije imaju oblik:

$$N_r = \frac{1}{4}(1 + \xi \bar{\xi}_r)(1 + \eta \bar{\eta}_r) \quad (2.50)$$

gdje se  $\bar{\xi}_r$  i  $\bar{\eta}_r$  određuju tako da svaka interpolacijska funkcija ima vrijednost 1 u odgovarajućoj Gauss-ovoj točki, a u ostale tri ima vrijednost 0.

3. Progibni članovi matrice  $\mathbf{B}_k$  se izračunavaju u devet integracijskih točaka.

Tako su sve komponente deformacije i naprezanja izračunate u devet ( $3 \times 3$ ) integracijskih točaka. Kod reduciranog integriranja posmika se na ovaj način mijenjaju u matrici  $\mathbf{B}_k$  svi članovi osim sedmog i osmog retka, jednažba (2.36).

### 2.2.11 Matrica krutosti elementa

Matrica krutosti konačnog elementa ljuske ima  $(5 \times n) \times (5 \times n)$  članova, pri čemu je  $n$  broj čvorova elementa. Podmatrica koja povezuje čvorove  $i$  i  $j$  je veličine  $(5 \times 5)$ , a određuje se kao:

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j \det J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.51)$$

Matrica elementa  $\mathbf{K}_e$  je sastavljena od pojedinih podmatrica  $\mathbf{K}_{ij}$ . Izračunava se integriranjem po srednjoj plohi ljuske. Ako se želi dobiti matrica elementa u globalnom koordinatnom sustavu, treba je transformirati. Dva zaokreta oko osiju čvornog koordinatnog sustava  $\mathbf{v}_{1k}$  i  $\mathbf{v}_{2k}$  u čvoru  $k$ , vezani su s tri zaokreta oko globalnih osiju  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  sljedećim izrazom:

$$\begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix} = \mathbf{T}'_k \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k \\ \mathbf{B}_k \\ \mathbf{\Gamma}_k \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

gdje je

$$\mathbf{T}'_k = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}_{2k}^T \\ \bar{\mathbf{v}}_{1k}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}_{2k}^X & \bar{\mathbf{v}}_{2k}^Y & \bar{\mathbf{v}}_{2k}^Z \\ \bar{\mathbf{v}}_{1k}^X & \bar{\mathbf{v}}_{1k}^Y & \bar{\mathbf{v}}_{1k}^Z \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Transformirana podmatrica  $\mathbf{K}'_{ij}$  kojoj indeksi  $i$  i  $j$  pripadaju čvorovima s globalnim zaokretima je veličine  $6 \times 6$ , a dobiva se sljedećom transformacijom:

$$\mathbf{K}'_{ij} = \mathbf{T}_i^T \mathbf{K}_{ij} \mathbf{T}_j \quad (2.54)$$

gdje je:

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{v}_{2i}^X & \bar{v}_{2i}^Y & \bar{v}_{2i}^Z \\ 0 & 0 & 0 & \bar{v}_{1i}^X & \bar{v}_{1i}^Y & \bar{v}_{1i}^Z \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

### 2.2.12 Tipovi konačnih elemenata ljuske i pripadajuće bazne funkcije

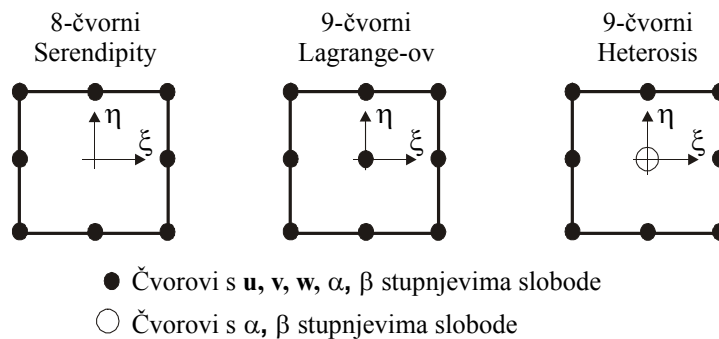
Razvoj izoparametrijskog  $C^0$  elementa ljuske još je uvijek aktivno područje istraživanja. Elementi upotrebljeni u ovom radu su 8-čvorni (Serendipity), 9-čvorni Lagrange-ov i 9-čvorni Heterosis.

#### 8-čvorni Serendipity element

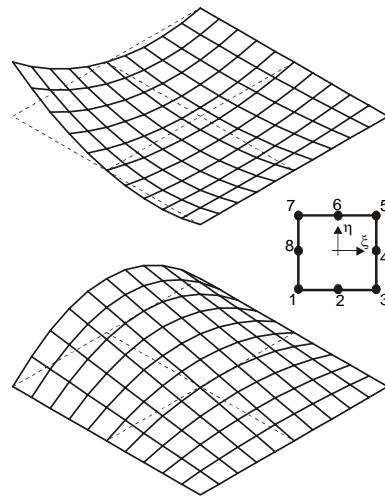
Ovo je najjednostavniji degenerirani element (Crtež 2.13). Uveo ga je Ahmad [A.1]. To je ujedno i najpopularniji element iz izoparametrijske obitelji. Do kvalitetne popravke ovog elementa dolazi uvođenjem selektivne (reducirane) integracije ( $2 \times 2$ ), prema [Z.6, P.5, B.3], umjesto potpune integracije ( $3 \times 3$ ). Kod vrlo tankih ljusaka s njim se mogu pojaviti teškoće s konvergencijom rješenja.

#### 9-čvorni Lagrange-ov element

Eksperimentirajući s linearnim kvadratičnim i kubičnim elementima iz Serendipity i Lagrange-ove obitelji, Pugh i dr. [P.8] su ustanovili da je 9-čvorni Lagrange-ov element (Crtež 2.13) gotovo optimalan kao opći element ploče. Iskustvo pokazuje da je u slučaju reducirane integracije Lagrange-ov element superioran nad Serendipity elementom.



**Crtež 2.13** - 8-čvorni i 9-čvorni konačni elementi ljuske u prirodnom koordinatnom sustavu



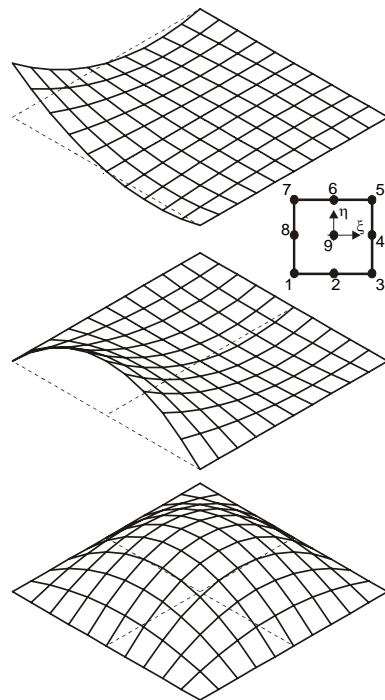
Bazne funkcije 8-čvornog degeneriranog konačnog elementa ljuske

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1)$$

$$\text{za } i = 1, 3, 5, 7$$

$$N_i = \frac{\xi_i^2}{2}(1 + \xi_i \xi)(1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2}(1 + \eta_i \eta)(1 - \xi^2)$$

$$\text{za } i = 2, 4, 6, 8$$



Bazne funkcije 9-čvornog degeneriranog konačnog elementa ljuske

$$N_i = \frac{1}{4} \xi \eta (\xi + \xi_i)(\eta + \eta_i)$$

$$\text{za } i = 1, 3, 5, 7$$

$$N_i = \frac{\xi_i^2 \xi}{2} (\xi + \xi_i)(1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2 \eta}{2} (\eta + \eta_i)(1 - \xi^2)$$

$$\text{za } i = 2, 4, 6, 8$$

$$N_i = (1 - \eta^2)(1 - \xi^2)$$

$$\text{za } i = 9$$

**Crtež 2.14** - Bazne funkcije za 8-čvorne i 9-čvorne elemente

### Heterosis element

Ovaj 9-čvorni kvadrilateralni element, prikazan na Crtežu 2.13, razvio je za ploče Hughes [H.11], a kasnije je primjenjen na ljuske [H.6]. Ovaj element koristi funkcije Serendipity elementa za translacijske pomake, a funkcije Lagrange-ovog elementa za rotacijske pomake. Matrica krutosti mu je dobro uvjetovana kod selektivne integracije i kod vrlo tankih ploča i ljuski. Pokazuje bolja svojstva od oba prethodna elementa.

Bazne funkcije 8-čvornog i 9-čvornog konačnog elementa prikazane su na Crtežu 2.14.



### 2.2.13 Uslojenost elementa

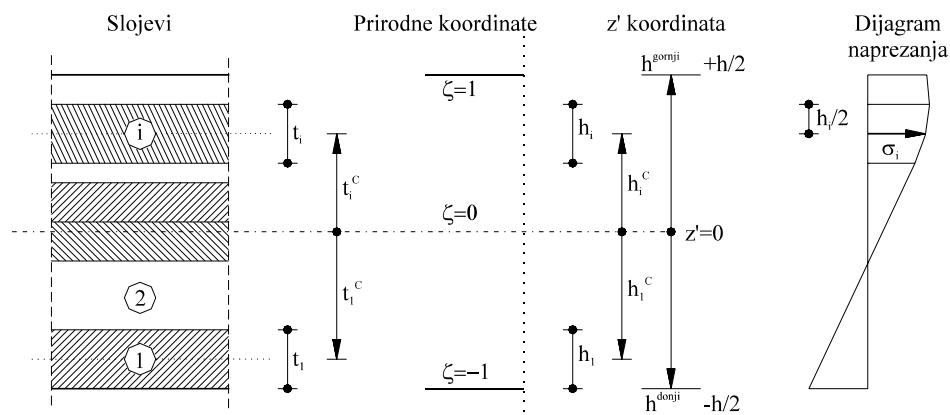
Ako se ljuska sastoji od više slojeva koji su od različitog materijala, treba raditi odgovarajuću integraciju po debljini elementa. Osnovni Ahmadovi elementi uključuju numeričku integraciju po debljini i tako “usput” uzimaju u obzir nehomogenost materijala po debljini elementa. Sastavljeni su od više pojedinačnih membrana koje su međusobno “slijepljene” i u kojima je pretpostavljeno ravninsko stanje naprezanja [F.3]. Kod kompozitnih materijala svaka membrana može predstavljati drugi materijal. I kod konstrukcija iz samo jednog materijala preporuča se upotreba više od jedne lamele/membrane zbog numeričke integracije po debljini elementa.

Za elemente ljuske, koji su opisani u ovom poglavlju, koristi se numerička integracija po debljini.

Ako su po debljini ljuske raspoređeni različiti materijali, može se svaki pojedini materijal predstaviti kao sloj elementa ljuske čija je debljina poznata (Crtež 2.15). Tada su poznata i svojstva materijala pojedinog sloja.

Nehomogenost elementa po debljini uzima se u obzir pomoću matrice  $\mathbf{D}$  koja je dana jednadžbom (2.45). Matrica  $\mathbf{D}$  se dobije integriranjem svojstava pojedinih materijala po cijeloj debljini elementa  $i$ , u biti, predstavlja ekvivalentnu matricu elastičnih konstanti. S takvom matricom odredi se krutost elementa i nakon rješavanja sustava jednadžbi dobije veličina pomaka. Iz pomaka se zatim odrede specifične deformacije referentne plohe, jednadžba (2.25). Naprezanja se izračunaju u sredini pojedinog sloja, jednadžba (2.37). Slojevi mogu imati različite debljine. Svi elementi jedne ljuskaste konstrukcije moraju imati isti broj slojeva.

Kod određivanja determinante Jacobi-jeve matrice po slojevima u jednadžbi (2.30) je potrebno umjesto koordinata srednje plohe elementa, jednadžba (2.31), upotrebiti koordinate srednje plohe promatranog sloja.



Crtež 2.15 - Uslojenost elementa

### 2.2.14 Opterećenje elementa

Element ljuske može biti opterećen čvornim silama, površinskim i volumenskim opterećenjem:

$$F_e = F_{\check{c}v} + F_{pov} + F_{vol} \quad (2.56)$$

Principom virtualnog rada se za vektor opterećenja elementa dobiva slijedeći izraz:

$$F_e = F_{Zv} + \int_{A_{el}} N^T p dA + \int_{V_{el}} N^T f dV \quad (2.57)$$

gdje je  $p$  površinsko opterećenje, a  $f$  volumensko.  $A_{el}$  je površina srednje plohe elementa.

Volumen elementa se određuje jednažbom:

$$V_{el} = \int_{V_{el}} dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2 \det J d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2w_i w_j \det J(\xi_i, \eta_i) \quad (2.58)$$

U gornjoj jednažbi je integracija po prirodnim koordinatama zamijenjena numeričkom (Gauss-ovom) integracijom  $n \times n$ , gdje je  $n$  broj Gauss-ovih točaka u  $\xi$  i  $\eta$  smjeru a  $w_i$  i  $w_j$  su integracijske težine [J.2]. Determinanta Jacobi-jeve matrice se mora izračunati u svakoj integracijskoj točki na srednjoj plohi ljuske. Konstanta '2' predstavlja debljinu elementa u prirodnoj koordinati  $\zeta$ .

#### Gravitacijsko opterećenje

Momenti koji nastaju zbog gravitacijskog opterećenja u čvoru su jednaki nuli, jer je čvor na srednjoj plohi ( $\zeta = 0$ ). Translacijske sile, koje se dobivaju numeričkom integracijom su:

$$F_k^S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n N_k(\xi_i, \eta_j) \rho g^S 2w_i w_j \det J(\xi_i, \eta_j) \quad (2.59)$$

gdje je  $F_k^S$  sila u čvoru  $k$  u smjeru osi  $s$  ( $s=X, Y, Z$ ),  $g^S$  je komponenta gravitacijske konstante u smjeru  $s$ , a  $\rho$  je gustoća materijala.

#### Jednoliko površinsko opterećenje elementa

Jednoliko opterećenje na elementu  $q$  je pozitivno ako tlači površinu elementa, a negativno ako je razvlači.

Zamjenjujuće sile u čvoru  $k$  zbog jednolikog tlaka su:

$$F_k^S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j (-1)^c N_k(\xi_i, \eta_j) q \det J(\xi_i, \eta_i) n^S \quad (2.60)$$

U gornjoj jednažbi je Jacobi-jeva determinanta izračunata na rubu djelovanja opterećenja ( $\zeta = \pm 1$ ),  $c$  je jednak  $+1$  ako je tlak na gornjoj plohi i  $-1$  ako je tlak na donjoj plohi,  $q$  je

veličina tlaka, a  $n^s$  je komponenta normale u smjeru globalne koordinate  $s$  u promatranoj točki.

Momenti u čvoru  $k$  zbog jednolikog tlaka su:

$$\begin{aligned} M_k^\alpha &= \sum_{s=1}^3 \frac{1}{2} c h_k F_k^s \bar{v}_{2k}^s \\ M_k^\beta &= \sum_{s=1}^3 (-1) \frac{1}{2} c h_k F_k^s \bar{v}_{1k}^s \end{aligned} \quad (2.61)$$

### Nejednoliko površinsko opterećenje elementa

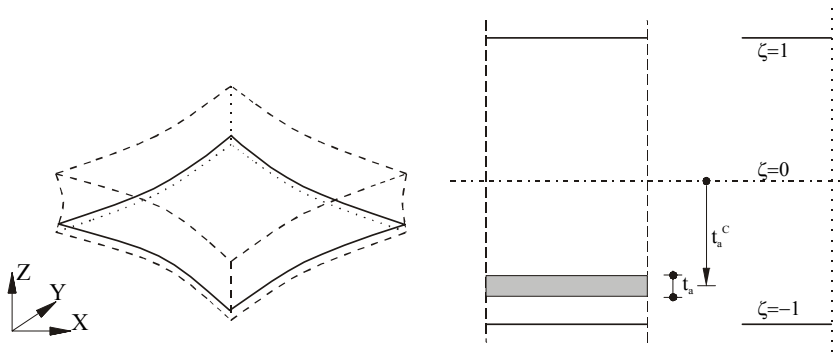
Nejednoliko opterećenje se zadaje s vrijednostima u pojedinim čvorovima elementa, zatim se te vrijednosti interpoliraju za svaku točku. Za opterećenje na gornjem ili donjem rubu dovoljna je jedna jednadžba:

$$q(\xi_i, \eta_j) = \sum_{k=1}^n ((1+c)q_k^G + (1-c)q_k^D) / N_k(\xi_i, \eta_j) \quad (2.62)$$

gdje je  $q_k^G$  tlak u čvoru  $k$  na gornju, a  $q_k^D$  tlak u čvoru  $k$  na donju plohu.

### 2.2.15 Uključenje armature

Ukratko će se prikazati samo neki aspekti modeliranja armature, tj. proračun njenog doprinosa ukupnoj krutosti elementa. Kako je već rečeno, armatura je simulirana posebnom lamelom u okviru osnovnog izoparametrijskog elementa (Crtež 2.16). Detaljni opis formulacije ovih elemenata može se naći u [M.4].



**Crtež 2.16 - Lamela armature unutar betonskog elementa**

Geometrija i položaj lamele armature definirane su slično kao i pojedine lamele betonskog presjeka, pa se prema tome za lamele armature može upotrijebiti potpuno isti numerički postupak kao i za lamele betona. Pošto se, u realnim inženjerskim konstrukcijama, armatura ugrađuje u obliku šipki ili mreža, s toga se i u numeričkom modelu dozvoljava mogućnost nošenja i krutosti samo u smjeru pružanja šipki. Usvojena je puna kompatibilnost pomaka betona i armature.

Matrica krutosti cijelog konačnog elementa dobiva se zbrajanjem doprinosa krutosti armature i osnovnog betonskog elementa.

## 2.3 MODEL MATERIJALA ZA STATIČKO OPTEREĆENJE

### 2.3.1 Općenito

Izloženi model materijala prvenstveno je namijenjen simulaciji ponašanja armiranog betona, a u svrhu modeliranja armirano betonskih konstrukcija koje su najrasprostranjenije u praksi. Model pokušava opisati vrlo složeno ponašanje betona i armature u različitim stanjima naprezanja, od niskih razina opterećenja pa sve do sloma. Model se može uspješno koristiti i za simulaciju nekih vrsta stijena, ali i za modeliranje ponašanja drugih građiva. Kao posebni slučajevi, adekvatnim izborom određenih parametara moguće je dobiti klasične anizotropno-elastične ili elasto-plastične modele materijala.

Modeliranje materijalnog ponašanja betona vezano je s mnogim teškoćama koje su posljedica kompleksnosti stvarnog ponašanja materijala. Karakteristike materijala mogu višestruko varirati. Ovisno o vrsti agregata, beton može biti lagani, normalne težine (obični beton) ili teški beton. Armirani i prednapeti beton ovise i o kvaliteti čelika koji se u njih ugrađuje, te o načinu ugradnje. Bitno je napomenuti da su svojstva čelika puno bolje poznata, te ih je moguće i točnije opisati nego svojstva betona.

Dakle, kako je istaknuto, poznavanje ponašanja betona predstavlja osnovu bilo kakvog modeliranja betonskih i armirano betonskih konstrukcija. Iako je beton vjerojatno najraširenije korišteni građevinski materijal, njegovo ponašanje još uvijek nije u potpunosti istraženo. Zadatak iznalaženja konstitutivnog zakona, koji bi obuhvatio izotropno i anizotropno ponašanje betona u uvjetima statičkog, cikličkog, dinamičkog i dugotrajnog opterećenja (puzanje), predstavlja jedan od najsloženijih zadataka u inženjerskom konstrukterstvu.

Razvijeno je i predloženo mnoštvo matematičkih modela u svrhu simulacije ponašanja betona. Globalno, možemo razlikovati dvije klase modela [M.7]: (a) fenomenološki modeli, kojima se nastoji što bolje reprezentirati makroskopsko ponašanje materijala, s naglaskom na jednostavnosti primjene modela; (b) strukturni modeli, koji polaze od temeljnih svojstava materijala (kemijski sastav materijala), pri čemu bi se makroskopska svojstva trebala dobiti kao posljedica. Pokušaji da se fizikalne konstante materijala izraze u funkciji molekularnih parametara još uvijek nisu dali upotrebljive rezultate.

Među najznačajnije fenomenološke modele ubrajaju se [M.7], [H.8]:

- Dvoparametarski model,
- Troparametarski model,
- Četveroparametarski model,

- Peteroparametarski model,
- Hipoelastični model.

Od strukturnih modela najpoznatiji su [M.7], [H.8]:

- Mikroravninski model temeljen na endohronoj teoriji,
- Modeli temeljeni na diskretnim elementima.

U ovom radu je za analizu ljuskastih konstrukcija upotrijebljen dvoparametarski model betona. Odabrani materijalni model, opisan u radovima [P.7], [D.1], [R.1] i [M.7] uzima u obzir dominantne nelinearne karakteristike betona. Svaka lamela unutar konačnog elementa ljuske tretira se kao da je u ravninskom stanju naprezanja. Prema tome, nakon izračunavanja naprezanja u Gauss točkama lamela ljuske, izračunavaju se glavna naprezanja kao za 2D probleme, te se prema veličini i predznacima glavnih naprezanja korigiraju materijalne karakteristike betona.

U području višeosnog tlaka beton se tretira kao neelastični materijal. Pretpostavlja se linearno ponašanje do granice tečenja, te nelinearno ponašanje od granice tečenja do granice loma. U stanju vlak-vlak i vlak-tlak pretpostavlja se elastično ponašanje do granice definirane vlačnom čvrstoćom, nakon čega se uzima u obzir otvaranje pukotina u betonu. Pri tome se vrši postepena redukcija vlačnih i posmičnih naprezanja. Za definiranje granice popuštanja koriste se dva različita uvjeta: Von Mises-ov kriterij u dvoosnom tlaku, te kriterij maksimalnih naprezanja za pukotine u području vlak-tlak i vlak-vlak.

Armatura se modelira posebnom lamelom (slojem) u okviru uslojenog modela ljuske. Ova lamela je položajno neovisna o ostalim lamelama, što omogućava vrlo jednostavno zadavanje armature u okviru betonskog elementa. Ponašanje armature simulira se jednoosnim elasto-plastičnim modelom.

### 2.3.2 Modeliranje betona u tlaku

Veza naprezanje-deformacija u području tlak-tlak je izrazito nelinearna. U linearnom području analitička veza između naprezanja i deformacija ima oblik:

$$\sigma = \mathbf{D} \varepsilon \quad (2.63)$$

gdje je  $\sigma$  vektorski zapis tenzora naprezanja (2.37),  $\varepsilon$  vektorski zapis tenzora deformacija (2.25), a  $\mathbf{D}$  matrica elastičnih konstanti betona (2.45) i (2.46).

Elastično ponašanje je pretpostavljeno dok se ne dosegne granica popuštanja. Nakon granice popuštanja materijal se ponaša plastično. Plastično ponašanje je karakterizirano nepovratnom plastičnom deformacijom. U ovom modelu plastična deformacija nastaje

trenutno kada se prekorači granica popuštanja. Ovo stanje naprezanja je definirano uvjetom plastičnosti. Dakle, za opis ponašanja materijala do zadovoljenja uvjeta plastičnosti pretpostavlja se elastično ponašanje, a nakon toga potpuno plastično ponašanje.

### 2.3.2.1 Uvjet i zakon popuštanja i očvršćavanja

Nakon prekoračenja naprezanja popuštanja, materijal (u ovom modelu) se ponaša potpuno plastično. Pojedini modeli mogu uključivati linearno ili nelinearno ojačanje (hardening) ili omekšanje (softening).

Obično se pretpostavlja da je ukupni prirast deformacije jednak zbroju prirasta elastične i plastične komponente

$$d\varepsilon = d\varepsilon_e + d\varepsilon_p \quad (2.64)$$

U nedostatku rezultata pokusa u plastičnom području, veza  $\sigma$ - $\varepsilon$  obično se aproksimira tako da slijedimo pretpostavku okomitosti vektora toka deformacija na krivulju plastičnog popuštanja. Ovakva plastičnost se naziva pridružena plastičnost. U linearnom području dvoosnog stanja naprezanja, normalno naprezanje u općem smjeru dano je elipsom naprezanja, a normalna deformacija elipsom deformacija. U području plastičnog popuštanja elipsa deformacija širi se u neku novu krivulju deformacija i bez promjene stanja naprezanja u točki. Uz uvjet da postoji okomitost promjene deformacija na njenu krivulju, prirast deformacije definiramo kao:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.65)$$

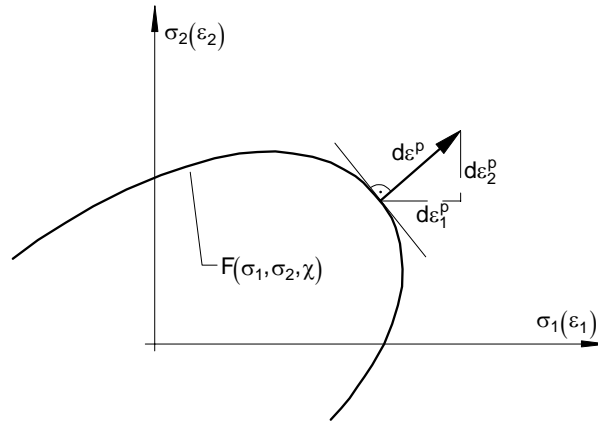
gdje je  $d\lambda$  skalar koji određuje veličinu prirasta plastične deformacije, dok gradijent definira smjer koji je okomit na krivulju plastifikacije.

Materijal se ponaša elastično ako je iznos naprezanja manji od nekog točno određenog, tj. plastično ako je iznos naprezanja veći. Može se definirati funkcija  $F$  koja predstavlja uvjet plastičnog popuštanja:

$$F(\sigma, \chi) = f(\sigma) - Y(\chi) = 0 \quad (2.66)$$

gdje je  $\chi$  parametar očvršćavanja.  $f(\sigma)$  je funkcija invarijanti devijatorskog naprezanja, a  $Y(\chi)$  predstavlja granicu tečenja, koja može biti u funkciji parametra očvršćavanja, iako se obično odabire kao jednoosna granica tečenja.

Opći zakon plastičnosti u dvoosnom stanju naprezanja, s trenutnim položajem krivulje plastifikacije, prikazan je na Crtežu 2.17.



Crtež 2.17 - Zakon i krivulja plastifikacije za dvoosno stanje napreznja, lit. [M.7]

Derivacije funkcije popuštanja, na aktualnoj krivulji popuštanja, definiraju vektor toka:

$$\mathbf{a} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5]^T = \left[ \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xz}}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} \right]^T \quad (2.67)$$

Veličine  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$  možemo odrediti prema slijedećim izrazima:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{\Delta} (\bar{a}_1 \sigma_x + \bar{a}_{12} \sigma_y + \bar{a}_{13} \tau_{xy}) \\ \mathbf{a}_2 &= \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} = \frac{1}{\Delta} (\bar{a}_{12} \sigma_x + \bar{a}_2 \sigma_y + \bar{a}_{13} \tau_{xy}) \\ \mathbf{a}_3 &= \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} = \frac{1}{\Delta} (\bar{a}_{12} \sigma_x + \bar{a}_{23} \sigma_y + \bar{a}_3 \tau_{xy}) \\ \mathbf{a}_4 &= \frac{\partial F}{\partial \tau_{xz}} = \frac{1}{\Delta} (\bar{a}_4 \tau_{xz} + \bar{a}_{45} \tau_{yz}) \\ \mathbf{a}_5 &= \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} = \frac{1}{\Delta} (\bar{a}_{45} \tau_{xz} + \bar{a}_5 \tau_{yz}) \end{aligned} \quad (2.68)$$

pri čemu  $\Delta$  predstavlja efektivno napreznje:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \Delta = \sqrt{a_1 \sigma_1^2 + 2a_{12} \sigma_1 \sigma_2 + a_2 \sigma_2^2 + a_3 \tau_{12}^2 + a_4 \tau_{13}^2 + a_5 \tau_{23}^2} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_{1,2,3}^T \mathbf{A}_{1,2,3} \boldsymbol{\sigma}_{1,2,3}}$$

$$\mathbf{A}_{1,2,3} = \begin{bmatrix} a_1 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

U gornjem izrazu  $a_1 \dots a_5$  su parametri anizotropije koji se određuju eksperimentalno na osnovu šest nezavisnih testova tečenja [F.3, H.9, M.4]. Ako se glavne osi anizotropije (1,2) ne podudaraju s referentnim osima (x,y) nego su rotirane za neki kut  $\omega$ , potrebno je



transformirati naprezanje i parametre anizotropije, pri čemu je matrica transformacije  $\mathbf{T}$  definirana izrazom (2.48):

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \Delta = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_{x,y,z}^T \mathbf{A}_{x,y,z} \boldsymbol{\sigma}_{x,y,z}} \quad ; \quad \mathbf{A}_{x,y,z} = \mathbf{T} \mathbf{A}_{1,2,3} \mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} & 0 & 0 \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_2 & \bar{a}_{23} & 0 & 0 \\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}_4 & \bar{a}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}_{45} & \bar{a}_5 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Veza  $\boldsymbol{\sigma}$ - $\boldsymbol{\varepsilon}$  u elasto-plastičnom području, iskazana u inkrementalnom obliku glasi:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{ep} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.71)$$

gdje je matrica elasto-plastičnosti data izrazom:

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D} - (\mathbf{D} \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{D}) / (\mathbf{H}' + \mathbf{a}^T \mathbf{D} \mathbf{a}) \quad (2.72)$$

u kojem su:

- $\mathbf{H}'$  - parametar očvršćavanja materijala (konstanta),
- $\mathbf{D}$  - matrica elastičnosti,
- $d\boldsymbol{\varepsilon}$  - inkrement vektora ukupne deformacije.

Faktor  $d\lambda$  može se odrediti iz relacije:

$$d\lambda = (\mathbf{H}' + \mathbf{a}^T \mathbf{D} \mathbf{a})^{-1} \mathbf{a}^T \mathbf{D} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.73)$$

Zbog pridružene plastičnosti matrica elasto plastičnosti je simetrična. Pretpostavka pridružene plastičnosti zadovoljava opis ponašanja betona. Za neke druge materijale, npr. glinoviti materijal, morala bi se koristiti neasocijativna plastičnost što matricu elasto-plastičnosti čini nesimetričnom.

Za definiranje granice popuštanja betona u ovom radu koristi se modificirani Von Mises-ov uvjet, koji uključuje utjecaj poprečnog posmika. Zakon popuštanja za troosno stanje naprezanja dan je izrazom:

$$F(I_{\sigma_1}, J_{\sigma_2}) = \sqrt{\beta(3J_{\sigma_2})} + \alpha I_{\sigma_1} - \sigma_0 = 0 \quad (2.74)$$

Ovaj uvjet tečenja ovisi o dvije invarijante naprezanja i dvaju parametara materijala  $\alpha$  i  $\beta$ .  $\sigma_0$  je ekvivalentno jednoosno tlačno naprezanje. U ovom radu je usvojeno da ekvivalentno jednoosno tlačno naprezanja odgovara jednoosnoj tlačnoj čvrstoći, ( $\sigma_0 = f_B$ ).  $I_{\sigma_1}$  je prva invarijanta normalnog naprezanja, a  $J_{\sigma_2}$  druga invarijanta posmičnog naprezanja, definirane izrazom:



Usporedbom Von Mises-ovog uvjeta tečenja u području dvoosnog tlaka s eksperimentalnim rezultatima Kupfer-a i suradnika, (Crtež 2.18), uočava se da Von Mises-ov uvjet daje nešto manju čvrstoću od eksperimentalno dobivenih rezultata, što je na strani nešto veće sigurnosti. Kod većine praktičnih konstrukcija, dominantno nelinearno ponašanje nastaje usljed pucanja betona u vlaklu i tečenja armature. Beton je vrlo rijetko u uvjetima visokih tlačnih naprezanja (tečenja), a ako se i javljaju, ti se uvjeti odnose na vrlo uska područja konstrukcije. Stoga je preciznost definiranja uvjeta popuštanja materijala od relativno manjeg značaja. Usvojeni model zanemaruje pojavu nelinearnosti prije plastičnog tečenja (koje odgovara jednoosnoj čvrstoći betona), što je sigurno značajniji nedostatak. Ipak, može se reći da je i s ovako jednostavnim modelom, dovoljno točno opisano ponašanje betona u dvoosnom tlaku.

### 2.3.2.2 Uvjet drobljenja betona

Drobljenje (slom) betona definirano je u funkciji deformacija. Nedostatak eksperimentalnih podataka vezanih za granične deformacije betona rezultiralo je time da se deformacijski uvjet sloma definira slično Von Mises-ovom uvjetu popuštanja, s time što su naprezanja zamijenjena deformacijama. Dakle, drobljenje betona nastaje kada stanje deformacija zadovoljava uvjet:

$$C(I_{\varepsilon 1}, J_{\varepsilon 2}) = \sqrt{\beta(3J_{\varepsilon 2}) + \alpha I_{\varepsilon 1}} - \varepsilon_u = 0 \quad (2.77)$$

gdje su  $I_{\varepsilon 1}$  i  $J_{\varepsilon 2}$  invarijante deformacije, a  $\varepsilon_u$  je slomna deformacija ekstrapolirana iz rezultata jednoosnog testa (obično 0.003-0.005). Invarijante deformacija su:

$$I_{\varepsilon 1} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$J_{\varepsilon 2} = \left[ \frac{1}{2} (s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{zx}^2 \right]$$

u kojem su:

$$s_x = \varepsilon_x - \frac{I_{\varepsilon 1}}{2}, \quad s_y = \varepsilon_y - \frac{I_{\varepsilon 1}}{2}, \quad s_z = \varepsilon_z - \frac{I_{\varepsilon 1}}{2}$$

Uvjet sloma izravno izražen preko vrijednosti komponenti deformacija, za opće troosno stanje naprezanja glasi:

$$C(\varepsilon) = 1.355 \cdot \left[ \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_x \varepsilon_z + \frac{3}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) \right] + 0.355 \varepsilon_u [\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z] - \varepsilon_u^2 = 0 \quad (2.78)$$

Za probleme ljski, izraz (2.78) se modificira u:

$$C(\varepsilon) = 1.355 \cdot \left[ \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{3}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) \right] + 0.355 \varepsilon_u [\varepsilon_x + \varepsilon_y] - \varepsilon_u^2 = 0 \quad (2.79)$$

Kada je  $Q(\varepsilon) > 0$ , pretpostavlja se da je došlo do sloma u materijalu. U tom slučaju beton nema nikakve krutosti, pa su i naprezanja u betonu jednaka nuli. Kod toga treba imati na umu da u rješenju pomoću tehnike konačnih elemenata promatramo stanje naprezanja/deformacija u tzv. integracijskim točkama. Ukupna krutost elementa određuje se na osnovu doprinosa svake integracijske točke. Stoga drobljenje betona u nekoj točki elementa ne mora značiti da cijeli element nema nikakvu krutost. Također slom betona u jednoj ili više integracijskih točaka ne znači ujedno i slom čitave konstrukcije.

### 2.3.3 Modeliranje betona u vlaku

Pojava pukotina u vlačnim zonama od presudnog je utjecaja na nelinearno ponašanje betona. Formiranje pukotina u nekoj točki nastaje nakon prekoračenja vlačne čvrstoće betona. Njihova pojava izaziva gubitak vlačne čvrstoće i vlačne krutosti.

U vlačnom stanju naprezanja betona razlikujemo elastično i krto područje. Do granice makro pukotina beton tretiramo kao elastični materijal, a nakon pojave makro pukotina kao krti. Pretpostavljamo da se pukotine formiraju u ravninama okomitim na smjer glavnih vlačnih naprezanja čim se dosegne vlačna čvrstoća betona  $f_z$ .

Pukotine se mogu modelirati diskretno ili raspodijeljeno [P.1]. Diskretni model uključuje pojavu stvarnog diskontinuiteta, dok model raspodijeljenih pukotina pretpostavlja prosječnu pojavu smjera i veličine pukotina na određenom dijelu konačnog elementa. Ovaj model i nakon pojave pukotina pretpostavlja da materijal ostaje kontinuum a pukotina se simulira promjenama u karakteristikama materijala.

U ovom radu je korišten model raspodijeljenih pukotina i to tzv. model fiksni ortogonalnih pukotina.

#### 2.3.3.1 Uvjet pojave pukotina i vlačnoga sloma

Dvoosno vlačno stanje naprezanja prikazano je na Crtežu 2.19, gdje je definirano maksimalno naprezanje u vlačnoj zoni. U području vlak-vlak pukotine nastaju u ravnini okomitoj na pravac maksimalnog glavnog vlačnog naprezanja ako ovo naprezanje prekorači jednoosnu vlačnu čvrstoću betona. Dakle pukotine nastaju kad je:

$$\sigma_1 > f_z \quad \text{ili} \quad \sigma_2 > f_z \quad (2.80)$$

gdje  $f_z$  predstavlja vlačnu čvrstoću.

Pukotine u području vlak-tlak nastaju kad se ispune slijedeći uvjeti:

$$(\sigma_z - \sigma_1)/f_z \geq \sigma_2/f_b \quad \text{ili} \quad \sigma_1 f_b + \sigma_2 f_z \leq f_z f_b \quad (2.81)$$

Stanja naprezanja u točkama prije pojave mogućih pukotina prikazana su na Crtežu 2.19a. Glavna naprezanja  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  možemo izračunati prema izrazu:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{0.25(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.82)$$

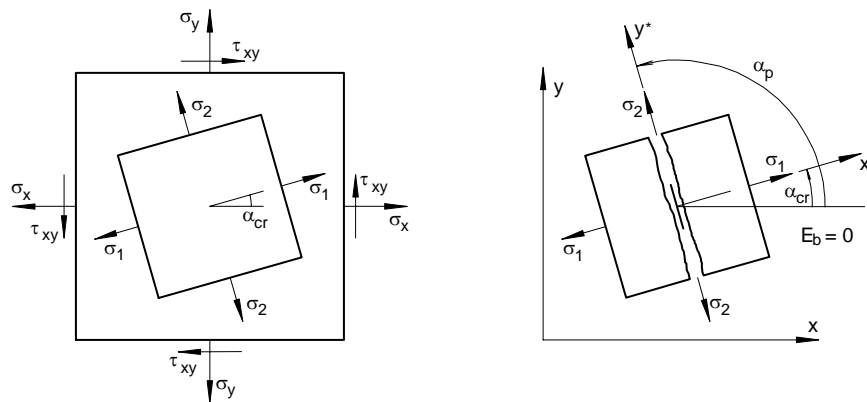
a kut glavnih naprezanja definiran je s:

$$\alpha_g = 0.5 \operatorname{ctg} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2.83)$$

Ako je  $\sigma_1 \geq f_z$  tada kut glavnih naprezanja nazivamo kritični kut  $\alpha_{cr}$ .

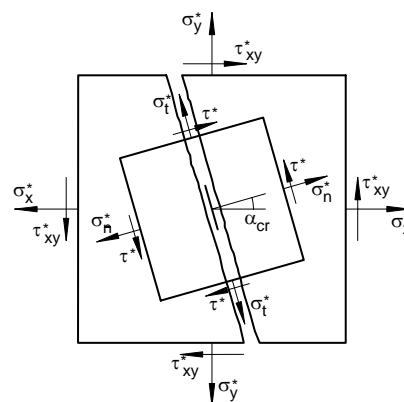
Kut pružanja pukotina  $\alpha_p$  iznosi:

$$\alpha_p = \alpha_{cr} + \frac{\pi}{2} \quad (2.84)$$



(a) predpukotinsko stanje

(b) pojava pukotine



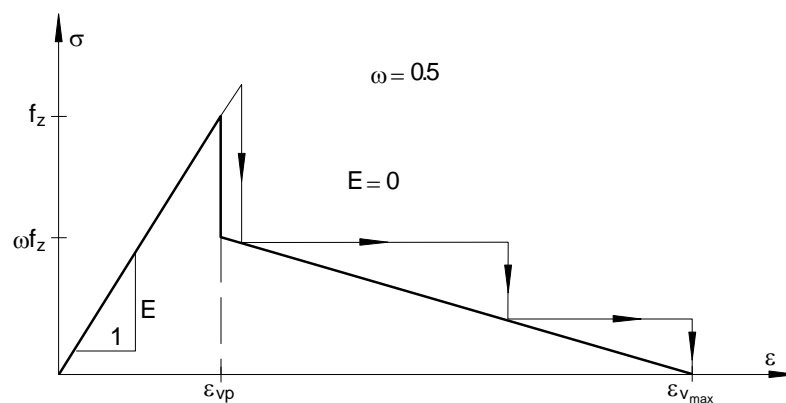
(c) naprezanje nakon pojave pukotine

**Crtež 2.19 - Model pukotina, lit. [D.1]**

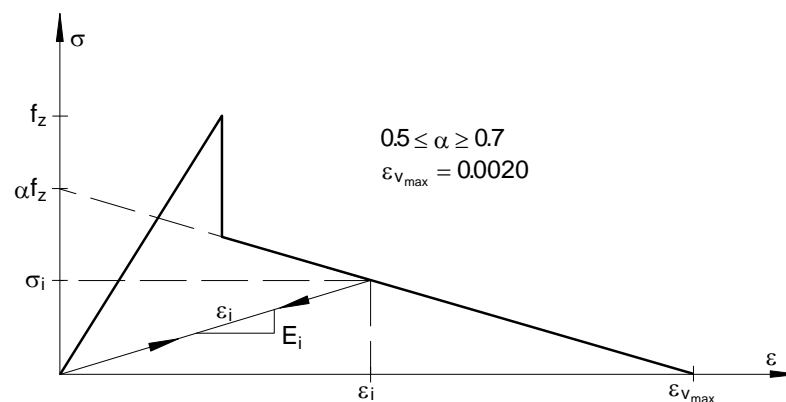
## 2.3.3.2 Vlačno omekšanje raspucalog betona

Nakon prekoračenja vlačne čvrstoće u određenoj točki dolazi do formiranja pukotine i na tom mjestu beton više nema vlačne čvrstoće. Međutim, između pukotina beton može preuzimati vlačna naprezanja. Dakle, i u stanju nakon pojave pukotina beton prosječno nosi na vlak. Porastom veličine vlačne deformacije i širenjem pukotina ta nosivost opada prema nuli. Ovu pojavu nazivamo vlačno omekšanje betona.

Za simulaciju vlačnog omekšanja formulirani su različiti pristupi temeljeni na podacima iz pokusa. U ovom radu je primijenjen numerički model prema lit. [D.1] s linearnim opadanjem naprežanja okomito na pukotine u betonu te procesom opterećenja i rasterećenja, grafički prikazanom na Crtežu 2.20.



a) po~etno rastu}e optere}enje



b) rastere}enje i ponovno optere}enje

**Crtež 2.20** - Opterećenje i rasterećenje raspucalog betona s prikazom vlačnog omekšavanja,

lit. [D.1]

Pretpostavlja se da rasterećenje i ponovno opterećenje raspucalog betona slijedi linearni zakon s fiktivnim modulom elastičnosti  $E_i$ :

$$E_i = \alpha f_z \frac{1 - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{v_{\max}}}}{\varepsilon_i}; \quad \varepsilon_{vp} \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_{v_{\max}} \quad (2.85)$$

gdje su  $\alpha$  i  $\varepsilon_{v_{\max}}$  parametri vlačnog omekšavanja, a  $\varepsilon_i$  je najveća dosegnuta vrijednost vlačne deformacije u promatranoj točki. Ako se pukotina zatvori, tj. ako komponenta deformacije okomito na pukotinu postane negativna, beton zadržava ponašanje neslomljenog betona u odgovarajućem smjeru. U opisanom numeričkom modelu betona, smjer pukotine i najveća vlačna deformacija se "pamte".

Normalno naprezanje  $\sigma_1$  (i/ili  $\sigma_2$ ) dobivamo prema slijedećim izrazima:

$$\sigma_1 = \alpha f_z \frac{1}{\varepsilon_1 / \varepsilon_{v_{\max}}}; \quad \varepsilon_{vp} \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_{v_{\max}};$$

ili

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{\varepsilon_i}; \quad \varepsilon_1 < \varepsilon_i \quad (2.86)$$

gdje je  $\varepsilon_1$  postojeća vlačna deformacija u smjeru materijala, što je vidljivo na Crtežu 2.20. Vrijednost  $f_z$  je vlačna čvrstoća betona. Vrijednost  $f_z$  se može izraziti preko jednoosne tlačne čvrstoće prema lit. [F.1] kao

$$f_z = 0.625 \sqrt{f_B}$$

Konstanta vlačnog omekšavanja  $\alpha$ , prema [K.9], uzima se od 0.5 do 0.7, ovisno o relativnom postotku armature u presjeku. Ipak, kako su promjene ponašanja konstrukcije s promjenom parametra  $\alpha$  općenito gledano male, može se upotrijebiti konstantna vrijednost  $\alpha=0.6$ . Za  $\varepsilon_{v_{\max}}$  obično se uzima vrijednost 0.002. Prekoračenjem  $\varepsilon_{v_{\max}}$  smatramo da je nastupio vlačni slom u betonu.

### 2.3.3.3 Posmična krutost raspucalog betona

Podaci iz niza pokusa pokazuju da se određeni iznos posmičnog naprezanja prenosi preko površine raspucalog betona zbog djelovanja armaturnih šipki i zaglavljivanja zrna agregata. Pri tome se posmična krutost najčešće modelira u ovisnosti od širine pukotine, premda veličina zrna agregata i postotak armature u presjeku te dimenzija šipke, također, imaju izvjestan utjecaj.

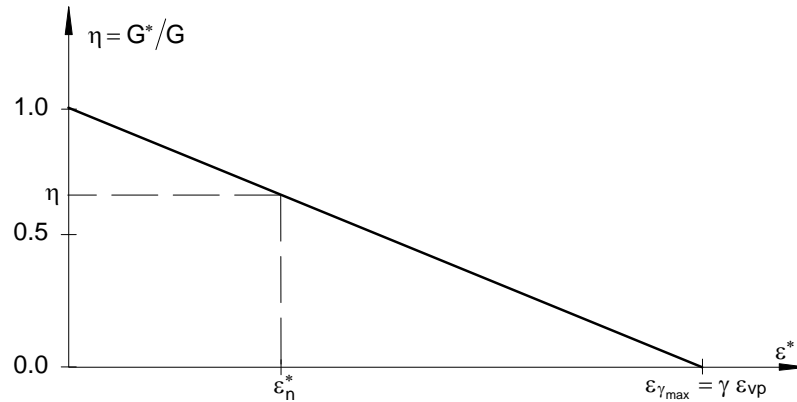
Uobičajeni način modeliranja posmične krutosti betona je redukcija modula posmika. U nastavku se obrazlaže model primijenjen u ovom radu, u kojem je modul posmika raspucalog betona linearno zavisao o normalnoj deformaciji okomito na ravninu pukotine (Crtež 2.21) i definiran je izrazom:

$$G^* = \eta G \quad (2.87)$$

gdje je  $G$  modul betona bez pukotina, a  $\eta$  faktor redukcije prema slijedećim izrazima:

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{\varepsilon_n^*}{\varepsilon_{\gamma \max}}; & 0 \leq \eta \leq 1; \\ \eta &= 0; & \varepsilon_n^* \geq \varepsilon_{\gamma \max} \end{aligned} \quad (2.88)$$

u kojima je  $\varepsilon_n^*$  tekuća normalna vlačna deformacija okomito na ravninu pukotine, a  $\varepsilon_{\gamma \max}$  deformacija poslije koje modul raspucalog betona postaje jednak nuli.



**Crtež 2.21** - Redukcija modula posmika raspucalog betona, lit. [D.1]

Za ljusku koja ima pukotinu u smjeru 1, vrijedi:

$$\begin{aligned} G_{12} &= G \left( 1 - \varepsilon_1^* / \varepsilon_{y \max} \right) ; & G_{12} &= 0 \quad \text{za} \quad \varepsilon_1^* > \varepsilon_{y \max} \\ G_{13} &= G_{12} \\ G_{23} &= \frac{5}{6} G \end{aligned}$$

Za ljusku koja ima pukotinu u smjeru 2, vrijedi:

$$\begin{aligned} G_{12} &= G \left( 1 - \varepsilon_2^* / \varepsilon_{y \max} \right) ; & G_{12} &= 0 \quad \text{za} \quad \varepsilon_2^* > \varepsilon_{y \max} \\ G_{13} &= G_{12} \\ G_{23} &= \frac{5}{6} G \end{aligned}$$

Za ljusku koja ima pukotinu u oba smjera, vrijedi:

$$\begin{aligned} G_{12} &= G \left( 1 - \varepsilon_{\max}^* / \varepsilon_{y \max} \right) ; & G_{12} &= 0 \quad \text{za} \quad \varepsilon_{\max}^* > \varepsilon_{y \max} \\ G_{13} &= G \left( 1 - \varepsilon_1^* / \varepsilon_{y \max} \right) ; & G_{13} &= 0 \quad \text{za} \quad \varepsilon_1^* > \varepsilon_{y \max} \\ G_{23} &= G \left( 1 - \varepsilon_2^* / \varepsilon_{y \max} \right) ; & G_{23} &= 0 \quad \text{za} \quad \varepsilon_2^* > \varepsilon_{y \max} \end{aligned}$$

gdje je  $\varepsilon_{\max}^*$  veća vrijednost od  $\varepsilon_1^*$  i  $\varepsilon_2^*$ .

Krajnju deformaciju možemo aproksimirati slijedećom relacijom:

$$\varepsilon_{\gamma \max} = \gamma \varepsilon_{vp} \quad (2.89)$$



gdje je  $\gamma$  empirijski faktor koji ovisi o tipu sloma i za standardne betone preporuča se, prema [D.1, M.2], u iznosu 10-15. Ukoliko slom nastaje uslijed savijanja koristi se manja vrijednost, a za slom uslijed posmika veća vrijednost. Preporuča se da krajnja deformacija bude u granicama  $\varepsilon_{\gamma_{\max}} = 0.001 - 0.0025$ .

#### 2.3.3.4 Modeliranje veze naprezanja i deformacija u raspucalom betonu

Raspucali beton postaje ortotropan materijal s jednom osi orijentiranom u smjeru vlačnog naprezanja. Matricu materijala konstruiramo tako da bude orijentirana prema tim osima, a kasnije je transformiramo u globalni sustav. U području raspodijeljenih pukotina Poisson-ov koeficijent postaje jednak nuli, a matrica materijala dijagonalna. Modul elastičnosti u smjeru okomitom na pukotine naglo opada prema nuli. Ova pojava uzrokuje singularnost ili lošu uvjetovanost matrice svojstava materijala i numeričke poteškoće. Kako bi se izbjegla ovu numerička poteškoća, pad modula elastičnosti modelira se postupno, prema Crtežu 2.21. Sekantnim modulom, različitim od nule, zamjenjujemo tangentni koji bi bio jednak nuli.

Postavlja se veza naprezanja i deformacija za lokalni koordinatni sustav 1-2 gdje su osi postavljene okomito na i uzduž pukotina, kao što je prikazano na Crtežu 2.20b. Relacija  $\sigma$ - $\varepsilon$  za raspucali beton općenito može biti napisana kao:

$$\sigma^* = D^* \varepsilon^* \quad (2.90)$$

gdje je  $D^*$  matrica "elastičnosti" raspucalog betona,  $\sigma^*$  je tenzor naprezanja, a  $\varepsilon^*$  tenzor deformacija raspucalog betona u koordinatnom sustavu pukotine:

$$\begin{aligned} \sigma^* &= \{\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}\}^T \\ \varepsilon^* &= \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}\}^T \end{aligned} \quad (2.91)$$

kao što je prikazano na Crtežu 2.20c. Efektivno vlačno naprezanje  $\sigma_n^*$  okomito na pukotinu postupno pada na nulu, prema pretpostavci vlačnog omekšanja prikazanog na Crtežu 2.21.

Za ravninsko stanje naprezanja, koje je prisutno u lamelama ljuste, veza  $\sigma$ - $\varepsilon$  za beton s pukotinom u jednom smjeru ima oblik:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

Za beton s pukotinom u oba smjera, veza  $\sigma$ - $\varepsilon$  postaje:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6}G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

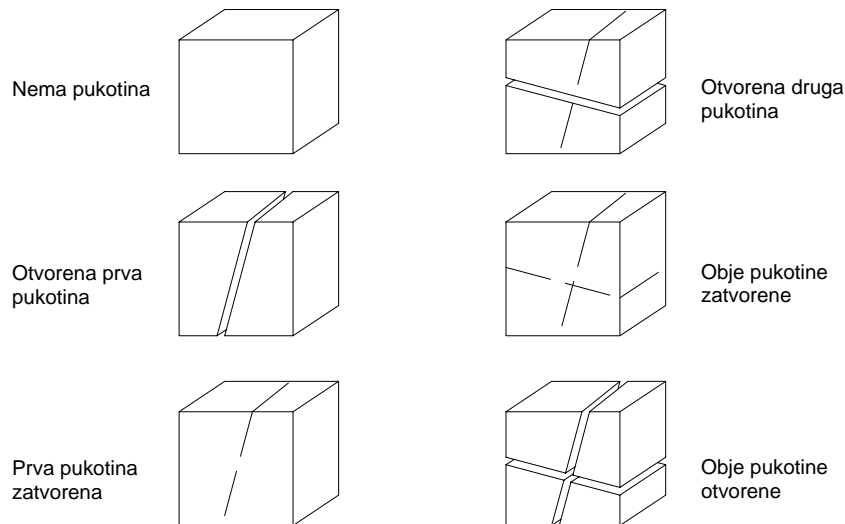
Puknuti beton je anizotopan. Sva naprezanja i deformacije se moraju transformirati u x-y-z koordinatni sustav.

### 2.3.3.5 Zatvaranje pukotina

U primijenjenom modelu simulirano je zatvaranje i ponovno otvaranje pukotina. Shematski prikaz mogućih stanja pukotina prikazan je na Crtežu 2.22. Za određivanje stanja pukotine, promatra se deformacija okomito na ravninu pukotine. Usvojeno je da je pukotina potpuno zatvorena ako je:

$$\varepsilon_n^* < 0 \quad \text{i/ili} \quad \varepsilon_t^* < 0 \quad (2.94)$$

nakon čega se mogu prenositi tlačna naprezanja preko pukotine. Prijenos tlačnog naprezanja simuliran je kao i u slučaju neispucanog betona.



**Crtež 2.22** - Shematski prikaz mogućih slučajeva otvaranja i zatvaranja pukotina

Ako je tekuća deformacija okomito na pukotinu smanjena, ali je još uvijek pozitivna, pretpostavljeno je djelomično zatvaranje pukotine. Ovaj slučaj se javlja kada je tekuća deformacija  $\varepsilon_{n+1}$  (u n+1 inkrementu opterećenja/vremenskom koraku) manja od prethodne deformacije  $\varepsilon_n$ . Tekuće vlačno naprezanje okomito na pukotinu izračuna se pomoću:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n \varepsilon_n / \varepsilon_{n+1} \quad (2.95)$$

Ponovno otvaranje potpuno zatvorene pukotine kontrolirano je također praćenjem vlačne deformacije okomito na ravninu pukotine. Ukoliko dolazi do ponovnog otvaranja pukotine, tj. ako je:

$$\varepsilon_n^* > 0 \quad \text{i/ili} \quad \varepsilon_t^* > 0 \quad (2.96)$$

ne računa se s vlačnom krutošću betona, dok je omogućen prijenos posmičnog napreznja.

### 2.3.3.6 Pravila transformacije

Veza napreznje-deformacija ispučanog betona definirana je u lokalnom 1-2 koordinatnom sustavu, koji je određen ravninom pukotine (Crtež 2.19). Transformacija napreznja u globalni koordinatni sustav definirana je izrazom:

$$\sigma = T^T \sigma^* \quad (2.97)$$

a transformacija deformacije u lokalni koordinatni sustav izrazom:

$$\varepsilon^* = T \varepsilon \quad (2.98)$$

Matrica transformacije ima oblik:

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_{cr} & \sin^2 \alpha_{cr} & \sin \alpha_{cr} \cos \alpha_{cr} & 0 & 0 \\ \sin^2 \alpha_{cr} & \cos^2 \alpha_{cr} & -\sin \alpha_{cr} \cos \alpha_{cr} & 0 & 0 \\ -2 \sin \alpha_{cr} \cos \alpha_{cr} & 2 \sin \alpha_{cr} \cos \alpha_{cr} & \cos^2 \alpha_{cr} - \sin^2 \alpha_{cr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_{cr} & \sin \alpha_{cr} \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_{cr} & \cos \alpha_{cr} \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Kut  $\alpha_{cr}$  predstavlja kut između globalnog (x-y) i lokalnog (1-2) koordinatnog sustava, i prikazan je na Crtežu 2.19. Ako se (2.90) uvrsti u (2.97), dobiva se:

$$\sigma = T^T D^* \varepsilon^* \quad (2.100)$$

iz čega slijedi da je matrica veze napreznje-deformacija ispučanog betona u lokalnom koordinatnom sustavu definirana s:

$$D = T^T D^* T \quad (2.101)$$

Napreznje ispučanog betona u lokalnom koordinatnom sustavu definirano je s:

$$\sigma^* = (T^T)^{-1} \sigma \quad (2.102)$$

$$(T^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_{cr} & \sin^2 \alpha_{cr} & -2 \sin \alpha_{cr} \cos \alpha_{cr} & 0 & 0 \\ \sin^2 \alpha_{cr} & \cos^2 \alpha_{cr} & 2 \sin \alpha_{cr} \cos \alpha_{cr} & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_{cr} \cos \alpha_{cr} & \sin \alpha_{cr} \cos \alpha_{cr} & \cos^2 \alpha_{cr} - \sin^2 \alpha_{cr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_{cr} & \sin \alpha_{cr} \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_{cr} & \cos \alpha_{cr} \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

Numerički model simulacije pukotina prikazan je u Tablici 2.1.

#### **2.3.4 Modeliranje betona u području tlak-vlak i vlak-tlak**

Dok su deformacije u linearno elastičnom području vrijede odnosi između naprezanja i deformacija kao u području tlak-tlak. Kad se prekorači vlačna čvrstoća betona pri čemu se javljaju makro pukotine, upotrebljavaju se jednodimenzionalni modeli ponašanja za svaki smjer naprezanja posebno. Za tlačni smjer koristi se jednodimenzionalni model plastičnog popuštanja, a za vlačni smjer koristi se jednodimenzionalni model s pukotinama.

**Tablica 2.1** - Numerički model simulacije pukotina

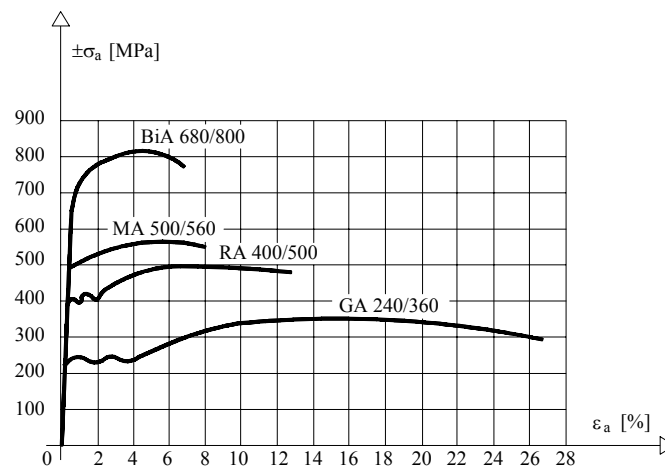
(1)	Poznati su $\sigma_n$ , $\Delta\sigma_n$ , $\varepsilon_n$ , $\Delta\varepsilon_n$ i stanje pukotina
(2)	Izračunati ukupnu tekuću deformaciju $\varepsilon_{n+1}$ $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n$
(3)	Izračunati ukupno tekuće naprezanje $\sigma_{n+1}$ $\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta\sigma_n$
(4)	<p>Utvrditi tekuće stanje pukotina:</p> <p>a) Ukoliko ne postoji pukotina izračunati glavna naprezanja <math>\sigma_{1,2}</math> te kontrolirati uvjet pojave pukotina:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ako pukotina nastaje, izračunati kut <math>\alpha_{cr}</math> okomito na ravninu pukotine</li> <li>• ako nema pukotine, ići na korak rješenja (1)</li> </ul> <p>b) Ukoliko pukotina (pukotine) već postoje, transformirati tekuću deformaciju <math>\varepsilon_{n+1}</math> u lokalni koordinatni sustav definiran kutom <math>\alpha_{cr}</math></p> $\varepsilon^* = T \varepsilon_{n+1}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• ako postoji samo jedna pukotina, tekuće stanje pukotina je definirano s: <ul style="list-style-type: none"> <li>ako je: <math>\varepsilon_n^* &lt; 0</math> i <math>\varepsilon_t^* &lt; 0</math> - stara pukotina je zatvorena</li> <li>ako je: <math>\varepsilon_n^* &gt; 0</math> i <math>\varepsilon_t^* &lt; 0</math> - stara pukotina je još otvorena</li> <li>ako je: <math>\varepsilon_n^* &lt; 0</math> i <math>\varepsilon_t^* &gt; 0</math> - stara pukotina je zatvorena, a nova upravo otvorena</li> <li>ako je: <math>\varepsilon_n^* &gt; 0</math> i <math>\varepsilon_t^* &gt; 0</math> - stara pukotina je još otvorena, a nova upravo otvorena</li> </ul> </li> <li>• ako postoje obje pukotine, tekuće stanje pukotina je definirano s: <ul style="list-style-type: none"> <li>ako je: <math>\varepsilon_n^* &lt; 0</math> i <math>\varepsilon_t^* &lt; 0</math> - obje pukotine su zatvorene</li> <li>ako je: <math>\varepsilon_n^* &gt; 0</math> i <math>\varepsilon_t^* &lt; 0</math> - prva pukotina je otvorena, druga zatvorena</li> <li>ako je: <math>\varepsilon_n^* &lt; 0</math> i <math>\varepsilon_t^* &gt; 0</math> - prva pukotina je zatvorena, druga otvorena</li> <li>ako je: <math>\varepsilon_n^* &gt; 0</math> i <math>\varepsilon_t^* &gt; 0</math> - obje pukotine su otvorene</li> </ul> </li> </ul>
(5)	<p>Izračunati tekuće naprezanje u ovisnosti o tekućem stanju pukotina:</p> <p>a) Ukoliko ne postoji pukotina ili su obje pukotine zatvorene, ići na korak rješenja (1).</p> <p>b) Ako je jedna ili obje pukotine otvorene:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• izračunati ukupno naprezanje u lokalnom koordinatnom sustavu <math display="block">\sigma^* = D^* \varepsilon^*</math></li> <li>• komponente naprezanja okomito na ravninu pukotine ažurirati u skladu s usvojenim modelom vlačne krutosti ispucanog betona.</li> <li>• transformirati tekuće naprezanje u globalni koordinatni sustav.</li> </ul>

### 2.3.5 Modeliranje armature

U svrhu modeliranja armirano betonskih konstrukcija, osim betona potrebno je poznavati i ponašanje armaturnog čelika. Bitno je napomenuti da je, u odnosu na beton, ponašanje čelika daleko bolje poznato.

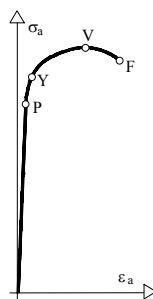
U armirano betonskim konstrukcijama armaturu najčešće ugrađujemo u obliku šipki, mreža ili kablova. Armatura prenosi uzdužne vlačne i tlačne sile. Njeno ponašanje se može dobro aproksimirati jednodimenzionalnim modelom, tj. jednoosnim stanjem naprezanja.

Tipični dijagram naprezanje-deformacija ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) za betonske čelike u uvjetima kratkotrajnog statičkog opterećenja, prikazan je na Crtežu 2.23. Općenito se pretpostavlja da je ponašanje čelika identično u vlaku i tlaku.



Crtež 2.23 - Stvarni  $\sigma$ - $\epsilon$  dijagrami za betonske čelike

Ako promotrimo jednu karakterističnu vezu  $\sigma$ - $\epsilon$  za neki betonski čelik (Crtež 2.24), može se uočiti sljedeća zakonitost ponašanja. Sve do granice proporcionalnosti (P) veza je linearna i elastična. Za daljnje usko područje prirasta naprezanja (P-Y), deformacija je još uvijek elastična, ali veza više nije linearna. Iznad granice elastičnosti (Y), javljaju se plastične deformacije. Razlika između ove dvije granice (Y-P) je za mnoge čelike praktično neznatna i obično se zanemaruje.

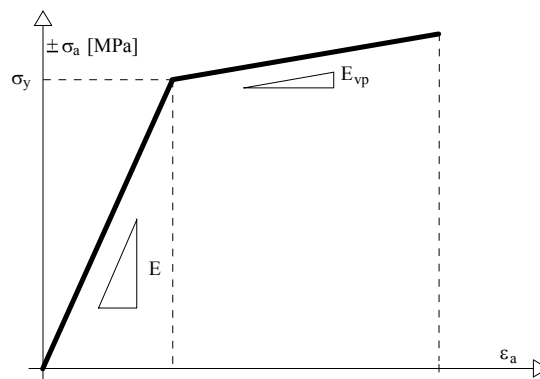


Crtež 2.24 - Jedan karakteristični  $\sigma$ - $\epsilon$  dijagram za betonske čelike, lit. [R.3]

Za neke čelike granica početka tečenja je slabo izražena, a kod nekih je izrazito naglašena. Iznad granice tečenja, veza  $\sigma$ - $\epsilon$  je izrazito nelinearna. Maksimalno naprezanje (čvrstoća) se javlja u točki V, poslije čega dolazi do povećanja deformacija uz pad naprezanja. Do sloma dolazi u točki F.

Temperatura ima značajan utjecaj na mehaničke karakteristike čelika, o čemu ovdje neće biti posebno riječi.

Kod nas se koriste čelici sljedećih oznaka: GA 240/360, RA 400/500 i MA 500/560 (prva se vrijednost odnosi na granicu tečenja a druga na čvrstoću i izražene su u MPa). Početni modul elastičnosti za sve čelike iznosi približno  $E_a=210$  GPa.



**Crtež 2.25** - Idealizirani model radnog  $\sigma$ - $\epsilon$  dijagrama armature, lit.[M.7]

Više je modela radnog ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) dijagrama čelika koje susrećemo u praktičnoj upotrebi za proračune armirano betonskih konstrukcija. Ovdje je primijenjen jednoosni elasto-plastični model prema Crtežu 2.25. Pretpostavljena  $\sigma$ - $\epsilon$  veza uključuje moguće očvršćavanje i elastično rasterećenje.

U usvojenom elasto-plastičnom modelu veza  $\sigma$ - $\epsilon$  za elastično ( $\sigma' < \sigma_y$ ) područje glasi

$$\sigma' = E \epsilon' \quad (2.104)$$

gdje je E modul elastičnosti čelika,  $\epsilon'$  uzdužna elastična deformacija.

Pojava plastičnog popuštanja je kontrolirana jednoosnim napreznjem pri popuštanju  $\sigma_y$ . Nakon granice popuštanja naprezanje čelika se može izraziti:

$$Y = \sigma_y + E_p \epsilon_p \quad (2.105)$$

gdje su:

- $E_p$  - parametar očvršćavanja/omekšavanja čelika,
- $\epsilon_p$  - tekuća plastična deformacija.

Pri tome je inkrement napreznja dan izrazom:

$$\Delta \sigma' = E \Delta \epsilon' - \gamma \left[ \sigma' - (\sigma_y - E_p \epsilon_p) \right] \quad (2.106)$$

gdje su:

$\gamma$  - parametar tečenja čelika,

$\sigma'$  - aktualna naprezanja.

Opisani model armature ugrađen u konačne elemente podrazumijeva da su pomaci i deformacije u smjeru osi šipke u čeliku isti kao i u okolnim betonskim elementima, odnosno pretpostavljena je njihova čvrsta veza. Ove pretpostavke nas uglavnom zadovoljavaju kod svih proračuna armirano betonskih konstrukcija koji ne obuhvaćaju stanje sloma. Kod konstrukcija u stanju naprezanja neposredno pred slom dolazi do odvajanja armature od betona. Za praćenje ponašanja konstrukcije pri takvim stanjima naprezanja potrebno je imati druge odgovarajuće modele.



## 2.4 MODEL MATERIJALA ZA DINAMIČKO OPTEREĆENJE

### 2.4.1 Općenito

Za uvjete dinamičkog opterećenja, model materijala prikazan u prethodnom poglavlju nadopunjen je radi obuhvaćanja utjecaja brzine deformacije na popuštanje betona i čelika. U osnovi, korišten je model namijenjen za dinamičku analizu 2D konstrukcija [R.3, R.8], koji je ovdje prilagođen za analizu ljuski.

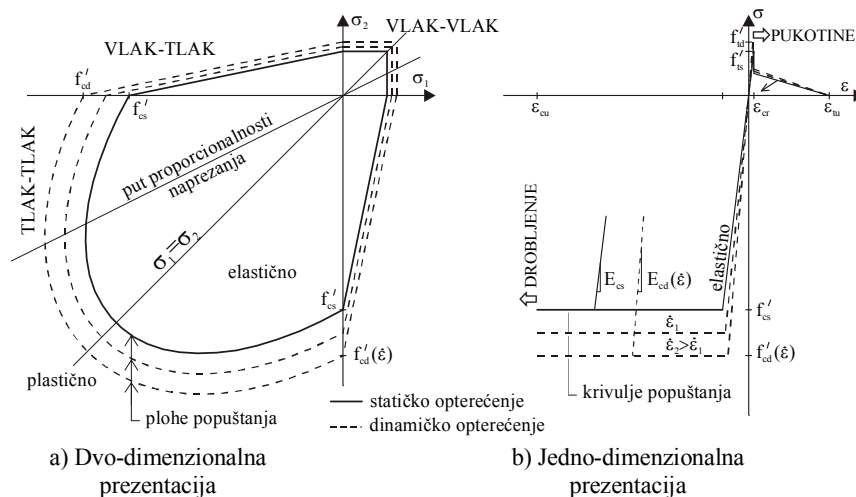
### 2.4.2 Model betona

Brzina deformacije u klasičnim jednoosnim testovima je reda veličine  $10^{-5}$  /s, dok u slučaju oštrog potresa beton u kritičnim zonama može imati brzinu deformacije reda veličine  $10^{-2}$  /s [A.2]. Veće brzine deformacije mogu se pojaviti kod udarnih opterećenja. Ponašanje betona značajno ovisi o brzini deformacije. Mnogi su istraživači ispitivali ponašanje betona u uvjetima jednoosnog tlačnog dinamičkog opterećenja. Neki rezultati istraživanja mogu se primjerice naći u literaturi [D.3, S.3, W.2, S.5, C.16, S.14, M.1 i K.1]. Oni pokazuju da se porastom brzine deformacije općenito:

- povećava tlačna čvrstoća i modul elastičnosti, te
- smanjuje granična (sломna) deformacija betona.

Prema nekim istraživanjima, može se reći da je utjecaj brzine deformacije u jednoosnom vlaknu analogan utjecaju u jednoosnom tlaku.

Ponašanje betona u uvjetima višeosnog dinamičkog opterećenja još uvijek nije dovoljno poznato. Ipak, čini se da se mogu izvesti isti zaključci u pogledu utjecaja brzine deformacije kao i za slučajeve jednoosnog stanja naprezanja (Crtež 2.26).



Crtež 2.26 - Grafički prikaz modela betona u uvjetima dinamičkog opterećenja

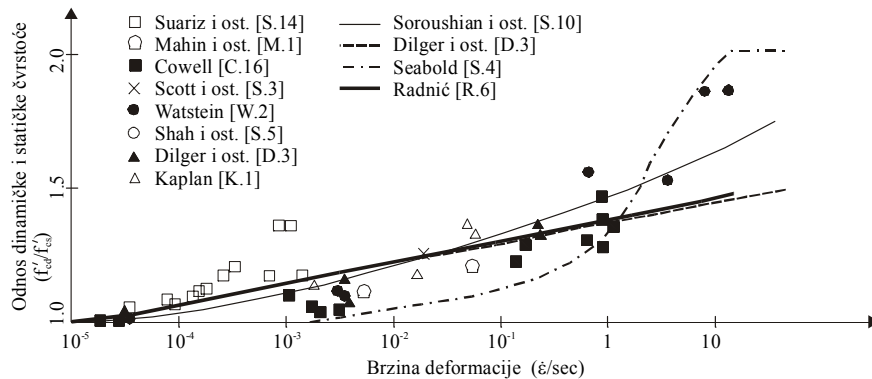
Usvojeni model, grafički prikazan na Crtežu 2.26, uključuje jednostavnu ovisnost tlačne i vlačne čvrstoće (koje predstavljaju plohe popuštanja), te tangentskog modula elastičnosti betona, od ekvivalentne brzine deformacije betona. U okviru numeričkog postupka, u svakom vremenskom koraku razmatrane vremenske domene izražava se ekvivalentna brzina deformacije  $\dot{\epsilon}$  pomoću:

$$\dot{\epsilon} = \left\{ \left[ 2(\dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\epsilon}_{yy}^2 + \dot{\epsilon}_{zz}^2) + \dot{\epsilon}_{xy}^2 \right] / 3 \right\}^{1/2} \quad (2.107)$$

U ovisnosti od ove tekuće deformacije, izračunavaju se tekuće vrijednosti tlačne i vlačne čvrstoće te modula elastičnosti betona u svakoj integracijskoj točki svake lamele. Uvedena je ista ovisnost mehaničkih karakteristika betona o brzini deformacije za sve tipove betona. Veza između jednoosne tlačne dinamičke čvrstoće betona  $f'_{cd}$  i statičke čvrstoće  $f'_{cs}$  izražena je sa (prema [R.6]):

$$f'_{cd} = f'_{cs} \left[ 1 + 0.08 \log_{10} (1 + 10^5 \dot{\epsilon}) \right]; \quad f'_{cd} \geq f'_{cs} \quad (2.108)$$

Krivulja definirana gornjim izrazom prikazana je na Crtežu 2.27. Može se reći da ona prosječno dobro aproksimira eksperimentalne rezultate (preuzete iz lit. [S.10]).



**Crtež 2.27 - Utjecaj brzine deformacije na jednoosnu tlačnu čvrstoću betona**

Veza između jednoosne vlačne dinamičke čvrstoće betona  $f'_{td}$  i statičke čvrstoće  $f'_{ts}$  definirana je na isti način kao i kod tlačne čvrstoće, tj. izrazom:

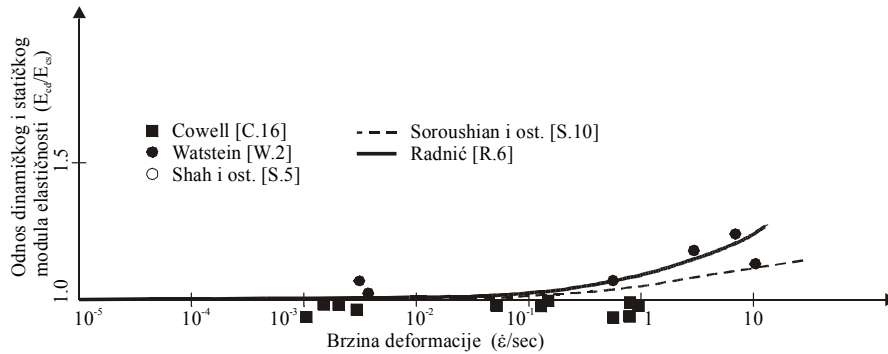
$$f'_{td} = f'_{ts} \left[ 1 + 0.08 \log_{10} (1 + 10^5 \dot{\epsilon}) \right]; \quad f'_{td} \geq f'_{ts} \quad (2.109)$$

Dakle, plohe tečenja nisu fiksne, već se mijenjaju u vremenu ovisno o tekućoj brzini deformacije.

Veza između dinamičkog modula elastičnosti betona  $E_{cd}$  i statičkog modula  $E_{cs}$  definirana je s (prema [R.6]):

$$E_{cd} = E_{cs} \left[ 1 + 0.05 \log_{10}^2 (1 + 10^5 \dot{\epsilon}) \right]; \quad E_{cd} \geq E_{cs} \quad (2.110)$$

Ova je veza prikazana na Crtežu 2.28, pri čemu su eksperimentalne vrijednosti preuzete iz literature [S.10].



**Crtež 2.28** - Utjecaj brzine deformacije na tangenti modul elastičnosti betona

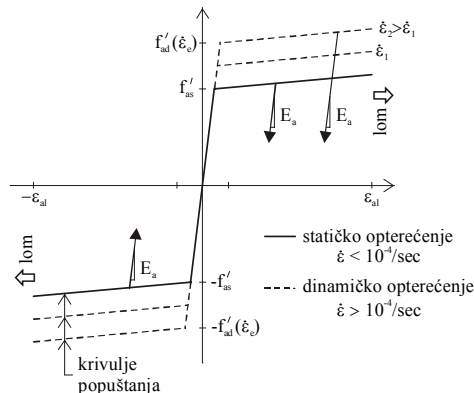
Granična (slomna) deformacija betona i Poisson-ov koeficijent uzeti su fiksnim, odnosno neovisni o brzini deformacije betona. Nije računato sa smanjenjem čvrstoće betona kod ponavljano (cikličkog) opterećenja.

Ispravno modeliranje otvaranja i zatvaranja pukotina od izuzetnog je značaja za realistično simuliranje ponašanja armirano betonskih konstrukcija u uvjetima dinamičkog opterećenja. U potpunosti je usvojeno modeliranje otvaranja i zatvaranja pukotina navedeno u Odjeljku 2.2.

### 2.4.3 Model čelika

Može se reći da je ponašanje čelika pod jednoosnim dinamičkim opterećenjem dobro poznato, iako se eksperimentalni rezultati ponešto razlikuju (neki se rezultati primjerice mogu naći u lit. [A.6, C.8, C.1, H.4, K.6, L.1, W.5]). Kod toga je ponašanje čelika u tlaku i vlaku praktički jednako. S porastom brzine deformacije:

- povećava se gornja i donja granica tečenja, čvrstoća i modul elastičnosti, te
- smanjuje duktilnost čelika.

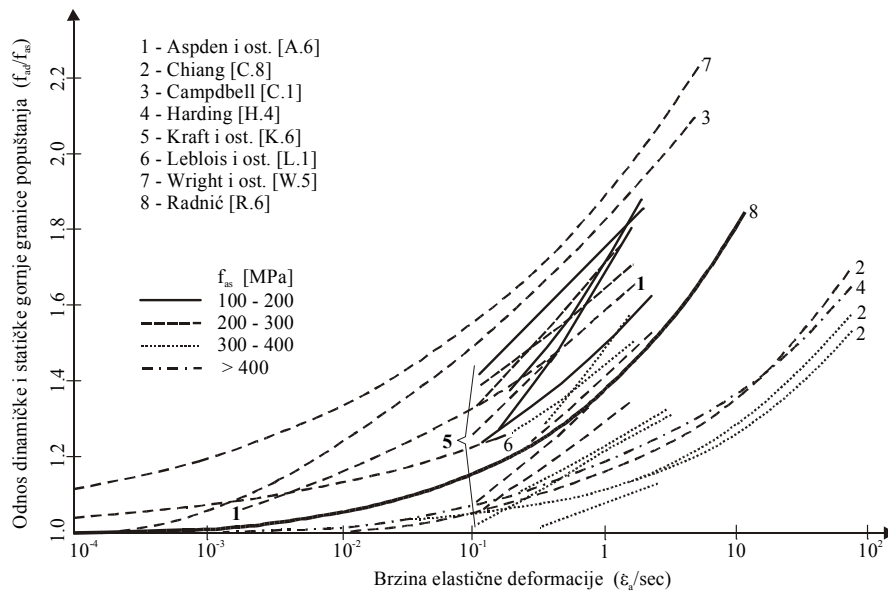


**Crtež 2.29** - Grafički prikaz modela čelika u uvjetima dinamičkog opterećenja

Shematski prikaz usvojenog modela čelika prikazan je na Crtežu 2.29. Granica popuštanja nije fiksna već ovisi o brzini elastične deformacije čelika  $\dot{\epsilon}_e$  (u smjeru pružanja šipki). Veza između dinamičke  $f_{ad}$  i statičke  $f_{as}$  granice tečenja (čvrstoće) uzeta je jednakom za sve vrste čelika, oblika (prema [R.6]):

$$f_{ad} = f_{as} \left[ 1 + 0.006 \log_{10}^3 (1 + 10^4 \dot{\epsilon}_e) \right]; \quad f_{ad} \geq f_{as} \quad (2.111)$$

Gornja je krivulja ucrtana na dijagramu eksperimentalnih vrijednosti gornje granice tečenja (Crtež 2.30), preuzet iz lit. [M.2]. Uzeto je da su modul elastičnosti čelika i slomna deformacija fiksni, odnosno neovisni o brzini deformacije.



**Crtež 2.30** - Utjecaj brzine deformacije na gornju granicu tečenja čelika

## 2.5 PROVEDBA NUMERIČKE ANALIZE

### 2.5.1 Jednadžba dinamičke ravnoteže

Korištenjem principa virtualnog rada, jednadžba dinamičke ravnoteže konstrukcije može se napisati u slijedećem obliku:

$$\int_{\Omega} (\delta \varepsilon)^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} (\delta u)^T (b - \rho_s \ddot{u} - \mu' \dot{u}) d\Omega - \int_{\Gamma_t} (\delta u)^T t d\Gamma = 0 \quad (2.112)$$

U gornjem izrazu  $\delta u$  je vektor virtualnih pomaka,  $\dot{u}$  - vektor brzina, a  $\ddot{u}$  - vektor ubrzanja;  $\delta \varepsilon$  je vektor pridruženih virtualnih deformacija;  $b$  je vektor volumnih, a  $t$  vektor površinskih sila;  $\sigma$  je vektor naprezanja (u lokalnom sustavu);  $\rho_s$  je gustoća,  $\mu'$  je parametar prigušenja,  $\Omega$  je područje konstrukcije, a  $\Gamma_t$  područje konstrukcije izloženo djelovanju površinskih sila. Izraz (2.112) općenito vrijedi za slučaj materijalne i geometrijske nelinearnosti.

U slučaju kada se vremenski utjecaji mogu zanemariti, izraz (2.112) se svodi na:

$$\int_{\Omega} (\delta \varepsilon)^T \sigma d\Omega - \int_{\Gamma_t} (\delta u)^T t d\Gamma = 0 \quad (2.113)$$

što predstavlja jednadžbu statičke ravnoteže.

Prostornom diskretizacijom konstrukcije te primjenom tehnike konačnih elemenata (TKE), jednadžba dinamičke ravnoteže (2.112) s nepoznatim čvornim pomacima  $u$ , može se napisati u poznatom obliku, koji predstavlja linearnu diferencijalnu jednadžbu dinamičke ravnoteže sustava [Z.3]:

$$M_s \ddot{u} + C_s \dot{u} + R(u) = f_s \quad (2.114)$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned} (M_s)_{ij} &= \int_{\Omega_s} N_{si}^T \rho_s N_{sj} d\Omega \\ (C_s)_{ij} &= \int_{\Omega_s} N_{si}^T \mu' N_{sj} d\Omega \\ R_i(u) &= \int_{\Omega_s} B_i^T \sigma_i d\Omega \\ (f_s)_i &= \int_{\Omega_s} N_{si}^T b_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} N_{si}^T t_i d\Gamma \end{aligned} \quad (2.115)$$

U prethodnoj jednadžbi,  $M_s$  predstavlja matricu masa konstrukcije,  $C_s$  matricu prigušenja konstrukcije,  $R(u)$  vektor unutarnjih otpornih sila, a  $f_s$  vektor vanjskih čvornih sila.  $N_i$  su bazne funkcije pomaka, a  $B$  matrica veze naprezanja i deformacija.

Vektor unutrašnjih sila  $R(u)$  se može napisati i u obliku:

$$R(u) = K u \quad ; \quad K = \partial R / \partial u \quad (2.116)$$

gdje je  $K$  matrica krutosti konstrukcije.

Za realne konstrukcije, veza deformacija-pomak je općenito nelinearna, tj.:

$$\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad ; \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{u}) \quad (2.117)$$

što predstavlja tzv. geometrijsku nelinearnost. Naime, zbog promjene geometrije, matrica  $\mathbf{B}$  nije linearna već ovisi o pomacima sustava. Veza  $\varepsilon$ - $\mathbf{u}$  poznata je i pod nazivom model geometrije.

Veza naprezanje-deformacija ( $\sigma$ - $\varepsilon$ ), kako je ranije prikazano je također općenito nelinearna i predstavlja tzv. materijalnu nelinearnost. Veza  $\sigma$ - $\varepsilon$  se može napisati i u obliku:

$$\sigma = \mathbf{D} \varepsilon \quad ; \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (2.118)$$

gdje je  $\mathbf{D}$  matrica veze naprezanje-deformacija i u slučaju elastičnog materijala predstavlja dobro poznatu matricu elastičnih konstanti. Veza  $\sigma$ - $\varepsilon$  poznata je pod nazivom konstitutivni zakon ili model materijala.

Za statičke probleme, izraz (2.114) se svodi na:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{K}_s \mathbf{u} = \mathbf{f}_s \quad (2.119)$$

### 2.5.2 Vremenska integracija jednadžbi gibanja

Točno analitičko rješenje jednadžbe (2.114) moguće je samo za jednostavne linearne probleme pravilne geometrije, rubnih uvjeta i opterećenja. S toga se u svrhu dinamičke analize realnih konstrukcija redovito koriste numeričke metode proračuna. Kod toga se za prostornu diskretizaciju najčešće koristi tehnika konačnih elemenata (TKE), a za vremensku tehnika konačnih diferencija (TKD). Ovakav pristup je usvojen i ovdje, iako je TKE ponekad korištena i za vremensku diskretizaciju (primjerice u radovima [F.4, A.4, Z.7]). Prostorna diskretizacija problema opisana je u prethodnim poglavljima, pa će se u nastavku ukratko prikazati samo problematika vremenske integracije jednadžbi gibanja.

Vremenska integracija jednadžbi gibanja može se u osnovi obaviti na dva načina:

- (i) Metode superpozicije modova - Dinamički odgovor sustava dobiva se na osnovu rješenja svojstvene zadaće problema, odnosno težinskom sumacijom svojstvenih oblika (modova). Ovakav se način praktički koristi samo za linearne probleme, mada je korišten i za neke nelinearne zadaće [B.4].
- (ii) Metode direktne integracije - Jednadžba dinamičke ravnoteže se zadovoljava u diskretnim vremenskim koracima i rješenje problema se dobiva numeričkim postupkom/integracijom korak po korak. Kod različitih metoda proračuna, različita je pretpostavka promjene pomaka, brzina i ubrzanja unutar svakog

vremenskog koraka, što se odražava na stabilnost, točnost i efikasnost pojedine metode.

Metode direktne integracije su do sada nesumnjivo više korištene, te će u nastavku biti riječi samo o njima. Budući da direktna integracija jednadžbi gibanja uključuje opsežan proračunski posao, veoma je važan izbor optimalne metode integracije. Može se reći da nema metode koja je optimalna za sve probleme. Upotrebljivost numeričkih rezultata, kao i ukupno vrijeme rada računala, vrlo često zavisi o metode vremenske integracije. Ove su metode temeljene na tehnici konačnih diferencija i šire se mogu podijeliti na:

- Implicitne metode,
- Eksplicitne metode,
- Eksplicitno-implicitne metode.

#### 2.5.2.1 Implicitne metode

Kod implicitnih metoda rješenja, jednadžba dinamičke ravnoteže je zadovoljena u vremenu  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ , a nepoznate varijable su također izračunate u vremenu  $t_{n+1}$ . Glavna prednost ovih metoda je njihova praktično bezuvjetna stabilnost, što dopušta korištenje duljeg vremenskog koraka  $\Delta t$ . Kod toga, duljina vremenskog koraka određuje točnost rješenja. U numeričkim analizama se najčešće  $\Delta t$  odabire kao 1/100 osnovnog perioda sustava. Nedostatak ovih metoda je što zahtijevaju faktorizaciju matrica i daleko više računskih operacija za promatrani vremenski korak od eksplicitnih metoda. Najčešće se koriste Humbolt-ova [H.15], Wilson-ova [W.4] i Newmark-ova [N.1] implicitna metoda. Sljedi prikaz Newmark-ovog implicitnog algoritma koji je korišten i u ovom radu, a koji se inače najčešće koristi u dinamičkim analizama građevinskih konstrukcija.

#### Newmark-ov implicitni iterativni algoritam

Za integraciju jednadžbe (2.114), promatrano vremensko područje podijeli su u vremenske korake  $\Delta t$ . Potrebno je izračunati nepoznate varijable u vremenu  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ , kod čega su poznati svi rezultati u vremenu  $t_0 = 0$ , do vremena  $t_n$ . Prema Newmark-ovom algoritmu, kojega je u iterativnom obliku kasnije razvio Hughes [H.12, H.13], jednadžbu dinamičke ravnoteže treba zadovoljiti u vremenu  $t_{n+1} = t_n + \Delta t = (n+1)\Delta t$ , odnosno u  $(n+1)$  vremenskom inkrementu:

$$M \ddot{u}_{n+1} + R(u_{n+1}, \dot{u}_{n+1}) = f_{n+1} \quad (2.120)$$

pri čemu su:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1} &= \bar{\mathbf{u}}_{n+1} + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \bar{\dot{\mathbf{u}}}_{n+1} + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n \end{aligned} \quad (2.121)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + 0.5(1-2\beta) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n \\ \bar{\dot{\mathbf{u}}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}_n + (1-\gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n \end{aligned} \quad (2.122)$$

U gornjim izrazima  $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}$  i  $\bar{\dot{\mathbf{u}}}_{n+1}$  su pretpostavljene, a  $\mathbf{u}_{n+1}$  i  $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$  korigirane vrijednosti pomaka, odnosno brzina. Pretpostavljene vrijednosti vektora pomaka i brzina ovise o vrijednostima izračunatih varijabli iz prethodnog vremenskog koraka.

Parametri  $\beta$  i  $\gamma$  određuju stabilnost i točnost metode. Praktično bezuvjetna stabilnost postiže se za  $\gamma \geq 0.5$  i  $\beta = 0.25 \cdot (\gamma + 0.5)^2$ . Problem stabilnosti implicitnih metoda detaljnije je prikazan primjerice u [H.12]. Parametar  $\gamma$  odražava numeričko prigušenje u sustavu. Za  $\gamma = 0.5$ , nema prigušenja. Newmark-ova familija metoda, kao poseban slučaj (za određene vrijednosti parametara  $\beta$  i  $\gamma$ ), uključuje mnoge poznate metode [H.13]. Jedna od najefikasnijih i najčešće korištenih je metoda srednjeg ubrzanja ( $\beta=0.25, \gamma=0.5$ ).

Uvrštenjem (2.121) u (2.120) i uvođenjem inkrementalno-iterativnog postupka rješavanja općeg nelinearnog problema, dobiva se tzv. efektivni statički problem:

$$\mathbf{K}_\tau^* \Delta \mathbf{u}^i = (\mathbf{f}^*)^i \quad (2.123)$$

gdje je matrica efektivne tangentne krutosti  $\mathbf{K}_\tau^*$ , proračunata u vremenu  $\tau^{(i)}$ , definirana s:

$$\mathbf{K}_\tau^* = \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \gamma \frac{\mathbf{C}_\tau}{\beta \Delta t} + \mathbf{K}_\tau \quad (2.124)$$

a vektor efektivnog opterećenja s:

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^i - \mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}^i, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i) \quad (2.125)$$

U gornjim izrazima  $n$  označava vremenski korak,  $i$  iteracijski korak, a  $\Delta \mathbf{u}$  vektor prirasta pomaka. Kao što je ranije navedeno, rješenje nelinearnog problema izvršeno je metodom Newton-Raphson.

Na početku proračunskog postupka, za poznate početne vrijednosti vektora pomaka  $\mathbf{u}_0$  i vektora brzina  $\dot{\mathbf{u}}_0$ , vektor početnog ubrzanja  $\ddot{\mathbf{u}}_0$  dobije se prema (2.120), tj.:

$$\ddot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f} - \mathbf{R}(\mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_0) \quad (2.126)$$

<sup>(1)</sup> Ako se primjenjuje klasična metoda Newton-Raphson, matrica  $\mathbf{K}_\tau^*$  se ažurira u svakoj iteraciji svakog vremenskog inkrementa (koraka)



Ako je matrica masa dijagonalna, što je najčešći slučaj u praksi, rješenje (2.126) je jednostavno.

U ovom radu je korištena metoda srednjeg ubrzanja, a algoritam rješenja u svakom vremenskom koraku prikazan je u Tablici 2.2.

**Tablica 2.2** - Newmark-ov implicitni algoritam iterativnog rješenja problema

(1)	Za vremenski korak (n+1), staviti iteracijski korak i=1
(2)	Izračunati vektore pretpostavljenih pomaka, brzina i ubrzanja na početku vremenskog koraka s pomoću poznatih vrijednosti iz prethodnih vremenskih koraka: $\mathbf{u}_{n+1}^1 = \bar{\mathbf{u}}_{n+1}$ $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^1 = \bar{\dot{\mathbf{u}}}_{n+1}$ $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^1 = (\mathbf{u}_{n+1}^1 - \bar{\mathbf{u}}_{n+1}) / (\beta \Delta t^2)$
(3)	Izračunati efektivne rezidualne sile $(\mathbf{f}^*)^i$ : $(\mathbf{f}^*)^i = \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^i - \mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}^i, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i)$
(4)	Izračunati matricu efektivne krutosti $\mathbf{K}_\tau^*$ (ako je potrebno): $\mathbf{K}_\tau^* = \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \gamma \frac{\mathbf{C}_\tau}{\beta \Delta t} + \mathbf{K}_\tau$
(5)	Izračunati vektor prirasta pomaka $\Delta \mathbf{u}^i$ : $\mathbf{K}_\tau^* \Delta \mathbf{u}^i = (\mathbf{f}^*)^i$
(6)	Korigirati pretpostavljene vrijednosti pomaka, brzina i ubrzanja: $\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{u}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^i$ $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} = (\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} - \bar{\mathbf{u}}_{n+1}) / (\beta \Delta t^2)$ $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i + (\gamma \Delta t) \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}$
(7)	Kontrolirati konvergenciju postupka: – Ako $\Delta \mathbf{u}^i$ zadovoljava kriterij konvergencije: $\ \Delta \mathbf{u}^i\  / \ \mathbf{u}_{n+1}^{i+1}\  \leq \varepsilon_n$ prelazi se na sljedeći vremenski korak (zamijeni se “n” s “n+1” i ide na korak rješenja (1)). Rješenje u vremenu $t_{n+1}$ je: $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^{i+1}$ $\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}$ $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}$ – Ako kriterij konvergencije nije zadovoljen, iteracijski postupak s korekcijom pomaka, brzina i ubrzanja se nastavlja (zamijeni se “i” s “i+1”, te ide na korak rješenja (3)).

Implementirane su dvije sheme pretpostavljenih vrijednosti [P.4]:

– shema (a):

$$\begin{aligned}\bar{u}_{n+1} &= u_n + \Delta t \dot{u}_n + 0.5(1-2\beta) \Delta t^2 \ddot{u}_n \\ \bar{\dot{u}}_{n+1} &= \dot{u}_n + (1-\gamma) \Delta t \ddot{u}_n\end{aligned}\quad (2.127)$$

– shema (b):

$$\begin{aligned}\bar{u}_{n+1} &= u_n \\ \bar{\dot{u}}_{n+1} &= \dot{u}_n\end{aligned}\quad (2.128)$$

Pretpostavljene vrijednosti sheme (a) daju bolju konvergenciju za linearne probleme i probleme s ograničenom nelinearnošću. Kod problema s izraženijom nelinearnošću predlaže se [P.4] shema (b). Kriterij konvergencije postupka usvojen je isti kao u Odjeljku 2.5.7.

### 2.5.2.2 Eksplicitne metode

Kod eksplicitnih metoda jednadžba dinamičke ravnoteže je zadovoljena u vremenu  $t_n$ , a nepoznate varijable su izračunate u vremenu  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ . Osnovna prednost ovih metoda je mali broj i jednostavnost računskih operacija unutar svakog vremenskog koraka. Glavni nedostatak ovih metoda je taj da nisu bezuvjetno stabilne. Stoga se proračunska prednost eksplicitnih metoda često kompenzira činjenicom da su neophodni mali vremenski inkrementi kad su u sistemu prisutni neki kruti (mali) elementi.

Uvjet stabilnosti za linearne probleme izložen je s [H12, H14]:

$$\Delta t \leq \frac{\Omega_{\text{crit}}}{\omega_{\text{max}}} = \Delta t_{\text{crit}} \quad (2.129)$$

gdje je:

$$\Omega_{\text{crit}} = \left[ (\xi^2 + 2\gamma)^{0.5} - \xi \right] / \gamma \quad (2.130)$$

U gornjim izrazima  $\omega_{\text{max}}$  označava maksimalnu kružnu frekvenciju neprigušenog sustava, a  $\xi$  je koeficijent prigušenja. S porastom  $\xi$  ili  $\gamma$ , očito je da se smanjuje  $\Delta t_{\text{crit}}$ . S toga, kod ovakve analize sustava s prigušenjem, o ovome treba voditi računa. Za slučaj bez prigušenja, tj. kad je  $\xi=0$ , dobiva se:

$$\Omega_{\text{crit}} = (2/\gamma)^{0.5} \quad (2.131)$$

odnosno za  $\gamma=1/2$ :

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\text{max}}} = \frac{T_1}{\pi} \quad (2.132)$$

gdje je  $T_1$  prvi period slobodnih oscilacija sustava bez prigušenja.

Najveća frekvencija sustava aproksimiranog mrežom konačnih elemenata uvijek je manja od najveće frekvencije pojedinih elemenata u mreži [I.2], tj.:

$$\omega_{\max} \leq \max(\omega_{\max}^e) \quad (2.133)$$

gdje je  $\omega_{\max}^e$  najviša frekvencija najmanjeg elementa. Prema [B.7], za trokutaste i kvadratične elemente je:

$$\omega_{\max} \leq 2c/l \quad (2.134)$$

gdje je  $c$  brzina širenja zvuka u materijalu, a  $l$  duljina najkraće stranice elementa. Na osnovu (2.129), (2.130) i (2.134), te uz  $\gamma=0.5$ , slijedi:

$$\Delta t = l \left[ (\xi^2 + 1) - \xi \right] / c \quad (2.135)$$

odnosno za slučaj bez prigušenja:

$$\Delta t = l/c \quad (2.136)$$

Za usvojeni element ljuske, uz  $\gamma=0.5$ , može se uzeti:

$$\Delta t = l \left[ (\xi^2 + 1) - \xi \right] / (6c)^{0.5} \quad (2.137)$$

U slučaju nelinearnih analiza, potrebno je dodatno reducirati duljinu vremenskog koraka. Neki aproksimativni izrazi za slučaj visko-plastičnog modela materijala mogu se naći u [B.13]. Praktično, kod nelinearnih problema  $\Delta t$  treba dodatno reducirati, ovisno o razini nelinearnosti, za oko 5-25% [B.7].

Jedna od najčešće korištenih eksplicitnih metoda je metoda srednjih diferencija [B.5]. Metoda koja je korištena u ovom radu je Newmark-ova eksplicitna iterativna metoda.

Slijedi kratki prikaz ovih dviju iterativnih metoda.

### Metoda srednjih diferencija

Kod ove su metode brzine i ubrzanja izraženi u formi srednjih diferencija prema sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{n+1} &= (u_{n+1} - u_{n-1}) / (2 \Delta t) \\ \ddot{u}_{n+1} &= (u_{n+1} + 2u_n - u_{n-1}) / (\Delta t^2) \end{aligned} \quad (2.138)$$

Jednadžba dinamičke ravnoteže (2.114) je zadovoljena u vremenu  $t_n = n \Delta t$ , odnosno u  $n$ -tom vremenskom inkreментu:

$$M\ddot{u}_n + C_\tau \dot{u}_n + K_\tau u_n = f_n \quad (2.139)$$

Uvrštavanjem (2.138) u (2.139), dobiva se sljedeći eksplicitni izraz za  $u_{n+1}$ :

$$u_{n+1} = [M + 0.5 \Delta t C_\tau]^{-1} \left[ \Delta t^2 f_n - (\Delta t^2 K_\tau - 2M) u_n - (M + 0.5 \Delta t C_\tau) u_{n-1} \right] \quad (2.140)$$

Kada su matrice  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{C}_\tau$  dijagonalne, iz (2.140) je očito da je proračun nepoznatih pomaka  $\mathbf{u}_{n+1}$  jednostavan. Kod toga se proračun može izvršiti na razini elementa [B.5], tj bez formiranja matrice sustava. U tom je slučaju uočljiva efikasnost ove metode. U slučaju kad matrice  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{C}_\tau$  nisu dijagonalne, metoda srednjih diferencija postaje manje efikasna.

### Newmark-ova eksplicitna iterativna metoda

Hughes [H12, H.13] je iz klasičnog Newmark-ovog algoritma [N.1] izveo sljedeći eksplicitni izraz, odnosno modificirao jednadžbu dinamičke ravnoteže (2.120) u:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{R}(\bar{\mathbf{u}}_{n+1}, \bar{\dot{\mathbf{u}}}_{n+1}) = \mathbf{f}_{n+1} \quad (2.141)$$

gdje su pretpostavljne vrijednosti  $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}$  i  $\bar{\dot{\mathbf{u}}}_{n+1}$  određene izrazom (2.122), a korigirane vrijednosti  $\mathbf{u}_{n+1}$  i  $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$  izrazom (2.121). Iz (2.141) je vidljivo da su unutrašnje sile određene na temelju pretpostavljenih vrijednosti. Puna efikasnost ove metode dobije se u slučaju kad je matrica masa  $\mathbf{M}$  dijagonalna, budući da je u tom slučaju rješenje jednadžbe jednostavno. Implementacija ove metode izvršena je na sličan način kao za implicitnu metodu. Algoritam rješenja za svaki vremenski korak prikazan je u Tablici 2.3.

**Tablica 2.3** - Newmark-ov eksplicitni algoritam iterativnog rješenja problema

1)	Za vremenski korak (n+1), staviti iteracijski korak i=1
2)	Izračunati vektore pretpostavljenih pomaka, brzina i ubrzanja na početku vremenskog koraka s pomoću poznatih vrijednosti iz prethodnih vremenskih koraka: $\mathbf{u}_{n+1}^1 = \bar{\mathbf{u}}_{n+1}$ $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^1 = \bar{\dot{\mathbf{u}}}_{n+1}$ $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^1 = (\mathbf{u}_{n+1}^1 - \bar{\mathbf{u}}_{n+1}) / (\beta \Delta t^2)$
3)	Izračunati efektivne rezidualne sile $(\mathbf{f}^*)^i$ : $(\mathbf{f}^*)^i = \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}^i, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i)$
4)	Izračunati matricu efektivne krutosti $\mathbf{K}^*$ (ako je potrebno): $\mathbf{K}^* = \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2}$ <p>Napomena: Budući da je matrica masa <math>\mathbf{M}</math> konstantna, matricu efektivne krutosti <math>\mathbf{K}^*</math> dovoljno je izračunati samo jednom na početku postupka rješenja. Također je vidljivo da treba biti <math>\beta &gt; 0</math>.</p>
5)	Izračunati vektor prirasta pomaka $\Delta \mathbf{u}^i$ : $\mathbf{K}^* \Delta \mathbf{u}^i = (\mathbf{f}^*)^i$

nastavak tablice na sljedećoj stranici

nastavak tablice s prethodne stranice

(6)	Korigirati pretpostavljene vrijednosti pomaka, brzina i ubrzanja: $\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{u}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^i$ $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} = (\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} - \bar{\mathbf{u}}_{n+1}) / (\beta \Delta t^2)$ $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i + (\gamma \Delta t) \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}$
(7)	Kontrolirati konvergenciju postupka. Kod eksplicitnog postupka s jednostepenom korekcijom rezultata, kontrola konvergencije nije potrebna već se direktno prelazi na sljedeći vremenski korak. Kod višestepene korekcije rezultata, potrebno je kontrolirati konvergenciju postupka kako je to opisano u Tablici 2.2.

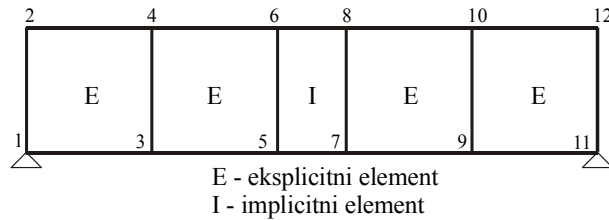
### 2.5.2.3 Eksplicitno-implicitne metode

Već je navedeno da je glavna prednost eksplicitnih metoda jednostavnost računskih operacija u svakom vremenskom koraku, a implicitnih njihova bezuvjetna stabilnost. Glavni nedostatak eksplicitnih metoda je potreba za kratkim vremenskim inkrementima, a implicitnih složenost računskih operacija i potreba za velikim kapacitetom računala. Eksplicitno-implicitne metode kombiniraju dobra svojstva obiju metoda, odnosno uklanjaju njihove loše strane. Iako se eksplicitno-implicitne metode najčešće koriste kod problema interakcije tekućine i konstrukcije, one mogu biti vrlo efikasne i kod dinamičkih analiza same konstrukcije. Naime, kod mnogih problema prisutna je velika razlika u krutosti pojedinih područja. U tim slučajevima efikasno je u području s niskom frekvencijom izvršiti vremensku integraciju s pomoću eksplicitne metode, a u području s visokom frekvencijom izvršiti vremensku integraciju s pomoću implicitne metode (ili s pomoću eksplicitne metode s kraćim vremenskim inkrementima).

Eksplicitno-implicitne metode predstavljaju poopćenje prethodno opisanih metoda. Ove metode su prvi uveli Belytschko i Mullen [B9, B10]. Hughes i Liu [H.13] su razvili alternativni izraz koji je jednostavniji za implementaciju. Oni su izvršili razdvajanje na razini elemenata, tj razdijelili su elemente na eksplicitnu i implicitnu grupu. Park [P.1] je poopćio ove postupke s mogućnošću razdvajanja po elementima, čvorovima ili stupnjevima slobode. Park i Felipe [P.2] su uveli eksplicitno-implicitnu integraciju, kod čega su “mekša” područja integrirali eksplicitno s vremenskim inkrementom  $\Delta t$ , a kruća područja također eksplicitno s kraćim vremenskim inkrementom  $\Delta t/m$ . Ovdje je korišten i u nastavku prikazan eksplicitno-implicitni algoritam s razdvajanjem na razini elementa [H.13].

EksPLICITNO-implicitni iterativni algoritam

Dakle, u ovoj se metodi područje s višom frekvencijom integrira implicitno, a područje s nižom frekvencijom eksplicitno. U nekim slučajevima (primjerice vidjeti Crtež 2.31) u mreži konačnih elemenata može biti određeni broj manjih (kraćih) elemenata, odnosno elemenata s visokom frekvencijom. Budući da je eksplicitna metoda uvjetno stabilna, u slučaju eksplicitne integracije bi trebalo uzeti vrlo male vremenske inkremente. Ako se krući elementi integriraju implicitno (algoritam je bezuvjetno stabilan), tada se preostali elementi mogu integrirati eksplicitno s dužim vremenskim korakom. U tom slučaju ovakav pristup (“mesh partition”) može biti vrlo efikasan.



*Crtež 2.31 - Primjer mreže konačnih elemenata kod 2D problema*

Ako se prema Crtežu 2.31 s ‘E’ označe eksplicitni i s ‘I’ implicitni elementi, mogu se napisati sljedeći izrazi:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{M}^E + \mathbf{M}^I \\ \mathbf{R} &= \mathbf{R}^E + \mathbf{R}^I \\ \mathbf{f} &= \mathbf{f}^E + \mathbf{f}^I \end{aligned} \quad (2.142)$$

gdje se matrica masa  $\mathbf{M}$ , te vektori unutrašnjih  $\mathbf{R}$  i vanjskih sila  $\mathbf{f}$  rastavljaju na doprinose grupe implicitnih i eksplicitnih elemenata. Jednadžba dinamičke ravnoteže čitavog sustava tada ima oblik:

$$\mathbf{M}^E \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{M}^I \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{R}^E(\bar{\mathbf{u}}_{n+1}, \bar{\mathbf{u}}_{n+1}) + \mathbf{R}^I(\bar{\mathbf{u}}_{n+1}, \bar{\mathbf{u}}_{n+1}) = \mathbf{f}^E + \mathbf{f}^I \quad (2.143)$$

Koristeći Newmark-ov iterativni postupak, pretpostavljene i korigirane vrijednosti varijabli u (2.143) definirane su pomoću (2.121, 2.122). Sređivanjem (2.143) slijedi:

$$\mathbf{M}^I \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{R}^I(\bar{\mathbf{u}}_{n+1}, \bar{\mathbf{u}}_{n+1}) = \mathbf{f}^E + \mathbf{f}^I - \mathbf{R}^E(\bar{\mathbf{u}}_{n+1}, \bar{\mathbf{u}}_{n+1}) \quad (2.144)$$

U inkrementalno-iterativnom obliku, nakon sređivanja, jednadžba dinamičke ravnoteže se svodi na oblik (2.123), odnosno:

$$\mathbf{K}_\tau^* \Delta \mathbf{u}^i = (\mathbf{f}^*)^i \quad (2.145)$$

gdje je:

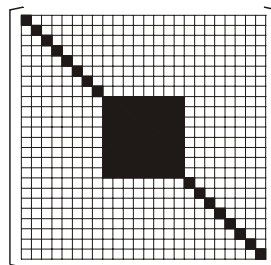
$$\mathbf{K}_\tau^* = \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \gamma \frac{\mathbf{C}_\tau^I}{\beta \Delta t} + \mathbf{K}_\tau^I \quad (2.146)$$

$$(\mathbf{f}^*)^i = \mathbf{f}_{n+1} - M \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^i - \mathbf{R}_{n+1}^E(\mathbf{u}_{n+1}^i, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i) - \mathbf{R}_{n+1}^I(\mathbf{u}_{n+1}^i, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i) \quad (2.147)$$

Matrice krutosti i prigušenja grupe implicitnih elemenata dane su s:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\tau^I &= \partial \mathbf{R}^I / \partial \mathbf{u} \\ \mathbf{C}_\tau^I &= \partial \mathbf{R}^I / \partial \dot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (2.148)$$

Treba uočiti da u definiranju matrice efektivne krutosti  $\mathbf{K}_\tau^*$ , kod formiranja matrica krutosti i prigušenja, doprinosi jedino grupa implicitnih elemenata. Ako je matrica masa eksplicitne grupe elemenata dijagonalna, tada će i matrica  $\mathbf{K}_\tau^*$  imati samo dijagonalne članove, koji odgovaraju doprinosu eksplicitnih elemenata. Širina pojasa matrice  $\mathbf{K}_\tau^*$  u zoni doprinosa implicitnih elemenata zavisi od načina obilježavanja čvorova implicitnih elemenata (Crtež 2.32).



**Crtež 2.32** - Matrica efektivne krutosti  $\mathbf{K}^*$  za problem prikazan na Crtežu 2.31

U slučaju kada postoje samo implicitni elementi imamo Newmark-ov implicitni algoritam, a kad postoje samo eksplicitni elementi Newmark-ov eksplicitni algoritam.

Ako je  $\gamma \geq 0.5$  i  $\beta = 0.25 \cdot (\gamma + 0.5)^2$ , postiže se bezuvjetna stabilnost za implicitnu grupu elemenata. Uvjet stabilnosti za eksplicitnu grupu elemenata razmatran je u točki 2.5.2.2. Stabilnost eksplicitno-implicitnog algoritma detaljno je obrađena u [B.10].

Implementacija ove metode je identična kao kod Newmark-ovog implicitnog postupka (vidjeti Tablicu 2.2).

### 2.5.3 Rješenje svojstvene zadaće

Rješenje svojstvene zadaće je važno, kako u dinamičkoj, tako i u statičkoj analizi. Kod statičkih problema, određivanje kritičnog opterećenja kod kojeg dolazi do nestabilnosti (izvijanja, izbočavanja...) konstrukcije svodi se na rješenje problema svojstvenih vrijednosti. Kod dinamičkih problema, rješenje svojstvene zadaće je potrebno za određivanje dinamičkih karakteristika sustava. Rješenje dinamičkih problema modalnom analizom temelji se na poznavanju nekoliko prvih svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora

sustava. Kod metoda direktne integracije, potrebno je odrediti bilo najvišu bilo najnižu frekvenciju sustava zbog određivanja potrebne dužine vremenskog koraka radi zahtjeva stabilnosti (eksplicitne metode), odnosno točnosti (implicitne metode). U nastavku, prikazano je rješenje problema svojstvene zadaće (bez prigušenja) za pojedinačna polja i problem međudjelovanja polja.

Standardni problem svojstvene zadaće definiran je slijedećim, dobro poznatim izrazom:

$$\mathbf{K} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad ; \quad (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{x} = 0 \quad (2.149)$$

gdje je  $\mathbf{K}$  regularna, a u realnim (fizikalnim) problemima gotovo uvijek i simetrična, pozitivno definitna ili pozitivno semidefinitna matrica (što će se u daljnjem tekstu podrazumijevati).

U problemima dinamike konstrukcije prisutan je tzv. generalizirani (opći) problem:

$$\mathbf{K} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{M} \mathbf{x} \quad ; \quad (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \mathbf{x} = 0 \quad (2.150)$$

$\mathbf{M}$  je obično pojasna (ponekad dijagonalna) matrica, ali općenito nije pozitivno definitna nego pozitivno semidefinitna [M.6].

Ako prethodni problem promatramo sa stajališta dinamike konstrukcija, tj. u svjetlu TKE, onda matrica  $\mathbf{K}$  predstavlja dobro poznatu matricu krutosti sustava, a matrica  $\mathbf{M}$  matricu masa sustava. Obje ove matrice su dimenzija  $n \times n$ , gdje  $n$  predstavlja broj stupnjeva slobode sustava. Vektor  $\mathbf{x}$  je tada dimenzija  $1 \times n$ , a predstavlja svojstveni vektor, dok je  $\lambda$  svojstvena vrijednost. Fizikalno,  $\omega = \lambda^{1/2}$  predstavlja kružnu frekvenciju (rad/s) sustava. Rješavajući jednadžbu (2.150) može se dobiti  $n$  svojstvenih vrijednosti i pripadajućih  $n$  svojstvenih vektora.

Postoji niz matematičkih metoda rješavanja problema svojstvene zadaće. Kod većine metoda traže se svi svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti, što je često nepotrebno, jer kod gotovo svih inženjerskih problema dovoljno je odrediti prvih par vrijednosti/vektora, dok ostali nisu zanimljivi. Stoga, u ovom je radu korištena WYD metoda koja predstavlja jedan efikasni algoritam za iznalaženje prvih “ $k$ ” svojstvenih vrijednosti/vektora, gdje je “ $k$ ” po želji odabran broj. Bitno je napomenuti da WYD metoda sama po sebi ne određuje svojstvene vrijednosti/vektore već samo sustav transformira u oblik na koji će se moći primijeniti neka od općepoznatih metoda, npr. Jacobi-jeva metoda, metoda vektorske iteracije i sl.

Osnova numeričkog postupka je traženje rješenja u samo jednom podprostoru, što je višestruko brže od iteracije po podprostorima [M.6, M.8, W.4]. Postupak se realizira



višestrukim,  $2k$  puta, statičkim rješenjem zadatka te tako formiraju Ritz-ovi bazni vektori, što je praktično za programiranje na mikroracionalima. Problem traženja svojstvenih vrijednosti se tako s problema  $n \times n$  dimenzionalnosti (pri čemu je  $n$  kod većih problema i nekoliko desetina tisuća) svodi na dimenzionalnost  $2k \times 2k$ , što značajno smanjuje broj računskih operacija i veličinu greške nagomilane tim računskim operacijama.

Odluke WYD metode su i velika stabilnost i pouzdanost, tj. nema preskakanja svojstvenih vrijednosti i vektora, što se npr. događa kod vektorske iteracije u postupku stiskanja. Općenito za “ $k$ ” traženih svojstvenih vrijednosti/vektora potrebno je “ $2k$ ” Ritz-ovih vektora. Pri tome je u rješenju prvih “ $k$ ” vektora egzaktno određeno, a ostalih “ $k$ ” približno [M.8].

### Opis postupka

Svojstvena zadaća dinamike konstrukcija, opisana je relacijom:

$$\mathbf{K} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{M} \mathbf{x} \quad ; \quad (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \mathbf{x} = 0 \quad (2.151)$$

gdje su (kako je ranije naglašeno)  $\mathbf{K}$  matrica krutosti sustava, a  $\mathbf{M}$  matrica masa sustava. Postupak za formiranje “ $2k$ ” Ritz-ovog prostora je slijedeći [M.6, Y.1]:

1. Proračun prvog Ritz-ovog vektora  $\mathbf{x}_1$ :

$$\mathbf{K} \bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{M} \mathbf{x}_0 \quad (2.152)$$

gdje je  $\mathbf{x}_0$  vektor s jediničnim komponentama.

Nakon čega slijedi  $\mathbf{M}$ -normiranje:

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\bar{\mathbf{x}}_1}{(\bar{\mathbf{x}}_1^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{x}}_1)^{1/2}} \quad (2.153)$$

2. Proračun ostalih Ritz-ovih vektora  $\mathbf{x}_i$  ( $i=1,2,\dots,2k$ ):

$$\mathbf{K} \bar{\mathbf{x}}_i = \mathbf{M} \mathbf{x}_{i-1} \quad (2.154)$$

uz određivanje konstanti  $c_j$  ( $j=1,2,\dots,i-1$ )

$$c_j = \mathbf{x}_j^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{x}}_i \quad (2.155)$$

te određivanje novog vektora ortogonalnog na prethodne (Gramm-Schmidt-ov postupak [K.10]):

$$\bar{\bar{\mathbf{x}}}_i = \bar{\mathbf{x}}_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_j \bar{\mathbf{x}}_j \quad (2.156)$$

i njegovo  $\mathbf{M}$ -normiranje:

$$\mathbf{x}_i = \frac{\bar{\bar{\mathbf{x}}}_i}{(\bar{\bar{\mathbf{x}}}_i^T \mathbf{M} \bar{\bar{\mathbf{x}}}_i)^{1/2}} \quad (2.157)$$

3. **K**-ortogonalizacija Ritz-ovih vektora **X** i formiranje projektivnog podprostora:

$$\widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} \quad (2.158)$$

uz uvjet:

$$\mathbf{E} = \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} \quad (2.159)$$

gdje je  $\widehat{\mathbf{K}}$  općenito puna matrica. Ovim je dobiven standardni svojstveni problem:

$$(\widehat{\mathbf{K}} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{q} = 0 \quad (2.160)$$

čije se rješenje može dobiti npr. Jacobi-jevom metodom. Svojstvene vrijednosti ovog “komprimiranog” problema je upravo  $2k$  svojstvenih vektora polaznog problema (pri čemu je prvih ‘ $k$ ’ određeno točno, a drugih ‘ $k$ ’ približno). Svojstveni vektori polaznog problema mogu se dobiti iz slijedeće relacije:

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{X} \mathbf{Q} \quad (2.161)$$

gdje je **X** matrica Ritz-ovih vektora ( $n \times 2k$ ), a **Q** matrica svojstvenih vektora dobivenih u projektivnom podprostoru.

#### 2.5.4 Matrica masa

Ako se matrica masa računa prema izrazu (2.115), naziva se konzistentna matrica masa. Naime, proračun matrice masa **M** je konzistentan proračunu matrice krutosti **K** (koriste se iste interpolacijske funkcije i matrice su jednake strukture). Dakle, ovakvim se pristupom ne dobiva dijagonalna matrica masa. Kao što je navedeno u točki 2.5.2, poželjno je da pri vremenskoj integraciji matrica masa **M** bude dijagonalna.

Korišteni su različiti postupci formiranja dijagonalne matrice masa. Dijagonalna matrica **M** može se primjerice dobiti tako da se zbroje svi članovi pojedinog retka konzistentne matrice masa (“row lumping”). Često se koristi i postupak “special lumping” kod kojeg se članovi dijagonalne matrice masa elementa dobivaju tako da se ukupna masa elementa raspodijeli proporcionalno dijagonalnim članovima konzistentne matrice masa. Ovaj je pristup korišten i u ovom radu.

Za tipični čvor  $i$ , dijagonalni članovi  $m_{ii}$  dijagonalne matrice masa elementa pridružene pomacima  $u$ ,  $v$  i  $w$ , izračunavaju se pomoću:

$$m_{ii} = \psi_i \int_{V_e} \rho dV_e \quad (2.162)$$

gdje je  $\psi_i$  težinski koeficijent,  $\rho$  gustoća materijala, a  $V_e$  volumen elementa ploče/ljuske. Dijagonalni članovi rotacijske tromosti (pridruženi zaokretima)  $I_{ii\alpha}$  i  $I_{ii\beta}$ , vezani za vektore  $v_{1k}^0$  i  $v_{2k}^0$ , također su uzeti u obzir jer mogu imati utjecaja kod debelih ploča/ljuski [H.9]. Rotacijske tromosti dane su sa:

$$I_{ii\alpha} = I_{ii\beta} = \psi_i \int_{V_e} \rho z'^2 dV_e \quad (2.163)$$

Težinski koeficijent  $\psi_i$  iznosi:

$$\psi_i = \frac{\int_{V_e} \rho N_i N_i dV_e}{\sum_{k=1}^n \int_{V_e} \rho N_k N_k dV_e} \quad (2.164)$$

gdje je  $n$  broj čvorova elementa. Za uslojeni element (element s lamelama) je:

$$I_{ii\alpha} = I_{ii\beta} = \psi_i \int_{S_m} \rho_j h_j (z_j'^2 + h_j^2/12) dx' dy' \quad (2.165)$$

gdje  $h_j$  predstavlja debljinu  $j$ -te lamele, a sumacija je provedena preko svih lamela. Član  $z_j'$  je udaljenost srednje ravnine lamele od srednje plohe ljuske  $S_m$ . Za element koji nije uslojen, rotacijska tromost približno iznosi:

$$I_{ii\alpha} = I_{ii\beta} = m_{ii} \frac{h_i^2}{4} \quad (2.166)$$

Izraz (2.166) se može tumačiti kao rezultanta dijagonalne matrice mase  $m_{ii}/2$  koncentrirane na svakom kraju vektora  $v_i$  oko osi koja je na njega okomita. Dijagonalna matrica masa ljuske za čvor  $i$  je oblika:

$$M_i = \begin{bmatrix} m_{ii} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{ii} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{ii\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{ii\alpha} \end{bmatrix} \quad (2.167)$$

### 2.5.5 Konstruktivsko prigušenje

Prema (2.115), matrica prigušenja  $\mathbf{C}$  definirana je na isti način i s istim interpolacijskim funkcijama kao i matrica masa  $\mathbf{M}$ , samo što se umjesto gustoće  $\rho$  u podintegralnom izrazu pojavljuje koeficijent prigušenja  $\mu'$ . Dakle, struktura ove matrice je ista kao i struktura konzistentne matrice masa. S toga se ovako definirana matrica  $\mathbf{C}$  naziva konzistentna matrica prigušenja.

Matrica prigušenja ima važnu ulogu u dinamičkoj analizi inženjerskih konstrukcija. Za razliku od matrice krutosti i matrice masa, proračun matrice prigušenja često predstavlja problem budući da nije moguće definirati opći izraz prema kojem bi se određivao koeficijent prigušenja za konstrukcije različitog oblika i od različitih materijala. Za određivanje koeficijenata prigušenja potrebna su eksperimentalna istraživanja.

U TKE ne može se formirati matrica prigušenja  $\mathbf{C}$  s pomoću matrice prigušenja pojedinih elemenata (analogno proračunu  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{K}$ ), budući da nije moguće dobiti matrice prigušenja za pojedine konačne elemente. Stoga se  $\mathbf{C}$  određuje direktno za cijeli sustav, na osnovu ukupne disipacije energije sustava u tijeku djelovanja pobude.

U metodi direktne integracije jednadžbi gibanja, koja je i ovdje korištena, redovito se koristi Rayleigh-ovo viskozno prigušenje, kod kojeg se matrica prigušenja  $\mathbf{C}$  izražava kao linearna kombinacija matrica  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{K}$  prema:

$$\mathbf{C} = \alpha_d \mathbf{M} + \beta_d \mathbf{K} \quad (2.168)$$

U gornjem izrazu  $\alpha_d$  i  $\beta_d$  su konstante koje se određuju na osnovu koeficijenta prigušenja  $\xi_i$  za bilo koja dva nezavisna moda. Koeficijent prigušenja  $\xi_i$  za pojedine modove vibracija određuje se eksperimentalno (na osnovu mjerenja amplituda prigušenja slobodnih oscilacija ili mjerenja energije disipacije). Konstante  $\alpha_d$  i  $\beta_d$  su vezane izrazom:

$$\alpha_d + \beta_d \omega_i^2 = 2\omega_i \xi_i \quad (2.169)$$

gdje je  $\omega_i$  kružna frekvencija (rad/s) promatranog moda neprigušenog sustava. Ako se uzmu dva uzastopna moda slobodnih oscilacija s odgovarajućim frekvencijama  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , te prigušenjima  $\xi_1$  i  $\xi_2$ , ove se konstante mogu izračunati prema:

$$\begin{aligned} \alpha_d &= 2\omega_1\omega_2 (\omega_2\xi_1 - \omega_1\xi_2) / (\omega_2^2 - \omega_1^2) \\ \beta_d &= 2(\omega_2\xi_2 - \omega_1\xi_1) / (\omega_2^2 - \omega_1^2) \end{aligned} \quad (2.170)$$

Matrica prigušenja  $\mathbf{C}$  uvedena je u kontekstu primjene linearnih elastičnih analiza. Kod provedbe nelinearnih dinamičkih analiza, s modelima materijala koji uključuju unutrašnju disipaciju energije, matrica prigušenja  $\mathbf{C}$  trebala bi obuhvatiti samo onaj dio disipacije energije koji nije obuhvaćen modelima materijala. Ostaje otvoreno pitanje u

kojem iznosu treba uključiti viskozno Rayleigh-ovo prigušenje pri uključanju nelinearnih modela materijala i geometrije.

### 2.5.6 Metoda rješenja nelinearnog problema

Može se reći da ne postoji metoda rješenja sustava nelinearnih jednačbi koja bi bila potpuno efikasna za sve nelinearne probleme. Neke metode mogu biti vrlo efikasne za određene tipove problema, dok kod drugih mogu biti potpuno neefikasne. Kod problema s izraženijom nelinearnošću, potrebno je koristiti manje inkremente opterećenja. Kod rješavanja problema stabilnosti, odnosno u slučajevima postojanja tzv. točke bifurkacije (razdvajanja), neke metode mogu biti potpuno neupotrebne [B.11]. Izbor metode nelinearnog rješenja obično je zasnovan na iskustvu. Neke metode nelinearnih rješenja mogu se naći u [B.11, B.6, C.17, G.1, M.5, M.6, M.7].

U ovom je radu korištena metoda Newton-Raphson, koja je jedna od najčešće korištenih metoda, a koja se ukratko prikazuje u nastavku.

Jednadžba dinamičke ravnoteže može se skraćeno napisati u obliku:

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0} = \mathbf{f} - \mathbf{R}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.171)$$

Prema metodi Newton-Raphsona-a (NR), rješenje problema u inkrementalno-iterativnom obliku dano je s:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}^i &= -[\mathbf{J}(\mathbf{u}^i, \dot{\mathbf{u}}^i, \ddot{\mathbf{u}}^i)]^{-1} (\mathbf{f}^*)^i \\ \mathbf{u}^{i+1} &= \mathbf{u}^i + \Delta \mathbf{u}^i \end{aligned} \quad (2.172)$$

U (2.172)  $[\mathbf{J}(\mathbf{u}^i, \dot{\mathbf{u}}^i, \ddot{\mathbf{u}}^i)]$  označava Jacobi-jevu matricu koja je definirana s:

$$[\mathbf{J}(\mathbf{u}^i, \dot{\mathbf{u}}^i, \ddot{\mathbf{u}}^i)] = \frac{\partial (\mathbf{f}^*)^i}{\partial \mathbf{u}^i} \quad (2.173)$$

a na temelju (2.171) slijedi:

$$\frac{\partial (\mathbf{f}^*)^i}{\partial \mathbf{u}^i} = \frac{\partial \mathbf{R}^i}{\partial \mathbf{u}^i} + \frac{\partial \mathbf{R}^i}{\partial \dot{\mathbf{u}}^i} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^i}{\partial \mathbf{u}^i} + \mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}^i}{\partial \mathbf{u}^i} = (\mathbf{K}^*)^i \quad (2.174)$$

Korištenjem Newmark-ove diskretizacije, (2.174) odgovara (2.124), tj.:

$$(\mathbf{K}_\tau^*)^i = \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \gamma \frac{\mathbf{C}_\tau^i}{\beta \Delta t} + \mathbf{K}_\tau^i \quad (2.175)$$

gdje  $\mathbf{K}_\tau^i = \partial \mathbf{R}^i / \partial \mathbf{u}^i$  označava matricu tangentne krutosti, a  $\mathbf{C}_\tau^i = \partial \mathbf{R}^i / \partial \dot{\mathbf{u}}^i$  matricu tangentnog prigušenja.

Za statičke probleme, (2.171) se svodi na:

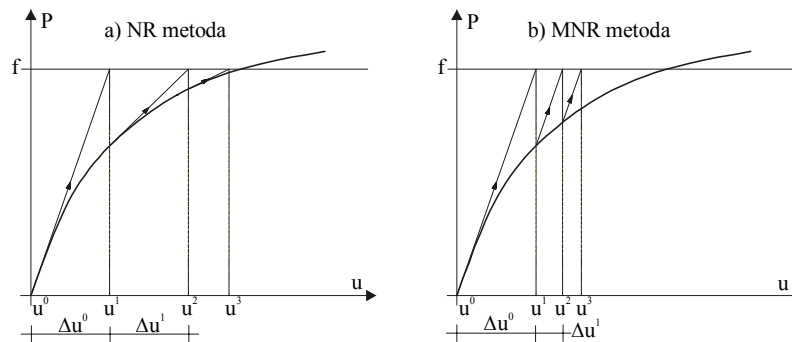
$$f^*(u) = 0 = f - R(u) \quad (2.176)$$

a (2.174) na:

$$(K^*)^i = K_\tau^i \quad (2.177)$$

Iteracijski postupak rješenja problema se nastavlja sve dok nije zadovoljen kriterij konvergencije. Metoda NR ima kvadratnu brzinu konvergencije. Ažuriranje (popravljanje) matrice  $K^*$  u svakoj iteraciji svakog inkrementa iziskuje dosta proračunskog vremena, pa je kod problema s ograničenom nelinearnošću efikasnije koristiti MNR metode.

Kod MNR metoda, Jacobi-jeva matrica se ne popravlja u svakom vremenskom koraku. Jedna varijanta je da se matrica  $K^*$  izračuna samo na početku svakog inkrementa vremena/opterećenja, a dalje je zadržati konstantnom. Također je moguće  $K^*$  izračunati samo jednom, na početku postupka rješenja i zadržati je konstantnom kroz sve inkremente i iteracije. Koriste se i druge mogućnosti, npr.: da se  $K^*$  popravlja samo u nekoliko prvih iteracija, a dalje drži konstantnom. Shematski prikaz ovih metoda, prema [M.7], dan je na Crtežu 2.33.



**Crtež 2.33 - Shematski prikaz metoda NR i MNR**

Metode MNR imaju sporiju konvergenciju, ali prema utrošku vremena računanja često mogu biti brže i efikasnije od metode NR.

Može se reći da su metode NR i MNR općenito najčešće korištene budući da su dobro testirane, jednostavno ih je implementirati i vrlo su efikasne. To je glavni razlog njihove primjene i u ovom radu.

### 2.5.7 Kriterij konvergencije

Za kontrolu toka nelinearnog numeričkog postupka, obično se koriste dva kriterija konvergencije: kriterij konvergencije baziran na rezidualnim (neuravnoteženim) silama ili kriterij konvergencije baziran na pomacima.

U analizama armirano betonskih konstrukcija obično se koristi kriterij konvergencije preko prirasta pomaka, jer rezidualne sile mogu formirati “ravnotežne grupe” [B.12], koje nemaju značajnog utjecaja na ukupni odgovor konstrukcije. Kod toga je prikladno odvojeno kontrolirati priraste translacija od prirasta rotacija.

Broj iteracija dominantno ovisi o odabranoj veličini dopustive tolerancije, odnosno o zahtjevanoj točnosti rješenja. Stoga, odabiru dopustive tolerancije treba posvetiti naročitu pažnju, jer nekad blaža tolerancija može bitno smanjiti vrijeme trajanja proračuna bez značajne razlike u rezultatima. Ovo osobito vrijedi za probleme s velikim brojem nepoznanica i izrazitim nelinearnim ponašanjem. U običajenim slučajevima, dopustiva tolerancija od 0.001 do 0.01 trebala bi biti dovoljna za postizanje dostatne točnosti rješenja i relativno mali utrošak proračunskog vremena. Ipak, u većini praktičnih slučajeva zadovoljavajuće točni rezultati mogu se postići i s tolerancijom od 0.01-0.025. Blaže kriterije konvergencije koji, kako je istaknuto, ne moraju značajnije utjecati na točnost dobivenih rezultata, treba koristiti kod problema s velikim brojem čvorova/nepoznanica i s izrazitim nelinearnim ponašanjem.

Prosječno, ukupni broj iteracija između 10-15, za svaki vremenski korak, uz dopustivu toleranciju od 0.005, može se smatrati zadovoljavajućim.

## 2.6 PRIMJER

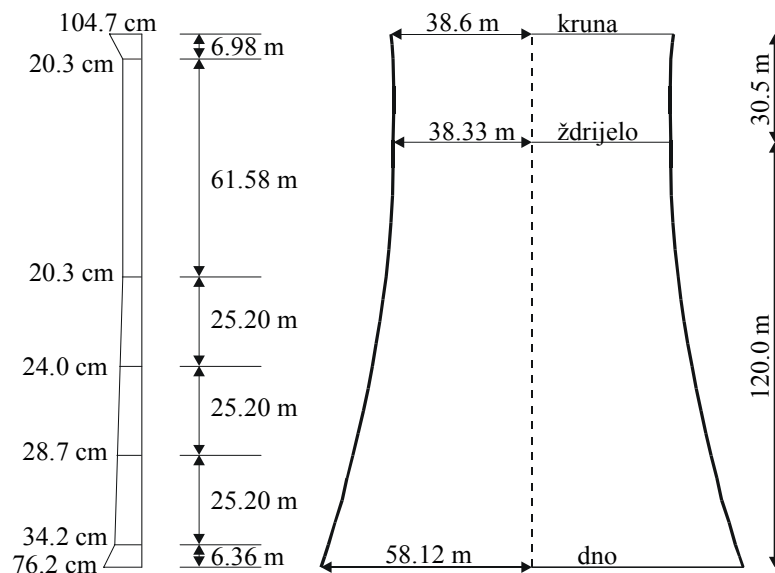
Armirano betonski tornjevi za hlađenje u sklopu postrojenja nuklearnih elektrana, su jedne od najvećih konstrukcija ikada sagrađenih. Inicijalne geometrijske imperfekcije normalna su pojava kod ovakvih golemih građevina. Također, pukotine na armirano betonskom omotaču neminovno se pojavljuju (prije ili kasnije) kao posljedica velikog temperaturnog gradijenta, opterećenja vjetrom i/ili potresom. Oba ova efekta imaju značajni utjecaj na nosivost ovih građevina. Također vrlo važnu ulogu ima i količina i raspored armature u presjeku tornja.

Dakako da, zbog svoje veličine, ove građevine nije moguće ispitati eksperimentalno, za njihovu se analizu uglavnom koriste numerički testovi. U sprezi s mjerenjima na terenu i praćenjem ponašanja konstrukcije pod različitim opterećenjima numeričke analize mogu dati vrlo dobar odgovor o ponašanju i graničnoj nosivosti.

U ovom primjeru analizirano je ponašanje i granična nosivost armirano betonskog hiperboličkog tornja za hlađenje Port Gibson, nuklearne elektrane Grand Gulf, SAD [\*1, H.2]. Ovaj toranj je višeputa analiziran različitim numeričkim modelima, a neki rezultati se mogu pronaći u radovima [M.3, M.9, M.10, H.1, H.2].

### Geometrijske karakteristike modela

Geometrijske karakteristike modela preuzete su iz literature [H.2] i prikazane su na Crtežu 2.P1.



**Crtež 2.P1** - Prikaz geometrije tornja za hlađenje Port Gibson



Geometrija je opisana s dvije hiperbole:

– iznad ždrijela:

$$-0.0026010 z^2 - 0.098937 rz + r^2 + 1.4174 z - 36.7642 r + 1278.6678 = 0 \quad (2.178)$$

– ispod ždrijela:

$$0.86020 z^2 + 1.4208 rz + r^2 - 51.7196 z - 494.4638 r + 16674.1904 = 0 \quad (2.179)$$

gdje  $z$  predstavlja visinu mjerenu od ždrijela, a  $r$  radius ljuske (sve u metrima). Na Crtežu 2.P1 vidljiva je promjena debljine ljuske u ovisnosti o visinskom položaju. U Tablici P1 prikazane su materijalne karakteristike betona i armature korištene u analizi.

**Tablica P1** - Osnovne materijalne karakteristike

Beton			Armatura		
Modul elastičnosti	$E_B$ (GN/m <sup>2</sup> )	28.3	Modul elastičnosti	$E_a$ (GN/m <sup>2</sup> )	205.9
Poisson-ov koeficijent	$\nu_b$	0.18	Poisson-ov koeficijent	$\nu_a$	0.3
Gustoća	$\rho_b$ (kN/m <sup>3</sup> )	24.3	Gustoća	$\rho_a$ (kN/m <sup>3</sup> )	78.5
Tlačna čvrstoća	$f_B$ (MN/m <sup>2</sup> )	34.5	Modul očvršćavanja	$H'$ (GN/m <sup>2</sup> )	10.3
Vlačna čvrstoća	$f_z$ (MN/m <sup>2</sup> )	3.2	Granica tečenja	$\sigma_y$ (MN/m <sup>2</sup> )	413.7
			Granica popuštanja	$\sigma_u$ (MN/m <sup>2</sup> )	620.5

Faktor armiranja tornja za hlađenje Port Gibson varira između 0.3% do 1.1% po visini. Armaturene šipke su postavljene u dvostrukom sloju uz unutrašnju i vanjsku stranu tornja u smjeru paralela (horizontalna armatura) i meridijana (vertikalna armatura). Pozicija šipki u prirodnom koordinatnom sustavu iskazana je u Tablici P2.

**Tablica P2** - Pozicija šipke

Visina od ždrijela (m)	Debljina tornja (cm)	Pozicija šipke ( $\zeta_i$ )
30.50	101.7	0.820
23.32	20.3	0.820
-7.26	20.3	0.532
-22.65	20.3	0.532
-38.04	20.3	0.500
-63.24	24.0	0.529
-88.44	28.7	0.590
-113.64	34.2	0.678
-120.00	76.2	0.812

U numeričkoj analizi usvojen je konstantni faktor armiranja da bi se dobio jasniji uvid utjecaja faktora armiranja na graničnu čvrstoću tornja.

Opterećenje

Toranj je analiziran za opterećenje vlastitom težinom i opterećenje vjetrom. Podaci o vjetrovnom opterećenju su preuzeti iz lit. [M.3, H.1]. Razdioba vjetrovnog opterećenja po pojedinoj paraleli (razdioba tlaka po opsegu) iskazana je formulom:

$$H_a = -0.5 + \sum_{n=0}^{12} A_n \cos n\theta \quad (2.180)$$

gdje su  $A_n$  amplitude prikazane u Tablici P3.

**Tablica P3** - Amplitude vjetrovnog opterećenja

n	$A_n$	n	$A_n$	n	$A_n$	n	$A_n$
0	0.38330	3	-0.50927	6	0.03333	9	-0.00972
1	-0.27918	4	-0.09167	7	-0.04474	10	-0.01356
2	-0.61978	5	0.11794	8	-0.00833	11	-0.00597
						12	-0.01667

Razdioba opterećenja vjetrom u smjeru meridijana, dana je sljedećim izrazom:

$$p(N/m^2) = 413.013 \cdot H_a (3.281z + 393.696)^{2/7} \quad (2.181)$$

gdje je  $z$  (m) udaljenost od dna tornja. U numeričkom modelu, vjetar je tretiran kao kvazi-statičko opterećenje.

Ukupno opterećenje na toranj se može iskazati preko sljedeće formula:

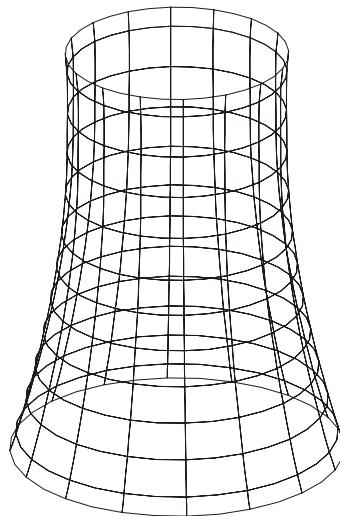
$$q_{uk} = q_{grv} + \chi \cdot q_{vje} \quad (2.182)$$

gdje je:  $q_{uk}$  ukupno opterećenje,  $q_{grv}$  gravitacijsko opterećenje;  $q_{vje}$  vjetrovno opterećenje, a  $\chi$  faktor opterećenja. Opterećenje je nanošeno postupno, u inkrementima, tako da se izbjegnu nestabilnosti koje mogu nastati zbog loma ili drobljenja betona pod naglim nanošenjem opterećenja.

U numeričkoj analizi pomak je mjeren u kruni na meridijanu najopterećenijem vjetrom.

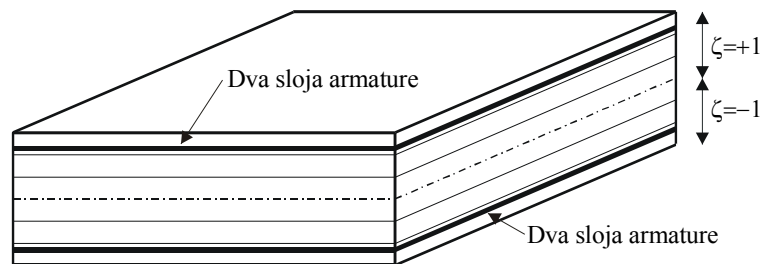
Numerički model

Hiperboloidna ljuska tornja za hlađenje Port Gibson modelirana je 9-čvornim degeneriranim elementima ljuske (Crtež 2.P2). Ljuska je podijeljena u 16 elemenata u smjeru paralela i 12 elemenata u smjeru meridijana.



**Crtež 2.P2 - Prikaz mreže konačnih elemenata**

Svaki element ljuske se sastoji od 6 slojeva (layera) betona i četiri sloja armature, uz svaki rub po dva, prema Tablici P2. Svaki sloj pri jednom rubu nosi u smjeru paralela ili meridijana. Slojevi elementa prikazani su na Crtežu 2.P3.

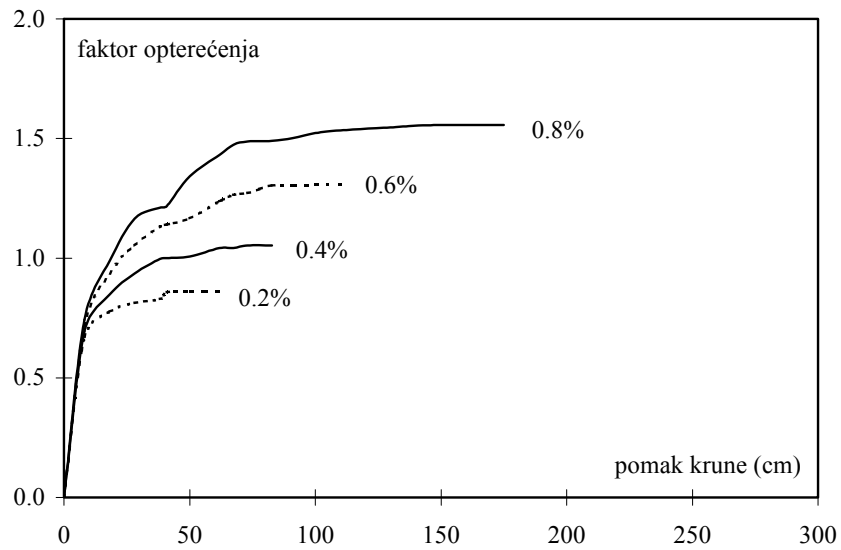


**Crtež 2.P3 - Slojevi ljuske**

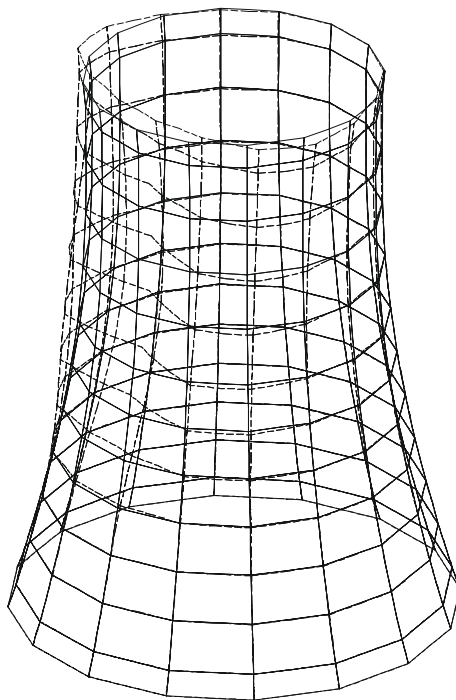
## Rezultati

Neki od rezultata numeričke analize prikazani su u nastavku. Crtež 2.P4 prikazuje odnos pomaka za različite faktore opterećenja ( $\chi$ ) i za različite faktore armiranja. Primjetno je, bez obzira na faktor armiranja, da pomak raste gotovo linearno do pojave prvih pukotina, koje nastaju kod faktora opterećenja  $\chi \approx 0.7$ . Nakon pojave prvih pukotina primjetno je nelinearno ponašanje konstrukcije. Kod faktora opterećenja  $\chi \approx 1.2$  dolazi do pojave velikog broja pukotina i naglog pada krutosti (Crtež 2.P8). Ponašanje konstrukcije postaje izrazito nelinearno (nagli rast pomaka/deformacija bez velike promjene opterećenja). U ovom području nastaju velike deformacije osnovne mreže konačnih elemenata, pojavljuje se naglo širenje pukotina i lokalno drobljenje betona, pa numerički model postaje nestabilan.

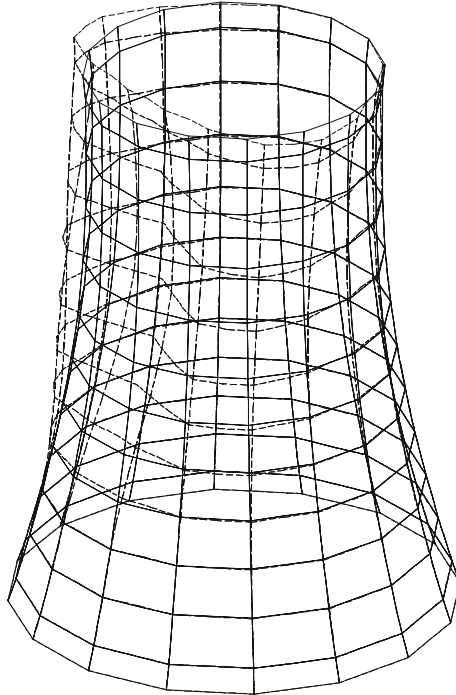
Neki rezultati prikazani su na sljedećim stranicama. Uspoređujući dobivene rezultate s onima prezentiranim u lit. [H.2], može se uočiti njihova velika podudarnost.



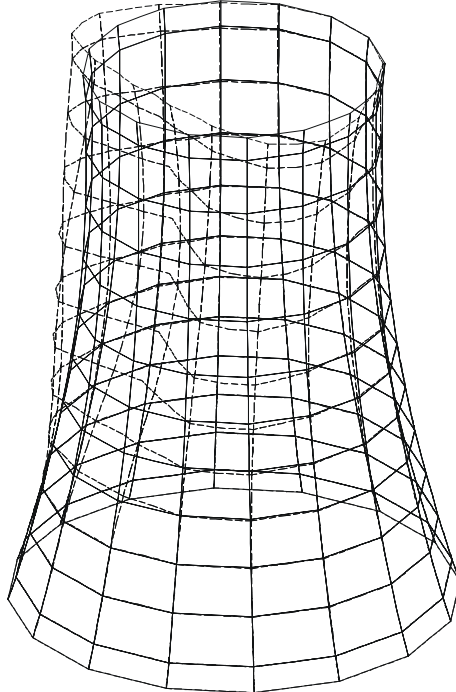
**Crtež 2.P4** - Prikaz utjecaja faktora armiranja na graničnu čvrstoću tornja



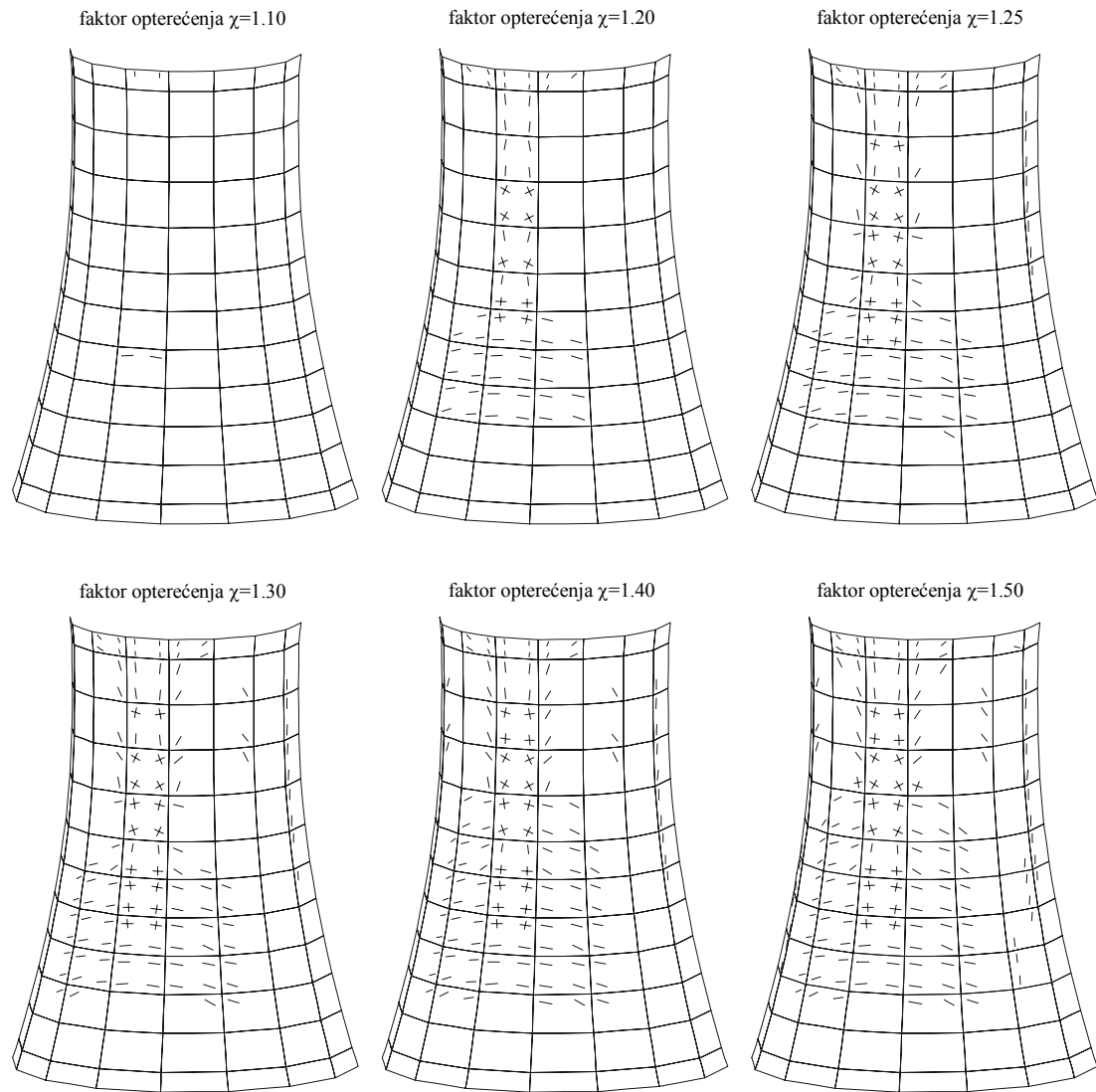
**Crtež 2.P5** - Prikaz pomaka konstrukcije za faktor opterećenja  $\chi=1.25$  i faktor armiranja 0.8%; (pomaci uvećani 10 puta)



*Crtež 2.P6 - Prikaz pomaka konstrukcije za faktor opterećenja  $\chi=1.40$  i faktor armiranja 0.8%; (pomaci uvećani 10 puta)*

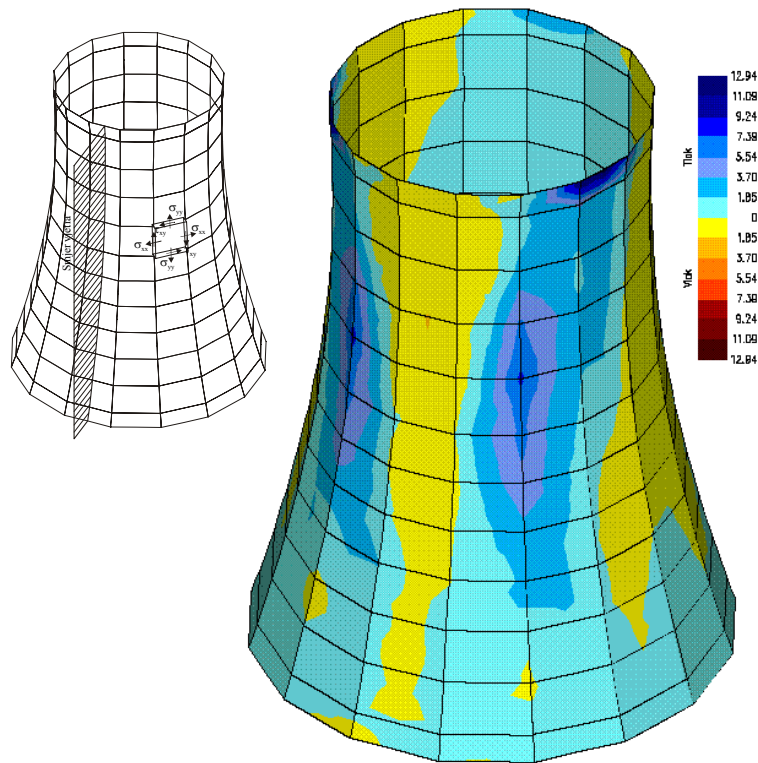


*Crtež 2.P7 - Prikaz pomaka konstrukcije za faktor opterećenja  $\chi=1.50$  i faktor armiranja 0.8%; (pomaci uvećani 10 puta)*

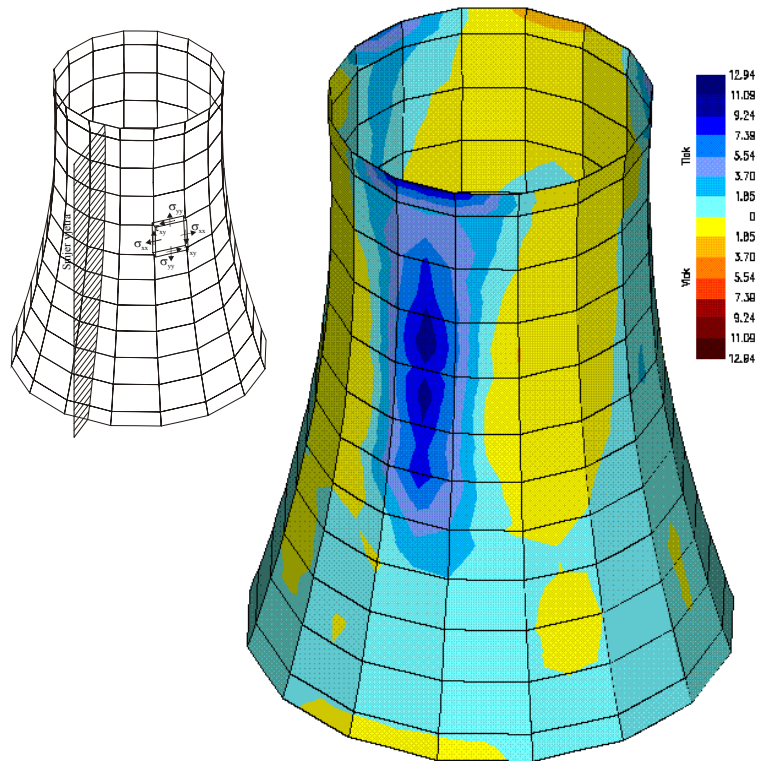


**Crtež 2.P8 - Prikaz propagacije pukotina u vanjskom sloju (layeru) tornja za faktor armiranja 0.8%**

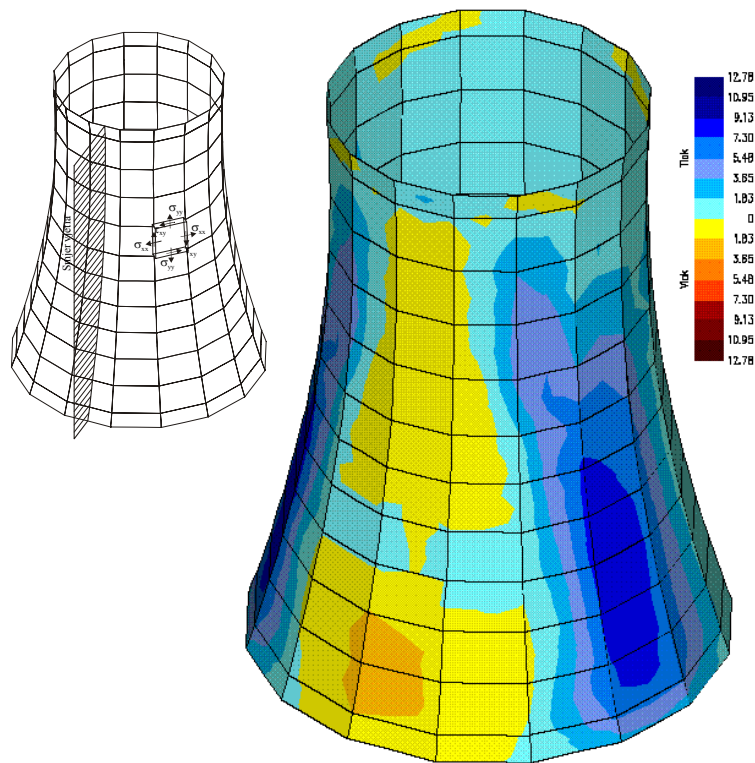
Na crtežima 2.P9 – 2.P11 prikazano je stanje naprezanja u tornju za faktor opterećenja  $\chi=1.5$ , i faktor armiranja 0.8%.



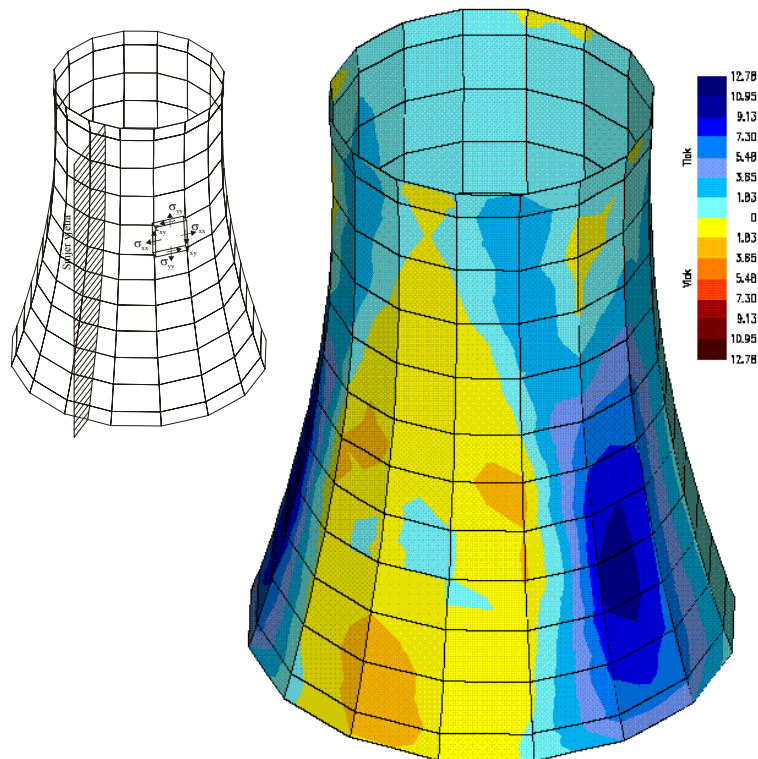
**Crtež 2.P9** - Horizontalna ( $\sigma_{xx}$ ) naprezanja u unutrašnjem sloju (layeru) tornja; (MPa)  
faktor opterećenja  $\chi=1.5$ ; faktor armiranja 0.8%



**Crtež 2.P10** - Horizontalna ( $\sigma_{xx}$ ) naprezanja u vanjskom sloju (layeru) tornja; (MPa)  
faktor opterećenja  $\chi=1.5$ ; faktor armiranja 0.8%

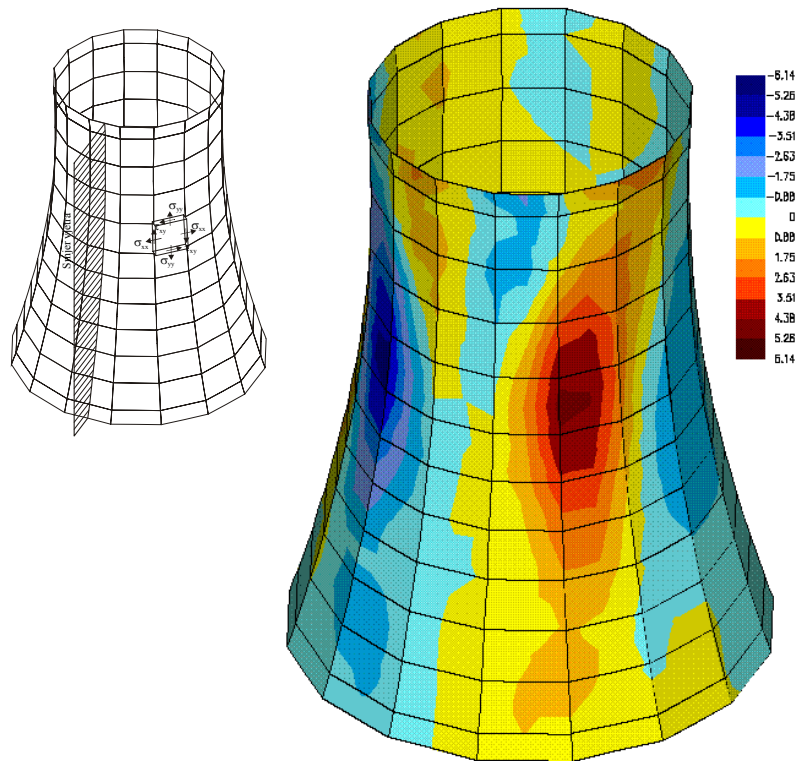


**Crtež 2.P11** – Vertikalna ( $\sigma_{yy}$ ) naprezanja u unutrašnjem sloju (layeru) tornja; (MPa)  
faktor opterećenja  $\chi=1.5$ ; faktor armiranja 0.8%

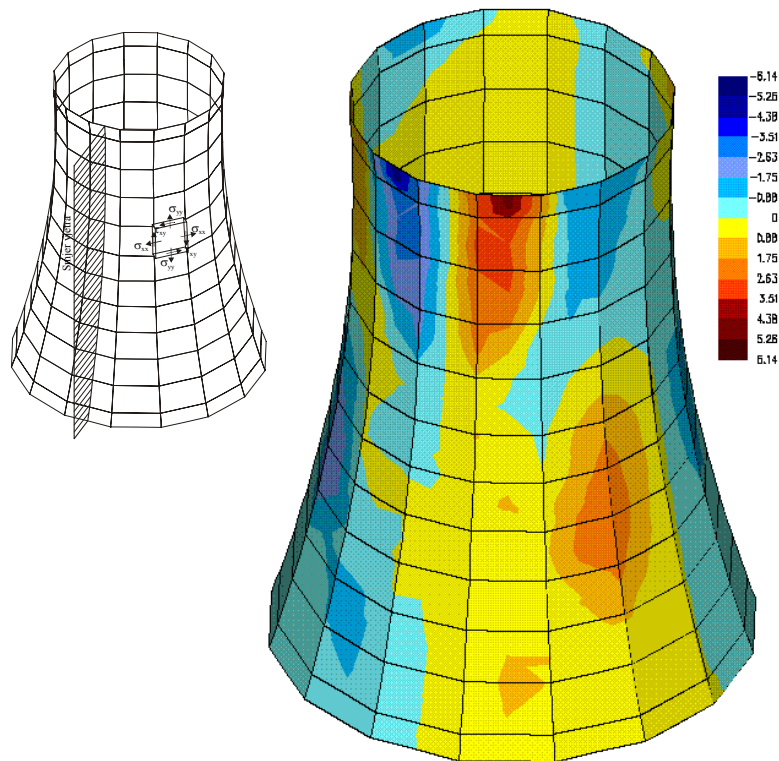


**Crtež 2.P12** – Vertikalna ( $\sigma_{yy}$ ) naprezanja u vanjskom sloju (layeru) tornja; (MPa)  
faktor opterećenja  $\chi=1.5$ ; faktor armiranja 0.8%



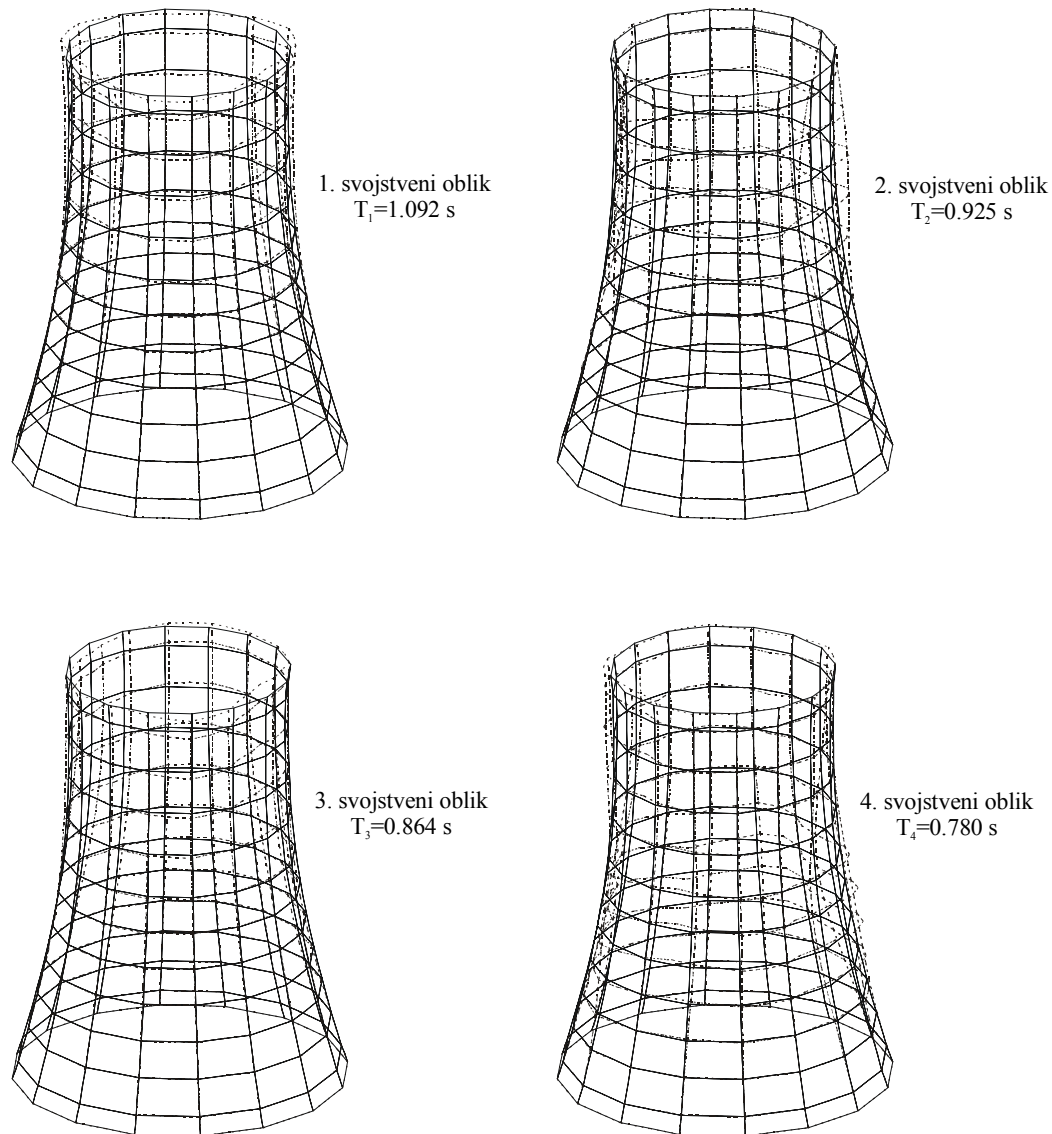


**Crtež 2.P13** – Posmična ( $\tau_{xy}$ ) naprezanja u unutrašnjem sloju (layeru) tornja; (MPa)  
faktor opterećenja  $\chi=1.5$ ; faktor armiranja 0.8%



**Crtež 2.P14** – Posmična ( $\tau_{xy}$ ) naprezanja u vanjskom sloju (layeru) tornja; (MPa)  
faktor opterećenja  $\chi=1.5$ ; faktor armiranja 0.8%

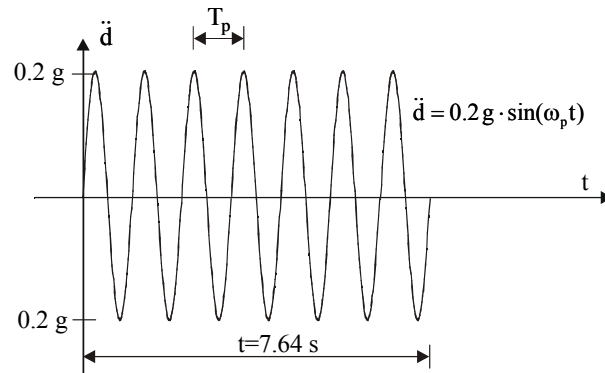
U cilju kontrole razvijenog računalnog programa, rashladni toranj u nastavku je analiziran na dinamičko opterećenje. Prvo je izvršena analiza svojstvenih vrijednosti sustava. Rezultati su prikazani na crtežu 2.P15.



**Crtež 2.P15** – Dinamičke karakteristike rashladnog tornja

Toranj je zatim opterećen harmonijskim ubrzanjem podloge čije su karakteristike prikazane na crtežu 2.P16, jer se za usvojeno harmonijsko ubrzanje mogu definirati granice očekivanog rješenja.

Usvojena je maksimalna amplituda ubrzanja podloge od 0.2g. Frekvencija pobude  $\omega_p$  odabrana je tako da odgovara veličini frekvencije prvog svojstvenog vektora ( $\omega_p = \omega_1 = 5.75$  rad/s). Korištena je implicitna vremenska integracija ( $\Delta t = 0.01$  s) i dijagonalna matrica masa. Korišteno je 5% Rayleigh-ovog konstrukcijskog prigušenja, prema preporuci u [M.6].

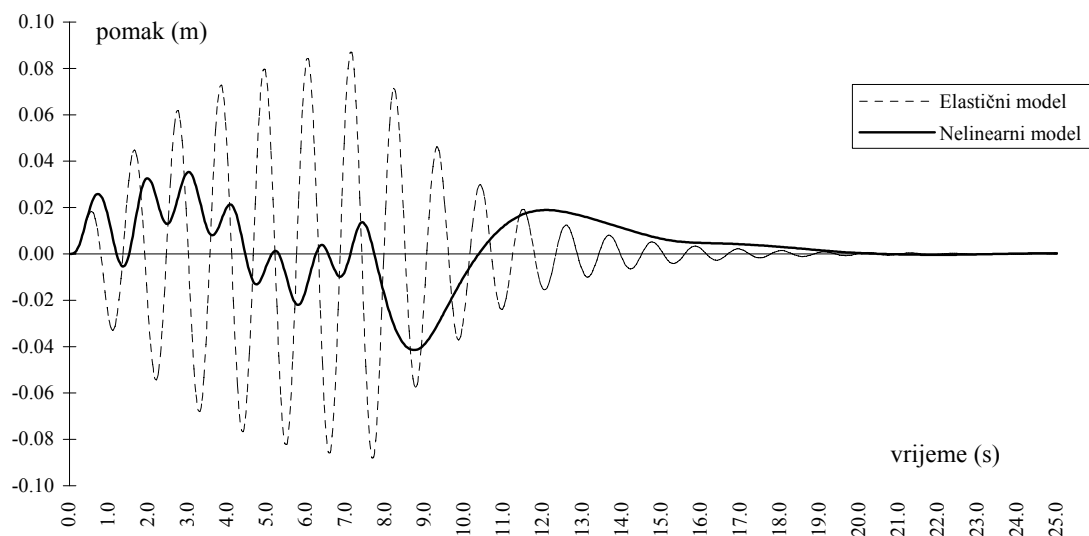


**Crtež 2.P16** – Harmonijska ekscitacija podloge

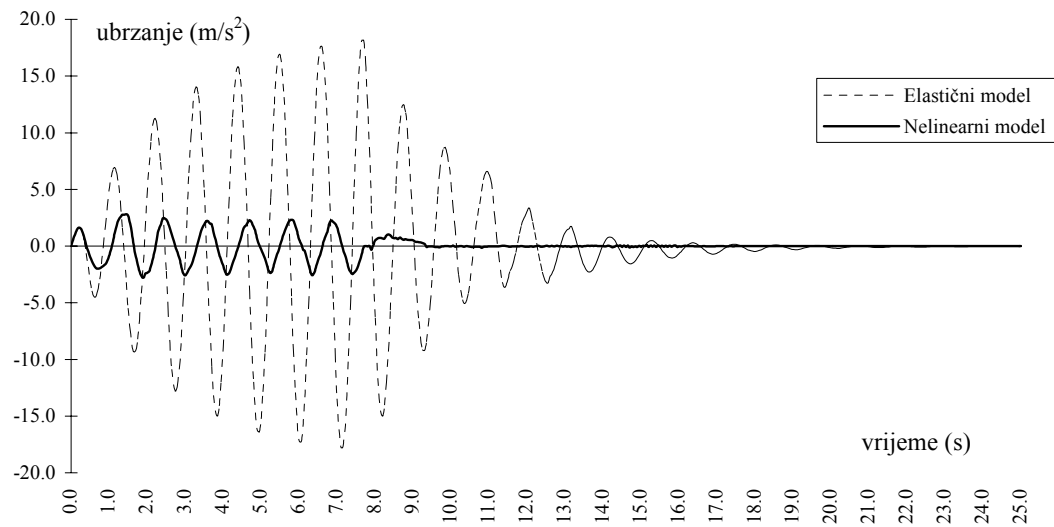
Toranj je analiziran u dvije faze. U prvoj fazi toranj je analiziran s elastičnim modelom ponašanja materijala, a u drugoj fazi nelinearnim modelom prikazanim u ovom poglavlju.

Na Crtežu 2.P17 prikazan je pomak krune tornja. Kod elastičnog modela uočljiva je pojava rezonancije, što je očekivano. Kod nelinearnog modela nakon pojave većih zona pucanja (već kod cca 1.0 s) dolazi do značajnog prigušenja u sustavu. Primjetno je da pojava pukotina može u potpunosti promijeniti odgovor sustava na dinamičku pobudu. Nakon prestanka djelovanja pobude, titranje konstrukcije se vrlo brzo smiruje.

Crtež 2.P18 prikazuje ubrzanja krune tornja. I za ubrzanja vrijede analogni zaključci kao za pomake.



**Crtež 2.P17** – Horizontalni pomak krune tornja



*Crtež 2.P18 – Ubrzanje krune tornja*

# **3. NUMERIČKA ANALIZA TEKUČINE**

### 3.1 OPĆENITO

Tekućina (fluid) je tvar (kapljevinna ili plin) koja se neprestano deformira usljed vanjskog djelovanja. Može biti idealna (tečenje bez trenja - tzv. Newton-ova tekućina) ili viskozna (postoji trenje među molekulama tekućine u gibanju). Sve realne tekućine su viskozne, no u mnoštvu slučajeva utjecaj viskoznosti je mali i može se zanemariti. Vrlo često su efekti viskoznosti ograničeni na uska područja ili rubne pojaseve blizu granica tečenja, a ostatak toka se može promatrati bez utjecaja viskoznosti.

Tekućine se dalje mogu podijeliti na stlačive i nestlačive, zavisno o tome da li je promjena gustoće značajna ili ne.

Problemi mehanike tekućine (fluida) se mogu grupirati u dvije glavne kategorije:

- problemi s tečenjem (površinski tokovi i sl.),
- problemi bez tečenja izloženi dinamičkoj pobudi (rezervoari, akumulacije i sl.).

U ovom su radu razmatrani problemi mirne stlačive tekućine izložene dinamičkoj pobudi.

#### 3.1.1 Linearni model tekućine

Linearni model tekućine može se opisati izrazom:

$$p = -E \varepsilon_v \quad (3.1)$$

U gornjem izrazu  $p$  označava hidrodinamički tlak (bez hidrostatičkog),  $E$  je zapreminski modul elastičnosti ("bulk" modul), a  $\varepsilon_v$  je volumenska deformacija tekućine. Ovim modelom se pretpostavlja da se u tekućini mogu pojaviti neograničeni negativni tlakovi ("vlačno" naprezanje), što u pojedinim slučajevima može dati pogrešne rezultate. Međutim, u svim slučajevima kad je ukupni rezultatni tlak u tekućini (atmosferski + hidrostatički + hidrodinamički) veći od nule, odnosno veći od tlaka isparivanja, ovakav model tekućine zadovoljava.

#### 3.1.2 Nelinearni model tekućine

Nelinearni model tekućine uvažava da ukupni tlak u tekućini (atmosferski + hidrostatički + hidrodinamički) ne može biti manji od tlaka para tekućine. Pojava rezultatnih negativnih tlakova u tekućini naziva se kavitacija.

Kavitacija se dakle javlja uvijek kada je ukupni apsolutni tlak u nekoj točki manji od tlakova para tekućine, tj. kada je:

$$p_{\text{abs}} = p + p_h + p_a \leq p_v \quad (3.2)$$

U gornjem izrazu  $p_{\text{abs}}$  označava ukupni apsolutni tlak;  $p$  je hidrodinamički tlak (ne uključuje hidrostatički);  $p_h$  je hidrostatički tlak;  $p_a$  je atmosferski tlak i  $p_v$  je tlak para tekućine. Gornji se izraz može napisati i u obliku:

$$p \leq p_v - (p_h + p_a) \quad (3.3)$$

što vodi na zaključak da kavitacija u nekoj točki tekućine nastaje kada hidrodinamički tlak padne ispod vrijednosti  $p_v - (p_h + p_a)$ . Za vodu, zavisno od temperature, za sve praktične slučajeve može se uzeti da  $p_v$  iznosi od 0.02 do 0.03 MPa.

### 3.1.3 Formulacija tekućine

Gibanje tekućine opisano je u Euler-ovom koordinatnom sustavu, pretpostavljajući probleme s malim pomacima. Za analizu tekućine općenito se koriste formulacije [Z.3], [P.3]:

- pomaka,
- potencijala pomaka,
- brzinskog potencijala i
- tlakova.

U formulaciji pomaka općenito su tri nepoznanice, dok su u ostalim formulacijama po jedna nepoznanica. U ovom je radu korištena formulacija potencijala pomaka.

Tekućina se u ovom radu tretira stlačiva i bez viskoznosti. Prostorna diskretizacija polja tekućine izvršena je tehnikom konačnih elemenata (TKE), dok je vremenska diskretizacija izvršena tehnikom konačnih diferencija (TKD). Problem rubnih uvjeta riješen je tehnikom kraćenja ruba ("truncation"), tj. beskonačno pružanje stvarne sredine modelirano je konačnim modelom. Ovaj model je u velikom broju slučajeva prihvatljiv kod statičkih analiza, dok kod dinamičkih analiza ovakvo modeliranje granica zahtjeva poseban tretman u cilju eliminiranja refleksije valova na umjetno formiranim granicama [J.2].

Iako je u ovom poglavlju naglasak dan na simulaciju ponašanja polja tekućine, ujedno je opisan i model ponašanje tekućine u dodiru s deformabilnom konstrukcijom, koji se dalje koristi u simulaciji međudjelovanja tekućine i konstrukcije.

### 3.2 JEDNADŽBE GIBANJA TEKUĆINE

Gibanje tekućine (kao i niz drugih pojava) izučava se na temelju spoznaje o održanju ukupne mase, energije i sl. Na temelju tog principa izvodi se zakon održanja polja. Riječima, zakon održanja se može iskazati [J.3]:

*“Ukupna razlika proticaja neke veličine kroz određenu plohu koja zatvara neki volumen mora biti jednaka promjeni te veličine u jedinici vremena unutar tog volumena.”*

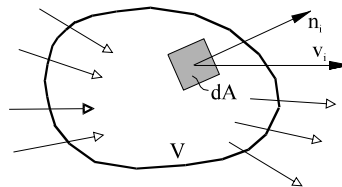
Zakon održanja može se primijeniti na tok mase, tok energije, tok količine gibanja i sl. Primjena zakona održanja na konačno veliki volumen dovodi do integralnih formulacija, a primjena na diferencijalni dio volumena do diferencijalnih formulacija. Općenito, zakon održanja vrijedi za bilo koliko veliki komad prostora.

#### 3.2.1 Zakon održanja mase

Ako se pretpostavi da kroz volumen  $V$  (prema Crtežu 3.1), kojeg zatvara ploha  $A$ , protiče tekućina, tada se unutar volumena  $V$  nalazi masa tekućine:

$$M = \int_V \rho dV \quad (3.4)$$

gdje je  $\rho$  gustoća tekućine.



*Crtež 3.1 - Kontrolni volumen i kontrolna ploha*

Promjena mase tekućine u jedinici vremena će biti:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (3.5)$$

sve dok se volumen  $V$  ne mijenja tokom vremena. Razlika dotoka i istjecanja mase tekućine kroz plohu  $A$  mora biti, prema zakonu održanja, jednaka promjeni mase unutar volumena:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_A \rho v_i n_i dA \quad (3.6)$$

odnosno:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_A \rho v_i n_i dA = 0 \quad (3.7)$$

gdje su:



$v_i$  - vektor brzine istjecanja mase tekućine kroz elementarnu plohu  $dA$

$n_i$  - jedinični vektor vanjske normale u promatranj elementarnoj površini  $dA$

Jednadžba (3.7) je integralna formulacija kontinuiteta toka za bilo koji fiksni volumen u neprekidnom strujanju. Primjenom Green-Gauss-Ostrogradski (GGO) teorema, površinski integral se može pretvoriti u volumenski:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \nabla(\rho v_i) dV = 0 \quad (3.8)$$

odnosno:

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho v_i) \right] dV = 0 \quad (3.9)$$

Da bi vrijednost integrala bila jednaka nuli i podintegralna funkcija mora biti jednaka nuli, pa se jednadžba (3.9) može napisati u obliku:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho v_i) = 0 \quad (3.10)$$

što predstavlja diferencijalnu jednadžbu kontinuiteta toka tekućine.

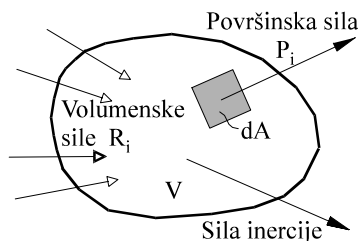
Jednadžba (3.9) se može iskazati i na slijedeći način:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \left( \rho \frac{du_i}{dt} \right) = 0 \quad (3.11)$$

pri čemu  $u_i$  predstavlja vektor pomaka čestice tekućine.

### 3.2.2 Opća dinamička jednadžba gibanja realne tekućine

Za postavljanje dinamičke jednadžbe gibanja realne tekućine primjenjuje se modificirani zakon održanja količine gibanja, tj. drugi Newton-ov zakon. Na zamišljeni volumen  $V$  djeluju sile (Crtež 3.2):



Crtež 3.2 - Sile na elementarni volumen

– sila inercije mase tekućine:  $\int_V \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} dV$

– volumenska sila:  $\int_V \rho R_i dV$

– površinska sila:  $\int_A dP_i = \int_A p_{in} dA = \int_A p_i n_i dA$

Prema drugom Newton-ovom zakonu, sila inercije je posljedica svih drugih sila, dakle:

$$\int_V \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} dV = \int_V \rho R_i dV + \int_A p_{in} dA \quad (3.12)$$

Jednadžba (3.12) predstavlja opću dinamičku jednadžbu u integralnom obliku.

Primjenom GGO teorema, (3.12) se može prebaciti u diferencijalni oblik:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} - \rho R_i - \nabla(p_{in}) = 0 \quad (3.13)$$

### 3.2.3 Navier-Stokes-ove jednadžbe

Komponente divergencije tenzora naprezanja  $p_{in}$ , rastavljajući ga na sferni i devijatorski dio, su (po komponentama):

$$\begin{aligned} \text{os x: } & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \text{os y: } & -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \text{os z: } & -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.14)$$

pa opća dinamička jednadžba, raspisana po komponentama, glasi:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \rho R_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \rho R_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \rho R_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Lako je uočiti da posljednja tri člana u jednadžbama (3.15) predstavljaju doprinos ravnoteži sila na elementarnom volumenu koji nastaje zbog viskoznosti tekućine. Uvođenjem odnosa između komponenti naprezanja i deformacija [J.3], dobiva se jednadžba koja izražava veličinu sila viskoznosti na jedinicu volumena. Za smjer x, ta jednadžba glasi:

$$P_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \nabla \nabla \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] \quad (3.16)$$

a analogno se može raspisati i za druga dva smjera.

Zamjenom triju posljednjih članova jednadžbi (3.15) s razvijenim oblikom (3.16), dobivaju se jednadžbe dinamičke ravnoteže realne stišljive tekućine, koje nose naziv prema autorima: Navier-Stokes-ove jednadžbe.

U Navier-Stokes-ovim jednadžbama je pet nepoznanica: tri komponente brzine, tlak i gustoća tekućine. Za rješenje problema potrebne su još dvije jednadžbe. Primjenom jednadžbe kontinuiteta može se sustav nepoznanica smanjiti za jednu (npr. tlak), dok promjena gustoće tekućine ostaje nepoznata. Da bi se zadatak teorijski mogao riješiti, potrebno je uvesti tzv. *Jednadžbu stanja tekućine* koja daje ovisnost između promjene gustoće tekućine u ovisnosti o tlaku i apsolutnoj temperaturi.

Sve dok strujanje tekućine ne remeti bilans toplinske energije sustava, rješenje problema moguće je preko ovih pet jednadžbi. Ukoliko to nije slučaj, potrebno je uvesti i utjecaj toplinske energije preko zakona termodinamike.

U pojedinim slučajevima strujanja moguće je uvesti pojednostavljena i dobiti jednostavnije modele, koji će također dobro opisivati problem. Npr. ukoliko su temperaturne promjene male, tako da nije nužno u bilans energije uključivati toplinsku, a također je i  $\mu = \text{const}$ , Navier-Stokes-ove jednadžbe se mogu napisati u znatno jednostavnijem obliku (vektorska formulacija) [J.3]:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \rho R_i - \nabla p + \mu \nabla^2 v_i \quad (3.17)$$

pri čemu konstanta proporcionalnosti  $\mu$  ima svoje fizikalno značenje i naziva se *Dinamički koeficijent viskoznosti*. Dinamički koeficijent viskoznosti ovisi o temperaturi i npr. za vodu na 20° C iznosi  $1.002 \cdot 10^{-3}$  kg/ms.

Za posebni slučaj tekućine u mirovanju, brzina i inercijalne sile su jednake nuli, a volumenske sile su posljedica gravitacijskog djelovanja. Površinske sile predstavljaju tada tlak tekućine u mirovanju, tj. hidrostatički tlak.

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \rho R_i + \nabla(p_i) = 0 \quad ; \quad R_i = G_i = \rho g_i \quad ; \quad g_i = g_z \quad (3.18)$$

Koristeći diferencijalnu jednadžbu kontinuiteta toka tekućine (3.10), možemo napisati slijedeću jednadžbu:

$$\dot{\rho}_f + \nabla(\rho \dot{u}) = 0 \quad (3.19)$$

a kako je ranije pokazano da vrijedi:

$$p = -E \varepsilon_v \quad ; \quad \varepsilon_v = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla u = -\frac{p}{E} \quad ; \quad c^2 = E/\rho \quad (3.20)$$

slijedi:

$$\varepsilon_v = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla u = -\frac{p}{\rho c^2} \quad (3.21)$$

### 3.3 LINEARNI MODEL TEKUĆINE

#### 3.3.1 Općenito

Kako je ranije naglašeno, linearni model tekućine pretpostavlja da se u tekućini mogu pojaviti neograničeni negativni tlakovi (“vlačno” naprezanje). U svim slučajevima kad je ukupni rezultatni tlak u tekućini (atmosferski + hidrostatički + hidrodinamički) veći od nule, odnosno veći od tlaka isparivanja, ovakav model tekućine zadovoljava.

Za opis linearnog modela tekućine može se koristiti više formulacija od kojih su ovdje opisane dvije: Formulacija tlakova i Formulacija gradijenta pomaka.

#### 3.3.2 Formulacija tlakova

##### 3.3.2.1 Osnovne jednadžbe

Deriviranjem izraza (3.21) po vremenu, dobiva se:

$$\dot{\epsilon}_v = \nabla \dot{u} = -\frac{\dot{p}}{\rho c^2} \quad (3.22)$$

$$\ddot{\epsilon}_v = \nabla \ddot{u} = -\frac{\ddot{p}}{\rho c^2} \quad (3.23)$$

Ako se primijeni Laplace-ov operator ( $\nabla$ ) na jednadžbu (3.17) i zanemari sila gravitacije ( $R_i = 0$ ) koja uzrokuje samo hidrostatički tlak:

$$\rho \nabla \ddot{u}_i = \nabla^2 p + \mu \nabla^2 (\nabla \dot{u}_i) \quad (3.24)$$

te ako uvrstimo izraze (3.21), (3.22) i (3.23) u (3.24), dobiva se jednadžba ponašanja viskozne tekućine, koja predstavlja poznatu valnu jednadžbu:

$$\nabla^2 p + \xi \nabla^2 \dot{p} = \ddot{p}/c^2 \quad (3.25)$$

gdje je:

$$\xi = \mu/\rho c^2 \quad (3.26)$$

U gornjim izrazima  $p$  je hidrodinamički tlak (bez hidrostatskog),  $c$  je brzina zvuka u tekućini,  $\rho$  je gustoća tekućine i  $\mu$  dinamička viskoznost tekućine.

Ako se zanemari utjecaj viskoznosti, tj. ako se pretpostavi Newton-ovo tečenje, izraz (3.24) se svodi na Helmholtz-ovu jednadžbu:

$$\nabla^2 p = \ddot{p}/c^2 \quad (3.27)$$

Izraz (3.27) se može pisati, prema (3.21), i u sljedećem obliku:

$$\nabla^2 p = \ddot{p}/(E/\rho) \quad (3.28)$$

3.3.2.2 Rubni uvjeti

Za tekućinu trebaju biti zadovoljeni sljedeći rubni uvjeti:

- (i) Na slobodnom licu s površinskim valovima (ako se uzme u obzir samo utjecaj primarnih valova):

$$p = \rho g u_y \quad (3.29)$$

gdje  $u_y$  označava visinu vala, a  $g$  gravitacijsku konstantu.

Na slobodnom licu bez površinskih valova:

$$p = 0 \quad (3.30)$$

- (ii) Na pokretnim granicama, gdje tekućina ima ubrzanje  $\ddot{u}_n$  okomito na granicu, gradijent tlaka se može izraziti:

$$\partial p / \partial n = -\rho \ddot{u}_n \quad (3.31)$$

Na nepomičnim granicama:

$$\partial p / \partial n = 0 \quad (3.32)$$

- (iii) Uvjet spriječavanja refleksije valova na granici radijacije može se izraziti (Sommerfeld-ov uvjet [S.9]):

$$\dot{p} = -\frac{1}{c} (\partial p / \partial n) \quad (3.33)$$

gdje “ $n$ ” predstavlja smjer jedinične vanjske normale na granici radijacije.

3.3.2.3 Formulacija tehnikom konačnih elemenata

Kako je prethodno navedeno, prostorna diskretizacija sustava je izvršena tehnikom konačnih elemenata. Ako se područje tekućine i područje konstrukcije u dodiru s tekućinom diskretizira mrežom konačnih elemenata, koristeći standardnu Galjerkin-ovu metodu, nepoznati tlakovi tekućine i nepoznati pomaci konstrukcije mogu se iskazati s:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{N}_p \bar{\mathbf{p}} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (3.34)$$

gdje su  $\mathbf{N}_p$  i  $\mathbf{N}_u$  bazne funkcije za tlakove, tj. pomake konstrukcije na granici međudjelovanja.

Diferencijalna jednadžba dinamičke ravnoteže sustava (u matricnoj formulaciji) [Z.3] može se iskazati:

$$\mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}_f \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_f \mathbf{p} = \mathbf{f}_f - \rho \mathbf{Q}_t (\ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{d}}) \quad (3.35)$$

U prethodnoj jednadžbi,  $\mathbf{M}_f$  predstavlja matricu masa tekućine,  $\mathbf{C}_f$  matricu radijacijskog prigušenja tekućine i  $\mathbf{K}_f$  ‘matricu krutosti’ tekućine;  $\mathbf{p}$  je vektor nepoznatih čvornih tlakova,

$\mathbf{f}_f$  vektor čvornih sila,  $\mathbf{Q}_t$  matrica međudjelovanja tekućina-konstrukcija,  $\ddot{\mathbf{u}}$  matrica ubrzanja čvorova konstrukcije u odnosu na bazu i  $\ddot{\mathbf{d}}$  vektor ubrzanja podloge. U slučaju krute (nedeformabilne) podloge izraz (3.14) se reducira na:

$$\mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}_f \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_f \mathbf{p} = \mathbf{f}_f - \rho \mathbf{Q}_t \ddot{\mathbf{d}} \quad (3.36)$$

Formiranje matrica i vektora u izrazima (3.35) i (3.36), prema tehnici konačnih elemenata, definirano je sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_f)_{ij} &= \int_V \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{N}_{pi}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}_{pj}}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{N}_{pi}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}_{pj}}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{N}_{pi}}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{N}_{pj}}{\partial z} \right) \right] dV \\ (\mathbf{C}_f)_{ij} &= (1/c) \int_{\Omega_r} \mathbf{N}_{pi}^T \mathbf{N}_{pj} d\Omega \\ (\mathbf{M}_f)_{ij} &= (1/g) \int_{\Omega_{sl}} \mathbf{N}_{pi}^T \mathbf{N}_{pj} d\Omega + (1/c^2) \int_V \mathbf{N}_{pi}^T \mathbf{N}_{pj} dV \\ (\mathbf{Q}_t)_{ij} &= \int_{\Omega_i} \mathbf{N}_{ui}^T \bar{\mathbf{n}} \mathbf{N}_{pj} d\Omega \end{aligned} \quad (3.37)$$

U gornjim izrazima  $\mathbf{N}_p$  su bazne funkcije za tlakove tekućine, a  $\mathbf{N}_u$  bazne funkcije za pomake konstrukcije;  $V$  je volumen tekućine,  $\Omega_{sl}$  je granica tekućine sa slobodnim licem,  $\Omega_r$  je granica radijacije,  $\Omega_i$  je granica tekućine na spoju s konstrukcijom (granica međudjelovanja) i  $\bar{\mathbf{n}}$  je vektor jedinične vanjske normale na granici međudjelovanja. Sve matrice u jednadžbama (3.35) i (3.36), osim matrice  $\mathbf{Q}_t$ , su simetrične i pojasne. Broj članova različitih od nule u  $\mathbf{Q}_t$  ovisi o broju čvorova tekućine na spoju s konstrukcijom.

Za nestlačive tekućine, brzina širenja valova u tekućini iznosi  $c = \infty$ , pa se (3.35) svodi na:

$$\mathbf{K}_f \mathbf{p} = \mathbf{f}_f - \rho \mathbf{Q}_t (\ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{d}}) \quad (3.38)$$

iz čega je vidljivo da se rješenje (3.38) svodi na statičko rješenje u svakom vremenskom koraku. Kod toga je hidrodinamički tlak proporcionalan ubrzanju podloge.

Ako se promatra samo polje tekućine, tj. kad je  $\ddot{\mathbf{u}} = 0$ , jednadžba (3.38) se svodi na:

$$\mathbf{K}_f \mathbf{p} = \mathbf{f}_f - \rho \mathbf{Q}_t \ddot{\mathbf{d}} \quad (3.39)$$

### 3.3.3 Formulacija potencijala pomaka

#### 3.3.3.1 Osnovne jednadžbe

Vrlo čest pristup pri opisu polja tekućine je da se polje pomaka zamijeni poljem potencijala pomaka, koje je skalarna a ne vektorska veličina. Time se značajno smanjuje broj nepoznanica u čvoru.

Potencijal pomaka se definira kao:

$$\nabla\psi = -\rho \mathbf{u} \quad (3.40)$$

Ako promjena gustoće tekućine ( $\rho$ ) nije značajna, tada se koristeći (3.40) može reducirati Navier-Stokes-ove jednačbe (3.17). Uz uvjet da se zanemare viskoznost i gravitacijske sile, dobiva se:

$$\nabla\ddot{\psi} = \nabla p \quad (3.41)$$

Integracijom jednačbe (3.41) po prostoru, možemo dobiti:

$$\ddot{\psi} = p \quad (3.42)$$

Ako se primijeni Laplace-ov ( $\nabla$ ) operator na jednačbu (3.40), te u tako dobivenu jednačbu uvrsti (3.21) i (3.42), dobiva se:

$$\nabla^2\psi = \ddot{\psi}/c^2 \quad (3.43)$$

### 3.3.3.2 Rubni uvjeti

- (i) Na slobodnom licu s površinskim valovima (ako u obzir uzimamo samo utjecaj primarnih valova):

$$p = \rho g u_y = \ddot{\psi} = g \frac{\partial\psi}{\partial n} \quad (3.44)$$

Na slobodnom licu bez površinskih valova:

$$p = \ddot{\psi} = 0 \quad (3.45)$$

- (ii) Na pokretnim granicama, gdje tekućina ima ubrzanje  $\ddot{u}_n$  okomito na granicu

$$\partial\psi/\partial n = -\rho u_n \quad (3.46)$$

Na nepomičnim granicama:

$$\partial\psi/\partial n = 0 \quad (3.47)$$

- (iii) Uvjet sprječavanja refleksije valova na granici radijacije može se izraziti kao (Sommerfeld-ov uvjet [S.9]):

$$\partial\psi/\partial n = -\dot{\psi}/c \quad (3.48)$$

U svim gornjim izrazima “n” predstavlja smjer jedinične vanjske normale na granici radijacije.

### 3.3.3.3 Formulacija tehnikom konačnih elemenata

Na analogan način kao kod formulacije tlakova, koristeći standardnu Galjerkin-ovu metodu, nepoznate potencijale pomaka tekućine i nepoznate pomake konstrukcije može se iskazati (matrična formulacija) kao:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi} &= \mathbf{N}_\psi \bar{\boldsymbol{\psi}} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (3.49)$$

gdje su  $\mathbf{N}_\psi$  i  $\mathbf{N}_u$  bazne funkcije za potencijal pomaka i pomake konstrukcije na granici međudjelovanja.

Diferencijalna jednačba dinamičke ravnoteže sustava (u matricnoj formulaciji) [Z.3] sada se može analogno jednačbi (3.35), iskazati:

$$\mathbf{M}_f \ddot{\boldsymbol{\psi}} + \mathbf{C}_f \dot{\boldsymbol{\psi}} + \mathbf{K}_f \boldsymbol{\psi} = \mathbf{f}_f - \rho \mathbf{Q}_t (\mathbf{u} + \mathbf{d}) \quad (3.50)$$

U prethodnoj jednačbi,  $\mathbf{M}_f$  predstavlja matricu masa tekućine,  $\mathbf{C}_f$  matricu radijacijskog prigušenja tekućine i  $\mathbf{K}_f$  'matricu krutosti' tekućine;  $\boldsymbol{\psi}$  je vektor nepoznatih čvornih potencijala pomaka,  $\mathbf{f}_f$  vektor čvornih sila,  $\mathbf{Q}_t$  matrica međudjelovanja tekućina-konstrukcija,  $\mathbf{u}$  matrica pomaka čvorova konstrukcije u odnosu na bazu i  $\mathbf{d}$  vektor pomaka podloge. U slučaju krute (nedeformabilne) podloge, (3.50) se reducira na:

$$\mathbf{M}_f \ddot{\boldsymbol{\psi}} + \mathbf{C}_f \dot{\boldsymbol{\psi}} + \mathbf{K}_f \boldsymbol{\psi} = \mathbf{f}_f - \rho \mathbf{Q}_t \mathbf{d} \quad (3.51)$$

Na osnovu formulacije potencijala pomaka, pokazat će se izvod matrica za primjenu tehnike konačnih elemenata. Osnovno polazište je osnovna jednačba (3.43), te jednačbe rubnih uvjeta (3.44), (3.46) i (3.48). Bazne funkcije su definirane prema (3.73) i (3.74).

Kako približno rješenje (3.49) treba zadovoljiti osnovnu jednačbu i rubne uvjete, može se napisati:

$$\int_V (\nabla^2 \psi - \ddot{\psi}/c^2) dV = - \int_{\Omega_{sl}} (\ddot{\psi}/g) d\Omega_{sl} + \int_{\Omega_r} (\dot{\psi}/c) d\Omega_r + \int_{\Omega_i} (\rho u_n) d\Omega_i \quad (3.52)$$

Ako se sortiraju istovjetni članovi, tada slijedi:

$$-\frac{1}{c^2} \int_V \ddot{\psi} dV + \frac{1}{g} \int_{\Omega_{sl}} \ddot{\psi} d\Omega_{sl} - \frac{1}{c} \int_{\Omega_r} \dot{\psi} d\Omega_r + \int_V \nabla^2 \psi dV + \int_{\Omega_i} (\rho u_n) d\Omega_i = 0 \quad (3.53)$$

Promatrajući jednačbu (3.53) u svjetlu tehnike konačnih elemenata, uočljivo je da je ona istovjetna jednačbi (3.50), ako uvedemo:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_f)_{ij} &= \int_V \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{N}_{\psi i}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}_{\psi j}}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{N}_{\psi i}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}_{\psi j}}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{N}_{\psi i}}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{N}_{\psi j}}{\partial z} \right) \right] dV \\ (\mathbf{C}_f)_{ij} &= (1/c) \int_{\Omega_r} \mathbf{N}_{\psi i}^T \mathbf{N}_{\psi j} d\Omega \\ (\mathbf{M}_f)_{ij} &= (1/g) \int_{\Omega_{sl}} \mathbf{N}_{\psi i}^T \mathbf{N}_{\psi j} d\Omega + (1/c^2) \int_V \mathbf{N}_{\psi i}^T \mathbf{N}_{\psi j} dV \\ (\mathbf{Q}_t)_{ij} &= \int_{\Omega_i} \mathbf{N}_{\psi i}^T \bar{n} \mathbf{N}_{\psi j} d\Omega \end{aligned} \quad (3.54)$$

U gornjim izrazima  $\mathbf{N}_\psi$  su bazne funkcije za potencijal pomaka tekućine, a  $\mathbf{N}_u$  bazne funkcije za pomake konstrukcije;  $V$  je volumen tekućine,  $\Omega_{sl}$  je granica tekućine sa slobodnim licem,  $\Omega_r$  je granica radijacije,  $\Omega_i$  je granica tekućine na spoju s konstrukcijom



(granica međudjelovanja) i  $\bar{n}$  je vektor jedinične vanjske normale na granici međudjelovanja. Sve matrice u (3.52) i (3.51) kao i u (3.35) i (3.36), osim matrice  $Q_t$ , su simetrične i pojasne. Broj članova različitih od nule u  $Q_t$  ovisi o broju čvorova tekućine na spoju s konstrukcijom.

Uspoređujući jednadžbi (3.43) s (3.27), uočava se potpuna sličnost opisa problema. Tako je i formiranje matrica i vektora u (3.35) i (3.36) potpuno analogno s onima u (3.50) i (3.51).

### 3.4 NELINEARNI MODEL TEKUĆINE

#### 3.4.1 Općenito

U prethodnom poglavlju opisan je problem međudjelovanja s linearnim modelom tekućine koji dopušta neograničene negativne tlakove (vlak) u tekućini, što u mnogim slučajevima može dati pogrešne rezultate. Naime, ukoliko ukupni apsolutni tlak u određenim zonama padne na vrijednost tlakova para tekućine, dolazi do nagle promjene gustoće tekućine i formiranja mjehurića pare. Ova fizikalna pojava poznata je pod nazivom kavitacija. Pojava kavitacije može u potpunosti promijeniti ponašanje sustava tekućina-konstrukcija. Iako je kavitacija najčešće opažena na spoju tekućine i konstrukcije, može se pojaviti i u unutrašnjosti tekućine.

Utjecaj kavitacije kod jednodimenzionalnog problema među prvima su proučavali Bleich i Sandler [B.15]. Newton [N.4], [N.5] i [N.6] je prvi cjelovito opisao ovaj problem i pomoću TKE modelirao utjecaj podvodne eksplozije. Clough [C.13] je eksperimentalno utvrdio pojavu kavitacije na modelu Koyna brane. Kasniji numerički modeli Chwang-a [C.15], te Clough-a i Chwang-a [C.14], uz pretpostavku nestlačive tekućine, potvrdili su pojavu kavitacije (odvajanje vode od brane).

U ovom radu izložen je jednostavni model tekućine koji simulira pojavu kavitacije. Tekućina je tretirana kao stlačiva i bez viskoznosti, a gibanje je opisano u Euler-ovom koordinatnom sustavu. Korištena je formulacija potencijala pomaka [Z.3].

##### 3.4.1.1 Uvjet pojave kavitacije i pretpostavke

Kako je već navedeno, kavitacija se javlja uvijek kada je ukupni apsolutni tlak u nekoj točki manji od tlaka para tekućine, tj. kada je:

$$p_{\text{abs}} = p + p_h + p_a \leq p_v \quad (3.55)$$

tj.:

$$p \leq p_v - (p_h + p_a) \quad (3.56)$$

pri čemu su oznake objašnjene u točki 3.1.2.

U usvojenom modelu tekućine koji simulira pojavu kavitacije, uvedene su sljedeće pretpostavke:

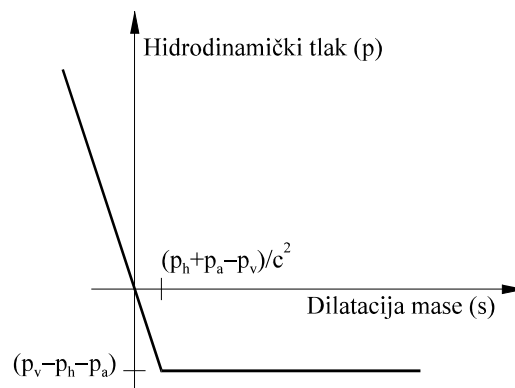
- kavitacija se javlja kada ukupni apsolutni tlak padne na vrijednost tlaka para tekućine,
- prijelaz iz normalnog stanja u stanje kavitacije javlja se trenutno,
- nakon pojave kavitacije, ukupni tlak u tekućini je konstantan i jednak je tlaku para tekućine,
- kavitacija isčezava trenutno kada ukupni tlak prijeđe vrijednost tlaka para tekućine,
- gubitak energije usljed formiranja mjehurića pare je mali i može se zanemariti.

#### 3.4.1.2 Model tekućine

Ponašanje tekućine za vrijeme dinamičke pobude je u direktnoj funkciji dilatacije mase (“mass dilatation”),  $s$ , definirane izrazom:

$$s = \nabla^T(\rho_f \mathbf{u}_f) = \text{Div}(\rho_f \mathbf{u}_f) \quad (3.57)$$

gdje  $\mathbf{u}_f$  predstavlja pomak tekućine u odnosu na početno statičko stanje. Korištena je bilinearna veza između hidrodinamičkog tlaka i dilatacije mase, prikazana na Crtežu 3.3.



**Crtež 3.3** - Veza hidrodinamičkog tlaka i dilatacije mase

Do pojave kavitacije, tj. sve dok je:

$$p + p_h + p_a - p_v \geq 0 \quad (3.58)$$

veza hidrodinamičkog tlaka i dilatacije mase definirana je s:

$$p = -c^2 s \quad (3.59)$$

Budući da je:

$$c^2 = E_f / \rho_f \quad (3.60)$$

dobiva se alternativni izraz za tlak u stanju bez kavitacije:

$$p = -(E_f / \rho_f) s \quad (3.61)$$

Ako se (3.59) uvrsti u (3.58), slijedi:

$$-c^2 s + p_h + p_a - p_v \geq 0 \quad (3.62)$$

odnosno:

$$s < (p_h + p_a - p_v) / c^2 \quad (3.63)$$

Jednadžba (3.63) definira donju granicu dilatacije mase  $s$  iznad koje nastaje kavitacija i izrazi (3.56) i (3.58) više ne vrijede. U području kavitacije, tj. kada je:

$$s \geq (p_h + p_a - p_v) / c^2 \quad (3.64)$$

pretpostavlja se da je hidrodinamički tlak konstantan i iznosi:

$$p = -(p_h + p_a - p_v) \quad (3.65)$$

Ovako definirana bilinearna veza hidrodinamički tlak-dilatacija mase može se napisati u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} p &= -\alpha s \\ \alpha &= c^2 & \text{za } s < (p_h + p_a - p_v) / c^2 \\ \alpha &= (p_h + p_a - p_v) / s & \text{za } s \geq (p_h + p_a - p_v) / c^2 \end{aligned} \quad (3.66)$$

### 3.4.1.3 Formulacija problema

Za uključenje kavitacije u rješenje problema međudjelovanja tekućina-konstrukcija, korištena je formulacija potencijala pomaka za tekućinu [Z.3]. Potencijal pomaka  $\Psi$  definiran je izrazom (3.40):

$$\rho_f \mathbf{u}_f = -\nabla \Psi \quad \text{ili} \quad \Psi_{,i} = \rho_f u_{f,i} \quad (3.67)$$

pa se pomoću (3.57) dobiva:

$$s = -\nabla^T \nabla \Psi = -\nabla^2 \Psi \quad (3.68)$$

Pretpostavljajući neviskozno ponašanje tekućine, može se pokazati da je [Z.3]:

$$\ddot{\Psi} = p \quad (3.69)$$

Uzimajući u obzir (3.66) i (3.68), može se napisati:

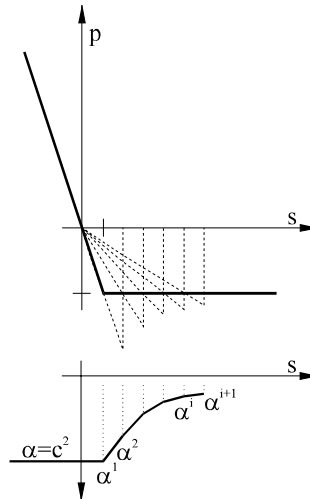
$$s = -p / \alpha = -\ddot{\Psi} / \alpha \quad ; \quad \alpha = \alpha(s) \quad (3.70)$$

a uzimajući u obzir (3.67) i (3.69) dobija se:

$$\nabla^2 \Psi = \ddot{\Psi} / \alpha \quad (3.71)$$

U slučaju bez kavitacije, parametar  $\alpha$  je konstantan ( $\alpha=c^2$ ) i jednačba (3.71) je istovjetna jednačbi (3.63). Rubni uvjeti su istovjetni kao i za linearni model tekućine, izrazi (3.44)-(3.48).

U slučaju kavitacije  $\alpha = \alpha(s)$ , pa je potreban iteracijski postupak prikazan na Crtežu 3.4.



Crtež 3.4 - Veza  $\alpha - s$

### 3.5 SIMULACIJA PRIGUŠENJA TEKUĆINE

U slučaju simulacije viskozne tekućine, utjecaj viskoznosti se može simulirati vrlo jednostavno prema (3.25). Promatrano u svjetlu tehnike konačnih elemenata, matrica prigušenja usljed viskoznosti tekućine može se iskazati:

$$(\mathbf{C}_f)_{ij} = \frac{\mu}{\rho c^2} (\mathbf{K}_f)_{ij} = \frac{\mu}{\rho c^2} \int_V \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{N}_{\psi i}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}_{\psi j}}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{N}_{\psi i}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}_{\psi j}}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{N}_{\psi i}}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{N}_{\psi j}}{\partial z} \right) \right] dV \quad (3.72)$$

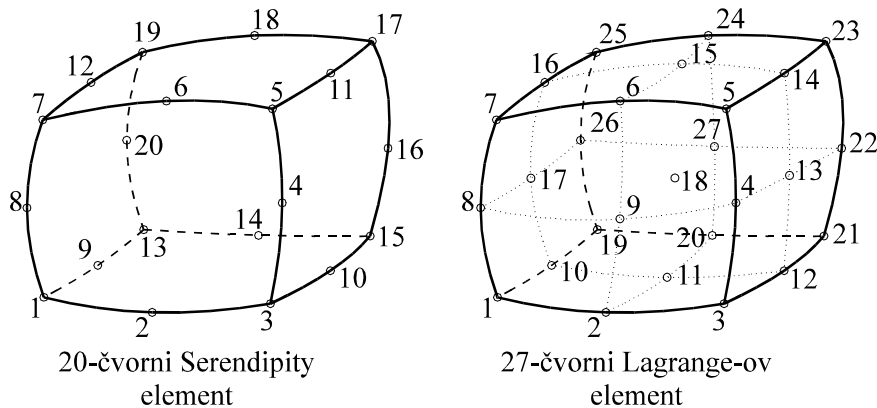
pri čemu je:  $c$  brzina zvuka u tekućini,  $\rho$  gustoća tekućine, a  $\mu$  dinamička viskoznost tekućine.

Ovakva simulacija viskoznosti je vrlo poopćena simulacija i može poslužiti (u numeričkom postupku) samo u svrhu brže konvergencije postupka, tj. umirivanja tekućine pri dinamičkoj pobudi.

### 3.6 KONAČNI ELEMENTI ZA TEKUĆINU

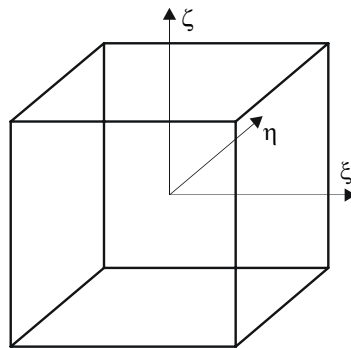
U ovom radu korišteni su prostorni (“brick”) elementi za opisivanje geometrije tekućine. Pri tome su upotrebljene dvije vrste elemenata: 20-čvorni Serendipity i 27-čvorni Lagrange-ovi elementi. Ovi elementi su kompatibilni s 8-čvornim Serendipity i 9-čvornim Lagrange-ovim elementima koji su korišteni za opis konstrukcije (ljuske).

Korišteni elementi s oznakama čvorova prikazani su na Crtežu 3.5.



Crtež 3.5 - Konačni elementi za tekućinu

Nakon preslikavanja u prirodne koordinate konačni elementi poprimaju oblik kocke dimenzija  $2 \times 2 \times 2$ .



Crtež 3.6 - Konačni element za tekućinu u prirodnom koordinatnom sustavu

Bazne funkcije definirane su sljedećim izrazima:

a) 20-čvorni Serendipity element:

$$\begin{aligned}
 N_i &= \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta)(\xi_i \xi + \eta_i \eta + \zeta_i \zeta - 2) \quad ; \quad \text{za } i = 1, 3, 5, 7, 13, 15, 17, 19 \\
 N_i &= \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta) \quad ; \quad \text{za } i = 2, 6, 14, 18 \\
 N_i &= \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 + \xi_i \xi)(1 + \zeta_i \zeta) \quad ; \quad \text{za } i = 9, 10, 11, 12 \\
 N_i &= \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad ; \quad \text{za } i = 4, 8, 16, 20
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

b) 27-čvorni Lagrange-ov element:

$$\begin{aligned}
 N_i &= \frac{1}{8} \xi \eta \zeta (\xi + \xi_i) (\eta + \eta_i) (\zeta + \zeta_i) \quad ; \quad \text{za } i = 1, 3, 5, 7, 19, 21, 23, 25 \\
 N_i &= \frac{1}{4} \eta \zeta (1 - \xi^2) (\eta + \eta_i) (\zeta + \zeta_i) \quad ; \quad \text{za } i = 2, 6, 20, 24 \\
 N_i &= \frac{1}{4} \xi \zeta (\xi + \xi_i) (1 - \eta^2) (\zeta + \zeta_i) \quad ; \quad \text{za } i = 10, 12, 14, 16 \\
 N_i &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi + \xi_i) (\eta + \eta_i) (1 - \zeta^2) \quad ; \quad \text{za } i = 4, 8, 22, 26 \\
 N_i &= \frac{1}{2} \xi (\xi + \xi_i) (1 - \eta^2) (1 - \zeta^2) \quad ; \quad \text{za } i = 13, 17 \\
 N_i &= \frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2) (\eta + \eta_i) (1 - \zeta^2) \quad ; \quad \text{za } i = 9, 27 \\
 N_i &= \frac{1}{2} \zeta (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) (\zeta + \zeta_i) \quad ; \quad \text{za } i = 11, 15 \\
 N_i &= (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) (1 - \zeta^2) \quad ; \quad \text{za } i = 18
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

### 3.7 PRIMJERI

U analizi i proračunu brana, kao i ostalih konstrukcija koje su u direktnom doticaju s tekućinom, veoma je bitno odrediti hidrodinamičke tlakove tekućine na branu. Stoga će se, za ilustraciju mogućnosti razvijenog računalnog programa na temelju prikazanog postupka rješenja, istražiti problem rezervoara izloženog ekscitaciji podloge. U svim primjerima je pretpostavljeno da je konstrukcija neizmjerljivo kruta, a problem interakcije deformabilne konstrukcije prikazan je u poglavlju 4.

Uz pretpostavku nestlačivosti vode, Westergaard je prvi izveo izraz za određivanje hidrodinamičkih tlakova na vertikalno lice nedeformabilne brane kad je rezervoar izložen poprečnoj horizontalnoj harmonijskoj ekscitaciji podloge [W.3]. U tom je slučaju utjecaj nestlačive vode ekvivalentan utjecaju dodatne mase vode na branu. Kod toga je raspodjela tlakova/dodatnih masa po visini brane parabolična. Slične rezultate kasnije je dobio Von Karman koristeći princip ravnoteže momenata. Koristeći princip električne analogije, Zangar [Z.1, Z.2] je eksperimentalno utvrdio raspodjelu hidrodinamičkih tlakova nestlačive vode na nagnute pregrade. Chwang i Housner su ovaj problem riješili analitički, koristeći Von Karman-ov pristup [C.18]. Isti problem Chwang je riješio egzaktno, koristeći teoriju dvodimenzionalnog potencijalnog tečenja [C.18]. Svi gore navedeni rezultati odnosili su se na slučaj nestlačive vode i horizontalne ekscitacije podloge.

Koristeći TKE, Radnić [R.1, R.2] je istražio problem rezervoara za slučaj stlačive i nestlačive tekućine, horizontalne i vertikalne ekscitacije podloge, te proizvoljnog nagiba pregrade i dna rezervoara. Detaljno je istražen utjecaj stlačivosti tekućine, nagiba pregrade i dna rezervoara, te smjera i tipa ekscitacije na veličinu i raspored hidrodinamičkih tlakova na nedeformabilne pregrade. Neki rezultati prezentirani su u [R.6, R.7, R.8].

Svi ovi rezultati odnose se na dvodimenzionalne probleme.

#### 3.7.1 *Primjer 1*

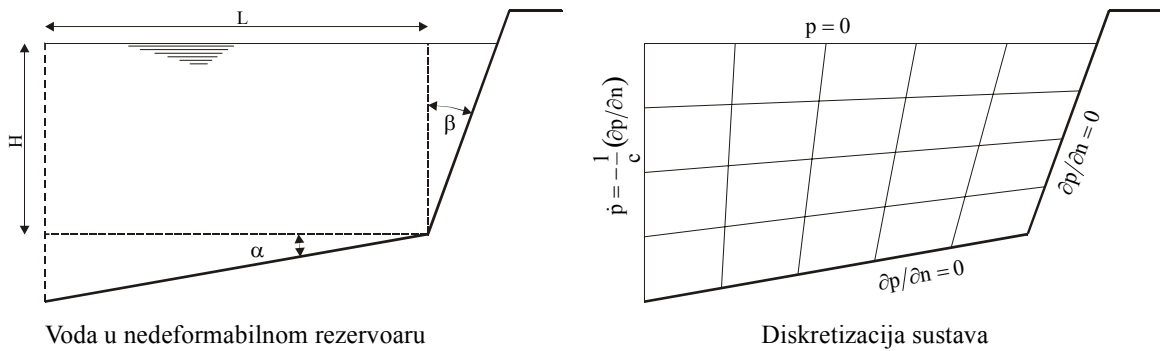
U nastavku, prvo je analiziran jedan jednostavan rezervoar koji je modeliran 3D elementima, ali predstavlja jednostavnu nadgradnju 2D modela. Promatrani sustav i njegova diskretizacija prikazani su na Crtežima 3.P1 i 3.P2. Beskonačno pružanje rezervoara modelirano je kao konačno uvođenjem granice radijacije. Zbog jednostavnosti analize i lakše usporedbe rezultata usvojeno je:  $H=1.0$ ,  $L=2.0$ ,  $W=4.0$  i  $\rho=1.0$ . Zanemaren je utjecaj površinskih valova. Uvedeni su slijedeći koeficijenti:

$$k_p = \frac{p}{\rho d_0 H} \quad ; \quad k_s = \frac{S_d}{\rho d_0 H^2}$$

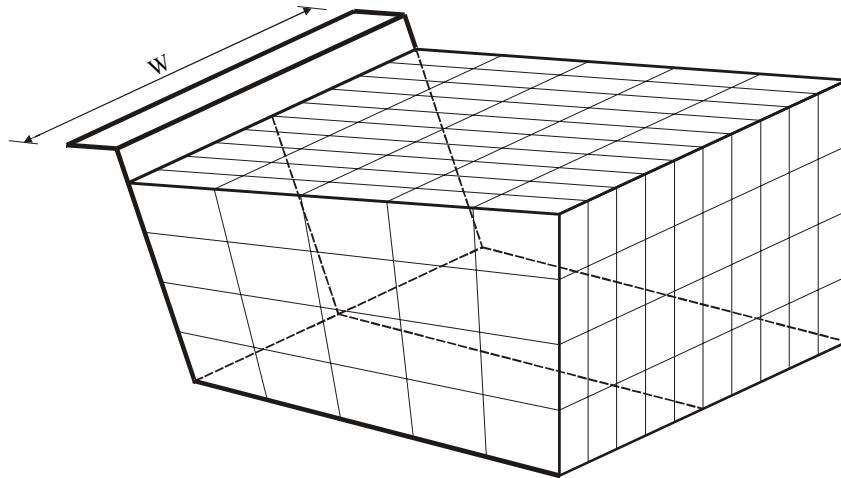
U gornjim izrazima  $p$  označava hidrodinamički tlak, a  $S_d$  je rezultantna hidrodinamička sila na pregradu.  $k_p$  i  $k_s$  su odgovarajući koeficijenti za proračun prethodno navedenih veličina.

Za horizontalno dno rezervoara i vertikalnu pregradu, osnovni period sustava je dan s:  $T_f = 4H/c$ , što za promatrani sustav daje  $T_f = 4$  s.

Svi rezultati su dobiveni korištenjem dijagonalne matrice masa i implicitne vremenske integracije s  $\Delta t = 0.04$  s (1/100 osnovnog perioda).



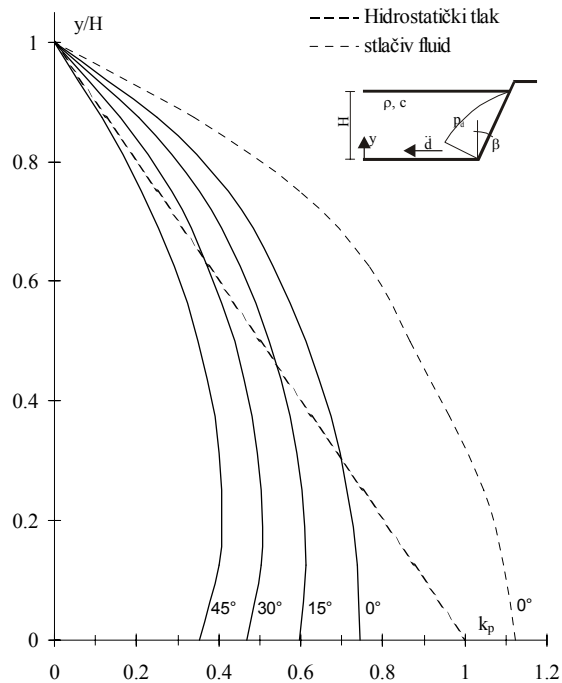
**Crtež 3.P1** – Diskretizacija osnovnog sustava



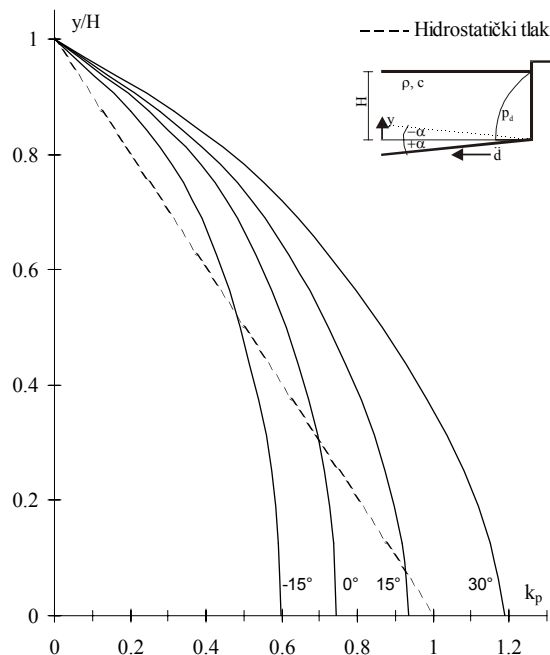
**Crtež 3.P2** – Aksonometrijski prikaz mreže konačnih elemenata



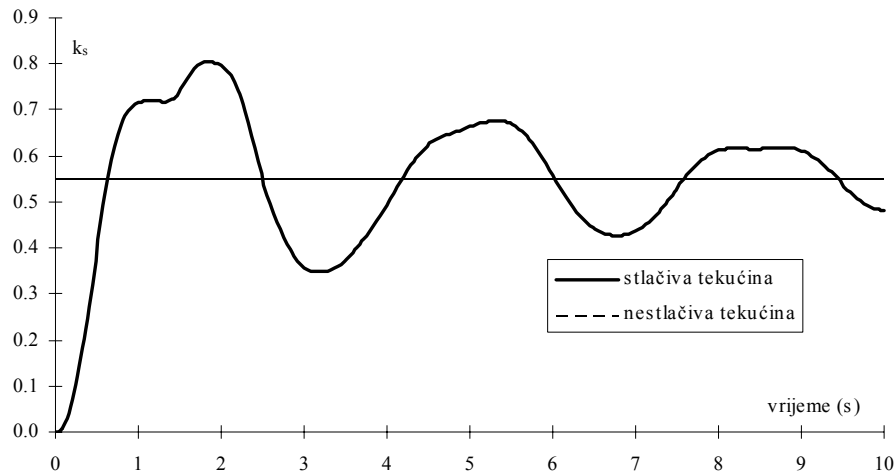
Crtež 3.P3 prikazuje raspodjelu hidrodinamičkih tlakova po visini pregrade za jednoliko ubrzanje podloge. Rezultati se gotovo podudaraju s analitičkim kao i s rezultatima na 2D modelu, što je bilo i za očekivati. Za koeficijent hidrodinamičkog tlaka na dnu brane dobivena je vrijednost  $k_p=0.7453$ , dok je analitička vrijednost  $k_p=0.7425$ .



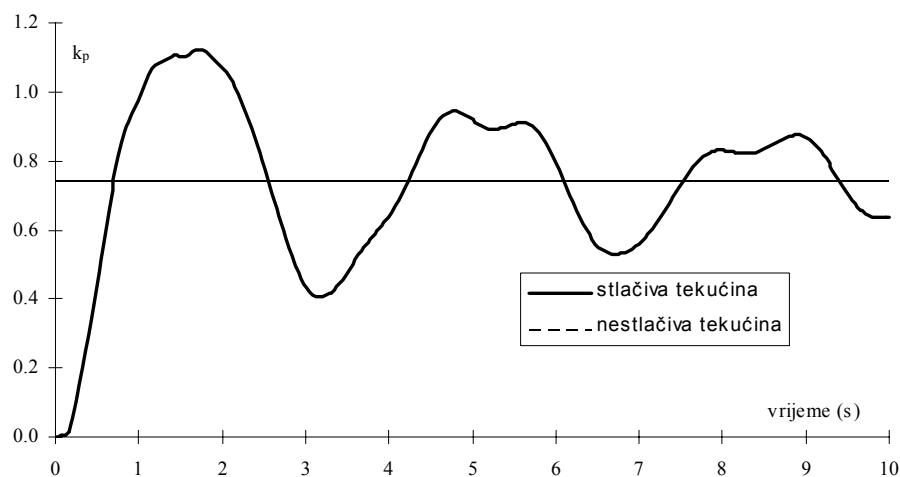
Crtež 3.P3 – Hidrodinamički tlakovi na krutu pregradu u ovisnosti o nagibu pregrade



Crtež 3.P4 – Hidrodinamički tlakovi na krutu pregradu u ovisnosti o nagibu podloge



**Crtež 3.P5** – Utjecaj stlačivosti tekućine na veličinu hidrodinamičkog tlaka u dnu pregrade



**Crtež 3.P6** – Utjecaj stlačivosti tekućine na veličinu hidrodinamičke sile na pregradu

Crtež 3.P4 prikazuje raspodjelu hidrodinamičkih tlakova po visini pregrade za jednoliko ubrzanje podloge u ovisnosti o kutu nagiba podloge. Rezultati se također podudaraju s analitičkim i s rezultatima na 2D modelu.

Na Crtežu 3.P5 prikazan je utjecaj stlačivosti tekućine na veličinu hidrodinamičkog tlaka u dnu pregrade, a na Crtežu 3.P6 na veličinu hidrodinamičke sile na pregradu. Vidljivo je da rješenje za stlačivu tekućinu oscilira oko rješenja za nestlačivu tekućinu, što se također podudara s analitičkim i s rezultatima na 2D modelu.

### 3.7.2 Primjer 2

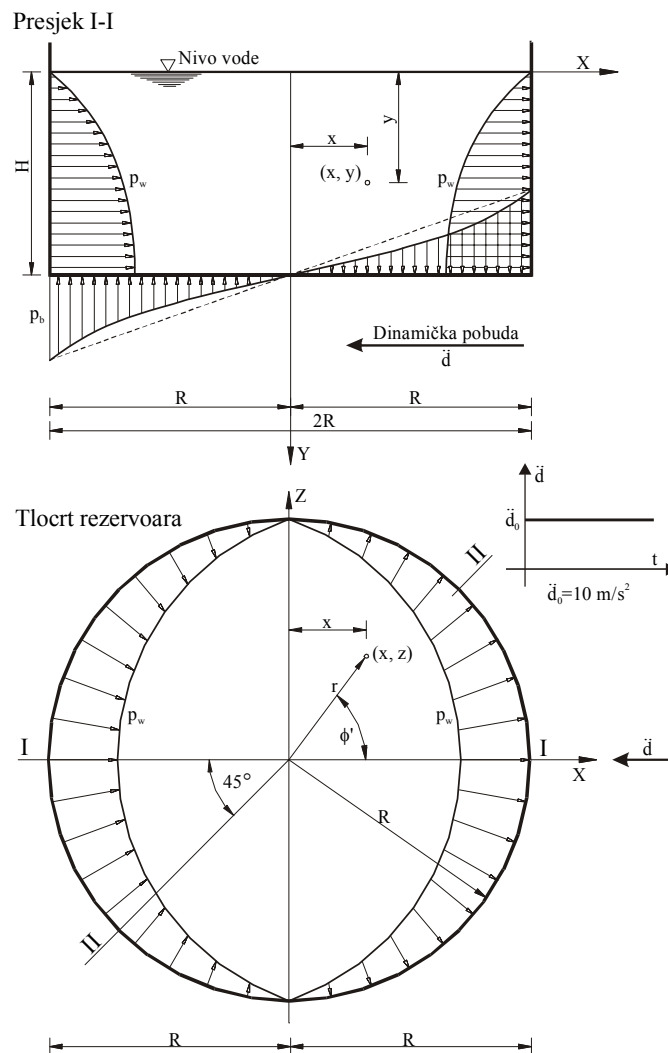
U Primjeru 2 analizirano je ponašanje tekućine u kružnom rezervoaru na dinamičku pobudu. Ovakav problem nije moguće riješiti 2D modelom.

Analitičko rješenje prikazanog problema za jednoliko horizontalno ubrzanje podloge dano je izrazom [M.12, N.2]:

$$p_w = \rho_w \cdot \ddot{d} \cdot h \cdot \left[ \sqrt{3} \cdot \cos \phi' \cdot \left( \frac{y}{h} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right) \cdot \text{Th} \left( \sqrt{3} \cdot \frac{R}{h} \right) \right]$$

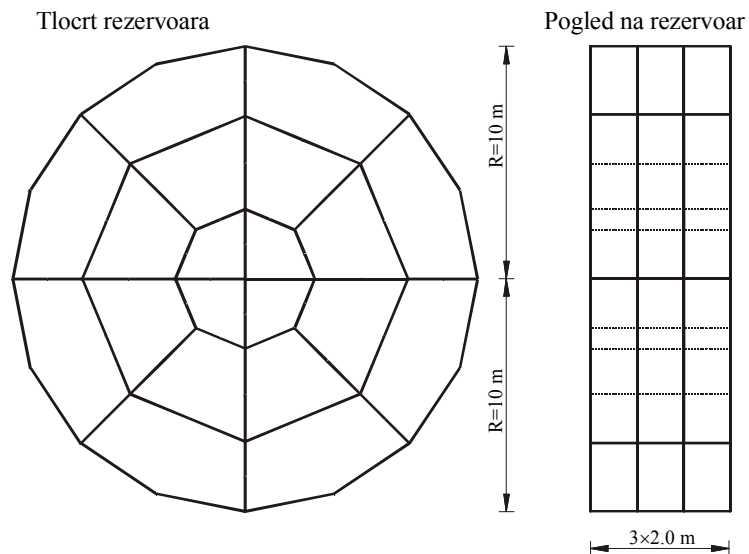
$$p_b = \rho_w \cdot \ddot{d} \cdot h \cdot \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \phi' \cdot \frac{\left( \text{Sh} \left( \sqrt{3} \cdot \frac{r}{h} \right) \right)}{\text{Ch} \left( \sqrt{3} \cdot \frac{R}{h} \right)} \right] ; \quad \left[ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \phi' \leq 2\pi \\ y = h \end{array} \right]$$

pri čemu je značenje pojedinih veličina vidljivo s Crteža 3.P7.

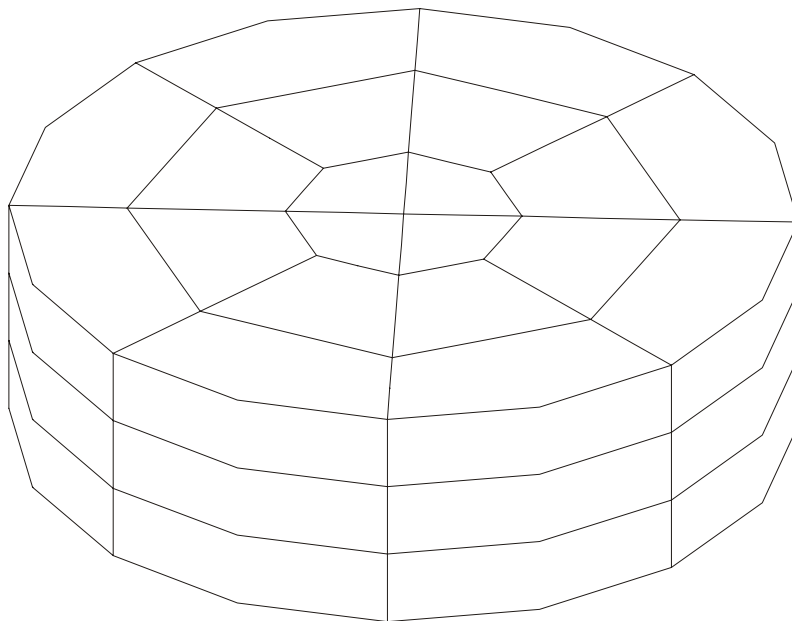


Crtež 3.P7 – Kružni rezervoar

Promatrani sustav i njegova diskretizacija prikazani su na Crtežima 3.P8 i 3.P9. Usvojene geometrijske veličine su sljedeće:  $H=6.0$ ,  $R=10.0$  i  $\rho=1.0 \text{ t/m}^3$ .



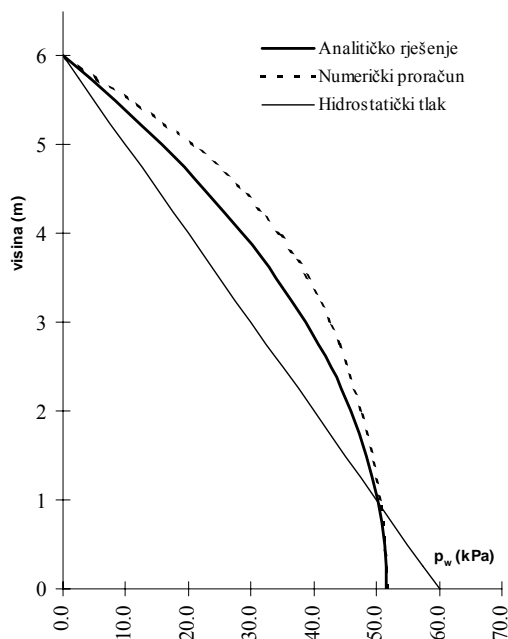
**Crtež 3.P8** – Diskretizacija sustava



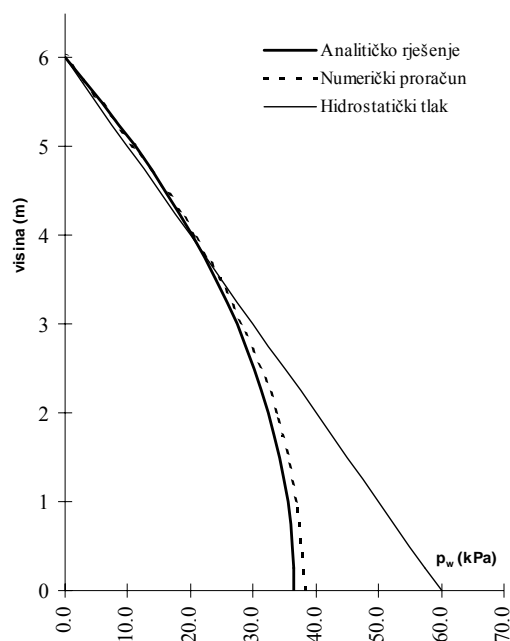
**Crtež 3.P9** – Aksonometrijski prikaz mreže konačnih elemenata

Prikazani sustav opterećen je jednolikim ubrzanjem podloge,  $\ddot{d}=10.0 \text{ m/s}^2$ , neizmjereno dugog trajanja. Rezultati su prikazani u nastavku.

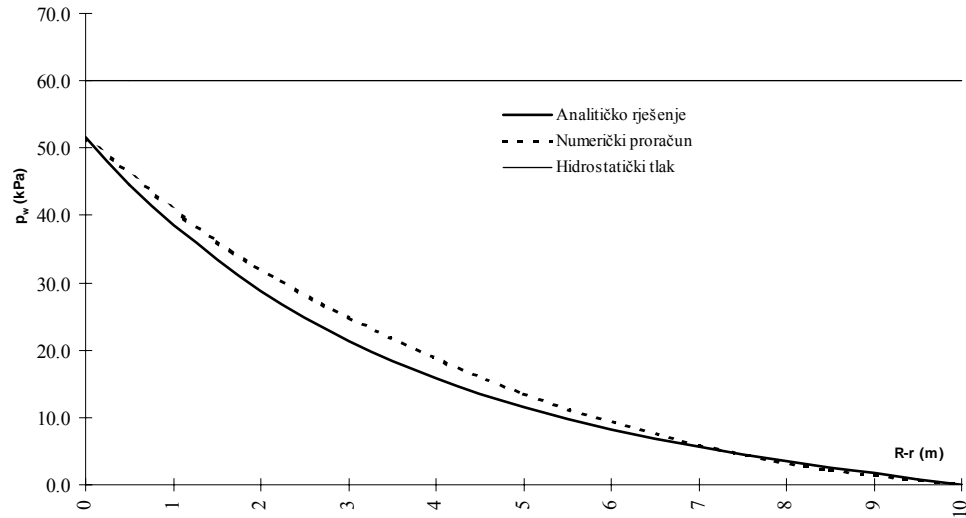
Na Crtežima 3.P10 i 3.P11 prikazani su dijagrami hidrodinamičkog tlaka na vertikalnu stjenku rezervoara u presjecima I-I ( $\phi'=0^\circ$ ) i II-II ( $\phi'=45^\circ$ ), a na Crtežu 3.P12 dijagram hidrodinamičkog tlaka na dno rezervoara u presjeku I-I. Na istim dijagramima prikazani su rezultati dobiveni analitičkim izrazom i numeričkim postupkom. Primjetno je da se numerički rezultati vrlo dobro slažu s analitičkim izrazima.



**Crtež 3.P10** – Hidrodinamički tlak na vertikalnu stjenku rezervoara u presjeku I-I



**Crtež 3.P11** – Hidrodinamički tlak na vertikalnu stjenku rezervoara u presjeku II-II



**Crtež 3.P12** – Hidrodinamički tlak na dno rezervoara u presjeku I-I

Sve numeričke simulacije (u oba primjera) izvršene su s 20-čvornim i 27-čvornim elementima. Razlika rezultata je oko 5 ‰, što predstavlja zanemarivu vrijednost, te se može zaključiti da oba konačna elementa za tekućinu daju zadovoljavajuće rezultate i mogu se upotrijebiti u simulaciji interakcije tekućine i konstrukcije.

**4. NUMERIČKA  
SIMULACIJA  
MEĐUDJELOVANJA  
TEKUĆINE I  
KONSTRUKCIJE**

## 4.1 UVOD

Konstrukcije koje su vezane s tekućinom (primjerice brane, rezervoari, vodotornjevi, obalne i van obalne konstrukcije, cjevovodi itd.) mogu se često susresti u praksi. Kod ovakvih problema, u uvjetima dinamičkog opterećenja ponašanje pojedinačnih polja ne može se analizirati neovisno bez uključivanja interakcijskih sila. Dakle, realistični modeli proračuna trebaju simulirati međudjelovanje različitih medija. Simulacija međudjelovanja tekućine i konstrukcije je vrlo složena, jer uključuje sve aspekte mehanike tekućine (fluida) i mehanike krutih tijela, te još uvijek predstavlja područje intenzivnog istraživanja.

Problemi međudjelovanja tekućine i konstrukcije mogu se svrstati u tri odvojene grupe [Z.1], [P.6]:

- problemi dugog trajanja s ograničenim pomacima tekućine (npr. ponašanje off-shore konstrukcija pod djelovanjem valova ili seizmičkog opterećenja, ponašanje brana pod seizmičkim opterećenjem i sl.);
- problemi kratkog trajanja s ograničenim pomacima tekućine (npr. eksplozija u akumulaciji i sl.);
- problemi s velikim relativnim pomacima (npr. oscilacije visećih mostova pod djelovanjem vjetra i sl.).

U ovom radu su razmatrane prve dvije skupine problema.

Rješenje problema simulacije dinamičkog međudjelovanja tekućine i konstrukcije, kao što je već navedeno, izvršeno je s pomoću metode zasebnih rješenja. Naime, cjeloviti sustav tekućina-konstrukcija podijeljen je na pojedinačna polja, nakon čega se svako polje dalje rješava zasebno. Kod toga se u svakom iteracijskom koraku traženja rješenja računaju sile međudjelovanja. Ovakvim pristupom moguće je koristiti već razvijeni software za pojedinačna polja, pri čemu se dodatno računaju samo sile interakcije. Utjecaj nelinearnosti svakog polja razmatra se unutar istog iteracijskog koraka.

U svrhu provođenja vremenske integracije, svako se polje može dijeliti na eksplicitno i implicitno područje.

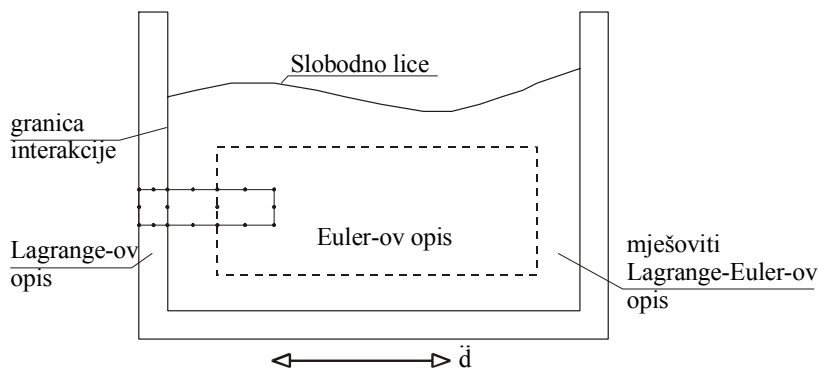


## 4.2 KINEMATIČKI OPIS GIBANJA SUSTAVA TEKUĆINA-KONSTRUKCIJA

Gibanje sustava tekućina-konstrukcija tradicionalno se opisuje u Euler-Lagrange-ovom koordinatnom sustavu. Za opis gibanja tekućine koristi se Euler-ov koordinatni sustav (u kojem mreža konačnih elemenata ostaje fiksna) i formulacija potencijala pomaka, dok se za gibanje konstrukcije koristi Lagrange-ov koordinatni sustav i formulacija pomaka.

U Lagrange-ovom pristupu mreža konačnih elemenata prati pomake čestica sustava. Gibanje tekućine u Lagrange-ovom koordinatnom sustavu prvi je primijenio Bathe [B.17], kod čega je i za tekućinu i za konstrukciju koristio formulaciju pomaka. Koristeći popravljene Lagrange-ove koordinate, tekućinu je tretirao kao elastični medij bez posmične krutosti. Ovakav pristup može biti primjeren kod problema s manjim pomacima, dok se kod sustava s većim pomacima javlja značajna distorzija konačnih elemenata, što može dovesti do numeričke nestabilnosti postupka. U takvim je slučajevima moguće prekinuti analizu nakon izvjesnog broja koraka, te korigirati mrežu konačnih elemenata i ponovno nastaviti proračun. Ovakav pristup produljuje i otežava analizu. Kako unosi pogrešku u energetska ravnotežu sustava rijetko se koristi.

Za probleme međudjelovanja tekućina-konstrukcija s većim pomacima tekućine, korisno je za tekućinu koristiti mješoviti ili tzv. proizvoljni Euler-Lagrange-ov pristup, koji se ponekad naziva i kvazi Euler-ov pristup [B.7]. U ovom je pristupu dozvoljeno gibanje mreže konačnih elemenata tekućine neovisno od gibanja čestica materijala. U rješavanju problema pomoću TKD, ovaj su pristup prvi upotrijebili Truilo [T.1] i Hirt [H.7], a kod rješavanja pomoću TKE Donea [D.4] i Belytschko [B.8]. Za ilustraciju, ovim pristupom se može efikasno riješiti problem gibanja tekućine u deformabilnoj posudi izloženoj jačoj ekscitaciji podloge (Crtež 4.1).



Crtež 4.1 - Primjer kinematičkog opisa mreže konačnih elemenata

U ovom je slučaju korisno za deformabilnu konstrukciju koristiti Lagrange-ov pristup, za središnji dio tekućine Euler-ov pristup, a za područje tekućine uz granicu međudjelovanja mješoviti Euler-Lagrange-ov pristup. Za modeliranje slobodnog lica koristi se model koji dopušta vertikalni pomak uz sprečavanje horizontalnog pomaka mreže. Ovim se sprječava oštra distorzija elemenata mreže na vrhu tekućine.

U ovom radu je korišten Euler-Lagrange-ov pristup. Naime, gibanje tekućine je opisano u Euler-ovom koordinatnom sustavu, pretpostavljajući male pomake. Gibanje konstrukcije je opisano u Lagrange-ovom koordinatnom sustavu s mogućnošću simuliranja promjene geometrije sustava. Dakle, kod konstrukcije je moguće simulirati geometrijsku nelinearnost, odnosno utjecaj tzv. velikih pomaka, dok je za tekućinu korišten tzv. linearni model geometrije. Uključenje velikih pomaka kod tekućine može dovesti do jače distorzije mreže konačnih elemenata polja tekućine, odnosno do numeričkih problema vezanih za elemente tekućine i problema vezanih za opis spoja tekućina-konstrukcija [B.2]. Zato je problematika tekućine ograničena na slučajeve s malim pomacima.

### 4.3 OPIS PROBLEMA MEĐUDJELOVANJA TEKUĆINA-KONSTRUKCIJA

Usvojeni model dinamičkog međudjelovanja tekućina-konstrukcija sadrži slijedeće pretpostavke:

- Pomaci tekućine su mali,
- Tekućina je stlačiva,
- Tekućina nije viskozna,
- Nema trenja na dodiru tekućine i konstrukcije,
- Zanemaruju se temperaturni utjecaji.

Ponašanje problema međudjelovanja tekućina-konstrukcija može se također opisati općom diferencijalnom jednačinom drugog reda u matricnom obliku:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f \quad (4.1)$$

koja definira dinamičku ravnotežu promatranog sustava. U izrazu (4.1)  $x$  predstavlja vektor pomaka,  $\dot{x}$  vektor brzina, a  $\ddot{x}$  vektor ubrzanja sustava;  $M$  predstavlja matricu masa,  $C$  matricu prigušenja, a  $K$  matricu krutosti, dok  $f$  predstavlja vektor vanjskog čvornog opterećenja. Jednačina (4.1) općenito uključuje materijalnu i geometrijsku nelinearnost obaju polja. Matrica masa  $M$  je konstantna, dok je matrica  $C$  funkcija brzine ( $\dot{x}$ ), a matrica  $K$  funkcija pomaka ( $x$ ). Dakle:

$$\begin{aligned} C &= C(\dot{x}) \\ K &= K(x) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Izraz (4.1) se može napisati i u obliku:

$$F_I + F_D + F_R = f \quad (4.3)$$

gdje  $F_I = M\ddot{x}$  predstavlja sile inercije,  $F_D = C\dot{x}$  sile prigušenja, a  $F_R = Kx$  unutrašnje sile otpora. Općenito, sve su sile promjenjive u vremenu.

Jednačina ravnoteže (4.1) može se napisati i u slijedećem raščlanjenom obliku:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

U izrazu (4.4) veličine:  $x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1$  predstavljaju vektore pomaka, brzina i ubrzanja,  $M_{11}, C_{11}, K_{11}$  matrice masa, prigušenja i krutosti, te  $f_1$  vektor vanjskih čvornih sila prvog polja. Veličine:  $x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2, M_{22}, C_{22}, K_{22}, f_2$  predstavljaju odgovarajuće vrijednosti drugog polja, dok su:  $M_{12}, C_{12}, K_{12}, M_{21}, C_{21}, K_{21}$  odgovarajuće matrice usljed međudjelovanja polja. Kako je ranije navedeno, ukoliko nema nekih pojednostavljenja,

gornje globalne matrice su nesimetrične, što otežava direktno rješavanje jednadžbe (4.4), i zahtijeva veliki kapacitet računala.

Koristeći formulaciju tlakova za tekućinu i formulaciju pomaka za konstrukciju, ponašanje sustava tekućina-konstrukcija može se analogno jednadžbi (4.4) opisati sustavom dviju diferencijalnih jednadžbi drugog reda:

$$\begin{aligned} M_s \ddot{u} + C_s \dot{u} + Ru &= f_s - M_s \ddot{d} + f_{cs} & (a) \\ M_f \ddot{p} + C_f \dot{p} + K_f p &= f_f + f_{cf} & (b) \end{aligned} \quad (4.5)$$

koje definiraju dinamičku ravnotežu sustava. Kod toga je:

$$\begin{aligned} f_{cs} &= Q p \\ f_{cf} &= -\rho_f Q^T (\dot{u} + \ddot{d}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

pri čemu  $f_{cs}$  predstavlja vektor sila međudjelovanja tekućine na konstrukciju, a  $f_{cf}$  vektor sila međudjelovanja konstrukcije na tekućinu, dok  $Q$  predstavlja matricu međudjelovanja.

Ako se (4.5) napiše u obliku (4.4), slijedi:

$$\begin{bmatrix} M_s & 0 \\ \rho_f Q^T & M_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_s & 0 \\ 0 & C_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s & -Q \\ 0 & K_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_s - M_s \ddot{d} \\ f_f - \rho_f Q^T \ddot{d} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Iz izraza (4.7) jasno je vidljivo da su globalne matrice masa i krutosti nesimetrične.

Ako se uzmu u obzir različiti slučajevi stlačivosti tekućine i deformabilnosti konstrukcije, mogu se pojaviti sljedeće mogućnosti:

#### Kruta konstrukcija i nestlačiva tekućina

Ako se pretpostavi nedeformabilna konstrukcija i nestlačiva tekućina, jednadžba (4.5a) iščezava, a jednadžba (4.5b) se svodi na:

$$K_f p = f_f - \rho_f Q^T \ddot{d} \quad (4.8)$$

Rješenje jednadžbe (4.8) je statičko rješenje u svakom vremenskom koraku.

#### Kruta konstrukcija i stlačiva tekućina

Ako se pretpostavi nedeformabilna konstrukcija i stlačiva tekućina, jednadžba (4.5a) iščezava, a jednadžba (4.5b) se svodi na:

$$M_f \ddot{p} + C_f \dot{p} + K_f p = f_f - \rho_f Q^T \ddot{d} \quad (4.9)$$

Rješenje jednadžbe (4.9) prikazano je u poglavlju 3.

Deformabilna konstrukcija i nestlačiva tekućina

Kako je već rečeno, za nedeformabilnu tekućinu vrijedi:  $c = \infty$ , pa matrice  $M_f$  i  $C_f$  u (4.5) iščezavaju. Stoga se (4.5) svodi na:

$$\begin{aligned} M_s \ddot{u} + C_s \dot{u} + R(u) &= f_s - M_s \ddot{d} + Q p & (a) \\ K_f p &= f_f - \rho_f Q^T (\ddot{u} + \ddot{d}) & (b) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Iz (4.10b) sljedi:

$$p = K_f^{-1} [f_f - \rho_f Q^T (\ddot{u} + \ddot{d})] \quad (4.11)$$

Ako se (4.11) uvrsti u (4.10a), sljedi:

$$M_{sf} \ddot{u} + C_s \dot{u} + R(u) = f_s - Q K_f^{-1} f_f - M_{sf} \ddot{d} \quad (4.12)$$

gdje je:

$$M_{sf} = M_s + \bar{M}_f \ddot{u} \quad ; \quad \bar{M}_f = \rho_f Q K_f^{-1} Q^T \quad (4.13)$$

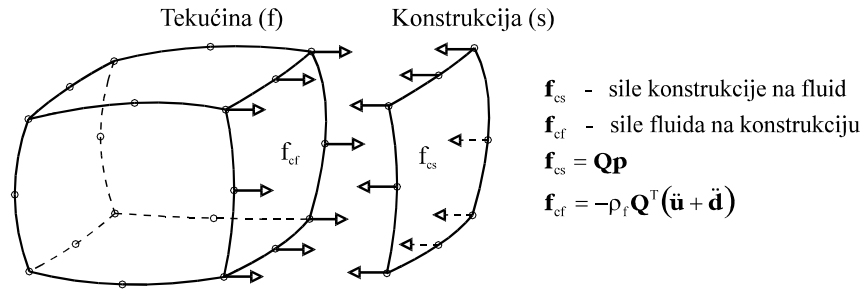
Iz (4.12) se može zaključiti da je utjecaj nestlačive tekućine na deformabilnu konstrukciju ekvivalentan utjecaju dodatne mase i dodatne sile na konstrukciju. U ovom se slučaju odgovor konstrukcije računa direktno iz (4.12), dok se hidrodinamički tlakovi mogu izračunati pomoću (4.11).

**4.4 PLOHA MEĐUDJELOVANJA TEKUĆINA-KONSTRUKCIJA**

Ploha međudjelovanja tekućina-konstrukcija, s elementima tekućine i konstrukcije, prikazana je na Crtežu 4.2. Matrica veze  $Q$  uključuje samo integraciju na plohi i prema (3.54) definirana je izrazom:

$$(Q)_{ij} = \int_{\Gamma_i} N_{ui}^T \bar{n} N_{vj} d\Gamma_i \quad (4.14)$$

Sve veličine u (4.14) definirane su u prethodnim poglavljima. Matrica  $N_{ui}$  je  $[1 \times 5]$ , a njeni elementi odgovaraju odgovarajućim nepoznatim pomacima konstrukcije na granici. Iako se za tekućinu i konstrukciju mogu koristiti elementi s različitim brojem čvorova, prikladno je na granici imati iste elemente (kod čega u čvoru tekućine ima jedna, a u čvoru konstrukcije pet nepoznanica).



Crtež 4.2 - Ploha međudjelovanja tekućina-konstrukcija

Jedinična vanjska normala  $\bar{\mathbf{n}}$  na plohi međudjelovanja definirana je vektorskim produktom (Crtež 4.3):

$$\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{e}}_1 \times \bar{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_1^0 & \bar{\mathbf{e}}_2^0 & \bar{\mathbf{e}}_3^0 \\ \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{\partial Z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} & \frac{\partial Z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

tj., u raspisanom obliku:

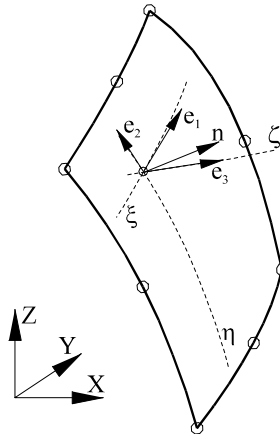
$$\bar{\mathbf{n}} = \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial Z}{\partial \eta} - \frac{\partial Y}{\partial \eta} \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right) \bar{\mathbf{e}}_1^0 + \left( \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial Z}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial Z}{\partial \eta} \right) \bar{\mathbf{e}}_2^0 + \left( \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} - \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right) \bar{\mathbf{e}}_3^0 \quad (4.16)$$

$$\bar{\mathbf{n}} = n_x \bar{\mathbf{e}}_1^0 + n_y \bar{\mathbf{e}}_2^0 + n_z \bar{\mathbf{e}}_3^0$$

gdje su  $\bar{\mathbf{e}}_1^0$ ,  $\bar{\mathbf{e}}_2^0$  i  $\bar{\mathbf{e}}_3^0$  jedinični vektori u smjeru krivocrtnih osiju (Crtež 4.3).

Jedinični vektor normale je:

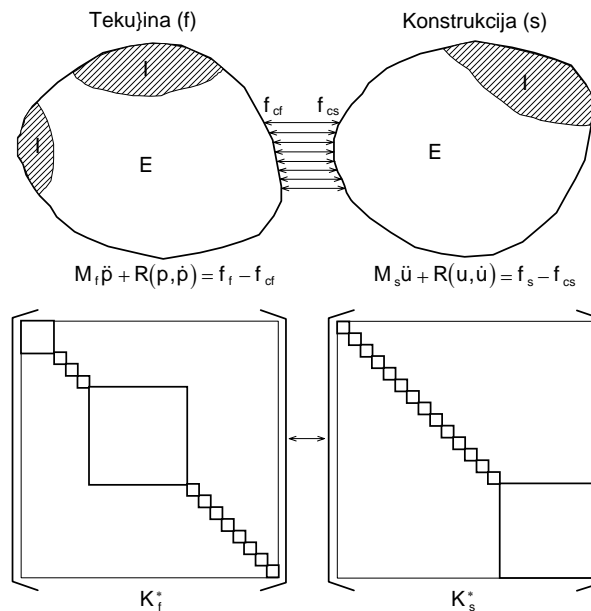
$$\bar{\mathbf{n}}^0 = \frac{\bar{\mathbf{n}}}{|\bar{\mathbf{n}}|} \quad (4.17)$$



Crtež 4.3 - Jedinična normala na plohi međudjelovanja

## 4.5 VREMENSKA INTEGRACIJA KOD PROBLEMA VEZANIH POLJA

U ovom je radu, kako je već rečeno, problem međudjelovanja tekućina-konstrukcija riješen na temelju razmatranja svakog polja zasebno, uz uključenje interakcijskih sila. Prvo je ukupni sustav podijeljen na zasebna polja, a potom je svako polje moguće podijeliti na eksplicitne i/ili implicitne zone. Prema Crtežu 4.4, “s” označava konstrukciju s nepoznatim  $\mathbf{u}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}$ , a “f” tekućinu s nepoznatim  $\mathbf{p}$ ,  $\dot{\mathbf{p}}$ ,  $\ddot{\mathbf{p}}$ .



**Crtež 4.4** - Podjela sustava tekućina-konstrukcija na zasebna polja, te svakog polja na eksplicitna i implicitna područja

Integracija svakog pojedinačnog polja izvršena je odvojeno. Kod toga je moguće koristiti implicitne, eksplicitne ili eksplicitno-implicitne algoritme rješenja za pojedinačna polja, kako je prikazano u Odjeljku 2.5. U nastavku će se prikazati integracija bazirana na Newmark-ovom implicitnom algoritmu.

### (i) Konstrukcija ‘s’

Jednadžba dinamičke ravnoteže konstrukcije u ‘n+1’ vremenskom inkrementu definirana je s:

$$M_s \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + C_s \dot{\mathbf{u}}_{n+1} + R(\mathbf{u}_{n+1}) = (\mathbf{f}_s)_{n+1} + (\mathbf{f}_{cs})_{n+1} \quad (4.18)$$

gdje  $\mathbf{f}_{cs}$  označavaju sile međudjelovanja na konstrukciju.

Upotreba Newmark-ove vremenske diskretizacije daje:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1} &= \bar{\mathbf{u}}_{n+1} + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \bar{\dot{\mathbf{u}}}_{n+1} + \gamma \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + 0.5(1-2\beta) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n \\ \bar{\dot{\mathbf{u}}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}_n + (1-\gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n \end{aligned} \quad (4.20)$$

Uvrštavanjem (4.19) u (4.18) i uvođenjem inkrementalno-iterativnog postupka, jednačba dinamičke ravnoteže konstrukcije poprima oblik:

$$(\mathbf{K}_s^*)_{n+1}^i \Delta \mathbf{u}^i = (\mathbf{f}_s^*)_{n+1}^i \quad (4.21)$$

gdje su matrica efektivne krutosti  $\mathbf{K}_s^*$  i vektor efektivnih sila  $\mathbf{f}_s^*$  dani s:

$$(\mathbf{K}_s^*)_{n+1}^i = \frac{\mathbf{M}_s}{\beta \Delta t^2} + \gamma \frac{\mathbf{C}_s}{\beta \Delta t} + (\mathbf{K}_s)_{n+1}^i \quad (4.22)$$

$$(\mathbf{f}_s^*)_{n+1}^i = (\mathbf{f}_s)_{n+1}^i - (\mathbf{f}_{cs})_{n+1}^i - \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^i - \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i - \mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}^i) \quad (4.23)$$

Rješenje (4.21) daje:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1}^{i+1} &= \mathbf{u}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^i \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} &= (\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} - \bar{\mathbf{u}}_{n+1}) / (\beta \Delta t^2) \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} &= \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i + (\gamma \Delta t) \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} \end{aligned} \quad (4.24)$$

#### (ii) Tekućina 'f'

Jednačba dinamičke ravnoteže konstrukcije u 'n+1' vremenskom inkrementu definirana je s:

$$\mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{p}}_{n+1} + \mathbf{C}_f \dot{\mathbf{p}}_{n+1} + \mathbf{K}_f \mathbf{p}_{n+1} = (\mathbf{f}_f)_{n+1} + (\mathbf{f}_{cf})_{n+1} \quad (4.25)$$

gdje  $\mathbf{f}_{cf}$  označavaju sile međudjelovanja na tekućinu.

Upotreba Newmark-ove vremenske diskretizacije daje:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{n+1} &= \bar{\mathbf{p}}_{n+1} + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{p}}_n \\ \dot{\mathbf{p}}_{n+1} &= \bar{\dot{\mathbf{p}}}_{n+1} + \gamma \Delta t \dot{\mathbf{p}}_n \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}}_{n+1} &= \mathbf{p}_n + \Delta t \dot{\mathbf{p}}_n + 0.5(1-2\beta) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{p}}_n \\ \bar{\dot{\mathbf{p}}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{p}}_n + (1-\gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{p}}_n \end{aligned} \quad (4.27)$$

Uvrštavanjem (4.26) u (4.25) i uvođenjem inkrementalno-iterativnog postupka, jednačba dinamičke ravnoteže konstrukcije poprima oblik:

$$\mathbf{K}_f^* \Delta \mathbf{p}^i = (\mathbf{f}_f^*)_{n+1}^i \quad (4.28)$$

gdje su matrica efektivne krutosti  $\mathbf{K}_f^*$  i vektor efektivnog opterećenja tekućine  $\mathbf{f}_f^*$  dani s:



$$\mathbf{K}_f^* = \frac{\mathbf{M}_f}{\beta \Delta t^2} + \gamma \frac{\mathbf{C}_f}{\beta \Delta t} + \mathbf{K}_f \quad (4.29)$$

$$(\mathbf{f}_f^*)_{n+1}^i = (\mathbf{f}_f)_{n+1}^i - (\mathbf{f}_{cf})_{n+1}^i - \mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{p}}_{n+1}^i - \mathbf{C}_f \dot{\mathbf{p}}_{n+1}^i - \mathbf{K}_f \mathbf{p}_{n+1}^i \quad (4.30)$$

Rješenje (4.28) daje:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{n+1}^{i+1} &= \mathbf{p}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{p}_{n+1}^i \\ \ddot{\mathbf{p}}_{n+1}^{i+1} &= (\mathbf{p}_{n+1}^{i+1} - \bar{\mathbf{p}}_{n+1}) / (\beta \Delta t^2) \\ \dot{\mathbf{p}}_{n+1}^{i+1} &= \dot{\mathbf{p}}_{n+1}^i + (\gamma \Delta t) \ddot{\mathbf{p}}_{n+1}^{i+1} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Za kontrolu konvergencije postupka, posebno je razmatran kriterij konvergencije za konstrukciju, a posebno za tekućinu. Kad su istovremeno zadovoljeni kriteriji konvergencije za pojedinačna polja, zadovoljen je i kriterij konvergencije za problem međudjelovanja. U ovom su radu korišteni sljedeći kriteriji konvergencije:

(i) Konstrukcija 's'

$$\|\Delta \mathbf{u}^i\| / \|\mathbf{u}_{n+1}^{i+1}\| \leq \varepsilon_u \quad (4.32)$$

gdje je  $\|\Delta \mathbf{u}^i\|$  norma prirasta pomaka u tekućoj iteraciji,  $\|\mathbf{u}_{n+1}^{i+1}\|$  norma ukupnog pomaka u vremenskom koraku 'n+1', a  $\varepsilon_u$  je dopustiva tolerancija za konstrukciju.

(ii) Tekućina 'f'

$$\|\Delta \mathbf{p}^i\| / \|\mathbf{p}_{n+1}^{i+1}\| \leq \varepsilon_p \quad (4.33)$$

gdje je  $\|\Delta \mathbf{p}^i\|$  norma prirasta tlakova u tekućoj iteraciji,  $\|\mathbf{p}_{n+1}^{i+1}\|$  norma ukupnog tlaka u vremenskom koraku 'n+1', a  $\varepsilon_p$  je dopustiva tolerancija za tekućinu.

O odabranoj toleranciji zavisi točnosti i dužina trajanja proračuna, a detaljnije je komentirana u Odjeljku 2.5.7.

Algoritam rješenja problema interakcije za svaki vremenski korak, na bazi Newmark-ovog implicitnog algoritma, prikazan je u Tablici 4.1. U proračunski program za rješenje problema međudjelovanja, implementiran je eksplicitno-implicitni algoritam integracije pojedinačnih polja (Odjeljak 2.5.2) budući da on predstavlja poopćenje implicitnog i eksplicitnog algoritma. Stabilnost metode zasebnih rješenja za linearne i nelinearne probleme detaljno je analizirana u lit. [P.1, P.2, F.1] i ovdje se neće prikazati.

**Tablica 4.1** - Newmark-ov implicitni algoritam iterativnog rješenja problema interakcije (linearna tekućina i linearna/nelinearna konstrukcija)

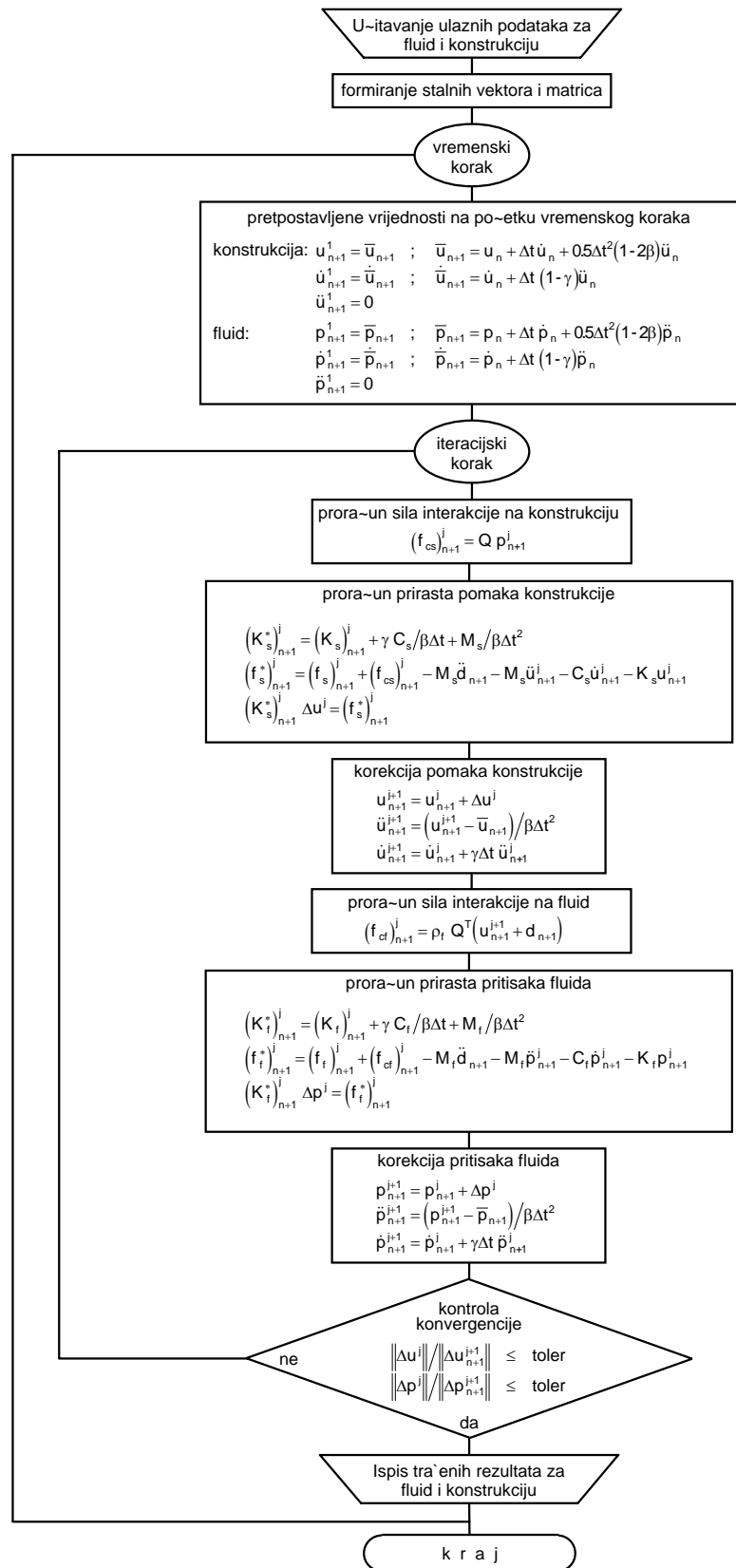
(1)	Za novi vremenski korak (n+1), postaviti iteracijski korak i=1
(2)	Izračunati pretpostavljene vrijednosti vektora za konstrukciju i tekućinu na početku vremenskog koraka pomoću poznatih vrijednosti iz prethodnog vremenskog koraka: $\mathbf{u}_{n+1}^1 = \bar{\mathbf{u}}_{n+1}$ $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^1 = \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1}$ $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^1 = (\mathbf{u}_{n+1}^1 - \bar{\mathbf{u}}_{n+1})/\beta\Delta t^2$ $\mathbf{p}_{n+1}^1 = \bar{\mathbf{p}}_{n+1}$ $\dot{\mathbf{p}}_{n+1}^1 = \dot{\bar{\mathbf{p}}}_{n+1}$ $\ddot{\mathbf{p}}_{n+1}^1 = (\mathbf{p}_{n+1}^1 - \bar{\mathbf{p}}_{n+1})/\beta\Delta t^2$ $\alpha_{n+1}^1 = c^2$
(3)	Izračunati sile međudjelovanja na konstrukciju $(\mathbf{f}_{cs})_{n+1}^i$ , a potom vektor efektivnih sila konstrukcije $(\mathbf{f}_s^*)_{n+1}^i$ : $(\mathbf{f}_s^*)_{n+1}^i = (\mathbf{f}_s)_{n+1}^i + (\mathbf{f}_{cs})_{n+1}^i - \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^i - \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i - \mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}^i)$
(4)	Izračunati matricu efektivne krutosti konstrukcije $\mathbf{K}_s^*$ (ako je potrebno): $(\mathbf{K}_s^*)_{n+1} = \mathbf{M}_s/\beta\Delta t^2 + \gamma \mathbf{C}_s/\beta\Delta t + (\mathbf{K}_s)_{n+1}$
(5)	Izračunati vektor prirasta pomaka konstrukcije $\Delta \mathbf{u}^i$ : $(\mathbf{K}_s^*)_{n+1}^i \Delta \mathbf{u}^i = (\mathbf{f}_s^*)_{n+1}^i$
(6)	Korigirati pretpostavljene vrijednosti pomaka, brzina i ubrzanja konstrukcije: $\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{u}^i$ $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} = (\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} - \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^i)/\beta\Delta t^2$ $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} = \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1}^i + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}$
(7)	Izračunati sile međudjelovanja na tekućinu $(\mathbf{f}_{cf})_{n+1}^i$ , a potom vektor efektivnog opterećenja tekućine $(\mathbf{f}_f^*)_{n+1}^i$ : $(\mathbf{f}_f^*)_{n+1}^i = (\mathbf{f}_f)_{n+1}^i + (\mathbf{f}_{cf})_{n+1}^i - \mathbf{M}_f^i \ddot{\mathbf{p}}_{n+1}^i - \mathbf{C}_f^i \dot{\mathbf{p}}_{n+1}^i - \mathbf{K}_f^i \mathbf{p}_{n+1}^i$
(8)	Izračunati matricu efektivne krutosti tekućine $\mathbf{K}_f^*$ (ako je potrebno): $(\mathbf{K}_f^*)_{n+1}^i = \mathbf{M}_f^i/\beta\Delta t^2 + \gamma \mathbf{C}_f^i/\beta\Delta t + \mathbf{K}_f^i$
(9)	Izračunati prirast tlaka tekućine $\Delta \mathbf{p}^i$ iz: $(\mathbf{K}_f^*)_{n+1}^i \Delta \mathbf{p}^i = (\mathbf{f}_f^*)_{n+1}^i$
(10)	Ažurirati odgovor polja tekućine: $\mathbf{p}_{n+1}^{i+1} = \bar{\mathbf{p}}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{p}^i$ $\ddot{\mathbf{p}}_{n+1}^{i+1} = (\mathbf{p}_{n+1}^{i+1} - \bar{\mathbf{p}}_{n+1}^i)/\beta\Delta t^2$ $\dot{\mathbf{p}}_{n+1}^{i+1} = \dot{\bar{\mathbf{p}}}_{n+1}^i + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{p}}_{n+1}^{i+1}$

nastavak tablice na sljedećoj stranici

nastavak tablice s prethodne stranice

(11)	<p>Kontrolirati konvergenciju postupka:  Ako <math>\Delta \mathbf{u}^i</math> i <math>\Delta \mathbf{p}^i</math> zadovoljavaju kriterij konvergencije</p> $\frac{\ \Delta \mathbf{u}^i\ }{\ \mathbf{u}_{n+1}^{i+1}\ } < \varepsilon_u$ $\frac{\ \Delta \mathbf{p}^i\ }{\ \mathbf{p}_{n+1}^{i+1}\ } < \varepsilon_p$ <p>prelazi se na slijedeći vremenski korak (zamijeni se 'n' s 'n+1' i vraća na korak rješavanja (2)). Rješenje u vremenu <math>t_{n+1}</math> je</p> $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^{i+1} \quad ; \quad \dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} \quad ; \quad \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}$ $\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_{n+1}^{i+1} \quad ; \quad \dot{\mathbf{p}}_{n+1} = \dot{\mathbf{p}}_{n+1}^{i+1} \quad ; \quad \ddot{\mathbf{p}}_{n+1} = \ddot{\mathbf{p}}_{n+1}^{i+1}$ <p>Ako kriterij konvergencije nije zadovoljen, iterativni postupak se nastavlja (zamijeni se 'i' s 'i+1' i vraća na korak rješavanja (3)).</p>
------	---

Na Crtežu 4.5 prikazan je dijagram toka rješavanja za problem međudjelovanja s linearnom tekućinom i linearnom/nelinearnom konstrukcijom.



Crtež 4.5 - Dijagram toka rješenja problema međudjelovanja (linearna tekućina i linearna/nelinearna konstrukcija)

## 4.6 STATIČKA ANALIZA PROBLEMA VEZANIH POLJA

Za slučaj statičkog problema međudjelovanja tekućina-konstrukcija, a prema (4.21) i (4.28), jednadžbe statičke ravnoteže imaju oblik:

$$\mathbf{K}_s^* \Delta \mathbf{u}^i = (\mathbf{f}_s^*)^i \quad (4.34)$$

$$\mathbf{K}_f^* \Delta \mathbf{p}^i = (\mathbf{f}_f^*)^i$$

gdje je, prema (4.22), (4.23), (4.29) i (4.30):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_s^* &= \mathbf{K}_s \\ (\mathbf{f}_s^*)^i &= (\mathbf{f}_s)_{n+1}^i - (\mathbf{f}_{cs})_{n+1}^i - \mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}^i) \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_f^* &= \mathbf{K}_f \\ (\mathbf{f}_f^*)^i &= (\mathbf{f}_f)_{n+1}^i - (\mathbf{f}_{cf})_{n+1}^i - \mathbf{K}_f \mathbf{p}_{n+1}^i \end{aligned}$$

Rješenje (2.34) daje:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1}^{i+1} &= \mathbf{u}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{u}^i \\ \mathbf{p}_{n+1}^{i+1} &= \mathbf{p}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{p}^i \end{aligned} \quad (4.36)$$

Kriterij konvergencije je dan s (4.32) i (4.33).

Algoritam rješenja statičkog problema međudjelovanja prikazan je u Tablici 4.2. Implementacija ovog algoritma je jednostavna i analogna je onoj za dinamičko međudjelovanje (Tablica 4.2). Kod toga inkrement opterećenja odgovara vremenskom inkrementu, dok je jedina razlika u članovima  $\mathbf{K}_s$ ,  $\mathbf{K}_f$ ,  $\mathbf{f}_s$  i  $\mathbf{f}_f$ .

**Tablica 4.2** - Newmark-ov implicitni algoritam iterativnog rješenja problema interakcije za statičke probleme (linearna tekućina i linearna/nelinearna konstrukcija)

(1)	Za novi ikrement opterećenja (n+1), postaviti iteracijski korak i=1
(2)	Izračunati vektor pretpostavljenih varijabli na početku iteracionog ciklusa: $\mathbf{u}_{n+1}^1 = \mathbf{u}_n$ $\mathbf{p}_{n+1}^1 = \mathbf{p}_n$
(3)	Izračunati sile međudjelovanja na konstrukciju $(\mathbf{f}_{cs})_{n+1}^i$ , a potom vektor efektivnih sila konstrukcije $(\mathbf{f}_s^*)_{n+1}^i$ : $(\mathbf{f}_s^*)_{n+1}^i = (\mathbf{f}_s)_{n+1}^i + (\mathbf{f}_{cs})_{n+1}^i - \mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}^i)$
(4)	Izračunati matricu efektivne krutosti konstrukcije $\mathbf{K}_s^*$ (ako je potrebno): $\mathbf{K}_s^* = \mathbf{K}_\tau = \partial \mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}^i) / \partial \mathbf{u}_{n+1}^i$
(5)	Izračunati vektor prirasta pomaka konstrukcije $\Delta \mathbf{u}^i$ : $\mathbf{K}_s^* \Delta \mathbf{u}^i = (\mathbf{f}_s^*)_{n+1}^i$
(6)	Korigirati pomake konstrukcije: $\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{u}^i$
(7)	Izračunati sile međudjelovanja na tekućinu $(\mathbf{f}_{cf})_{n+1}^i$ , a potom vektor efektivnog opterećenja tekućine $(\mathbf{f}_f^*)_{n+1}^i$ : $(\mathbf{f}_f^*)_{n+1}^i = (\mathbf{f}_f)_{n+1}^i + (\mathbf{f}_{cf})_{n+1}^i - \mathbf{K}_f \ddot{\mathbf{p}}_{n+1}^i$
(8)	Izračunati matricu efektivne krutosti tekućine $\mathbf{K}_f^*$ (ako je potrebno): $(\mathbf{K}_f^*)_{n+1}^i = \mathbf{K}_f$ <p>Napomena: <math>\mathbf{K}_f</math> se izračuna samo jednom na početku postupka rješenja.</p>
(9)	Izračunati prirast tlaka tekućine $\Delta \mathbf{p}^i$ iz: $\mathbf{K}_f^* \Delta \mathbf{p}^i = (\mathbf{f}_f^*)_{n+1}^i$
(10)	Ažurirati odgovor polja tekućine: $\mathbf{p}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{p}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{p}^i$
(11)	Kontrolirati konvergenciju postupka: Ako $\Delta \mathbf{u}^i$ i $\Delta \mathbf{p}^i$ zadovoljavaju kriterij konvergencije: $\ \Delta \mathbf{u}^i\  / \ \mathbf{u}_{n+1}^{i+1}\  < \varepsilon_u$ $\ \Delta \mathbf{p}^i\  / \ \mathbf{p}_{n+1}^{i+1}\  < \varepsilon_p$ prelazi se na slijedeći vremenski korak (zamijeni se 'n' s 'n+1' i vraća na korak rješenja (2)). Rješenje u vremenu $t_{n+1}$ je: $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^{i+1}$ $\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_{n+1}^{i+1}$ Ako kriterij konvergencije nije zadovoljen, iterativni postupak se nastavlja (zamijeni se 'i' s 'i+1' i vraća na korak rješavanja (3)).

## 4.7 RJEŠENJE SVOJSTVENE ZADAĆE VEZANIH POLJA

Rješenje problema svojstvene zadaće sustava tekućina-konstrukcija je potrebno radi efikasne provedbe vremenske integracije jednadžbi gibanja. Naime, pri korištenju eksplicitnih i/ili implicitnih algoritama vremenske integracije nužno je usvojiti optimalnu duljinu vremenskog koraka radi zahtjeva na njihovu stabilnost i točnost. Duljina vremenskog koraka u sklopu iterativnog postupka rješavanja problema, kako je to pokazano u Odjeljku 2.5.2, određuje se na temelju bilo najmanjih ili najviših perioda slobodnih oscilacija promatranog sustava.

U ovom radu, rješenje problema svojstvene zadaće međudjelovanja također je izvršeno na osnovu metode zasebnih rješenja. Prema izrazu (2.151), koji opisuje svojstvenu zadaću pojedinačnih polja, za problem svojstvene zadaće vezanih polja može se izvesti analogan izraz:

$$\begin{bmatrix} K_u & K_{up} \\ K_{pu} & K_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} - [\lambda] \begin{bmatrix} M_u & M_{up} \\ M_{pu} & M_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = 0 \quad (4.37)$$

Jednadžba (4.37), se može napisati u obliku:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\mathbf{x} = 0 \quad (4.38)$$

pri čemu je:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_u & K_{up} \\ K_{pu} & K_p \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_u & M_{up} \\ M_{pu} & M_p \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Jednadžba (4.38) je potpuno istovjetna jednadžbi (2.151), pa se za rješenje problema može u potpunosti upotrijebiti postupak izložen u Odjeljku 2.5.3, jednadžbe (2.152)-(2.161).

Na temelju prikazanih algoritama razvijene su subrutine za proračun svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora pojedinačnih i vezanih polja. One su ugrađene u razvijene računalne programe i testirane na nekim poznatim analitičkim i numeričkim rezultatima.

## 4.8 RJEŠENJE PROBLEMA MEĐUDJELOVANJA TEKUĆINE I KONSTRUKCIJE

### 4.8.1 Općenito

U klasičnom (inženjerskom) pristupu rješenja problema dinamičkog međudjelovanja tekućina-konstrukcija, sustav je rješavan odvojeno u dva koraka. U prvom bi se koraku izračunali hidrodinamički tlakovi tekućine uz pretpostavku krute konstrukcije. Potom bi se analizirala konstrukcija s ovako dobivenim tlakovima tekućine. Ovakav pristup može ponekad dati zadovoljavajuće rezultate. Međutim, primjena ovakvog postupka rješavanja često daje predimenzioniranu konstrukciju, dok u slučaju rezonance između tekućine i konstrukcije postupak daje nedovoljnu sigurnost konstrukcije. Uvodeći različite pretpostavke i pojednostavljenja, problem međudjelovanja tekućina-konstrukcija moguće je rješavati različitim postupcima, od kojih su neki navedeni u [R.1].

Kako je vidljivo iz (4.7), globalne matrice sustava su nesimetrične i njihovo direktno rješavanje zahtjeva veliki kapacitet računala. U ovom je radu, kako je višeputa naglašeno, korištena metoda zasebnih rješenja, kod čega su jednačbe (4.5a) i (4.5b) rješavane odvojeno. Ovakav pristup omogućava primjenu algoritama rješenja i razvijenog software-a pojedinačnih polja, kod čega se u svakom iterativnom koraku traženja rješenja računaju samo sile međudjelovanja. U metodi zasebnih rješenja, najprije se sustav tekućina-konstrukcija odjeli u zasebna polja, a potom se svako polje dalje može dijeliti u eksplicitne i/ili implicitne elemente. Shematski prikaz ovog postupka prikazan je na Crtežu 4.4.

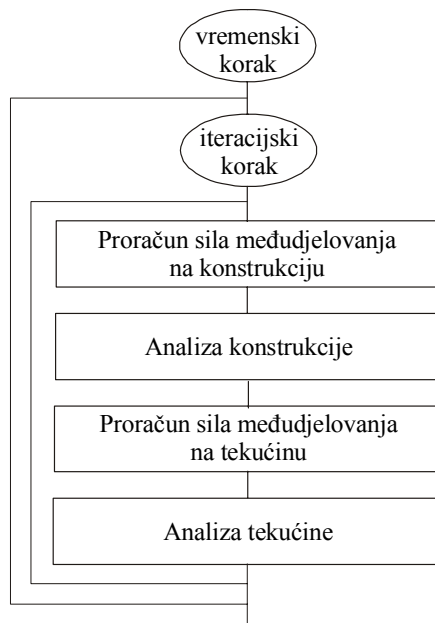
Budući da se usvojeni postupak temelji na rješenju odvojenih polja, kod rješavanja problema međudjelovanja moguće je obuhvatiti sve one utjecaje koji su modelirani kod analize same tekućine, odnosno same konstrukcije. Općenito, moguće je koristiti nelinearne modele materijala i geometrije za tekućinu i konstrukciju. U Odjeljku 4.5 prikazani su algoritmi rješenja linearnog modela tekućine iz Odjeljka 3.3, i konstrukcije s nelinearnim modelom materijala i geometrije iz Poglavlja 2.

U metodi zasebnih rješenja moguće je:

- (i) riješiti (4.5a) pa (4.5b),
- (ii) riješiti (4.5b) pa (4.5a),
- (iii) simultano rješenje (4.5).



Stabilnost metode zasebnih rješenja ne zavisi od puta rješenja, kao ni od pretpostavljenim vrijednostima kod vremenske integracije. Međutim, o izboru puta rješenja i pretpostavljenim vrijednostima bitno ovisi brzina konvergencije postupka. U ovome je radu prvo riješena konstrukcija, a potom tekućina, budući da se u tom slučaju postiže najveća brzina konvergencije (uz istu toleranciju konvergencije) - Crtež 4.6.



*Crtež 4.6 - Shematski prikaz rješenja problema međudjelovanja tekućina - konstrukcija*

#### **4.8.2 Problemi s linearnim modelom tekućine**

Linearni model tekućine pobliže je opisan u Odjeljku 3.3. Osnovne jednadžbe dinamičke ravnoteže sustava tekućina konstrukcija prikazane su u Odjeljku 4.3. Algoritam rješenja problema međudjelovanja tekućine i konstrukcije s linearnim modelom tekućine prikazan je u Tablici 4.1, a algoritam toka rješenja dat je na Crtežu 4.5.

### 4.8.3 Problemi s nelinearnim modelom tekućine

Na analogan način kao i za linearnu tekućinu, mogu se izvesti izrazi za opis ponašanja sustava tekućina-konstrukcija kada je tekućina nelinearna, tj. kada se simulira pojava kavitacije u tekućini.

Prostornom diskretizacijom problema i korištenjem TKE, ponašanje tekućine s nepoznatim čvornim potencijalima pomaka  $\Psi$  može se opisati slijedećom diferencijalnom jednačinom (jednačina (3.50)):

$$\mathbf{M}_f \ddot{\Psi} + \mathbf{C}_f \dot{\Psi} + \mathbf{K}_f \Psi = \mathbf{f}_f - \rho_f \mathbf{Q}^T(\mathbf{u} + \mathbf{d}) \quad (4.40)$$

U prethodnom izrazu  $\mathbf{d}$  predstavlja pomake podloge, dok su ostale oznake ranije definirane. Matrice  $\mathbf{C}_f$ ,  $\mathbf{K}_f$  i  $\mathbf{Q}$  su definirane izrazom (3.54). Matrica masa  $\mathbf{M}_f$  može se definirati s:

$$(\mathbf{M}_f)_{ij} = \int_{\Omega_f} \mathbf{N}_{\Psi i}^T (1/\alpha) \mathbf{N}_{\Psi j} d\Omega + (1/g) \int_{\Gamma_f} \mathbf{N}_{\Psi i}^T \mathbf{N}_{\Psi j} d\Gamma \quad (4.41)$$

Ako se integracijske točke pretpostave u čvorovima elemenata, tada se matrica masa može dobiti u dijagonalnom obliku:

$$(\mathbf{M}_f)_{ii} = (1/\alpha) M_{ii} + (1/g) \bar{M}_{ii} \quad (4.42)$$

gdje je:

$$\begin{aligned} M_{ii} &= \int_{\Omega_f} \mathbf{N}_{\Psi}^T \mathbf{N}_{\Psi} d\Omega \\ \bar{M}_{ii} &= \int_{\Gamma_f} \mathbf{N}_{\Psi}^T \mathbf{N}_{\Psi} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.43)$$

Ponašanje konstrukcije s nepoznatim čvornim pomacima  $\mathbf{u}$  može se opisati također odgovarajućom diferencijalnom jednačinom drugog reda:

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_s \mathbf{u} = \mathbf{f}_s - \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{d}} - \mathbf{Q} \ddot{\Psi} \quad (4.44)$$

koja općenito uključuje geometrijsku i materijalnu nelinearnost.

Uzimajući u obzir (4.40) i (4.44), jednačina dinamičke ravnoteže sistema tekućina-konstrukcija može se opisati sustavom dviju diferencijalnih jednačini drugog reda:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_s \mathbf{u} &= -\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{f}_s + \mathbf{f}_{cs} \\ \mathbf{M}_f \ddot{\Psi} + \mathbf{C}_f \dot{\Psi} + \mathbf{K}_f \Psi &= \mathbf{f}_f + \mathbf{f}_{cf} \end{aligned} \quad (4.45)$$

gdje je

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{cs} &= -\mathbf{Q} \ddot{\Psi} \\ \mathbf{f}_{cf} &= -\rho_f \mathbf{Q}^T(\mathbf{u} + \mathbf{d}) \end{aligned} \quad (4.46)$$

U gornjim izrazima  $\mathbf{f}_{cs}$  predstavlja vektor sila tekućine na konstrukciju, a  $\mathbf{f}_{cf}$  vektor sila konstrukcije na tekućinu ( $\mathbf{f}_{cf}$  je označen kao “vektor sila” zbog analogije s konstrukcijom).

Za slučaj bez međudjelovanja:

$$\mathbf{f}_{cs} = \mathbf{f}_{cf} = 0 \quad (4.47)$$

Sustav jednadžbi (4.45) može se napisati i u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & -\mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\Psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & 0 \\ \rho_f \mathbf{Q}^T & \mathbf{K}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_s - \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{d}} \\ \mathbf{f}_f - \rho_f \mathbf{Q}^T \mathbf{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{cs} \\ \mathbf{f}_{cf} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

iz kojeg je vidljivo da su globalne matrice masa i krutosti sustava nesimetrične.

Nelinearni model tekućine pobliže je opisan u Odjeljku 3.4. Algoritam rješenja problema međudjelovanja tekućine i konstrukcije s nelinearnim modelom tekućine prikazan je u Tablici 4.3, a algoritam toka rješenja dat je na Crtežu 4.7.

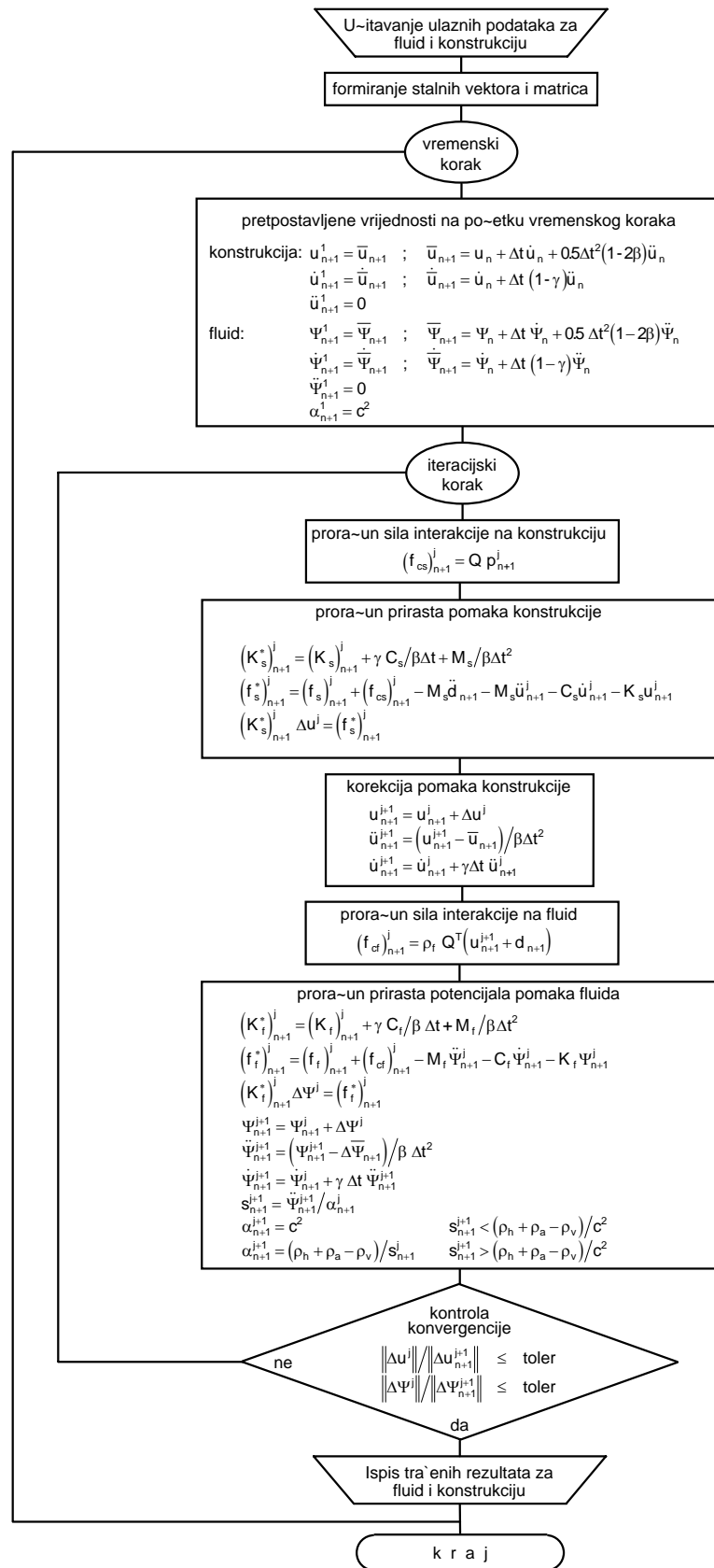
**Tablica 4.3** - Newmark-ov implicitni algoritam iterativnog rješenja problema interakcije (nelinearna tekućina i linearna/nelinearna konstrukcija)

(1)	Za novi vremenski korak (n+1), postaviti iteracijski korak i=1
(2)	Izračunati pretpostavljene vrijednosti vektora za konstrukciju i tekućinu na početku vremenskog koraka pomoću poznatih vrijednosti iz prethodnog vremenskog koraka: $\mathbf{u}_{n+1}^1 = \bar{\mathbf{u}}_{n+1}$ $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^1 = \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1}$ $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^1 = (\mathbf{u}_{n+1}^1 - \bar{\mathbf{u}}_{n+1}) / \beta \Delta t^2$ $\Psi_{n+1}^1 = \bar{\Psi}_{n+1}$ $\dot{\Psi}_{n+1}^1 = \dot{\bar{\Psi}}_{n+1}$ $\ddot{\Psi}_{n+1}^1 = (\Psi_{n+1}^1 - \bar{\Psi}_{n+1}) / \beta \Delta t^2$ $\alpha_{n+1}^1 = c^2$
(3)	Izračunati sile međudjelovanja na konstrukciju $(\mathbf{f}_{cs})_{n+1}^i$ , a potom: $(\mathbf{f}_s^*)_{n+1}^i = (\mathbf{f}_s)_{n+1}^i + (\mathbf{f}_{cs})_{n+1}^i - \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^i - \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i - \mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}^i)$
(4)	Izračunati matricu efektivne krutosti konstrukcije $\mathbf{K}_s^*$ (ako je potrebno): $(\mathbf{K}_s^*)_{n+1} = \mathbf{M}_s / \beta \Delta t^2 + \gamma \mathbf{C}_s / \beta \Delta t + (\mathbf{K}_s)_{n+1}$
(5)	Izračunati vektor prirasta pomaka konstrukcije $\Delta \mathbf{u}^i$ : $(\mathbf{K}_s^*)^i \Delta \mathbf{u}^i = (\mathbf{f}_s^*)_{n+1}^i$
(6)	Korigirati pretpostavljene vrijednosti pomaka, brzina i ubrzanja konstrukcije: $\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{u}^i$ $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} = (\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} - \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^i) / \beta \Delta t^2$ $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} = \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1}^i + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}$

nastavak tablice na sljedećoj stranici

nastavak tablice s prethodne stranice

(7)	<p>Izračunati sile međudjelovanja na tekućinu <math>(\mathbf{f}_{cf})_{n+1}^i</math>, a potom vektor efektivnog opterećenja tekućine <math>(\mathbf{f}_f^*)_{n+1}^i</math>:</p> $(\mathbf{f}_f^*)_{n+1}^i = (\mathbf{f}_f)_{n+1}^i + (\mathbf{f}_{cf})_{n+1}^i - \rho_f \mathbf{Q}^T (\mathbf{u}_{n+1}^i + \mathbf{d}_{n+1}) - \mathbf{M}_f^i \ddot{\Psi}_{n+1}^i - \mathbf{C}_f \dot{\Psi}_{n+1}^i - \mathbf{K}_f \Psi_{n+1}^i$ <p>Napomena: ukoliko se javlja kavitacija, matrica <math>\mathbf{M}_f^i</math> se mora prethodno ažurirati pomoću izraza (4.36).</p>
(8)	<p>Izračunati matricu efektivne krutosti tekućine <math>\mathbf{K}_f^*</math> (ako je potrebno):</p> $(\mathbf{K}_f^*)_{n+1}^i = \mathbf{M}_f^i / \beta \Delta t^2 + \gamma \mathbf{C}_f / \beta \Delta t + \mathbf{K}_f$
(9)	<p>Izračunati prirast potencijala tlaka tekućine <math>\Delta \Psi^i</math> iz:</p> $(\mathbf{K}_f^*)_{n+1}^i \Delta \Psi^i = (\mathbf{f}_f^*)_{n+1}^i$
(10)	<p>Ažurirati odgovor polja tekućine:</p> $\Psi_{n+1}^{i+1} = \bar{\Psi}_{n+1} + \Delta \Psi^i$ $\ddot{\Psi}_{n+1}^{i+1} = (\Psi_{n+1}^{i+1} - \bar{\Psi}_{n+1}) / \beta \Delta t^2$ $\dot{\Psi}_{n+1}^{i+1} = \dot{\bar{\Psi}}_{n+1} + \gamma \Delta t \ddot{\Psi}_{n+1}^{i+1}$ $\mathbf{s}_{n+1}^{i+1} = \ddot{\Psi}_{n+1}^{i+1} / \alpha_{n+1}^i$
(11)	<p>Izračunati <math>(\alpha)</math>:</p> $\alpha_{n+1}^{i+1} = c^2 \quad \text{za } \mathbf{s}_{n+1}^{i+1} < (p_h + p_a - p_v) / c^2$ $\alpha_{n+1}^{i+1} = (p_h + p_a - p_v) / \mathbf{s}_{n+1}^{i+1} \quad \text{za } \mathbf{s}_{n+1}^{i+1} \geq (p_h + p_a - p_v) / c^2$
(12)	<p>Kontrolirati konvergenciju postupka: Ako <math>\Delta \mathbf{u}^i</math> i <math>\Delta \Psi^i</math> zadovoljavaju kriterij konvergencije:</p> $\ \Delta \mathbf{u}^i\  / \ \mathbf{u}_{n+1}^{i+1}\  < \varepsilon_u$ $\ \Delta \Psi^i\  / \ \Psi_{n+1}^{i+1}\  < \varepsilon_\Psi$ <p>prelazi se na slijedeći vremenski korak (zamijeni se 'n' s 'n+1' i vraća na korak rješenja (2)). Rješenje u vremenu <math>t_{n+1}</math> je</p> $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^{i+1} \quad ; \quad \dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} \quad ; \quad \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}$ $\Psi_{n+1} = \Psi_{n+1}^{i+1} \quad ; \quad \dot{\Psi}_{n+1} = \dot{\Psi}_{n+1}^{i+1} \quad ; \quad \ddot{\Psi}_{n+1} = \ddot{\Psi}_{n+1}^{i+1}$ <p>Ako kriterij konvergencije nije zadovoljen, iterativni postupak se nastavlja (zamijeni se 'i' s 'i+1' i vraća na korak rješavanja (3)).</p>



Crtež 4.7 - Dijagram toka rješavanja problema međudjelovanja (nelinearna tekućina, nelinearna konstrukcija)

## 4.9 KRATKI PRIKAZ RAZVIJENOG SOFTWARE-a

Na temelju prikazanih algoritama rješenja razvijeni su proračunski programi za analizu tekućine “*Daf3D*” i analizu konstrukcije “*Dak3D*”. Ova dva programa uključuju sve probleme pojedinačnih polja prikazane u Poglavlju 3 i Poglavlju 2.

Spajanjem ova dva programa za analizu odvojenih polja napravljen je program “*Dafik3D*” za analizu međudjelovanja tekućine i konstrukcije.

Svi programi su kodirani u programskom jeziku “FORTRAN”, te kompajlirani programskim paketom “Microsoft Developer Studio”, Copyright © 1994-95 Microsoft Corporation, ver. 4.0.

U cilju kontrole ulaznih podataka, te lakšeg pregleda rezultata, svi programi su povezani s AutoCAD-om (Copyright © AutoDESK), preko DXF datoteke.

## 4.10 PRIMJERI

### *Primjer 1 – Analiza pravokutnog rezervoara*

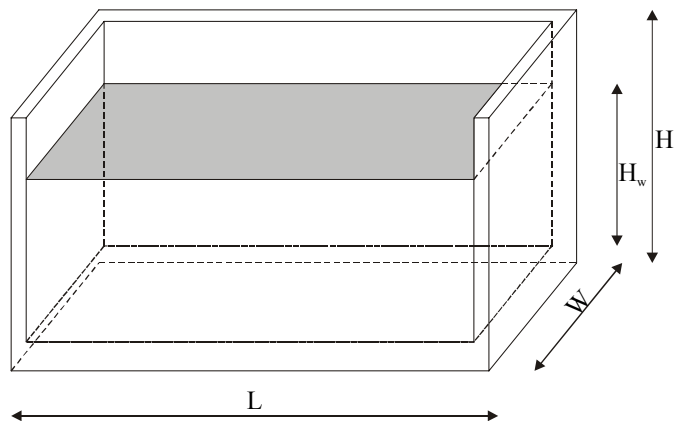
#### Općenito

Prikazani model proračuna međudjelovanja tekućine i konstrukcije iskorišten je za analizu ponašanja pravokutnog rezervoara u uvjetima seizmičkog opterećenja. Ovakav tip rezervoara se vrlo često koristi kao “mokri tip” spremnika za iskorišteno nuklearno gorivo, a dimenzije u primjeru su odabrane prema realnim dimenzijama stvarnih rezervoara [K.2, K.3].

#### Geometrijske karakteristike modela

Geometrijske karakteristike modela preuzete su iz lit. [K.2] i prikazane su na Crtežu 4.P1. Za provedbu numeričke analize odabrane su dimenzije rezervoara:  $L=50$  m;  $W=20$  m;  $H=10$  m i  $H_w=9$  m. Osnovne karakteristike materijala i tekućine dane su u tablici P1. Materijal je modeliran elasto-plastičnim modelom, da bi se rezultati mogli usporediti s rezultatima prema lit. [K.2]. Spremnici za iskorišteno nuklearno gorivo se obično izvode relativno debelih armirano betonskih stijenki u cilju zaštite od radioaktivnog zračenja. U ovom radu analiza je izvršena za dvije debljine armirano betonskog zida:  $t=1.0$  m, za tipične spremnike iskorištenog nuklearnog goriva, i  $t=0.5$  m za fleksibilne pravokutne spremnike za vodu. Pretpostavljeno je da je rezervoar kruto vezan za podlogu.

Za istovjetni problem, u lit. [K.3] prikazani su eksperimentalni rezultati izvršeni na fizikalnom modelu. Model je izrađen od akrilne plastike i testiran na potresnoj platformi u Korean Institute of Machinery and Metals, Seul, Koreja. Pri eksperimentu mjerena je akceleracija pojedinih točaka konstrukcije, tlakovi na konstrukciju i valovanje u tekućini.



*Crtež 4.P1 - Prikaz geometrije pravokutnog rezervoara*

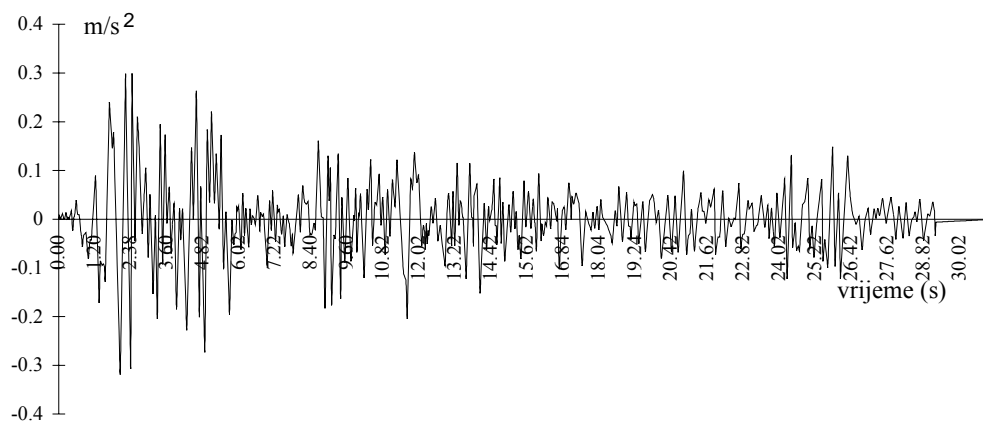
#### **Tablica P1** - Osnovne materijalne karakteristike

Beton			Tekućina		
Modul elastičnosti	$E_B$ (GN/m <sup>2</sup> )	21.0	Brzina zvuka	$c$ (m/s)	1430.0
Poisson-ov koeficijent	$\nu_b$	0.17	Gustoća	$\rho_w$ (t/m <sup>3</sup> )	1.0
Gustoća	$\rho_b$ (t/m <sup>3</sup> )	2.30			
Tlačna čvrstoća	$f_B$ (MN/m <sup>2</sup> )	35.0			

### Opterećenje

Oba modela, numerički i fizikalni testirani su na S-J komponentu potresa “El Centro”. Potres “El Centro” imao je magnitudu  $M=7.1$  i maksimalno ubrzanje  $a=0.326$  g, a predstavlja oscilacijski tip potresa, umjereno dugačkog i nepravilnog kretanja, s umjereno udaljenim epicentrom na čvrstom tlu. Potres je imao epicentar u blizini grada San Diego (1940. godine) i uzrokovao je velika razaranja [S.11, S.12, S.13, WWW.1, WWW.2]. Sjevero-južna komponenta akcelerograma ovog potresa prikazan je na Crtežu 4.P2.

U numeričkoj simulaciji djelovanje potresa je zadano okomito na dužu stranicu rezervoara.



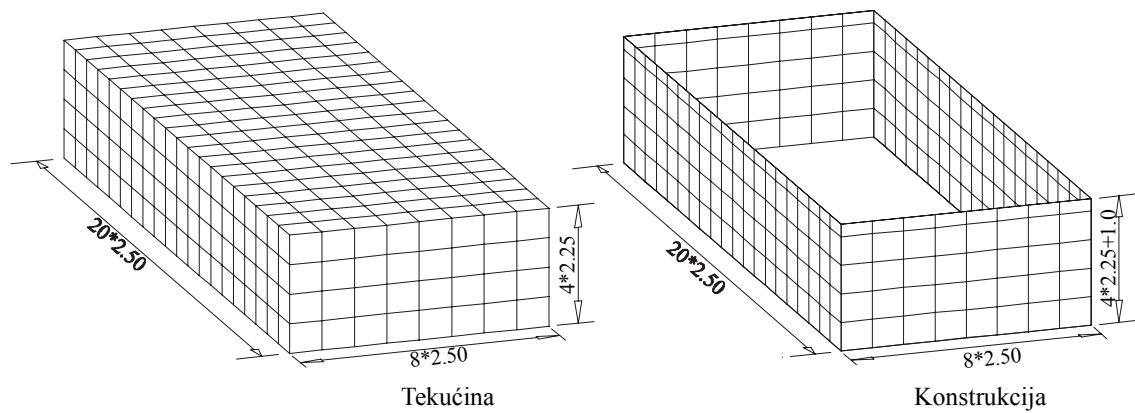
**Crtež 4.P2** – Akcelerogram potresa “El Centro”, komponenta S-J

### Numerički model

Pravokutni rezervoar modeliran je konačnim 9-čvornim elementima ljske. Tekućina je modelirana 27-čvornim “brick” elementima. Mreža konačnih elemenata prikazana je na Crtežu 4.P3. Pretpostavljeno je da je rezervoar nepomično pričvršćen za podlogu.

Svaki element ljske se sastoji od 5 slojeva (layera) betona, bez armature. Beton je, kako je ranije naglašeno, simuliran elastoplastičnim modelom s jednakim ponašanjem u tlaku i vlaku.

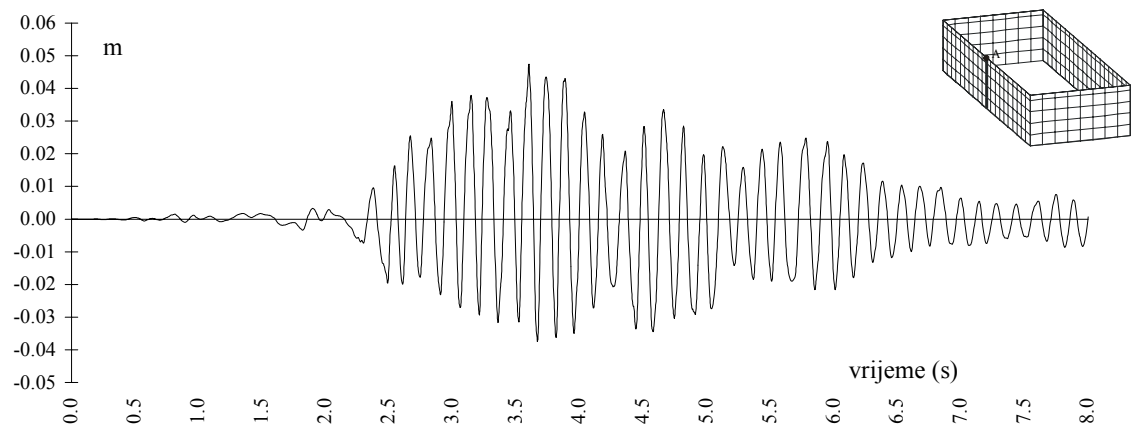
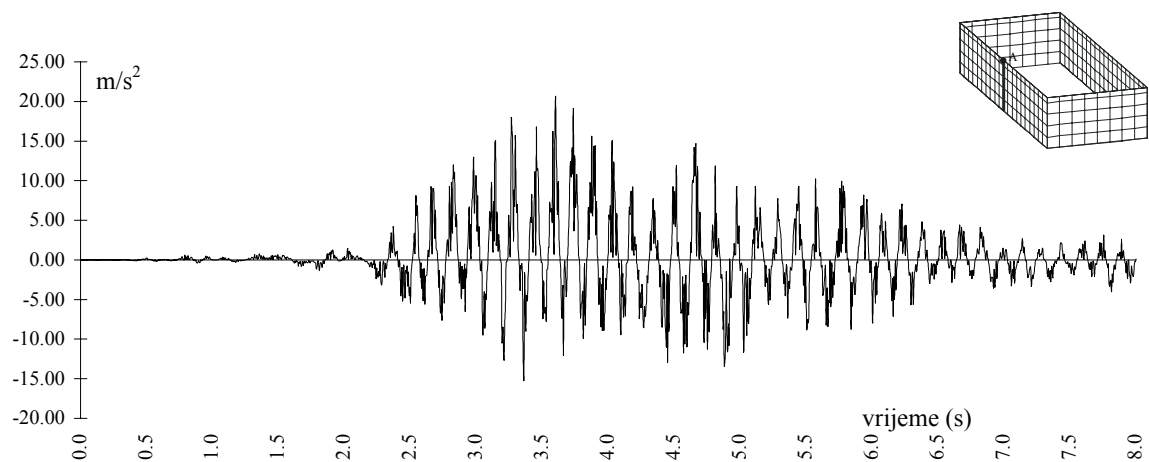


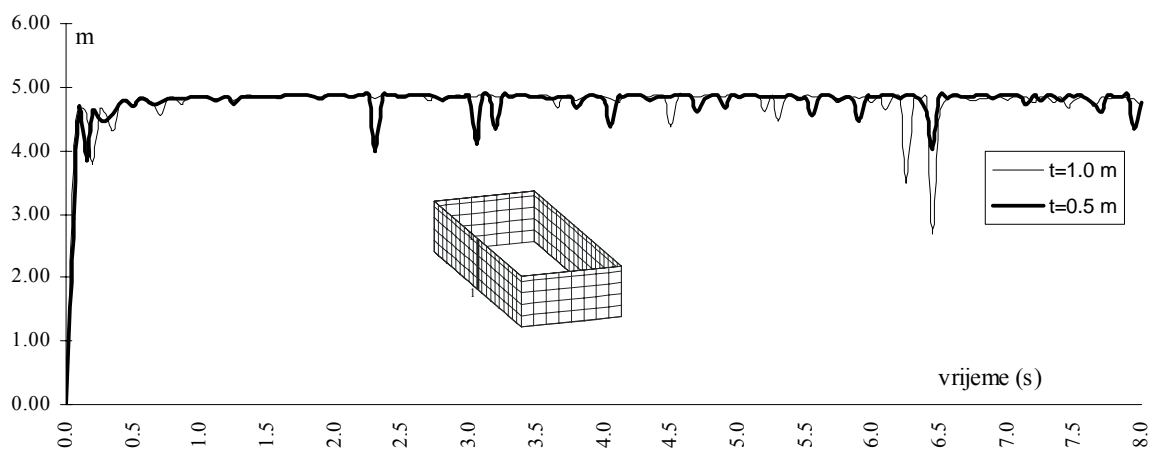
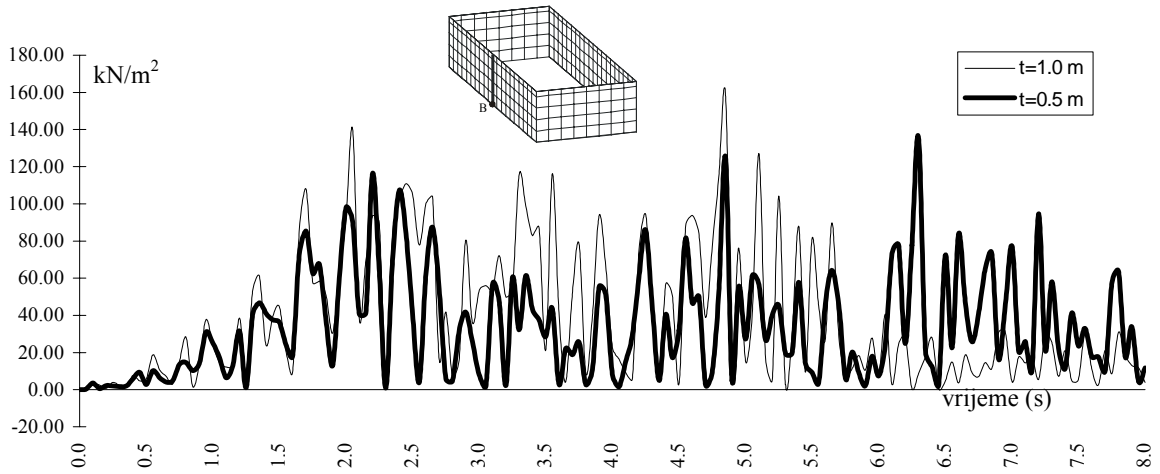
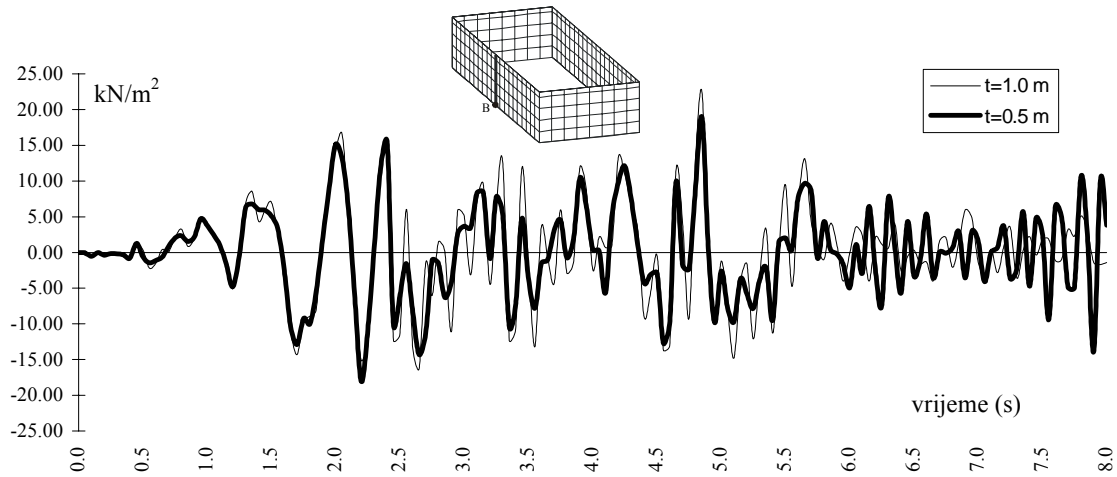


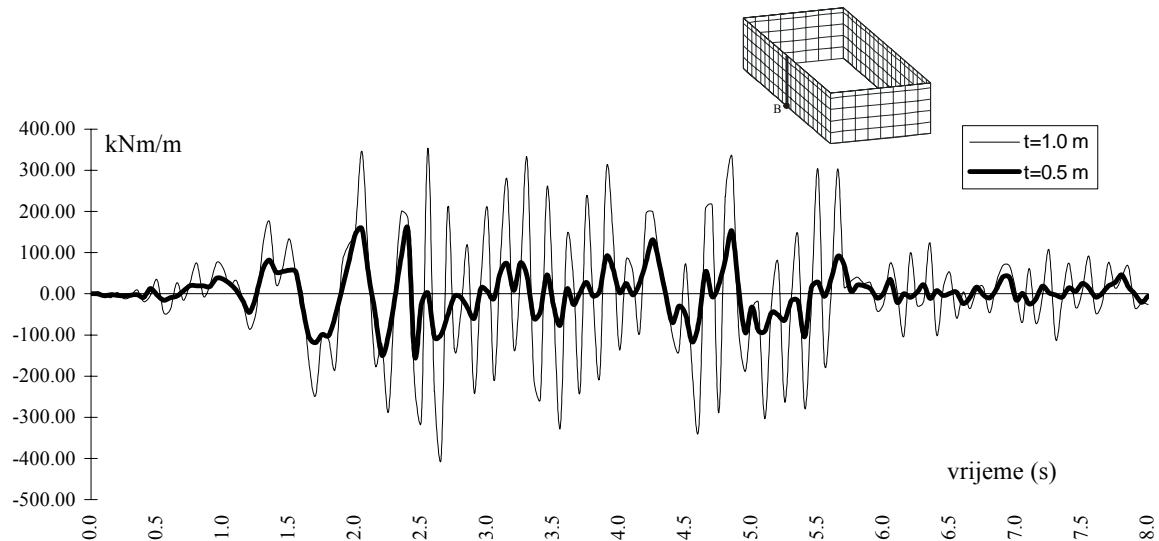
Crtež 4.P3 - Prikaz mreže konačnih elemenata

Rezultati

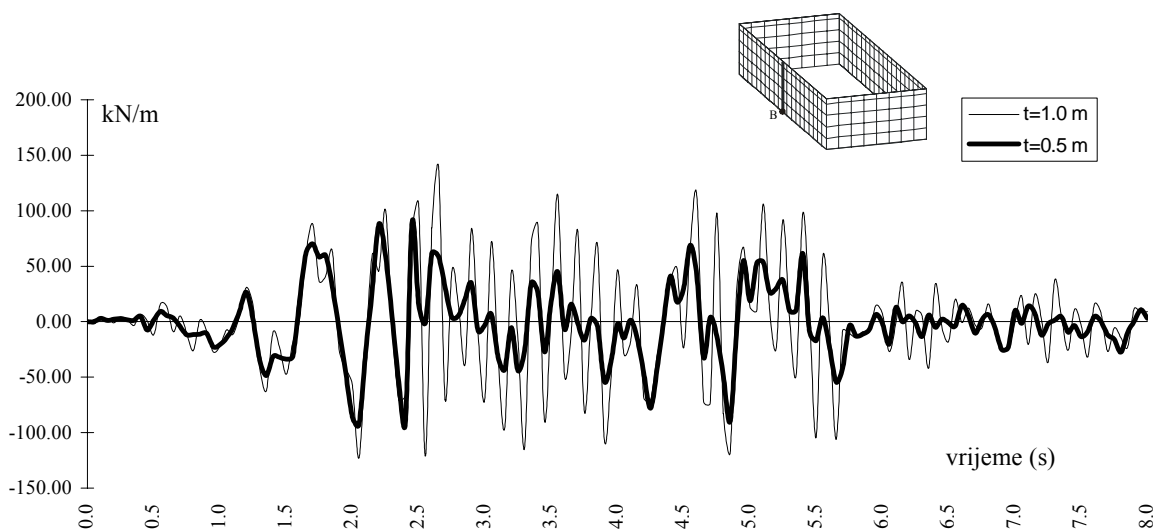
Neki rezultati numeričke simulacije prikazani su u nastavku.

Crtež 4.P4 – Pomak stjenke rezervoara u vremenu u točki A ( $t=1.0$  m)Crtež 4.P5 – Akceleracija stjenke rezervoara u vremenu u točki A ( $t=1.0$  m)





*Crtež 4.P9 – Moment na bazu u vremenu (točka B)*



*Crtež 4.P10 – Poprečna sila na bazu u vremenu (točka B)*

Uspoređujući prikazane rezultate s onima prezentiranim u lit. [K.2, K.3], može se zapaziti njihova prilična podudarnost. Odstupanja su posljedica nemogućnosti prezentiranog modela u obuhvaćanju valovanja, tj. promjene površine vode u vremenu, što je za ovakve, relativno male sustave od priličnog značaja. Naime, prema lit. [K.2, K.3] izdizanje nivoa tekućine na zidu je i do 0.5 m, što je značajno u odnosu na dimenzije rezervoara.

Može se zaključiti da razvijeni model daje prilično dobru globalnu sliku ponašanja ovakvih sustava, ali ne može u potpunosti opisati sve efekte koji se u njima javljaju.

### **Primjer 2 – Analiza brane Grančarevo**

#### Općenito

Brana Grančarevo je specifični hidrotehnički objekt tipa lučne brane. Nalazi se u dolini rijeke Trebišnjice, koju pregrađuje i tvori akumulaciju Bileća kapaciteta oko 1.3 km<sup>3</sup>.

Pregradni profil brane nalazi se u vapnencima, koji su na lijevoj obali do znatne dubine okršeni. Slojevitost tih vapnenaca vrlo je izražena i debljina slojeva se kreće u granicama od 0.2 do 1.0 m. Slojevi imaju generalni pravac pada od lijeve prema desnoj dolinskoj strani. U vapnencima se mjestimično javljaju laporovito-glinoviti i glinovito-ugljenoviti prosljoci. Složene geološke, inženjersko-geološke i geotehničke karakteristike pregradnog profila uvjetovale su vrlo detaljnu studiju oblika brane i modelska ispitivanja. Modelska statička i dinamička ispitivanja na fizikalnom modelu (u omjeru 1:100) izvršena su u ISMES-u (Istituto Sperimentale Modelli e Strutture), Bergamo, Italija [S.11, S.12, S.13].

Nakon izgradnje, u tijelu brane su postavljeni instrumenti za registraciju jakih potresa. Tokom 1986. godine instrumenti su registrirali pojavu potresa u okolini brane, kao i ponašanje samog objekta u toku te prirodne pojave. Iako je registrirano podrhtavanje tla bilo relativno slabijeg intenziteta, dobiveni rezultati o ponašanju brane višeputa su poslužili za korelaciju rezultata s matematičkim modelima. Institut za zemljotresno inženjerstvo i inženjersku seizmologiju, Univerziteta “Kiril i Metodij”, Skopje, izvršio je više numeričkih simulacija na različitim modelima koje su uspoređene s podacima mjerenim ‘in situ’ [B.14]. Svi razvijeni modeli uključivali su samo konstrukciju (branu), a tekućina je tretirana kao dodatna masa na konstrukciji. U ovom primjeru modeliran je složeni sustav tekućina-konstrukcija, te izvršena numerička simulacija registriranim potresom.

#### Geometrijske karakteristike modela

Na Crtežu 4P.11 prikazan je tlocrt tijela brane s topologijom terena. Geometrijske karakteristike tijela brane, definirane su na osnovu podataka datih u lit. [B.14, \*.2, \*.3, \*.4]. Osnovne geometrijske karakteristike date su u obliku tabelarnih prikaza geometrijskih podataka pojedinih lukova. Na crtežima 4P.12 do 4P.18 prikazane su osnovne vrijednosti geometrije lukova počevši od luka u kruni brane (relativna kota 123.0 m), do luka na relativnoj koti 0.0 m.

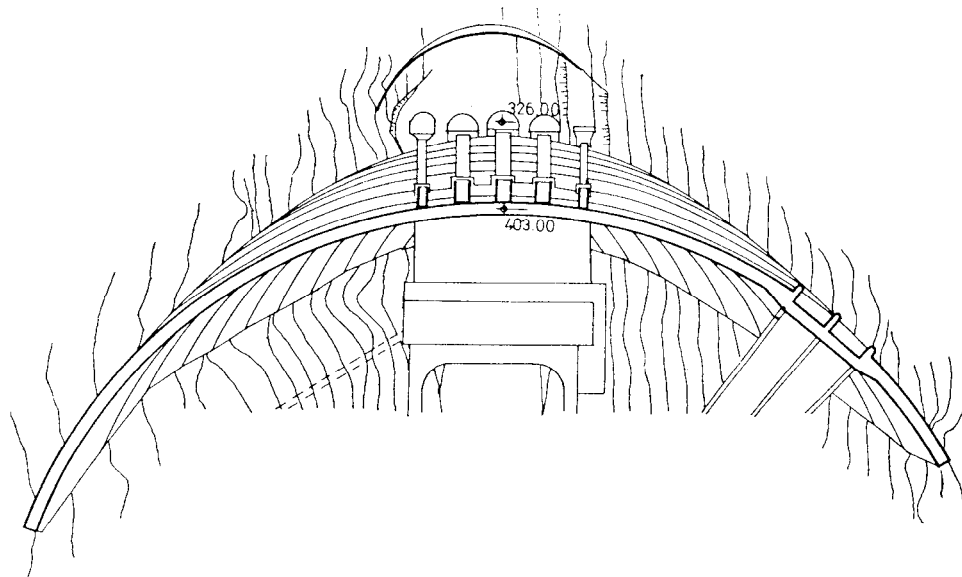
Brana je projektirana tako da je po rubu oslanjanja brane u stjenskoj masi izvedena perimetralna fuga [S.11, S.12, S.13]. Osnovne karakteristike brane su:

- Dužina luka u kruni: 439.307 m,
- Debljina luka u kruni: 4.60 m,
- Debljina presjeka centralne konzole u dnu: 26.91 m,
- Visina brane od kontakta centralnog presjeka sa stijenom do krune: 123.0 m.

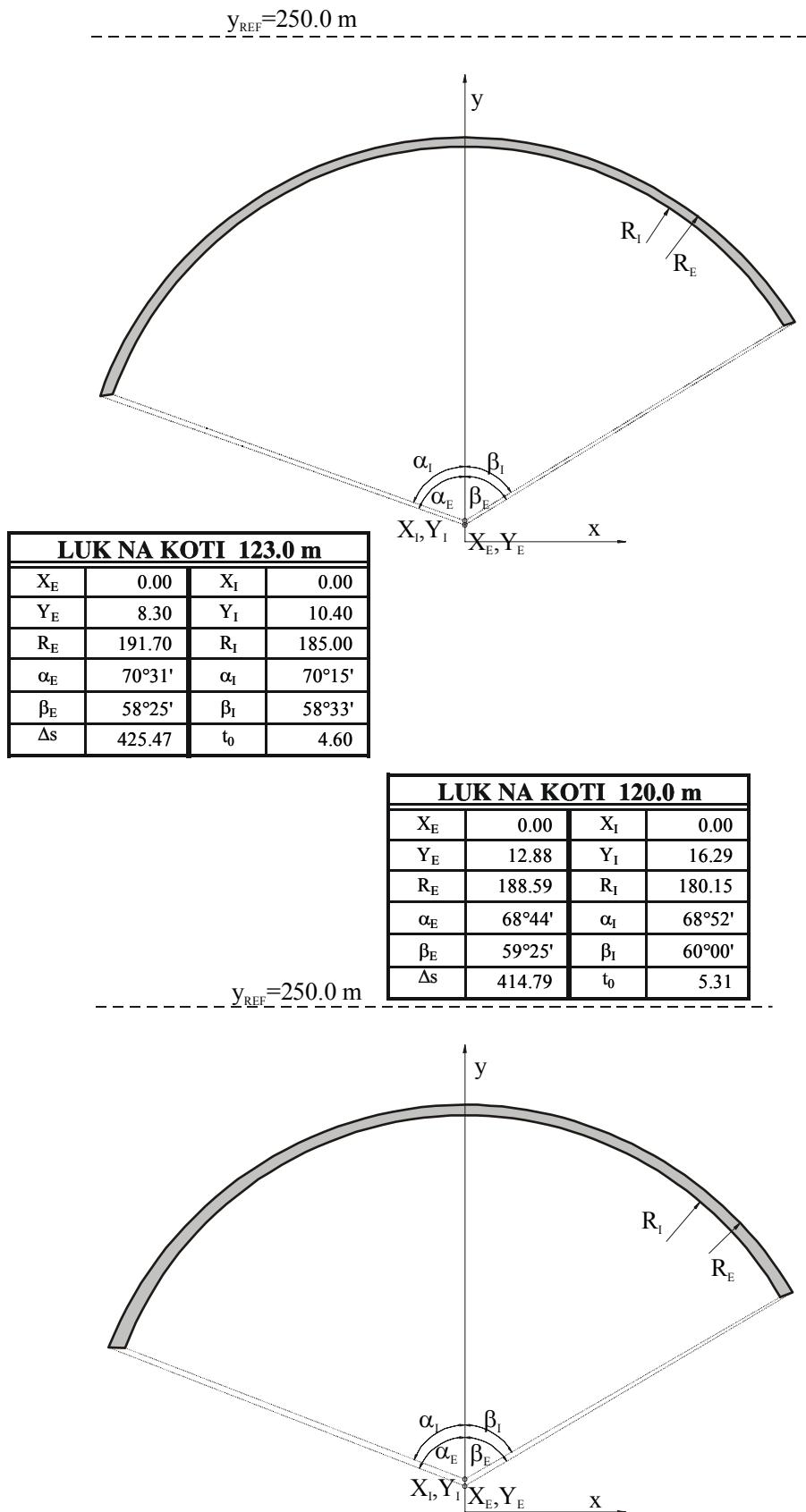
Brana je, prema tome, ugrađena u relativno široki otvor doline s obzirom na njenu visinu.

Na Crtežu 4P.19 prikazane su projekcije lica intradosa i ekstradosa s tabelama koje sadrže podatke o ukopanosti brane u stijenu, a na Crtežu 4P.20 presjek kroz centralnu konzolu brane s geometrijskim karakteristikama.

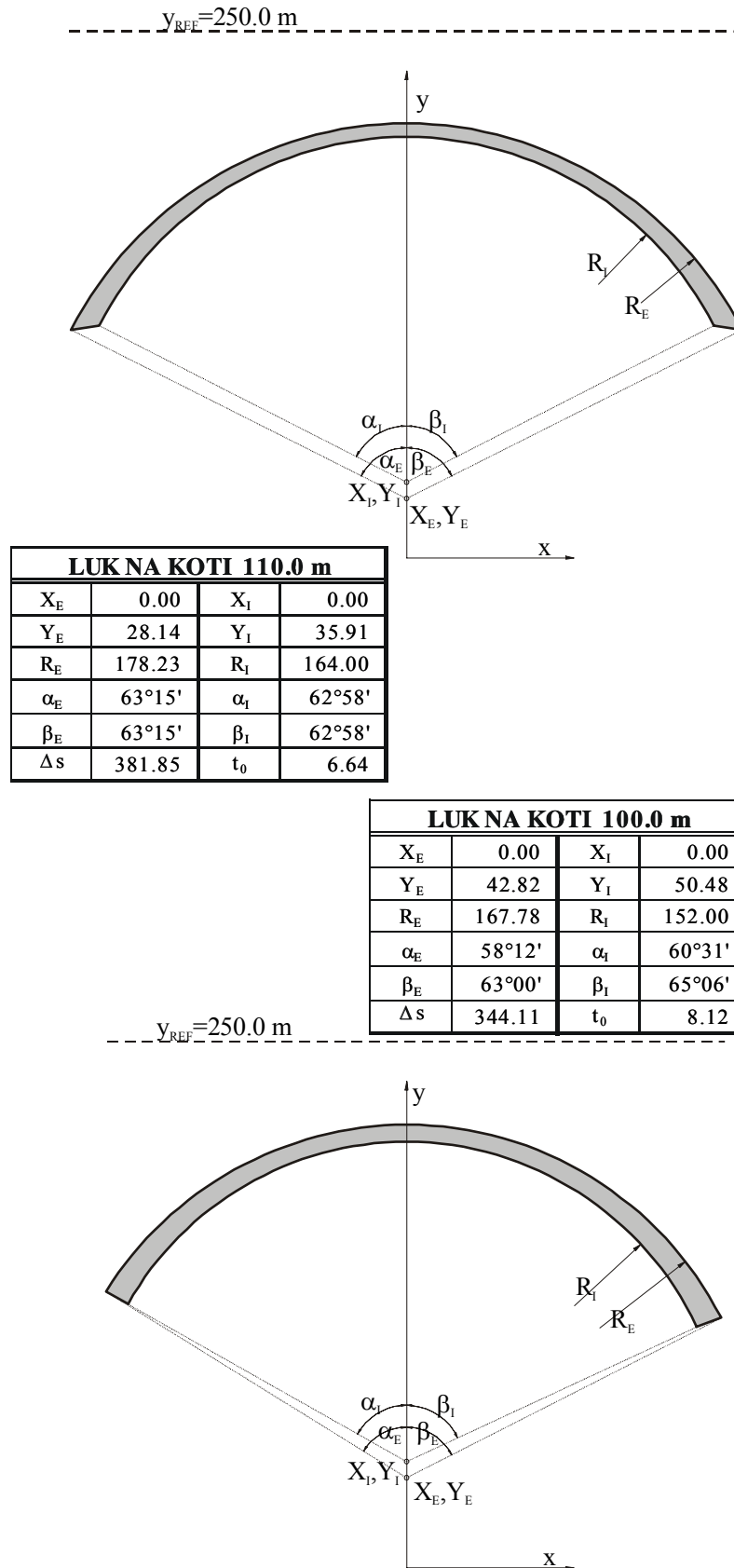
Za potrebe matematičkog modeliranja korištene su navedene veličine. Pri tome se težilo da se geometrijska odstupanja u naravi i modelu svedu na što manju moguću mjeru. Ovo je od osobite važnosti jer je tijelo brane relativno vitko u odnosu na proporcije i dimenzije pregradnog profila, te bi svako veće odstupanje u interpretaciji tijela brane moglo imati značajan utjecaj na rezultate analize. Analizirajući geometriju lukova primjetno je da su oni uglavnom projektirani pomoću tri centra, iako su na pojedinim kotama projektirani i pomoću jednog centra. Samo pregradno mjesto ima izvjesnu asimetričnost obala u odnosu na os simetrije tijela brane. Samo tijelo brane, izdvojeno perimetralnom fugom, je manje-više simetričnog oblika.



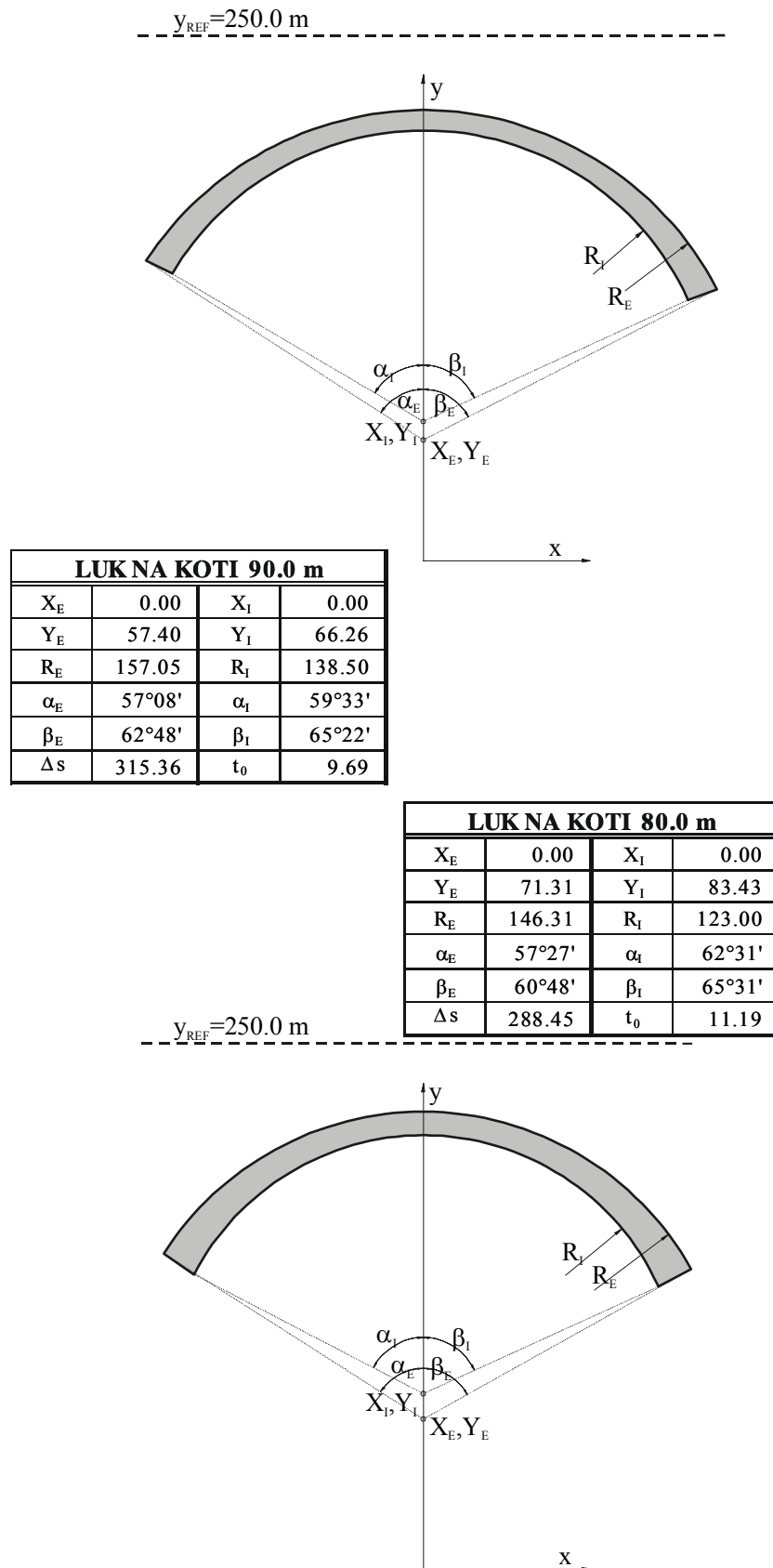
**Crtež 4.P11** – Tlocrt tijela brane s topologijom dijela terena [B.14]



Crtež 4.P12 – Prikaz elementa luka na kotama 123.0 i 120.0 [B.14]

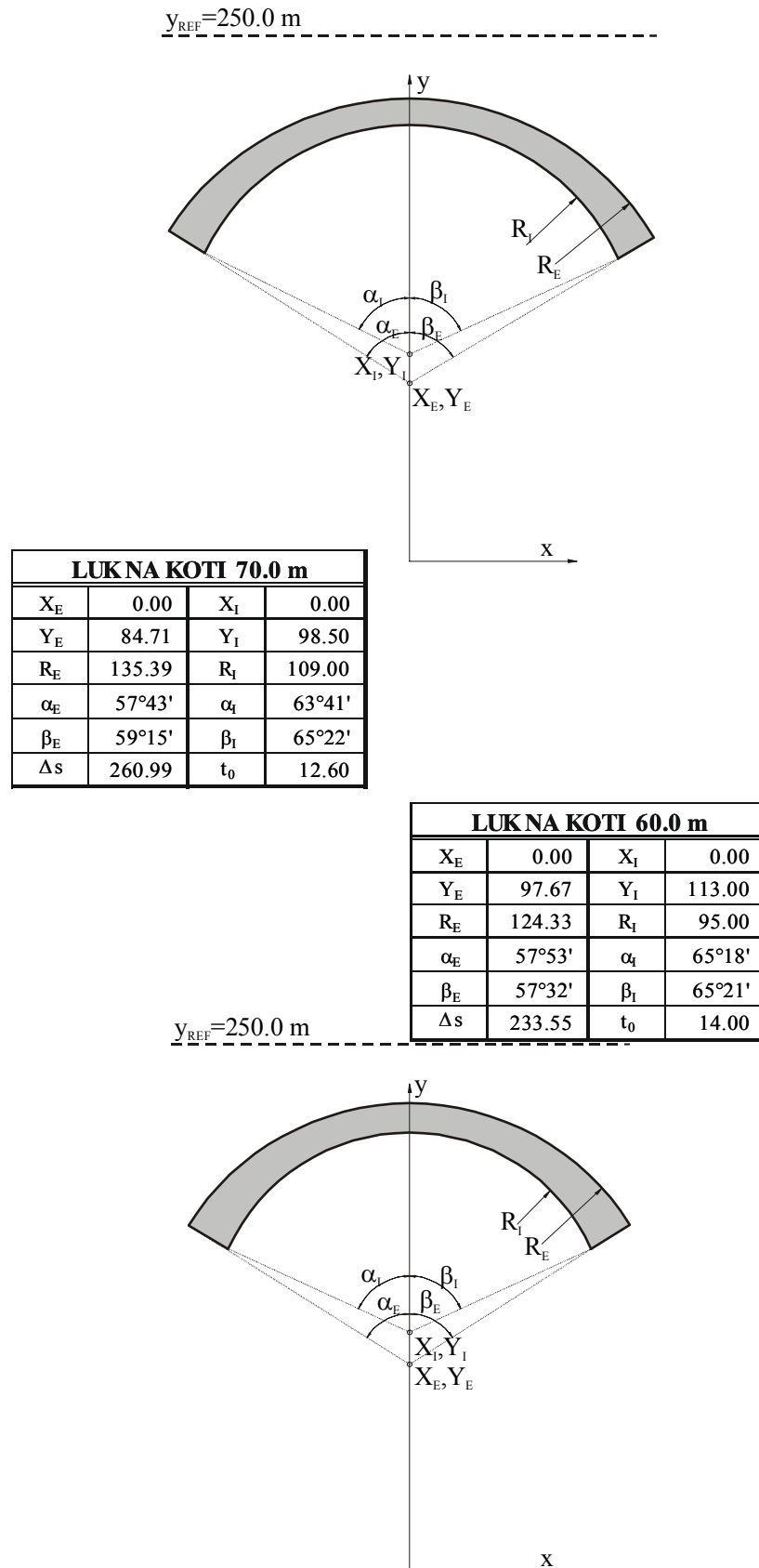


Crtež 4.P13 – Prikaz elementa luka na kotama 110.0 i 100.0 [B.14]

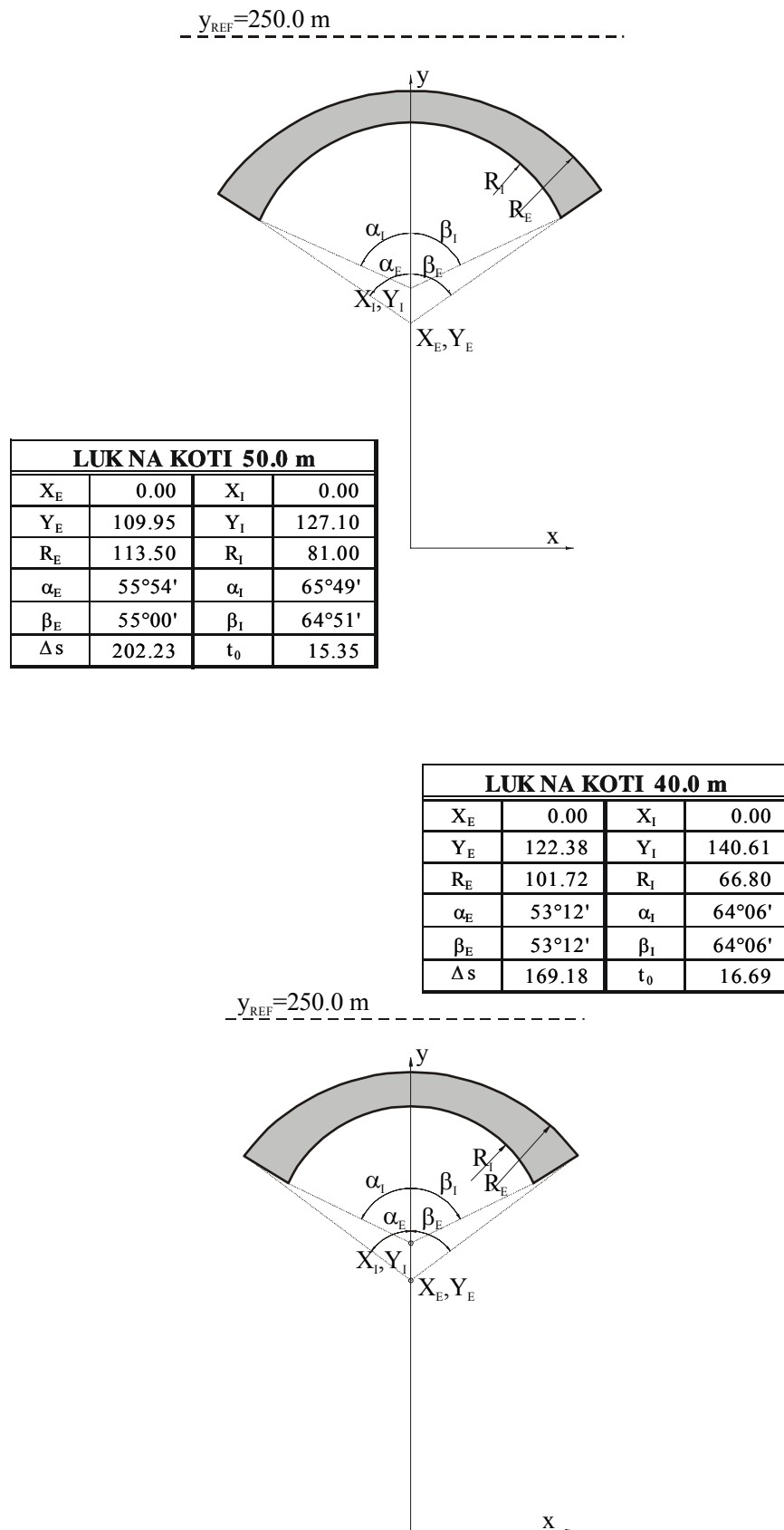


Crtež 4.P14 – Prikaz elementa luka na kotama 90.0 i 80.0 [B.14]

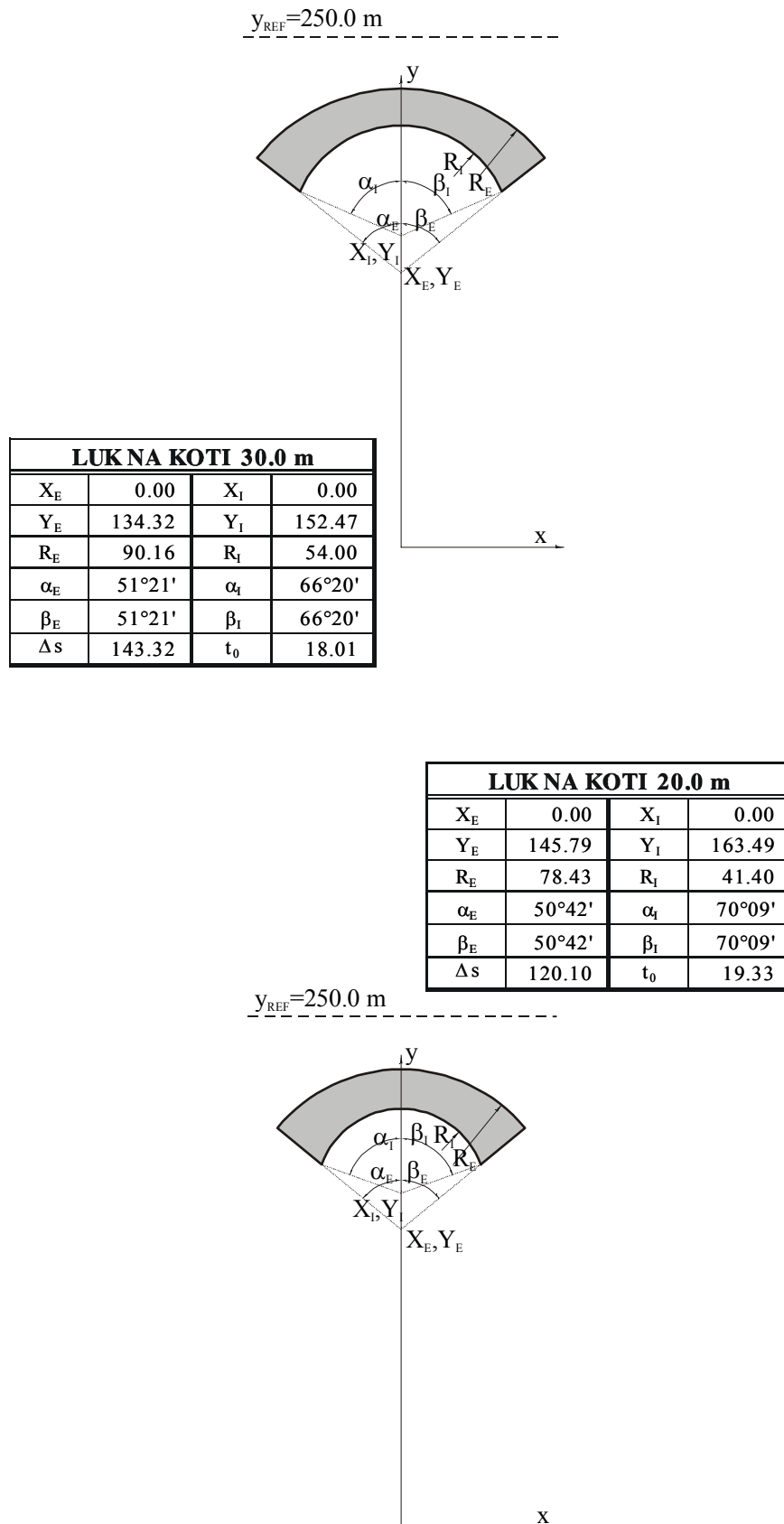




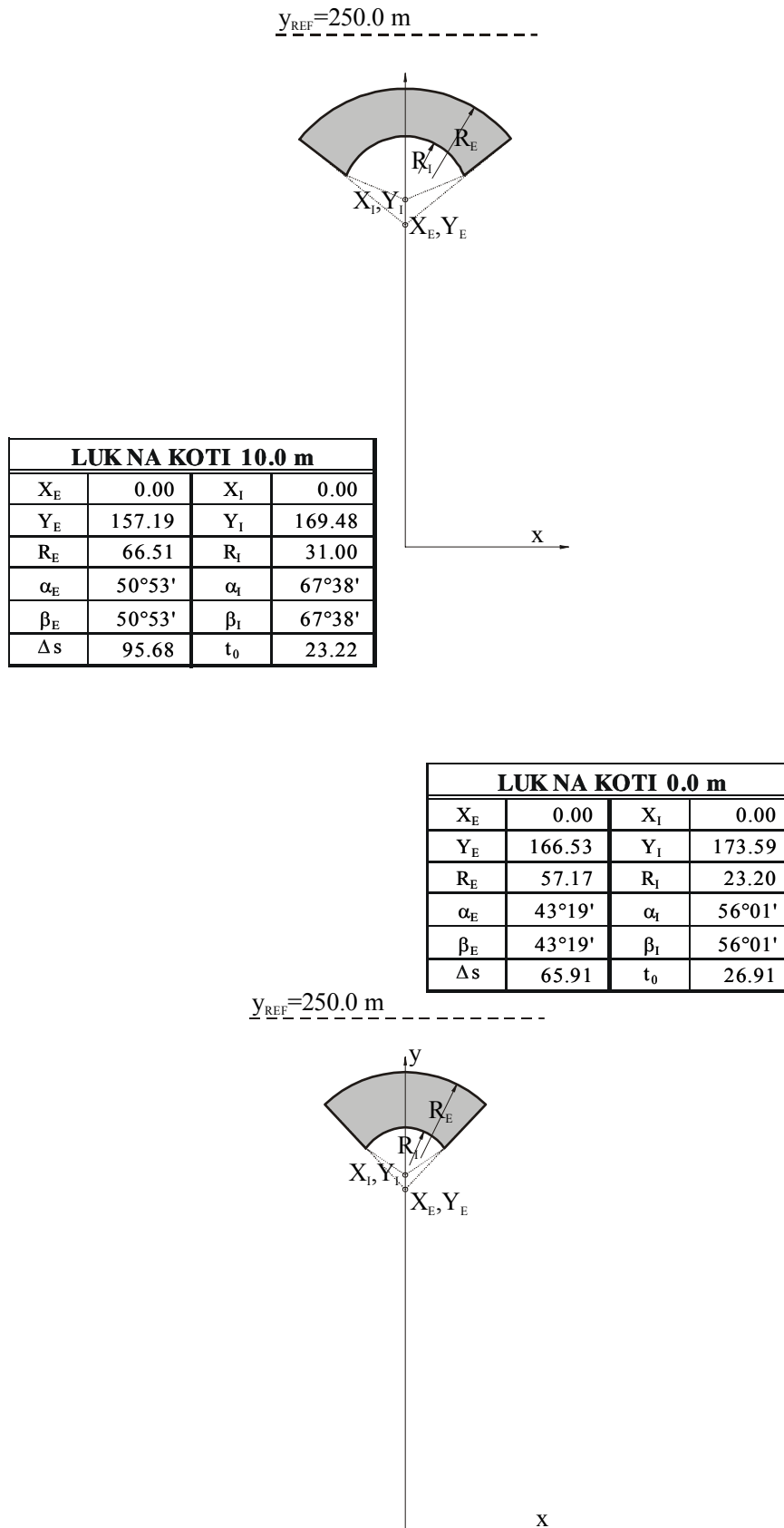
Crtež 4.P15 – Prikaz elementa luka na kotama 70.0 i 60.0 [B.14]



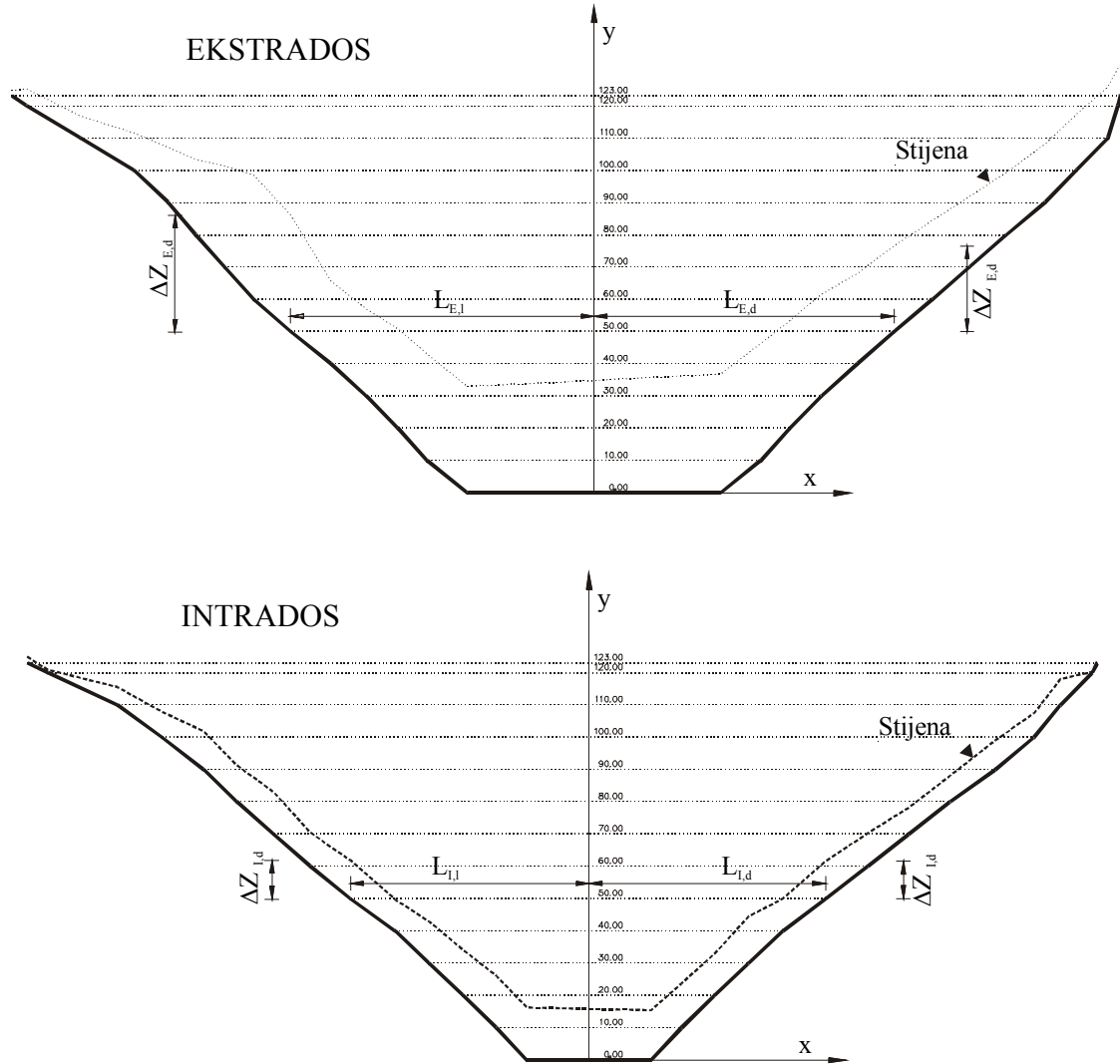
Crtež 4.P16 – Prikaz elementa luka na kotama 50.0 i 40.0 [B.14]



Crtež 4.P17 – Prikaz elementa luka na kotama 30.0 i 20.0 [B.14]

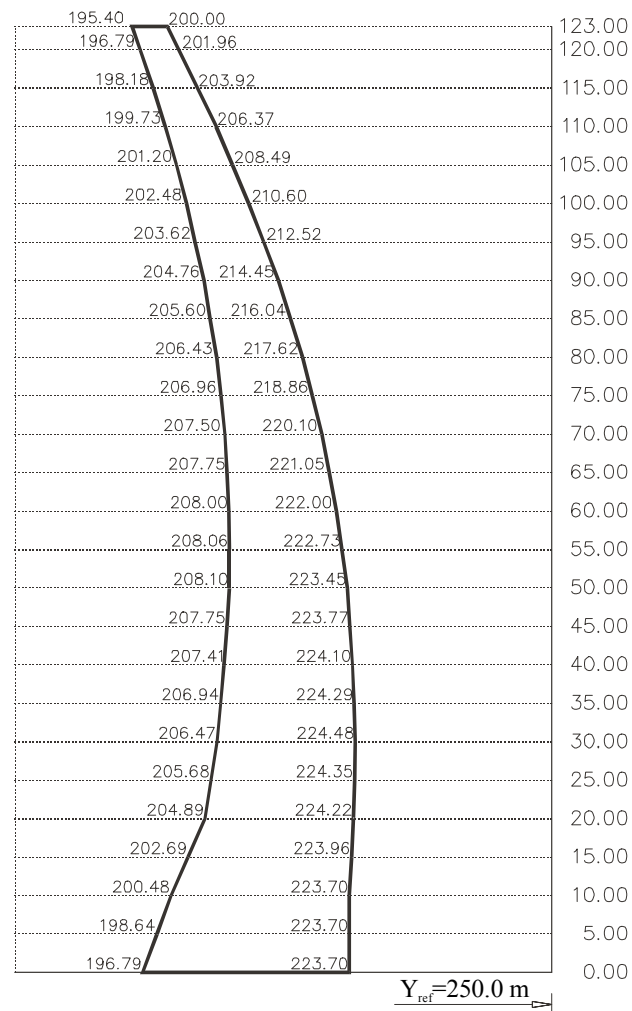


Crtež 4.P18 – Prikaz elementa luka na kotama 10.0 i 0.0 [B.14]



Z	R <sub>E</sub>	R <sub>I</sub>	α <sub>B</sub>	β <sub>B</sub>	α <sub>I</sub>	β <sub>I</sub>	L <sub>E,l</sub>	L <sub>E,d</sub>	L <sub>I,l</sub>	L <sub>I,d</sub>	ΔZ <sub>E,l</sub>	ΔZ <sub>E,d</sub>	ΔZ <sub>I,l</sub>	ΔZ <sub>I,d</sub>
0.00	57.10	23.20	43.32	43.32	56.03	56.03	39.17	39.17	19.24	19.24	32.99	36.83	16.30	15.45
10.00	66.51	31.00	50.89	50.89	67.64	67.64	51.61	51.61	28.67	28.67	32.92	36.29	16.08	13.75
20.00	78.43	41.40	50.71	50.71	70.15	70.15	60.70	60.70	38.94	38.94	30.78	33.39	14.09	12.96
30.00	90.16	54.00	51.35	51.35	66.34	66.34	70.41	70.41	49.46	49.46	26.91	31.55	12.90	14.50
40.00	101.72	66.80	53.20	53.20	64.10	64.10	81.45	81.45	60.09	60.09	25.66	27.91	9.79	10.06
50.00	113.50	81.00	55.90	55.00	65.83	64.86	93.98	92.97	73.90	73.33	36.06	26.55	11.91	11.61
60.00	124.33	95.00	57.89	57.54	65.30	65.35	105.31	104.91	86.31	86.34	38.42	24.49	10.45	10.25
70.00	135.39	109.00	57.73	59.25	63.69	65.38	114.48	116.36	97.71	99.09	31.35	21.84	13.08	8.20
80.00	146.31	123.00	57.46	60.81	62.52	65.53	123.34	127.73	109.12	111.95	23.31	19.31	11.31	8.12
90.00	157.05	138.50	57.14	62.80	59.55	65.37	131.92	139.68	119.40	125.90	17.05	17.99	11.86	9.06
100.00	167.78	152.00	58.21	63.00	60.52	65.11	142.47	149.49	132.32	137.88	11.52	17.27	7.88	7.39
110.00	178.23	164.00	63.25	63.25	62.97	62.97	159.16	159.16	146.09	146.09	6.78	15.69	5.53	8.01
120.00	188.59	180.15	68.74	59.42	68.87	60.00	175.76	162.36	167.64	156.01	5.18	11.69	0.89	0.24
123.00	191.70	185.00	70.52	58.43	70.26	58.56	180.49	163.01	174.01	157.45	1.64	9.33	1.91	-0.73

Crtež 4.P19 – Projektija površina ekstradosa i intradosa u ravninu X-Z s prikazom linija terena [B.14]



Crtež 4.P20 – Geometrijske karakteristike centralne konzole [B.14]

U Tablici P2 prikazane su materijalne karakteristike betona i vode korištene u analizi. Sve analize izvršene su s nelinearnim modelom materijala konstrukcije i nelinearnom tekućinom.

Tablica P2 - Osnovne materijalne karakteristike

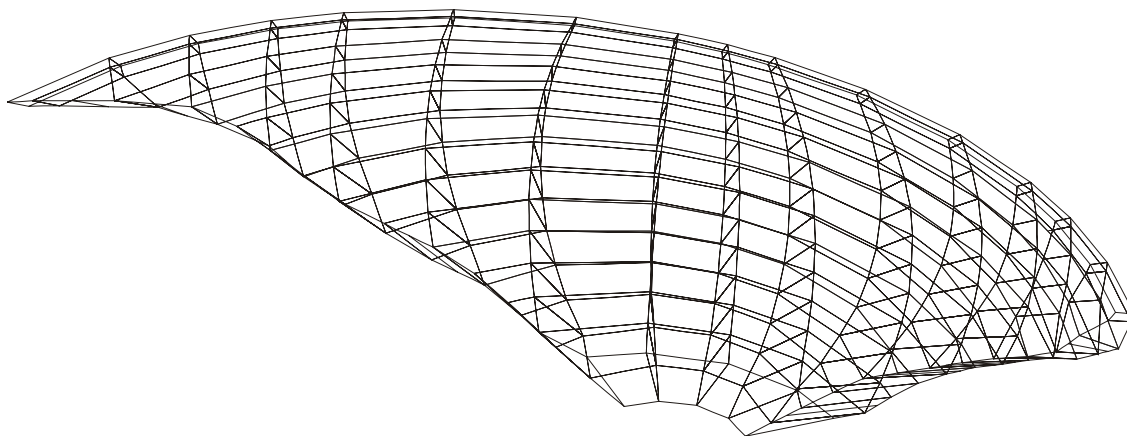
Beton			Voda		
Modul elastičnosti	$E_B$ (GN/m <sup>2</sup> )	30.0	Brzina zvuka	$c_s$ (m/s)	1430.0
Poisson-ov koeficijent	$\nu_b$	0.20	Gustoća	$\rho_a$ (kN/m <sup>3</sup> )	10.0
Gustoća	$\rho_b$ (kN/m <sup>3</sup> )	24.0			
Tlačna čvrstoća	$f_B$ (MN/m <sup>2</sup> )	25.0			
Vlačna čvrstoća	$f_z$ (MN/m <sup>2</sup> )	2.5			
Deformacija pojave puk.	$\epsilon_t$ (‰)	0.083			
Gran. rač. vl. deform.	$\epsilon_{tu}$ (‰)	1.7			
Gran. rač. posm. def.	$\epsilon_{sh}$ (‰)	1.7			

### Numerički model

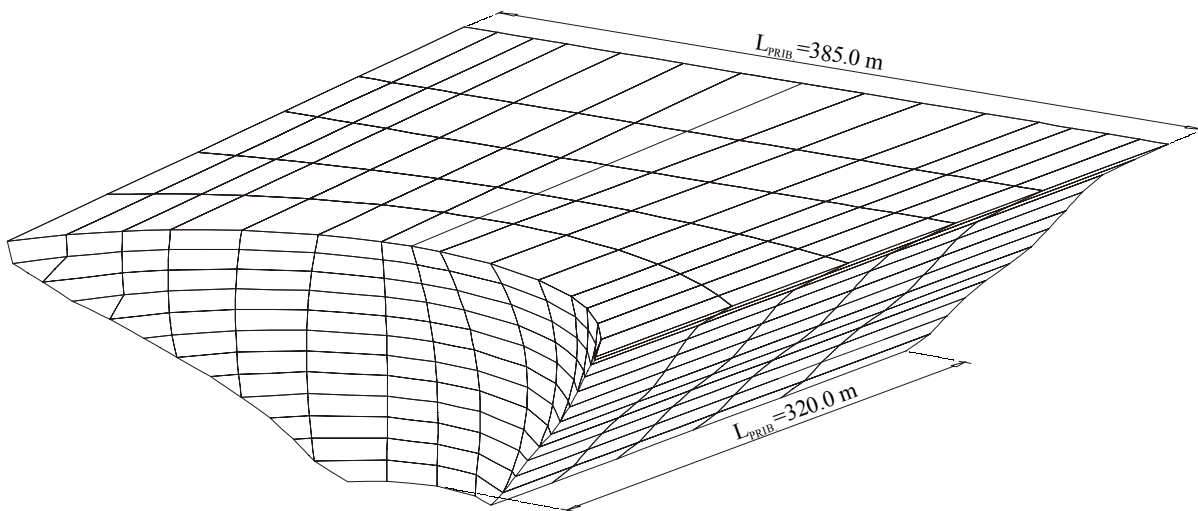
Na Crtežima 4P.21 i 4P.22 prikazane su mreže konačnih elemenata za konstrukciju (branu) i akumulaciju (vodu). Za diskretizaciju brane korišteni su 9-čvorni elementi ljuske, dok je akumulacija (voda) diskretizirana 27-čvornim 'brick' elementima. Svaki element ljuske se sastoji od 6 slojeva (layera) betona. Mreža konačnih elemenata za branu (Crtež 4P.21) prikazana je uključujući debljinu brane.

Zbog specifičnosti geometrije brane, na rubovima brane konačni elementi su značajnije deformirani, ali pošto su ti čvorovi uglavnom pridržani to ne utječe znatno na kvalitetu rješenja.

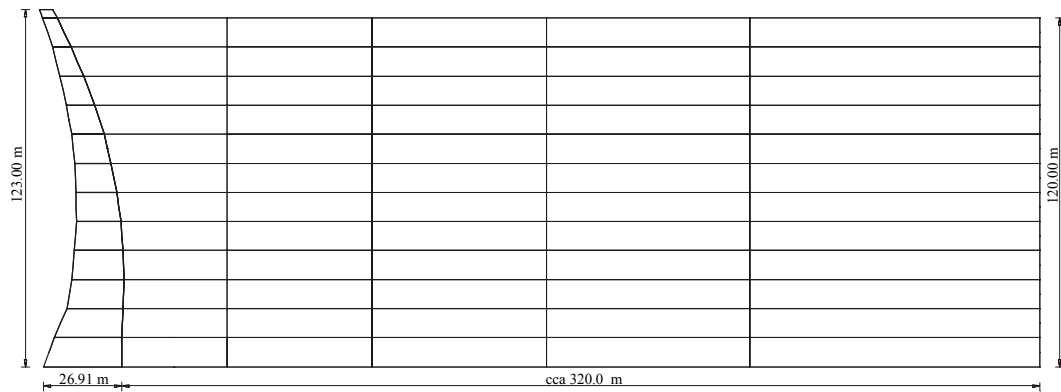
Na Crtežu 4P.23 prikazan je presjek kroz mrežu konačnih elemenata u centralnoj konzoli.



**Crtež 4.P21** – Prikaz mreže konačnih elemenata za branu



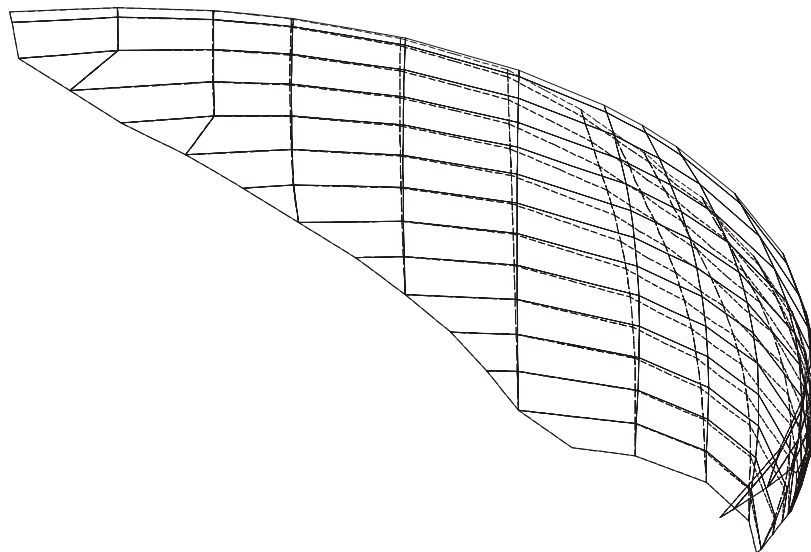
**Crtež 4.P22** – Prikaz mreže konačnih elemenata za vodu (akumulaciju)



**Crtež 4.P23** – Presjek kroz mrežu konačnih elemenata (brana i akumulacija) centralnoj konzoli

### Opterećenje i rezultati

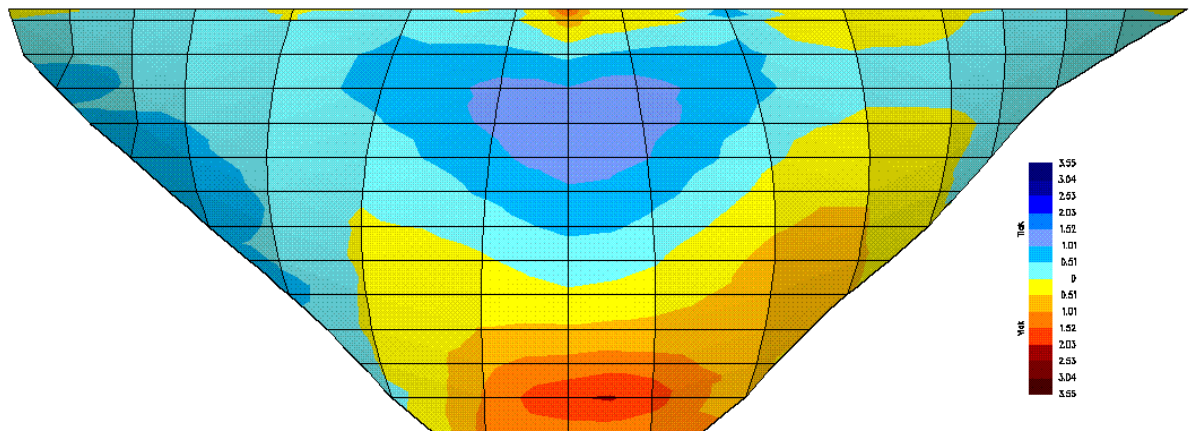
Brana je prvo analizirana za opterećenje vlastitom težinom i hidrostatičkim tlakom. Nivo vode u akumulaciji je na relativnoj koti 120.0 m (3.0 m niže od krune brane). Polje pomaka za ovo opterećenje je relativno malo i, u kruni brane, iznosi 0.62 cm u horizontalnom smjeru (okomito na krunu) i 0.54 cm u vertikalnom smjeru. Ovi rezultati se vrlo dobro slažu s rezultatima osmatranja brane (0.58 cm u vertikalnom smjeru i 0.68 cm u horizontalnom smjeru). Crtež 4P.24 prikazuje relativnu sliku pomaka brane za opterećenje vlastitom težinom i hidrostatičko opterećenje vodom.



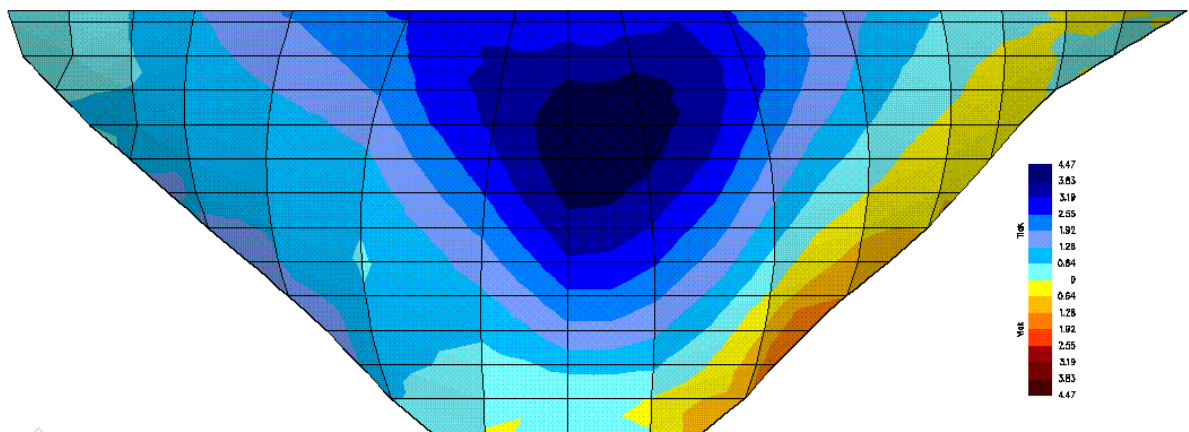
**Crtež 4.P24** – Prikaz pomaka brane od vlastite težine (uvećano 500 puta) i hidrostatičkog opterećenja

Na Crtežima 4P.25-4P.27 prikazano je stanje naprezanja na licu brane (ekstrados i intrados), za slučaj opterećenja vlastitom težinom i akumulacijom u mirnom stanju (hidrostatičko opterećenje).

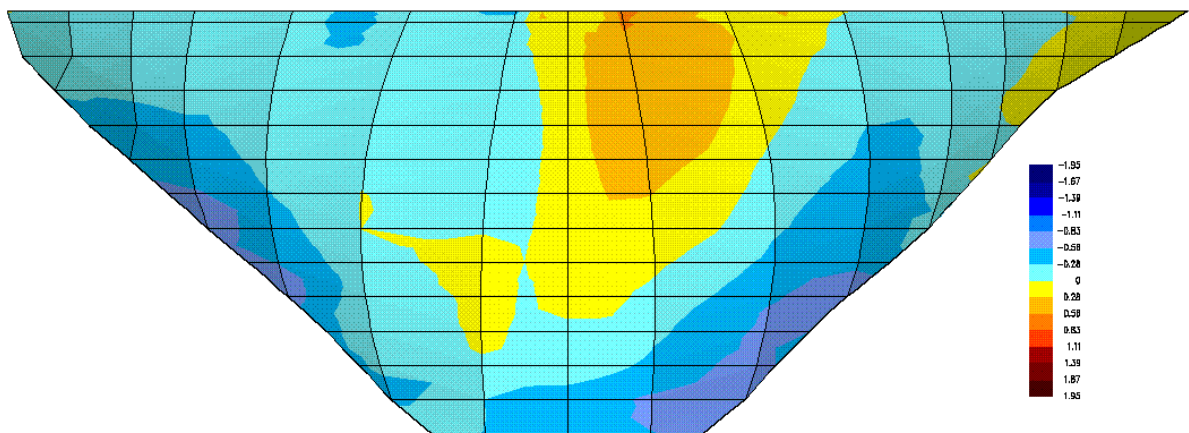




**Crtež 4.P25** – Vertikalna ( $\sigma_{yy}$ ) naprezanja na licu brane (ekstrados) od vlastite težine i hidrostatičkog opterećenja (MPa)

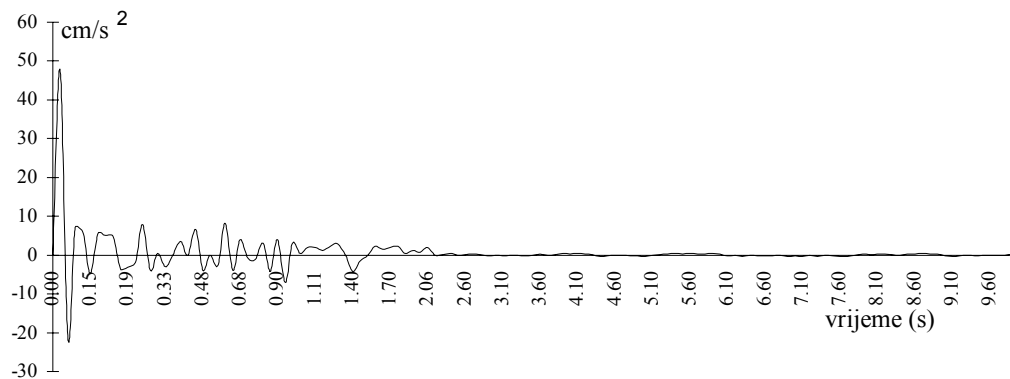


**Crtež 4.P26** – Horizontalna ( $\sigma_{xx}$ ) naprezanja na licu brane (ekstrados) od vlastite težine i hidrostatičkog opterećenja (MPa)



**Crtež 4.P27** – Posmična ( $\tau_{xy}$ ) naprezanja na licu brane (ekstrados) od vlastite težine i hidrostatičkog opterećenja (MPa)

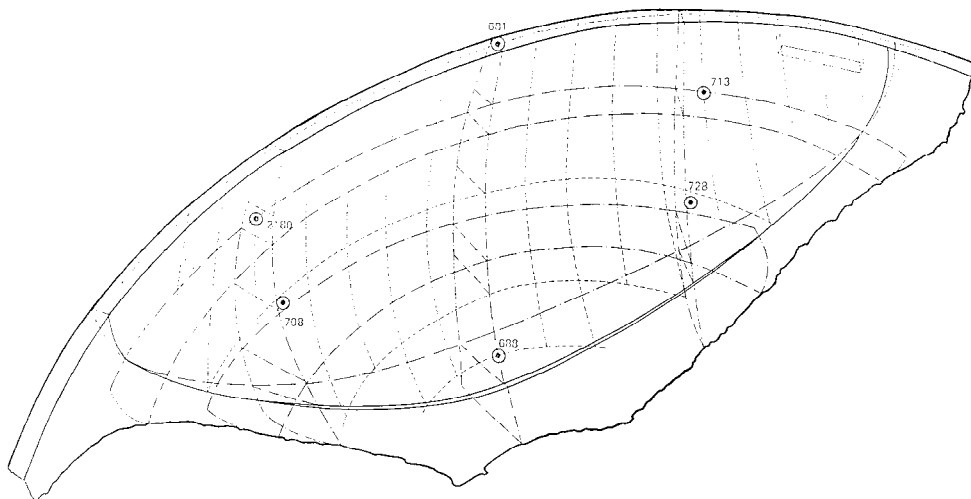
U nastavku, koristeći dobivene rezultate kao početno stanje, brana je opterećena potresnim opterećenjem čiji je akceleroگرام prikazan na crtežu 4P.28. Naime, kako je već napomenuto, tijekom 1986. godine branu je pogodio potres lokalnog karaktera koji je zabilježen na akceleroграфu u tijelu brane.



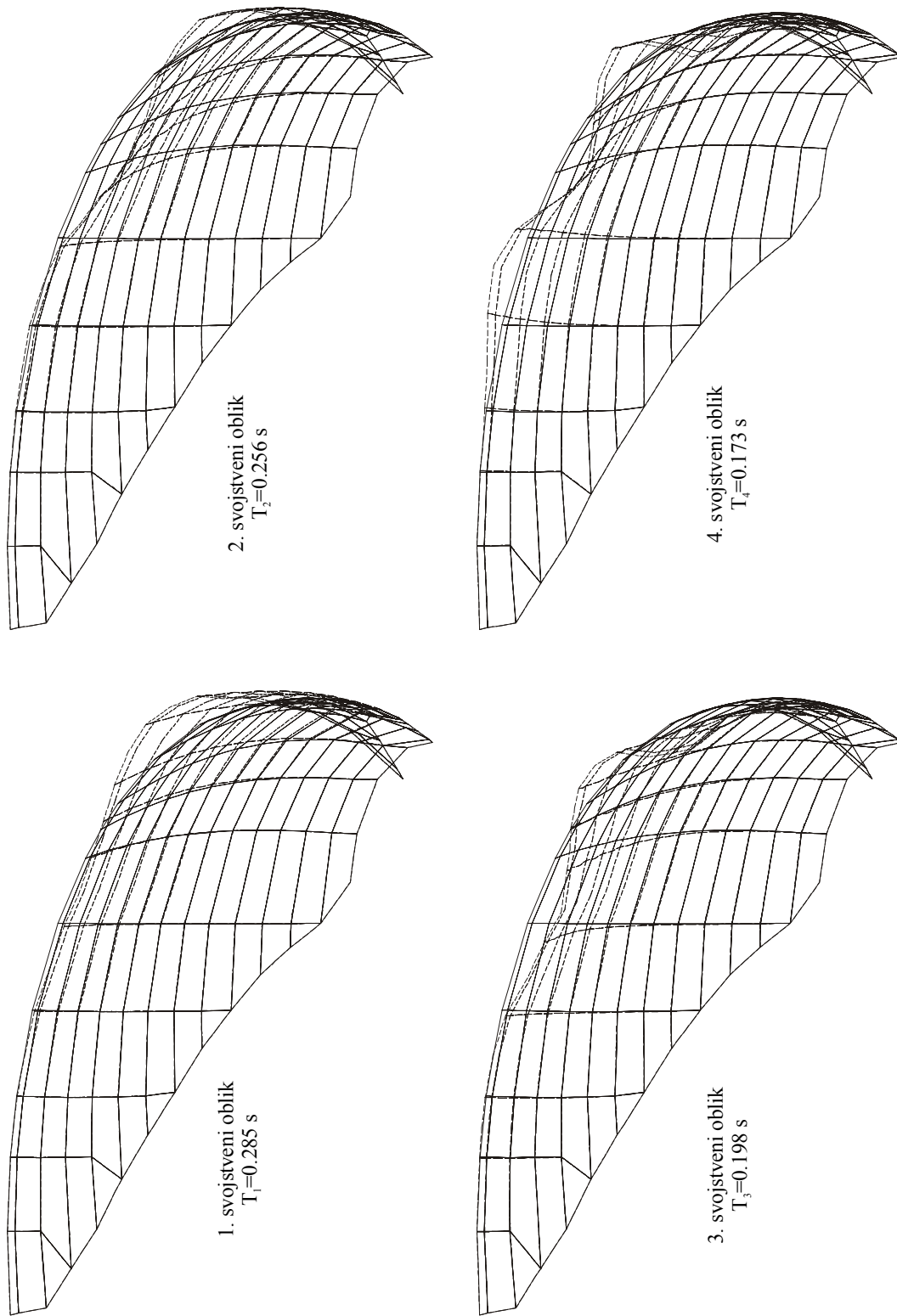
**Crtež 4.P28** – Akceleroگرام potresa na branu Grančarevo, komponenta N11W

Na crtežu 4P.29 dat je prikaz aksonometrijskog izgleda brane s označenim pozicijama postavljenih instrumenata za registraciju potresa. Registrirana akceleracija dobivena instrumentom pod brojem 688 korištena je kao akceleracija kretanja tla (pobuda) duž kanjona pregradnog mjesta. Vrh akceleracije iznosi  $47.8 \text{ cm/s}^2$ . Akceleracija registrirana instrumentom pod brojem 681 (kruna brane) iskorištena je za usporedbu izmerenih podataka i numeričkih rezultata.

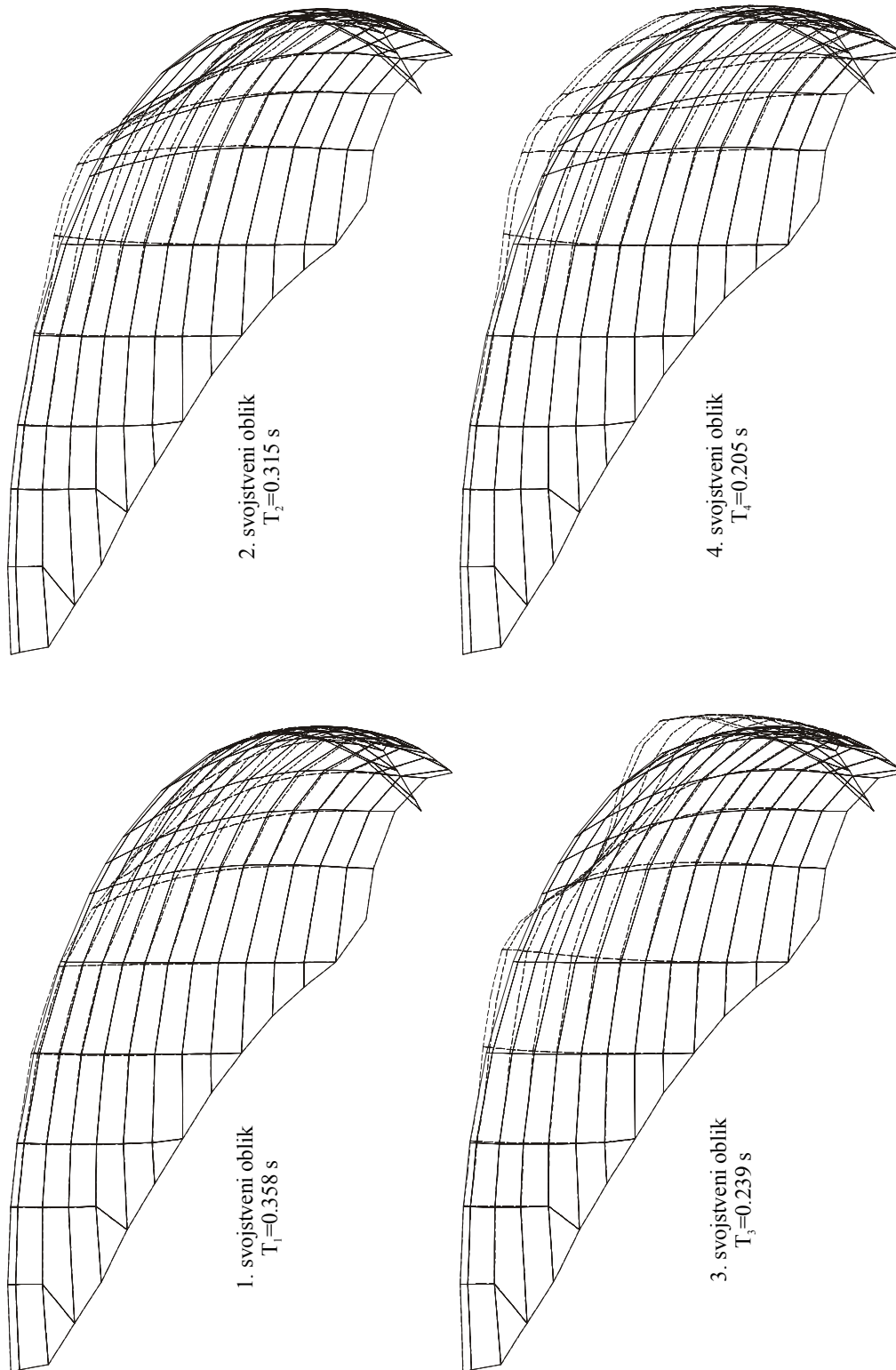
Primjenjujući prethodno prikazani model analizirana je brana i pripadni dio akumulacije. Neki od rezultata prikazani su u nastavku.



**Crtež 4.P29** – Aksonometrijski izgled brane s prikazom položaja akceleroграфa [B.14]



Crtež 4.P30 - Dinamičke karakteristike brane Grančarevo (bez međudjelovanja)

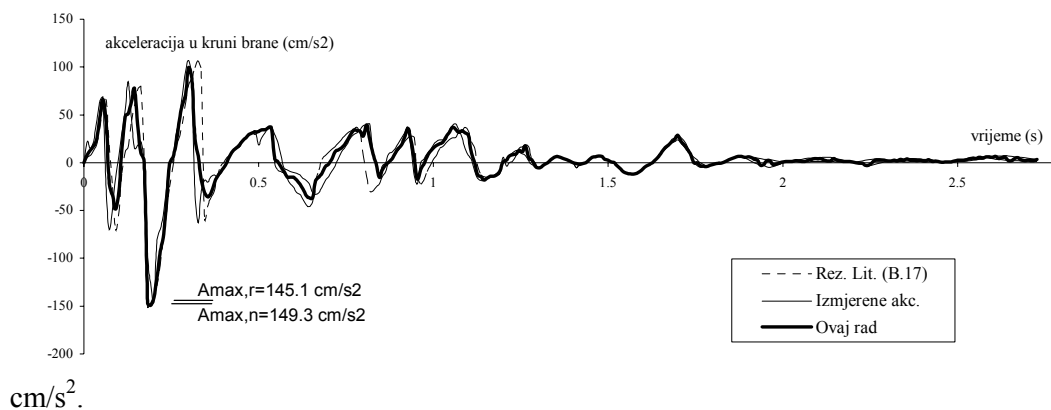


Crtič 4. P31 - Dinamičke karakteristike brane Grančarevo (sa međudjelovanjem)

Da bi se odredile dinamičke karakteristike brane prvo je izvršena modalna analiza. Analiza je izvršena za samu branu (prazna akumulacija) i za branu i tekućinu zajedno (puna akumulacija). Rezultati analize s prikazom prva četiri svojstvena vektora prezentirani su na Crtežima 4.P30 (analiza svojstvene zadaće same konstrukcije) i 4.P31 (analiza svojstvene zadaće konstrukcije i akumulacije).

Na temelju dobivenih podataka, usvojen je vremenski korak dinamičke analize  $\Delta t=0.003$  s, što predstavlja približno  $1/100 T_1$ . Vremenska integracija jednadžbi gibanja izvršena je implicitnom metodom ( $\gamma=0.5$ ;  $\beta=0.25$ ) za vodu i konstrukciju.

Na Crtežu 4P.32 dan je prikaz početnog dijela akcelerograma u kruni brane. Na istom crtežu dani su rezultati mjerenja na samoj brani, rezultati numeričkog modela prikazani u lit. [B.14], te rezultati ovog rada. Može se zaključiti da je podudarnost dijagrama zadovoljavajuća. Maksimalna akceleracija registrirana na brani je  $A_{\max,r}=145.1$   $\text{cm/s}^2$ , dok je maksimalna akceleracija dobivena numeričkim postupkom  $A_{\max,n}=149.3$   $\text{cm/s}^2$ .

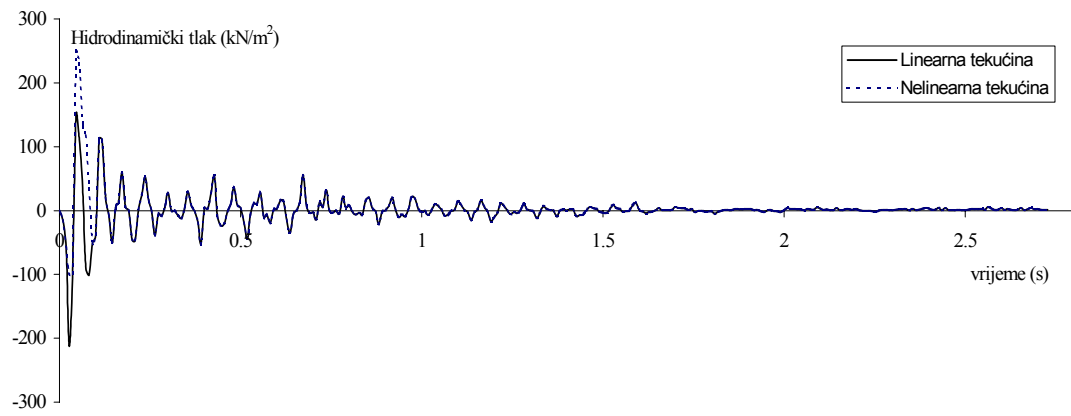


**Crtež 4.P32** – Odgovor u kruni brane na zadanu pobudu

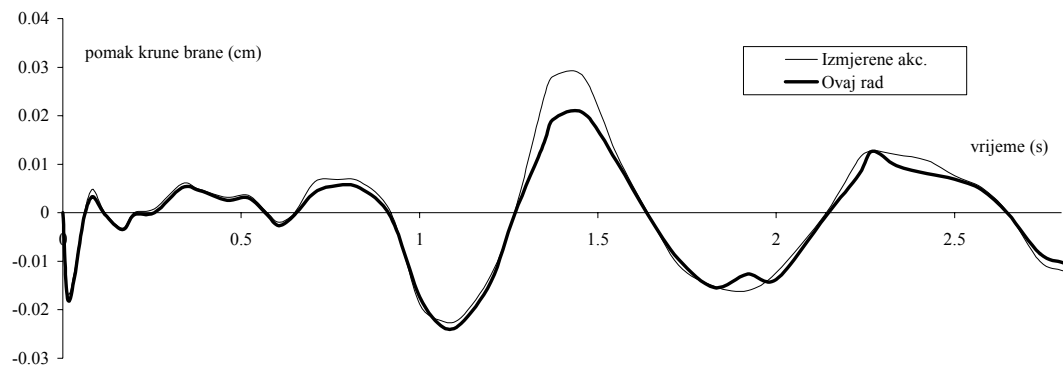
Promjena hidrodinamičkih tlakova u vremenu za točku na dnu centralne konzole prikazana je na Crtežu 4.P33, a pomak krune u vremenu na Crtežu 4.P34.

Naprezanja u trenutku djelovanja maksimalne sile na ekstradosu prikazana su na Crtežima 4.P35 - 4.P40.

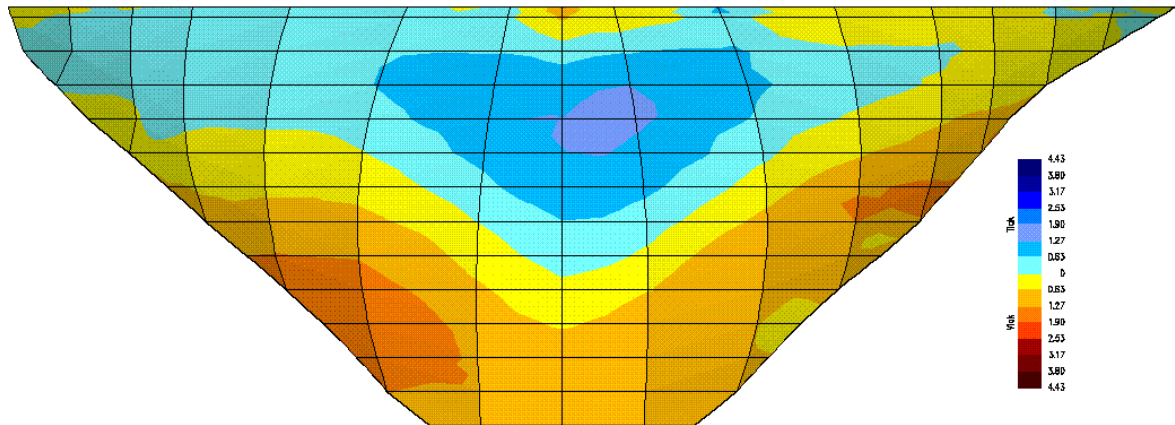
Na Crtežu 4.P41 prikazano je konačno pukotinsko stanje na ekstradosu. Bitno je napomenuti da se pukotine javljaju samo u sloju (layeru) brane uz ekstrados, dok se u samom tijelu brane ne javljaju.



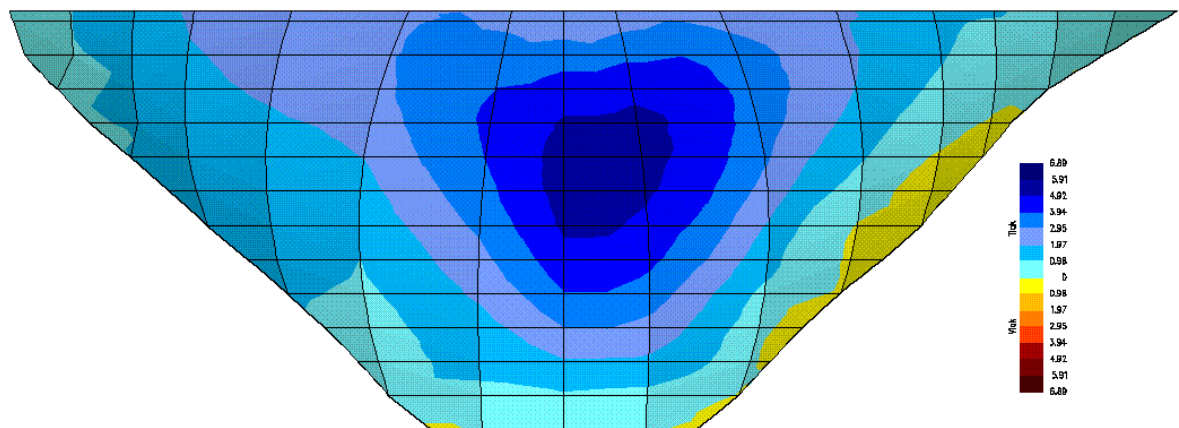
**Crtež 4.P33** – Promjena hidrodinamičkih tlakova u dnu centralne konzole u vremenu



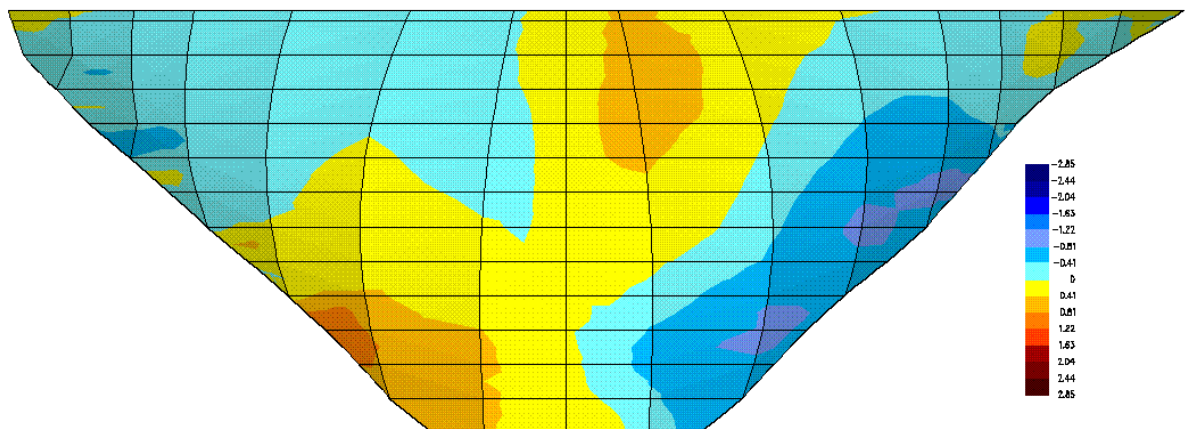
**Crtež 4.P34** – Pomak krune brane u vremenu



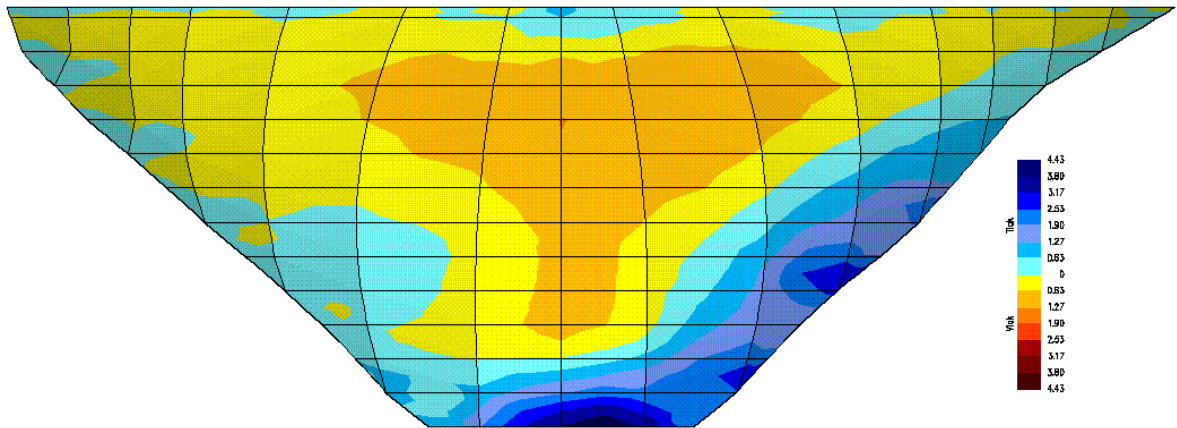
Crtež 4.P35 – Vertikalna ( $\sigma_{yy}$ ) naprezanja na ekstradosu u trenutku djelovanja maksimalne sile (MPa)



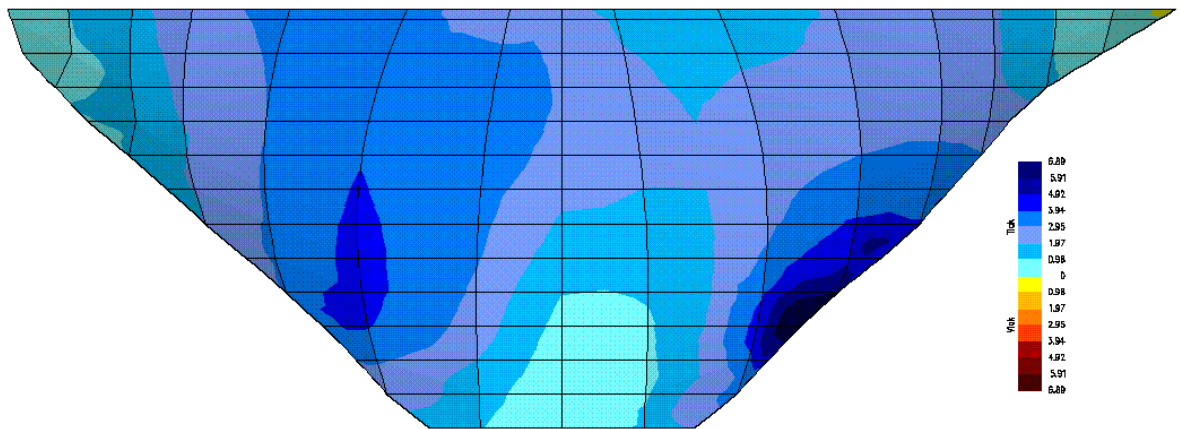
Crtež 4.P36 – Horizontalna ( $\sigma_{xx}$ ) naprezanja na ekstradosu u trenutku djelovanja maksimalne sile (MPa)



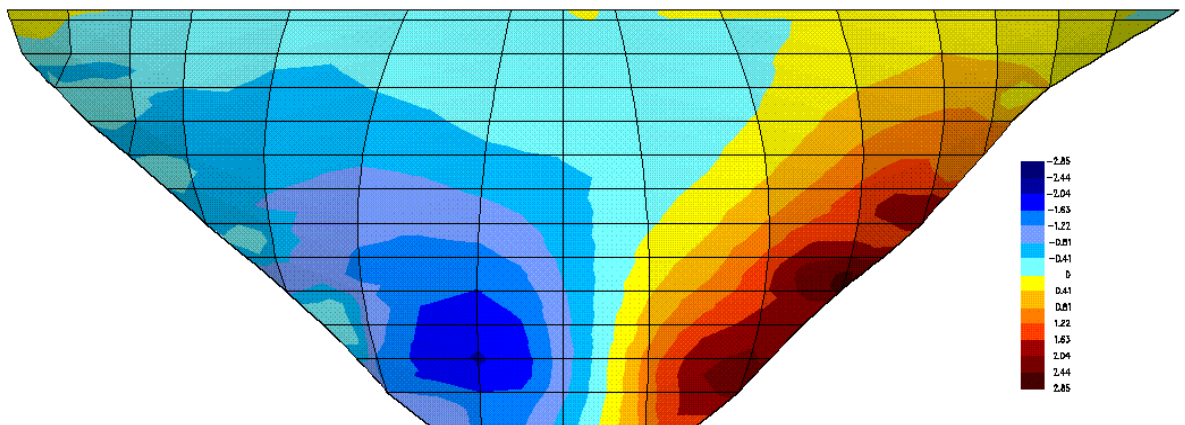
Crtež 4.P37 – Posmična ( $\tau_{xy}$ ) naprezanja na ekstradosu u trenutku djelovanja maksimalne sile (MPa)



Crtež 4.P38 – Vertikalna ( $\sigma_{yy}$ ) naprezanja na intradosu u trenutku djelovanja maksimalne sile (MPa)

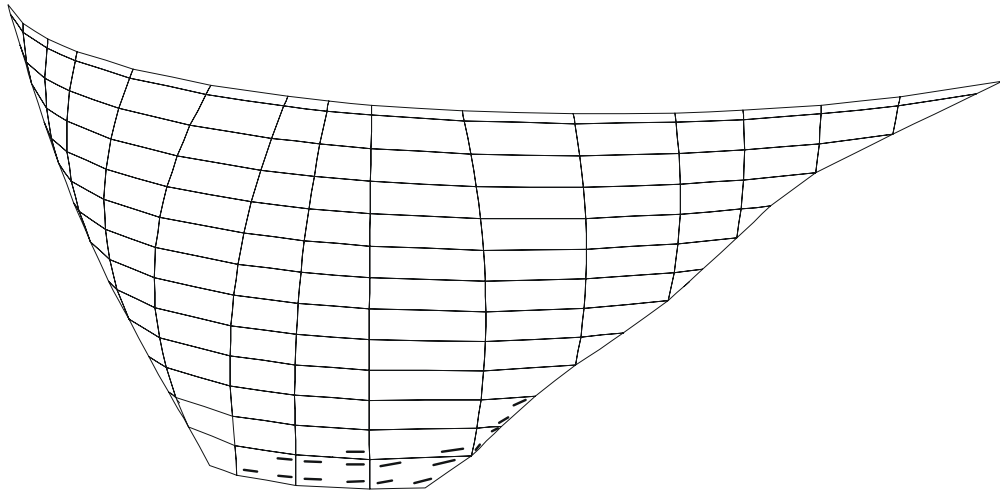


Crtež 4.P39 – Horizontalna ( $\sigma_{xx}$ ) naprezanja na intradosu u trenutku djelovanja maksimalne sile (MPa)



Crtež 4.P40 – Posmična ( $\tau_{xy}$ ) naprezanja na intradosu u trenutku djelovanja maksimalne sile (MPa)





**Crtež 4.P41** – Konačno stanje pukotina na ekstradosu

**5. ZAKLJUČCI I  
PREPORUKE ZA  
DALJNJA  
ISTRAŽIVANJA**

## 5.1 ZAKLJUČCI

Na temelju provedenih istraživanja i dobivenih rezultata, mogu se ukratko iznijeti neki važniji opći zaključci i preporuke kod praktičnih numeričkih analiza inženjerskih konstrukcija koje su u međudjelovanju s tekućinom.

Problem numeričke simulacije međudjelovanja tekućine i konstrukcije još uvijek predstavlja nedovoljno istraženo područje. Ovaj rad je pokušaj doprinosa boljem poznavanju i modeliranju ovog složenog problema, pri čemu su istraživanja pretočena u odgovarajući računalni program koji može poslužiti u svakodnevnoj inženjerskoj primjeni. Rad je nadogradnja radova [R.1 i H.3] i predstavlja nadopunu 2D modela u 3D model.

Izloženi model numeričke simulacije je prije svega jednostavan za razumijevanje i korištenje. Osim moguće analize međudjelovanja tekućine i konstrukcije, na vrlo jednostavan način se mogu analizirati i pojedinačna polja.

Primijenjeni numerički modeli simulacije ponašanja betona pod statičkim i dinamičkim opterećenjem opisuju njegove dominantne nelinearne efekte: tečenje u tlaku, razvoj pukotina u vlaklu, te posmičnu i vlačnu krutost ispucalog betona. Dodatna prednost je ta što se opis materijala temelji na osnovnim parametrima dobivenim iz jednoosnog testa.

Numerički model tekućine u potpunosti zadovoljava situacije kada analiza tekućine nije primarna. Naime, prikazani numerički model može vrlo dobro opisati globalne hidrodinamičke tlakove, globalnu pojavu kavitacije i sl., ali ne može opisati lokalne efekte kao npr. udare/izdizanje valova, difrakciju valova i sl. Kod problema kod kojih su ovakvi utjecaji dominantni potrebno je koristiti druge modele.

Dobro slaganje dobivenih numeričkih rezultata izloženih modela proračuna s nekim poznatim analitičkim, numeričkim i eksperimentalnim rezultatima, upućuju na valjanost razvijenog modela i računalnog programa (softwarea). Naknadno testiranje razvijenog modela na rezultatima ispitivanja složenih inženjerskih konstrukcija pripomogla bi da se izloženi model kvalitetnije valorizira i eventualno, prema potrebi, daljnje unaprijedi.

## 5.2 PRAVCI DALJNJEG ISTRAŽIVANJA

Područje istraživanja je vrlo široko, a izložena problematika obuhvaća sve aspekte mehanike tekućine i mehanike krutih tijela i konstrukcija. Ukratko će se navesti neki pravci daljnjeg istraživanja.

### 5.2.1 Modeliranje tekućine

Kao primarno kod daljnjeg unapređenja modela tekućine, bilo bi potrebno uključiti utjecaj promjene geometrije sustava, tj. opis geometrije tekućine izvršiti u totalnom Lagrange-ovom sustavu. Na taj način bi se efikasno modelirala promjena slobodnog lica tekućine, tj. bolje simulirao utjecaj površinskih valova. Ovo može biti od posebne praktične koristi kod analize sustava tekućine-konstrukcija za slučaj većih pomaka tekućine (valovanje i sl.). Ujedno, ovakav model bi mogao dati mnogo bolji odgovor kod zatvorenih sustava - rezervoari, vodotornjevi i sl., gdje dolazi do većeg valovanja, tj. gdje je valovanje značajnija pojava.

Razvijeni software za analizu polja tekućine izloženog ekscitaciji podloge (s linearnim i nelinearnim modelom tekućine), uz neznatne izmjene, može se koristiti i kod problema eksplozije u tekućini, odnosno kod problema tekućine izložene djelovanju vanjskog tlaka. Naime, u tom je slučaju potrebno formirati vektor sila koji zavisi od vanjskog djelovanja i može biti promjenjiv u vremenu.

Također, razvijenim software-om nije obuhvaćena promjena modula elastičnosti tekućine zbog promjene gustoće (pojave kavitacije). Pošto se rad ograničio na velike inženjerske konstrukcije (brane i sl.), kod kojih je pojava kavitacije lokalnog značaja, smatralo se da bi ova pojava imala vrlo mali, gotovo beznačajan utjecaj. Kod analiza manjih konstrukcija (rezervoari) ova bi pojava mogla davati značajne utjecaje.

### 5.2.2 Modeliranje konstrukcije

Kao prvo, da bi se dobio još realističniji opis ponašanja složenih konstrukcija u dodiru s tekućinom, neophodno je u postojeći model ugraditi model tla. Model tla morao bi se zasnivati na prostornim ("brick") elementima – slično kao tekućina, i morao bi opisivati sve značajnije karakteristike tla.

Uvođenjem modela neortogonalnih fiksnih pukotina moglo bi se bitno unaprijediti postojeći materijalni model betona. Prema novijim istraživanjima [H.4] i [N.6], ovakav model opisa pukotina je bitno bliži stvarnom ponašanju betona, te je za očekivati da bi davao rezultate bliže eksperimentalnim.

Za praćenje pukotina u tlu mogao bi se uvesti model rotirajućih pukotina, koji ([H.4], [H.4] i [N.6]) dobro opisuje pukotinska stanja u tlu.

Za adekvatniju simulaciju armirano betonskih konstrukcija neophodno je unaprijediti i model čelika. Bitno unapređenje bila bi ugradnja modela simulacije klizanja šipki (slojeva) u betonu. Ovaj model omogućio bi realistično praćenje armirano betonskih konstrukcija u stanjima bliskim lomu, kao i praćenje post-lomnog ponašanja armirano betonskih konstrukcija.

Uvođenjem šestog (torzijskog) stupnja slobode u model ljuske [K.5], proračunski program bi dobio novu fleksibilnost i kompatibilnost, tj. na vrlo jednostavan način bi se mogao povezati s programom za proračun štapnih konstrukcija, što bi značajno povećalo broj i vrstu konstrukcija koje se mogu analizirati.

### **5.2.3 Modeliranje interakcije tekućine i konstrukcije**

Budući da se rješenje problema interakcije, u ovom radu, temelji na rješenju pojedinačnih polja, svako unapređenje modela simulacije pojedinačnih polja predstavlja ujedno i poboljšanje modela simulacije problema interakcije.

U svrhu realnijih simulacija međudjelovanja sustava brana-akumulacija potrebno je uključiti utjecaj mulja na dnu akumulacije uz branu. Jedna od mogućnosti simuliranja je da se mulj tretira kao tekućina određenih svojstava (viskoznosti). Ovakvim načinom tretiranja moguće je u potpunosti koristiti razvijeni software.

### **5.2.4 Općenita poboljšanja**

Razvijeni program bi trebalo dodatno opskrbiti pred i post-processorom koji omogućili znatno veću uporabljivost razvijenog modela.

I, nakon svega, razvijeni software trebalo bi dodatno testirati na više poznatih eksperimentalnih rezultata, tj. na analizama realnih problema.

## **6. LITERATURA**

- [A.1] S. Ahmad, B.M. Irons and O.C. Zienkiewicz - "**Analysis of Thick and Thin Shell Structures**", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 2, pp. 419-451, 1970.
- [A.2] A.E. Aktan, V.V. Bertero and M. Piazza - "**Predict of the seismic response of R/C frame-coupled wall structures**", Rep. No. VCB/EERC-82/12, Earthquake Engin. Research Center, University of California, Berkeley, USA, pp. 204, Aug. 1982.
- [A.3] D. Aničić, P. Fajfar, B. Petrović, A. Szavits-Nossan i M. Tomažević - "**Zemljotresno inženjerstvo: visokogradnja**", Građevinska knjiga, Beograd, 1990.
- [A.4] J.H. Argyris and D.W. Scharpf - "**The Effect of Loading Rate on the Elastoplastic Flexure of Steel Beams**", Proc. Roy. Soc., Series A, Vol. 278, pp. 266, 1966.
- [A.5] D.G. Ashwell and R.H. Gallagher - "**Finite elements for thin shells and curved members**", John Wiley and Sons, London, 1976.
- [A.6] R.J. Aspden and J.D. Campbell - "**Finite element in space and time**", Aeron. Jour. Aeron. Soc., Vol. 73, pp. 1041-1044, 1969.
- [B.1] M.J.H. Bangash - "**Concrete and Concrete Structures: Numerical Modelling and Applications**", Elsevier Applied Science, New York, 1989.
- [B.2] K.J. Bathe and W.F. Hahn - "**On transient analysis of fluid-structure system**", Computers and Structures, Vol. 10, pp. 383-391, 1979.
- [B.3] K.J. Bathe - "**Finite Element Procedure in Engineering Analysis**", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [B.4] K.J. Bathe and S. Gracewski - "**On nonlinear dynamic analysis using substructuring and mode superposition**", Computers and Structures, Vol. 13, pp. 699-707, 1981.
- [B.5] K.J. Bathe and E.L. Wilson - "**Numerical Methods in Finite Element Analysis**", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [B.6] K.J. Bathe and A. Cimento - "**Some practical procedures for the solution of nonlinear finite element equations**", 5<sup>th</sup> Int. Conf. SMiRT, Berlin, 1979.
- [B.7] T. Belytschko - "**Fluid-structure interaction**", Computers and Structures, Vol. 12, pp. 459-469, 1980.
- [B.8] T. Belytschko and J.M. Kennedy - "**Computer models for subassembly simulation**", Num. Engng. Design, Vol. 49, pp. 17-38, 1978.
- [B.9] T. Belytschko and R. Mullen - "**Mesh partitions of explicit-implicit time integration**", In "K.J. Bathe, J.T. Oden and W. Wunderlich (eds.) *Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis*", MIT Press, Cambridge, pp. 1575-1886, 1976.
- [B.10] T. Belytschko and R. Mullen - "**Stability of explicit-implicit mesh partitions in time integration**", Int. Journal Num. Meth. Eng., Vol. 12, pp. 1575-1586, 1978.
- [B.11] P.G. Bergan - "**Automated incremental-iterative solution schemes**", Proc. Int. Conf. on Num. Meth. for Nonlinear Problems, Swansea, 1980.
- [B.12] P.G. Bergan and I. Holand - "**Nonlinear finite element analysis of concrete structures**", Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng., Vol. 17/18, pp. 443-467, 1979.
- [B.13] N. Bičanić - "**Nonlinear finite element transient response of concrete structures**", Ph. D. Thesis, C/Ph/50/78, University of Wales, Swansea, 1978.
- [B.14] V. Bičkovski i M. Bojadžiev - "**Studije statičke i seizmičke stabilnosti brane Grančarevo**", Institut za zemljotresno inženjerstvo i inženjersku seizmologiju Univerziteta "Kiril i Metodij" (IZIIS) Skopje, Izvještaj IZIIS 88-30, 1988.
- [B.15] H.H. Bleich and I.S. Sandler - "**Interaction between structures and bilinear fluid**", Int. J. of Solid and Struct., Vol. 6, pp. 617-639, 1970.
- [B.16] B. Brank, Đ. Perić and F.B. Damjanić - "**A Nonlinear Four Node Shell Element with Explicit Integration and Elementary Rotations**", Proc 12<sup>th</sup> Int. Conf. SMiRT, Stuttgart, 1993.

- [B.17] B. Brank - "**Numerična analiza inženirskih lupnastih konstrukcija**", Magistrska naloga, Univerza v Ljubljani, Ljubljana, 1991.
- [C.1] J.D. Campbell and R. H. Cooper - "**Yield and Flow of Low-carbon steel at Medium Strain Rates**", Conf. on the Phys. Basis of Yield and Fract., Inst. Phys. and Phys. soc., London, pp. 77, 1966.
- [C.2] M. Cervera and O. Javier - "**Seismic Evaluation of Concrete Dams via Continuum damage models**", Earthquake Eng. Struct. Dyn., Vol. 24. , pp.1225-1245, 1995.
- [C.3] M. Cervera and J. Olivier - "**Pathological behaviour of large concrete dams analised via isotropic damage models**", (nepoznati časopis)
- [C.4] P. Chakrabarti - "**Hydrodynamics of Offshore Structures**", Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, Heilderberg, 1987.
- [C.5] P. Chakrabarti and A.K. Chopra - "**Earthquake analysis of gravity dams including hydrodynamic interaction**", Earthquake Engng Struct. Dynamics, Vol. 2, pp. 143-160, 1973.
- [C.6] A.C.T. Chen and W.F. Chen - "**Constitutive Relations for Concrete**", J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 101, 465-481, 1975.
- [C.7] W.F. Chen - "**Plasticity in reinforced concrete**", McGraw-Hill Book Company, New York, 1981.
- [C.8] C.H. Chiang - "**High-Speed Tensile Testing Using Explosives**", I. Inst. Metals, Vol. 98, pp. 78, 1970.
- [C.9] A.K. Chopra and C.Y. Liaw - "**Earthquake resistant design of intake-outlet towers**", Journ. of Struct. Div. ASCE, Vol. 101, pp. 1349-1366, 1975.
- [C.10] A.K. Chopra and K.L. Fok - "**Evaluation of simplyfied earthquake analysis procedure for intake-outlet towers**", Proc. 8<sup>th</sup> World Conf. Earthquake Eng., San Francisco, pp. 467-474, 1984.
- [C.11] A.K. Chopra and A. Goyal - "**Simplified Earthquake Analsis of Intake-Outlet Towers**", Jour. of Struct. Eng., Vol. 117, pp. 767-788, 1991.
- [C.12] A.K. Chopra and P. Chakrabarti - "**The Koyna earthquake and the damage of Koyna dam**", Bulletin of Seismological Society of America, Vol. 63, pp. 381-397, 1973.
- [C.13] R.W. Clough and A. Niwa - "**Shaking table research on concrete dam model**", EERC-80/05, University of California, Berkeley, September 1980.
- [C.14] R.W. Clough and C.H. Chwang - "**Seismic cavitation on gravity dam reservoirs**", Proc. Int. Conf. on Num. Meth. for Coupled Problems, Swansea, Pineridge Press, Swansea, pp. 185-196, 1980.
- [C.15] C.H. Chwang - "**Hydrodynamic pressure on an accelerating dam and criteria for cavitation**", J. Eng. Math., Vol. 13, No. 2, April 1979.
- [C.16] W.L. Cowell - "**Dynamic Properties of Palin Portland Cement Concrete**", Tehnical report No. 447, U.S. Naval Civil Engineering Laboratory, Port Hueneme, pp. 34., June, 1966.
- [C.17] M.A. Crisfield - "**A faster modified Newton-Raphson iteration**", Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng., Vol. 20, pp. 267-278, 1979.
- [C.18] A.T. Cwang - "**Hydrodynamic pressure on sloping dams during eatrquakes**", Part 1 (with G.W. Housner) & Part 2, J. of Fluid Mehanics, Vol. 87, pp. 335-342, 1978.
- [D.1] F.B. Damjanić - "**Reinforced Concrete Failure Under both Static and Transient Conditions**", Ph. D. Thesis, C/Ph/71/83, University of Wales, Swansea, 1983.
- [D.2] F.B. Damjanić and J. Radnić - "**Seismic Analysis of Fluid-Structure Interaction Including Cavitation**" Proc. Int. Conf. on Computer Modelling in Ocean Engineering, Balkema, Rotterdam, pp. 523-530, 1988.



- [D.3] W.H. Dilger, R. Koch and R. Kowalczyk - "**Ductility of plane an confine concrete under different strain rates**", ACI Journal, Proceedings V. 81, No. 1, pp.73., Jan.-Feb. 1984.
- [D.4] J. Donea, P. Fasoli Stella, S. Guliani, J.P. Hallenx and A.V. Jones - "**An arbitrary Lagrange-Eulerian finite element procedure for transient dynamic fluid-structure interactions problem**", Translations of 5<sup>th</sup> SMiRT, B 1/3 Berlin, 1979.
- [F.1] C.A. Felippa and K.C. Park - "**Staggered transient analysis procedures for coupled mechanical system**", Formulation, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng., Vol. 24, pp. 61-111, 1980.
- [F.2] J.A. Figueiras - "**Practical Approach for Modelling the Nonlinear Response of RC Shells**", In: Computational Modelling of Reinforced Concrete Structures, Eds. E. Hinton and D.R.J. Owen, Pineridge Press, Swansea, pp. 217-253, 1986.
- [F.3] J.A. Figueiras and D. R. J. Owen - "**Analysis of Elasto-Plastic and Geometrically Nonlinear Anisotropic Plates and Shells**", Finite Element Software for Plates and Shells, Eds. E. Hinton and D.R.J. Owen, Swansea, pp. 235-322, 1984.
- [F.4] I. Fried - "**Finite element analysis of time dependent phenomena**", AIAA Jour., Vol. 7, pp. 1170-1172, 1969.
- [G.1] M. Geradin and M.A. Hogge - "**Quasi Newton iteration in nonlinear structural dynamics**", 5<sup>th</sup> Int. Conf. SMiRT, Berlin, 1979.
- [G.2] B. Gotovac - "**Mehanika kontinuuma - predavanja na poslijediplomskom studiju**", Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 1994.
- [G.3] B. Gotovac, F.B. Damjanić, V. Kozulić, M. Stanek - "**Nelinearna analiza složenih inženjerskih konstrukcija**", Zbornik radova 2. radnog sabora Graditelji u obnovi Hrvatske, Brijunski otoci, str. 127-132, 1993.
- [G.4] A. Goyal and A.K. Chopra - "**Earthquake Analsis of Intake-Outlet Towers Including Tower-Water-Foundation-Soil Interaction**", Earthquake Eng. Struct. Dyn., Vol. 18, pp. 325-344, 1989.
- [G.5] A. Goyal and A.K. Chopra - "**Hydrodynamics and and Foundation Interaction Effects in Dynamics of Intake Towers: Earthquake Response**", Jour. of Struct. Eng., Vol. 115, pp. 1386-1395, 1989.
- [H.1] T. Hara, S. Kato and H. Nakamura - "**Reinforced Concrete Cooling Tower Shels - practice and commentary**", ACI Journal, Vol. 81, pp. 623-631, 1994.
- [H.2] T. Hara, S. Kato and M. Ohya - "**Nonlinear behavior of R/C cooling tower shels**", Struct. Engin. and Mech., Vol. 5, No. 5, pp. 541-552, 1997.
- [H.3] A. Harapin - "**Interakcija fluida i konstrukcije s uključenjem tlakova u pukotinama**", Magistarski rad, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 1996.
- [H.4] I. Harding - "**Effects of high strain rate on the room temperature strength and ductility of five alloy steels**", I. Iron steel inst., Vol 210, pp. 425, 1972.
- [H.5] E. Hinton and H.H. Abdel Rahman - "**Mindlin plate finite elements, Finite element software for plates and shells**", Eds. E. Hinton and D.R.J. Owen, pp. 157-229, Swansea, 1984.
- [H.6] E. Hinton and D.R.J. Owen - "**Finite element software for plates and shells**", Pineridge Press, Swansea, 1984.
- [H.7] C. W. Hirt, A.A. Amsden and J.L. Cook - "**An arbitrary Lagrange-Eulerian computing method for all flow speeds**", J. Computational Phys., Vol. 14, pp. 227-253, 1974.
- [H.8] G. Hofstetter and H.A. Mang - "**Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures**", Vieweg & Sohn, Weisbaden, 1995.
- [H.9] H.C. Huang - "**Static and Dynamic Analyses of Plates and Shells**", Springer-Verlag, Heilderberg, 1989.

- [H.10] T.J.R. Hughes - **“Recent developments in computer methods for structural analysis”**, Division M Principal Lecture, Fifth SMIRT, 5th Conference, Berlin, 1980.
- [H.11] T.J.R. Hughes and M. Cohen - **“The Heterosis Finite Element for Plate Bending”**, Computers and Structures, Vol. 9, pp. 445-450, 1978.
- [H.12] T.J.R. Hughes, K.S. Pister and R.L. Taylor - **“Implicit-explicit finite elements in nonlinear transient analysis”**, Comp. Meth. Apl. Mech. Engng., Vol. 17/18, pp. 159-182, 1979.
- [H.13] T.J.R. Hughes and W.K. Liu - **“Implicit-explicit finite elements in transient analysis: stability theory”**, Jour. of Apl. Mech., Vol. 45, pp. 371-374, 1978.
- [H.14] T.J.R. Hughes and T. Belytschko - **“A precis of development in Computational Method for Transient Analysis”**, Jour. of Apl. Mech., Vol. 50, pp. 1033-1041, 1983.
- [H.15] J. C. Humbolt - **“A recurrence matrix solution for the dynamic response for the elastic aircraft”**, Aeron. Jour. Aeron. Soc., Vol. 17, pp. 540-550, 1950.
- [H.16] J.L. Hummar - **“Dynamic of Structures”**, Prentice Hall, New Jersey, 1990.
- [I.1] A. Ibrahimbegović - **“Unificirani pristup modeliranju konstruktivnih sistema: konačni elementi s rotacionim stupnjevima slobode”**, Inženjersko modeliranje, Vol. 3, No. 1-2, str. 21-28, Split, 1990.
- [I.2] A. Irons and S. Ahmad - **“Finite element techniques”**, Ellis Horwood, Chichester, 1980.
- [J.1] B. Jaramaz - **“Numeričko modeliranje dinamičkog ponašanja elastične poluravnine”**, Magistarski rad, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1986
- [J.2] V. Jović - **“Uvod u inženjersko numeričko modeliranje”**, Aquarius Engineering, Split, 1993.
- [J.3] V. Jović - **“Elementi hidrodinamike”**, Radna kopija rukopisa, Split, 1978.
- [J.4] V. Jović - **“Pomorska hidraulika i priobalno inženjerstvo”**, Predavanja na dodiplomskom i poslijediplomskom studiju Građevinskog fakulteta u Splitu, 1991.
- [K.1] S.A. Kaplan - **“Factors Affecting the Relationship Between Rate of Loading and Measured Compressive Strength of Concrete”**, Magazine of Concrete Research (London), Vol. 2, No. 111, pp. 79, June 1980.
- [K.2] J.K. Kim, H.M. Koh and I.J. Kwahk - **“Dynamic Response of Rectangular Flexible Fluid Containers”**, Journ. of Eng. Mech., Vol. 122, No. 9, pp. 807-817, 1996.
- [K.3] H.M. Koh, J.K. Kim and J.H. Park - **“Fluid-Structure Interaction Analysis of 3-D rectangular tanks by a variationally coupled BEM-FEM and comparison with test result”**, Earthquake Eng. Struct. Dyn., Vol. 27., pp.109-124, 1998.
- [K.4] M. Kojić and J.B. Chateman - **“Theory of Plasticity of Porous Media with Fluid Flow”**, Soc. Pet. Eng. J., Vol. 257, pp. 263, 1974.
- [K.5] V. Kozulić - **“Numerička analiza konstrukcija sastavljenih od ljuski i stupova”**, Magistarski rad, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 1993.
- [K.6] J.M. Kraft and A.M. Sullivan - **“On Effects of Carbon and Manganese Content and of Grain Size on Dynamic Strength of Mild Steel”**, Trans. Amer. Soc. Metals, Vol. 55, pp. 101, 1962.
- [K.7] J. Krishna, A.R. Chandrasekaran and S.S. Saini - **“Analysis of Koyna accelerogram of December 11, 1967.”**, Bulletin of Seismological Society of America, Vol. 59, No. 4, pp. 1719-1731, 1969.
- [K.8] P. Krstulović - **“Reologija materijala”**, Interna skripta, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 1994.
- [K.9] H.B. Kupfer, H.K. Hilsdorf and H. Rusch - **“Behaviour of Concrete Under Biaxial Stresses”**, ACI Journal, Vol. 66, pp. 556-566, 1966.
- [K.10] S. Kurepa - **“Uvod u linearnu algebru”**, Školska knjiga, Zagreb, 1975.

- [L.1] C. Lebois and C. Massonnet - "**Influence of the Upper Yield Stress on the Behaviour of Mild Steel in Bending and Torsion**", Int. I. Mech. Soc., Vol. 14, pp. 95, 1972.
- [L.2] C.Y. Liaw and A.K. Chopra - "**Dynamic of towers partially surrounded by water**", Earthquake Eng. Struct. Dyn., Vol. 3, pp. 33-49, 1974.
- [L.3] C.Y. Liaw and A.K. Chopra - "**Earthquake analysis of axisymmetric towers partially submerged in water**", Earthquake Eng. Struct. Dyn., Vol. 3, pp. 233-248, 1975.
- [L.4] P.L.F. Liu and A.H.D. Cheng - "**Boundary solutions for fluid-structure interaction**", J. Hydraulic Engng., ASCE, Vol. 110, pp. 51-64, 1984.
- [M.1] S.A. Mahin and V.V. Bertero - "**Rate Loading Effects on Uncracked and Repaired Reinforced Concrete Members**", Rep. No. VCB/EERC-72/9, Earthquake Eng. Research Center, University of California, Berkeley, USA, p.148, Dec. 1972.
- [M.2] R.J. Mainstone - "**Properties of Materials at High Rates of Straining or Loading**", Materials and Constructions, Vol 8, pp. 102, 1975.
- [M.3] H.A. Mang and H. Flöegl - "**Wind-load reinforced concrete cooling towers: buckling or ultimate load?**", Eng. Struct, Vol. 5, pp. 163-180, 1983.
- [M.4] D. Matešan - "**Nelinearna analiza betonskih ljuski**", Magistarski rad, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 2000.
- [M.5] H. Matthies and G. Strang - "**The solution of nonlinear finite element equations**", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 14, pp. 1613-1626, 1979.
- [M.6] A. Mihanović - "**Dinamika konstrukcija**", Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 1995.
- [M.7] A. Mihanović, P. Marović i J. Dvornik - "**Nelinearni proračuni armirano betonskih konstrukcija**", Društvo hrvatskih građevinskih konstruktora, serija Priručnici, knjiga 7, Zagreb, 1993.
- [M.8] A. Mihanović i M. Schönauer - "**Modificirana WYD metoda u velikoj svojstvenoj zadaći**", Zbornik radova 19. kongresa Jugoslavenskog društva za mehaniku, Bled, 1989.
- [M.9] R.V. Milford - "**Nonlinear behavior of reinforced concrete cooling towers**", Ph. D. Thesis, University of Illinois, USA, 1984.
- [M.10] C.S. Min and A.K. Gupta - "**A study of inelastic behavior of reinforced concrete shell using supercomputers**", Reinforced Concrete Shell Research Report, North Carolina State University, USA, 1984.
- [M.11] F.P. Mlaker and P.S. Jones - "**Seismic analysis of intake towers**", Tehnical Report SL-82-8, Structures Laboratory, U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, Mississippi, USA, 1982.
- [M.12] H.H. Мосиеев, А.А. Петров - "**Численные Методы Расчета Собственных Частот Колебаний ограниченного объема жидкости**", Академия Наук СССР - Вычислительный Центр ан СССР, Москва, 1966.
- [M.13] S.S. Murthy and R.H. Gallagher - "**Anisotropic Cylindrical Shell Element Based on Discrete Kirchoff Theory**", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 19, pp. 1805-1823, 1983.
- [N.14] N.M. Newmark - "**A method for computation of structural dynamics**", Jour. Engng. Mech. Div., ASCE, Vol. 85, pp. 67-94, 1959.
- [N.1] N.M. Newmark and E. Rosenblueth - "**Fundamentals of Earthquake Engineering**", Prentice hall, New Jersey, 1971.
- [N.2] R.E. Newton - "**Finite element study of shock induced cavitation**", ASCE, Spring Convention, Portland Oregon, April 1980.
- [N.3] R.E. Newton - "**Effect of cavitation on underwater shock loading problem**", Part II, NPS 69-79-007PR, Naval Postgraduate School, Monterey, California, July 1979.

- [N.4] R.E. Newton - "**Effect of cavitation on underwater shock loading axisymmetric geometry**", Part II, NPS 69-78-017PR, Naval Postgraduate School, Monterey, California, November 1978.
- [N.5] L. Nilsson - "**Impact loading on concrete structures**", Publication 79-1, Dept. Struct. Mech., Chalmers University of Tehnology, Göteborg, Sweden, 1979.
- [N.6] M.B. Nooru-Mohamed - "**Mixed-mode fracture of concrete: an experimental approach**", Ph. D. Thesis, Delft University of Tehnology, Delft, Netherland, 1992.
- [O.1] E. Oñate, J. Oliver and G. Bugada - "**Finite Element Analisis of the Nonlinear Response of Concrete Dams subjected to Internal Loads**", Finite Element Methods for Nonlinear Problems, Europe-US Symposium, Trondheim, 1985.
- [O.2] E. Oñate - "**Lecture of nonlinear finite element analysis of concrete shells**", Monografía CIMNE No. 7, Barcelona, España, 1992.
- [O.3] D.R.J. Owen and A.J. Fawkes - "**Engineering Fracture Mechanics: Mumerical Methods and Applications**", Pineridge Press Ltd., Swansea, 1983.
- [O.4] D.R.J. Owen and E. Hinton - "**Finite Element Programming**", Academic Press, London, 1977.
- [O.5] D.R.J. Owen, E. Hinton - "**Finite Elements in Plasticity**", Pineridge Press, Swansea, UK, 1980.
- [O.6] D.R.J. Owen, J.A. Figueiras and F.B. Damjanić - "**Finite Elements Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Structures Including Thermal Loading**", Comp. Mech. in Appl. Mech. Engng., Vol. 41, pp. 323-366, 1983.
- [O.7] D.R.J. Owen and J.A. Figueiras - "**Anisotropic elasto-plastic Finite Element Analysis of Thick and Thin Plates and Shell Structures**", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 19, pp. 541-566, 1983.
- [P.1] K.C. Park- "**Partitioned transient analysis procedures for coupled field problems**", Rep. LMSC-D633955, 1979.
- [P.2] K.C. Park, C.A. Felippa and J.A. Deruntz - "**Stabilization of staggered solution procedures for fluid-structure interaction analysis**", Comp. Meth. for Fluid-Structure Interaction Problems, pp. 94-124, 1977.
- [P.3] D.K. Paul - "**Efficient dynamic solutions for single and multiple field problems**", Ph. D. Thesis, C/Ph/64/82/, University of College of Swansea, 1982.
- [P.4] D.K. Paul and E. Hinton - "**Expirience with implicit-explicit time integration for nonlinear transient dynamic analysis**", Proc. Int. Conf. on Recent Advances in Structural Dynamics, University of Southampton, pp. 587-596 1980.
- [P.5] S.F. Pawsey and R.W. Clough - "**Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Elements**", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 3, pp. 575-586, 1971.
- [P.6] D.V. Phillips and O.C. Zienkiewicz - "**Numerical Modelling of Brittle Materials: Concrete and Reinforced Concrete**", Lecture notes on Nonlinear Engineering Computations. TEMPUS-ACEM, Ljubljana, C/1-78, 1992.
- [P.7] D.V. Phillips - "**Finite elementh non-linear analysis of Concrete Structures**", Proc. Inst. Civ. Engng., 61 Part 2, 59-88, 1976.
- [P.8] E.D.L. Pugh, E. Hinton and O.C. Zienkiewicz - "**A Study of Quadrilateral Plate Bending Elements with Reduced Integration**", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 12, pp. 1059-1079, 1978.
- [R.1] J. Radnić: "**Numerička simulacija interakcije fluid-konstrukcija**", Doktorska disertacija, Fakultet građevinskih znanosti Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1987.
- [R.2] J. Radnić - "**Interakcija fluid-konstrukcija s uključenjem kavitacije**", Građevinar, No. 7, pp. 269-275, 1987.

- [R.3] J. Radnić - "*Nelinearno ponašanje i modeliranje armirano betonskih konstrukcija*", Magistarski rad, Fakultet građevinskih znanosti Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1983.
- [R.4] J. Radnić - "*Modelling of strain rate effects in dynamic analysis of R/C structures*", Engineering Mod., Vol. 3, No. 1-2, pp. 13-20, 1990.
- [R.5] J. Radnić and Dešković N. - "*Numerical model for dynamic analysis of RC structures including the strain rate effects*", Proc. 2nd Int. Conf. on Comp. Plasticity, Barcelona, pp. 65-71, Pineridge Press, Swansea, 1989.
- [R.6] J. Radnić i F. B. Damjanić - "*Numerička analiza hidrodinamičkih pritisaka na nedeformabilne pregrade*", Zbornik radova XVII Jugoslavenskog kongresa teorijske i primijenjene mehanike, knjiga B, str. 207-212, Zadar, 1986.
- [R.7] J. Radnić, F. B. Damjanić - "*Utjecaj nagiba dna rezervoara na veličinu hidrodinamičkih sila na nedeformabilne pregrade*", Zbornik radova IV kongresa saveza društava za seizmičko građevinarstvo Jugoslavije, Cavtat, 1986.
- [R.8] J. Radnić, F. B. Damjanić and V. Jović - "*Hydrodynamic pressures on rigid structures*", Proc. European Conf. on Earth. Eng., Portugal, 1986.
- [R.9] E. Rosenblueth - "*Presion Hidrodinamica en cortinas de gravedad*", Ingenieria e Hidrosistemas Ltda., Universidad Nacional Autonoma de Mexico, 1968.
- [S.1] S.S. Saini, P. Bettess and O.C. Zienkiewicz - "*Coupled hydrodynamic response of concrete gravity dams using finite and infinite elements*", Earthquake Engng Struct. Dynamics, Vol. 6, pp. 363-374, 1978.
- [S.2] G. Sandberg - "*A New Strategy for Solving Fluid-Structure Problems*", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 38, pp. 357-370, 1995.
- [S.3] B.D. Scott, R. Park and M.J.N. Priestley - "*Stress-strain Behaviour of Concrete Confined by Overlapping Hoops at Low and High Strain Rates*", ACI Journal, Proceedings Vol.79, No. 1, pp. 13., Jan.-Feb. 1982.
- [S.4] R.B. Seabold - "*Dynamic Shear Strength of Reinforced Concrete Beams*", Part III, Tehnical Report No. R-695, U.S. Naval Civil Engineering Laboratory, Port Hueneme, pp. 180., June, 1970.
- [S.5] S.P. Shah, A. Fafitis and R. Arnold - "*Cyclic loading of spirally reinforced concrete*", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 109, No. 7, pp. 1695., July 1983.
- [S.6] S.H. Sharan and G.M.L. Gladwell - "*A general method for the dynamic response analysis of fluid-structure interaction*", Computers & Structures, Vol. 21, pp. 937-943, 1985.
- [S.7] S.H. Sharan - "*A non reflecting boundary in fluid-structure interaction*", Computers & Structures, Vol. 26, pp. 841-846, 1987.
- [S.8] S.H. Sharan - "*Efficient finite element analysis of hydrodynamic pressure on dams*", Computers & Structures, Vol. 42, pp. 713-723, 1992.
- [S.9] A. Sommerfeld - "*Partial Differential Equations in Physics*", Academic Press, New York, 1949.
- [S.10] P. Soroushian, K. Choi and A. Alhamad - "*Dynamic Constitutive Behaviour of Concrete*", ACI Journal, Proceedings Vol. 83, No. 2, pp. 251., Mar.-Apr. 1986.
- [S.11] P. Stojić - "*Hidrotehničke građevine*", I dio, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 1997.
- [S.12] P. Stojić - "*Hidrotehničke građevine*", II dio, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 1998.
- [S.13] P. Stojić - "*Hidrotehničke građevine*", III dio, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 1999.
- [S.14] W. Suaris and S.P. Shah - "*Properties of concrete subjected to impact*", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 109, No. 7, pp.1727., July 1983.

- [Š.1] V. Šimić - "**Otpornost materijala I**", Školska knjiga, Zagreb, 1992.
- [T.1] J.G. Turilo - "**Theory and Structure of the AFTON Codes**", Airforce Weapons Laboratory, AWFL-TR-66-19, June 1966.
- [W.1] J. Wandinger - "**A symmetric Craig-Bampton method of coupled fluid-structure systems**", Eng. Comp., Vol. 15, No. 4, pp. 450-461, 1998.
- [W.2] A. Watstein - "**Effect of straining rate on the compressive strength and elastic properties of concrete**", ACI Journal, Proceedings Vol. 49, No. 8, pp. 729., Apr. 1953.
- [W.3] H.M. Westergaard - "**Water pressure on dams during earthquakes**", Proc. ASCE, 57, 1303-1318, 1931 & Trans. ASCE, Vol. 98, pp. 418-433, 1933.
- [W.4] E.L. Wilson, I. Farhoomand and K.J. Bathe - "**Nonlinear dynamic analysis of complex structures**", Earthquake Eng. Struct. Dyn., Vol. 1, pp. 241-252, 1973.
- [W.5] R.N. Wright, W.J. Hall and H.S. Hamada - "**The Behaviour of structural Steel Under Slow and Rapid Reversal of Loading**", Proc. Amer. Soc. Testing Materials, Vol. 64., pp. 612, 1964.
- [Y.1] M. Yuan, P. Chen, S. Xiong, Y. Li and E.L. Wilson - "**The WYD method in large eigenvalue problems**", Eng. Comp., Vol. 6, pp. 49-57, 1989.
- [Z.1] C.N. Zangar - "**Hydrodynamic pressure on dams during horizontal earthquakes**", Proc. Soc Experimental Stress Analysis, Vol. 10, pp. 93-102, 1953.
- [Z.2] C.N. Zangar and R.J. Haefeli - "**Electric analog indicates effect on horizontal earthquake shock on dams**", Civil Engineering, Vol. 22, pp. 278-279, 1952.
- [Z.3] O.C. Zienkiewicz and P. Bettess - "**Fluid-Structure Dynamic Interaction and some 'Unified' approximation processes**", Proc. 5<sup>th</sup> Int. Symp. on Unification of Finite Element, Finite Difference and Calculus of Variables, University of Connecticut, pp. 119-145, 1980.
- [Z.4] O.C. Zienkiewicz, C.T. Chang, E. Hinton and K.H. Leung - "**Effective stress dynamic modelling for soil structures including drainage and liquefaction**", Proc. Int. Symp. on Soils Under Cyclic and Transient Loading, Eds. G.N. Pande and O.C. Zienkiewicz, A.A. Balkema Rotterdam, pp. 551-554, 1980.
- [Z.5] O.C. Zienkiewicz - "**The finite element method**", McGraw-Hill Book Company, London, 1976.
- [Z.6] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor and J.M. Too - "**Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells**", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 3, pp. 275-290, 1971.
- [Z.7] O.C. Zienkiewicz and C.J. Parekh - "**Transient field problems - two and three dimensional analysis by isoparametric finite elements**", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 2, pp. 61-71, 1970.
- [\*.1] ACI-ACSE Committee 334 - "**Reinforced concrete cooling tower shell - practice and commentary**", ACI Journal., Vol. 81, pp. 623-631, 1984.
- [\*.2] ENERGOINVEST Sarajevo - "**HE Grančarevo, brana – II dio, Statički proračun, glavni projekt – prikaz rezultata statičkih i modelskih ispitivanja**", Sarajevo, Novembar, 1966.
- [\*.3] "**Esperienze Statiche su Modello Della Diga di Grancarevo**", I.S.M.E.S. Istituto Sperimentale Modelli e Strutture, Bergamo, Settembre 1960., pratica no. 271
- [\*.4] "**Sulla Stabilità Della Rocca di Fondazione Della Diga di Grancarevo Verificata Anche a Mezzo Modello Geomeccanico**", I.S.M.E.S. Istituto Sperimentale Modelli e Strutture, Bergamo, Settembre 1963.

[WWW.1] <http://www.scecdc.scec.org>

[WWW.2] <http://www.scispy.com/Data/ElCentro.htm>

## Životopis

Mr. Alen Harapin dipl. ing. građ. rođen je 07. travnja 1966. godine u Splitu, gdje je završio osnovnu i srednju školu. Školske godine 1983/84. upisao je Fakultet građevinskih znanosti u Splitu na kojem je i diplomirao 19. siječnja 1991. godine.

Odmah nakon studija, 1. srpnja 1991. godine primljen na Građevinski fakultet u Splitu u svojstvu znanstvenog novaka. Odmah se uključio u rad na znanstvenom projektu: “*Numerička analiza i ojačanje ab konstrukcija*”, kod voditelja prof. dr. sc. Jure Radnića, na Katedri za konstrukcije.

Šk. godine 1992/93. upisuje poslijediplomski studij za znanstveno usavršavanje iz područja građevinarstva, znanstvena disciplina “Modeliranje konstrukcija”, u trajanju od četiri semestra, gdje je položio sve ispite s najvišom ocjenom te izradio magistarski rad pod naslovom “Interakcija fluida i konstrukcije s uključenjem tlakova u pukotinama”. Magistarski rad je obranio 28. veljače 1996. na Građevinskom fakultetu u Splitu uz mentorstvo prof. dr. sc. Jure Radnića.

Rezultat rada je cjelovit i efikasan algoritam za numeričko modeliranje konstrukcija u kontaktu s tekućinom, u koji je ugrađeno originalno rješenje za simulaciju ulaska tekućine u otvorene pukotine konstrukcije. I nakon obrane rada, znanstveni novak nastavlja s razvojem modela i pripadajućeg računalnog programa, te je objavio nekoliko radova na uglednim znanstvenim skupovima. Ukupno, do danas je, u koautorstvu, objavio 15 članaka i jednu knjigu.

U skladu sa zakonskim propisima, 1996. godine izabran je u suradničko zvanje asistent. Od početka rada na fakultetu (1991.) uključen je u nastavni proces na Katedri za konstrukcije. Trenutno izvodi vježbe iz predmeta: “Betonske konstrukcije I”, “Betonske konstrukcije II” i “Mostovi” na Građevinskom fakultetu u Splitu, te također vježbe iz predmeta “Betonske konstrukcije I” i “Betonske konstrukcije II” na Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Mostaru.

Od 1997. godine raspoređen je na novi znanstveni projekt: “Modeliranje međudjelovanja tekućina-konstrukcija-tlo” (br. 083131) kod voditelja prof. dr. Jure Radnića. U okviru glavne teme odobren mu je i Poticajni projekt za znanstvene novake pod nazivom: “Numerička simulacija međudjelovanja tekućine i konstrukcije” (br. 083136).

Na 11. redovitoj sjednici Fakultetskog vijeća Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Splitu, održanoj 15. listopada 1996., odobrena je pristup izradi disertacije znanstvenog novaka mr. Alena Harapina pod naslovom: “*Numerička simulacija dinamičkog međudjelovanja tekućine i konstrukcije*”, bez doktorskog studija. Prema ocjeni Povjerenstva u sastavu: prof. dr. Frano Damjanić, prof. dr. Vinko Jović, prof. dr. Ante Mihanović, prof. dr. Jure Radnić, tema je i odobrena, a za mentora je izabran prof. dr. Jure Radnić.

Stručni ispit položio je 1994. godine. Od tada sudjeluje u projektiranju i nadzoru stambenih zgrada, proizvodnih hala, mostova, tunela i drugih inženjerskih građevina.

Aktivni je sudionik domovinskog rata.

Oženjen je i ima dvoje djece.