

# Seizmička analiza zidanih konstrukcija metodom konačno-diskretnih elemenata

---

Smoljanović, Hrvoje

Doctoral thesis / Disertacija

2013

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:*

**University of Split, Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy / Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije**

<https://doi.org/10.31534/DocT.029.SmoH>

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:123:350996>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-22**



*Repository / Repozitorij:*

[FCEAG Repository - Repository of the Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy, University of Split](#)



**Sveučilište u Splitu**  
**FAKULTET GRAĐEVINARSTVA, ARHITEKTURE I**  
**GEODEZIJE**

**Hrvoje Smoljanović, dipl. ing. građ.**

**SEIZMIČKA ANALIZA ZIDANIH**  
**KONSTRUKCIJA METODOM**  
**KONAČNO-DISKRETNIH ELEMENATA**

**Disertacija**

**Split, 2013.**

Hrvoje Smoljanović, dipl. ing. građ.  
Redni broj: 029

**Ova disertacija predana je na ocjenu  
Fakultetu građevinarstva, arhitekture i  
geodezije Sveučilišta u Splitu u svrhu  
stjecanja akademskog stupnja doktora  
tehničkih znanosti u znanstvenom polju  
građevinarstvo.**

**Mentor:** Prof. dr. sc. Željana Nikolić, dipl. ing. građ

**Komentor:** Prof. dr. sc. Ante Munjiza, dipl. ing. građ

**Povjerenstvo za ocjenu:** Prof. dr. sc. Ante Mihanović, dipl. ing. građ.

Prof. dr. sc. Željana Nikolić, dipl. ing. građ.

Prof. dr. sc. Alen Harapin, dipl. ing. građ.

Prof. dr. sc. Pavao Marović, dipl. ing. građ.

Prof. dr. sc. Ivica Kožar, dipl. ing. građ.

**Povjerenstvo za obranu:**

**Prof. dr. sc. Ante Mihanović, dipl. ing. građ.**

**Prof. dr. sc. Željana Nikolić, dipl. ing. građ.**

**Prof. dr. sc. Alen Harapin, dipl. ing. građ.**

**Prof. dr. sc. Pavao Marović, dipl. ing. građ.**

**Prof. dr. sc. Ivica Kožar, dipl. ing. građ.**

**Rad je obranjen dana: 17. lipnja, 2013.**

Tajnica:

**Saša Delić, dipl. iur.**

**Rad sadrži:**

175 stranice teksta

144 crteža

20 tablica

149 citiranih referenci

*Posvećeno mojoj obitelji*

*"Ako Gospodin kuću ne gradi,  
uzalud se muče graditelji.*

*Ako Gospodin grada ne čuva,  
uzalud stražar bdi"*

*( Ps. 123, 1 )*

*Ova disertacija ne bi bila napravljena bez Božje milosti i ljudi koji su mi na direktan ili indirektan način pomagali u ovom radu. Ovom prigodom izražavam iskrenu zahvalnost:*

*mentorici prof. dr. sc. Željani Nikolić i komentoru prof. dr. sc. Anti Munjizi za pomoć i strpljenje koje su mi pružili tijekom izrade ovog rada,*

*članovima povjerenstva prof. dr. sc. Anti Mihanoviću, prof. dr. sc. Alenu Harapinu, prof. dr. sc. Pavi Maroviću i prof. dr. sc. Ivici Kožaru za pregled rada i korisne savjete,*

*prijateljici i kolegici dr. Nikolini Živaljić dipl. ing. građ. za kontinuirani angažman i pomoć pri izradi numeričkih algoritama,*

*prijatelju Marinu Marušiću dipl. ing. građ. za nesebičnu pomoć pri rješavanju software-skih problema,*

*dragim prijateljima i kolegama na podršci i ohrabrenju*

*i na kraju najveću i neizrecivu zahvalnost dugujem svojoj supruzi i roditeljima.*

Hrvoje Smoljanović, dipl.ing. građ.

## SEIZMIČKA ANALIZA ZIDANIH KONSTRUKCIJA METODOM KONAČNO-DISKRETNIH ELEMENATA

### Sažetak

U ovom radu je u okviru kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata razvijen novi numerički model za simulaciju ponašanja zidanih konstrukcija izloženih statičkom, dinamičkom i seizmičkom opterećenju. U postojeći računalni program Y-2D koji se temelji na kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata implementiran je novi numerički model za simulaciju čeličnih klamfi i trnova u suho zidanim kamenim konstrukcijama. Model uključuje dva tipa klamfi i jedan tip trnova koji se najčešće koriste u kamenim konstrukcijama uzimajući u obzir mogućnost izvlačenja klamfe i trna iz kamenog bloka, mogućnost pucanja klamfi i trnova te cikličko ponašanje materijala. U sklopu ovog rada provedena je verifikacija ugrađenog modela te je prikazana njegova primjena u inkrementalnoj seizmičkoj analizi realnih kamenih konstrukcija.

Također, razvijen je novi numerički model materijala za analizu nearmiranih zidanih konstrukcija. Model se sastoji od novog numeričkog modela kontaktnog elementa za simuliranje veze bloka i morta te novog modela ponašanja materijala u konačnom elementu. Model materijala u konačnom elementu uzima u obzir ortotropno ponašanje, mogućnost sloma u tlaku, pojavu tlačnog omekšanja te cikličko ponašanje materijala. Model ponašanja kontaktnog elementa za simulaciju veze morta i bloka uzima u obzir pojavu sloma u vlaklu i posmiku, povećanje energije loma u posmiku uslijed povećanja predlačnog naprezanja, smanjenje koeficijenta trenja uslijed povećanja posmične deformacije te cikličko ponašanje veze morta i bloka. Valjanost modela je provjerena usporedbom dobivenih rezultata s numeričkim i eksperimentalnim rezultatima preuzetima iz literature.

Prezentiran je također i novi numerički model za seizmičku analizu zidanih konstrukcija omeđenih armiranobetonskim serklažima koji se sastoji od sinteze novo razvijenog numeričkog modela materijala za analizu nearmiranih zidanih konstrukcija te prethodno razvijenog numeričkog modela za analizu armiranobetonskih konstrukcija.

**Ključne riječi:** Kombinirana metoda konačno-diskretnih elemenata, zidane konstrukcije, čelične klamfe i trnovi, model materijala, kontaktni element, potresno opterećenje.



Hrvoje Smoljanović, dipl.ing. građ.

## **SEIZMIC ANALYSIS OF MASONRY STRUCTURES WITH FINITE- DISCRETE ELEMENT METHOD**

### **Summary**

This thesis presents a new numerical model based on a combined finite-discrete element method, capable of predicting the behaviour of masonry structures under static, dynamic and seismic loads. A new numerical model of steel clamps and bolts in dry stone masonry structures is implemented in the available numerical code Y-2D based on combined finite-discrete element method. Model includes several types of clamps and bolts which are frequently used in strengthening of dry stone masonry structures taking into account influence of the pulling out of the clamps and bolts from the stone block, cyclic behaviour, yielding and failure of the steel. The verification of the model and possibility of using this model in incremental dynamic analysis of real dry stone masonry structures is also shown.

New material model for numerical analysis of unreinforced masonry structures was also developed. Model consists of new numerical model in contact element which simulates connection between block and mortar, and new material model in finite element. Material model in finite element takes into account orthotropic behaviour, cyclic behaviour, possibility of failure and softening in pressure. Numerical model of contact element which simulates connection between block and mortar take into account possibility of failure and softening behaviour in tension and shear, increasing of fracture energy in shear due to increasing pre compression stress, decreasing friction coefficient due to increasing shear displacement as well as cyclic behaviour connection between mortar and block. The verification of the model was performed on examples by comparing it with the results obtained with the known numerical and experimental results from literature.

New numerical model for seismic analysis of reinforced masonry structures was also presented. Model consists of synthesis of new developed material model for unreinforced masonry structures and previously developed numerical model for analysing reinforced concrete structures.

**Keywords:** Combined finite-discrete element method, masonry structures, steel clamps and bolts, material model, contact element, seismic load.

---

## SADRŽAJ

---

<b>1. UVOD</b>	<b>1</b>
1.1 OPĆENITO	1
1.2 OSVRT NA MODELIRANJE ZIDANIH KONSTRUKCIJA IZLOŽENIH SEIZMIČKOM OPTEREĆENJU	4
1.2.1 Dinamičke analitičke metode	9
1.2.2 Metoda graničnih stanja	12
1.2.3 Metoda konačnih elemenata	14
1.2.4 Metoda diskretnih elemenata	19
1.3 SADRŽAJ RADA	23
<b>2. OSNOVE KOMBINIRANE METODE KONAČNO- DISKRETNIH ELEMENATA</b>	<b>26</b>
2.1 DETEKCIJA I INTERAKCIJA KONTAKTA	27
2.2 DEFORMABILNOST KONAČNIH ELEMENATA	31

---

2.3	PRIJELAZ IZ KONTINUUMA U DISKONTINUUM	43
2.4	VREMENSKA DISKRETIZACIJA	49
<b>3.</b>	<b>ANALIZA NUMERIČKIH PARAMETARA</b>	<b>52</b>
3.1	ANALIZA <i>PENALTY</i> KOEFICIJENTA	53
3.2	ANALIZA PRIGUŠENJA	55
3.3	ANALIZA KONTAKTNOG MEĐUDJELOVANJA	64
3.4	VERIFIKACIJA TEMPERATURNOG DJELOVANJA	72
3.5	VERIFIKACIJA STATIČKOG I DINAMIČKOG TRENJA	74
<b>4.</b>	<b>ANALIZA SUHO ZIDANIH KAMENIH KONSTRUKCIJA</b>	<b>76</b>
4.1	DISKRETIZACIJA KONSTRUKCIJE	77
4.2	VALIDACIJA NUMERIČKOG MODELA	78
4.2.1	Slobodno njihanje kamenog bloka	78
4.2.2	Posmično ponašanje kontakta dvaju blokova	79
4.2.3	Monotono i cikličko ponašanje suho zidanog kamenog zida	81
4.3	PRIMJENA NUMERIČKOG MODELA	89
4.3.1	Seizmička analiza konstrukcije Protirona u Splitu	89
4.3.2	Seizmička analiza slobodno stojećeg kamenog stupa	94
<b>5.</b>	<b>NOVI NUMERIČKI MODEL ČELIČNIH KLAMFI I TRNOVA</b>	<b>104</b>
5.1	TIPOVI KLAMFI I TRNOVA	105
5.2	PRIKAZ NUMERIČKOG MODELA KLAMFI I TRNOVA	107
5.2.1	Klamfe tipa I	107
5.2.2	Klamfe tipa II	110
5.2.3	Trnovi	113
5.3	VERIFIKACIJA NUMERIČKOG MODELA	117
5.3.1	Verifikacija modela klamfi tipa I za monotono rastuće opterećenje	117

5.3.2	Verifikacija modela klamfi tipa I za cikličko opterećenje _____	119
5.3.3	Verifikacija modela klamfi tipa II za monotono rastuće opterećenje _____	120
5.3.4	Verifikacija modela trnova za monotono rastuće opterećenje _____	121
5.3.5	Verifikacija modela trnova za cikličko opterećenje _____	122
5.4	PRIMJENA NUMERIČKOG MODELA _____	123
5.4.1	Seizmička analiza konstrukcije Protirona s ugrađenim klamfama i trnovima _____	123
<b>6.</b>	<b>NOVI NUMERIČKI MODEL MATERIJALA ZA ZIDANE KONSTRUKCIJE _____</b>	<b>129</b>
6.1	MEHANIČKA SVOJSTVA ZIDANIH KONSTRUKCIJA _____	130
6.1.1	Mehaničke karakteristike blokova, morta te veze morta i bloka _____	130
6.1.2	Mehaničke karakteristike zidane konstrukcije kao kompozita _____	133
6.2	DISKRETIZACIJA KONSTRUKCIJE _____	135
6.3	MODEL MATERIJALA U KONAČNOM ELEMENTU _____	136
6.4	MODEL MATERIJALA U KONTAKTNOM ELEMENTU MORT-BLOK _____	140
6.5	VALIDACIJA IMPLEMENTIRANOG MODELA _____	142
6.5.1	Validacija numeričkog modela za monotono rastuće tlačno opterećenje _____	142
6.5.2	Validacija vlačnog ponašanja u kontaktnom elementu mort-blok _____	143
6.5.3	Validacija posmičnog ponašanja u kontaktnom elementu mort-blok _____	145
6.5.4	Zidani posmični zidovi izloženi monotono rastućem opterećenju _____	146
6.5.5	Zidani posmični zidovi izloženi cikličkom opterećenju _____	150
6.6	PRIMJENA RAZVIJENOG MODELA U ANALIZI ZIDANIH KONSTRUKCIJA OMEĐENIH AB SERKLAŽIMA _____	151
<b>7.</b>	<b>ZAKLJUČCI I PRAVCI DALJNIH ISTRAŽIVANJA _____</b>	<b>157</b>
<b>8.</b>	<b>LITERATURA _____</b>	<b>161</b>

# 1. UVOD

---

## 1.1 OPĆENITO

Zidanje, odnosno slaganje kamenih ili glinenih blokova jedan na drugi uz njihovo eventualno međusobno povezivanje mortom najstarija je građevinska tehnika koja se sačuvala sve do današnjih dana. Među najstarije pronađene građevinske konstrukcije ubrajaju se zidane kamene kolibe kružnog oblika pronađene u blizini jezera Hullen u Izraelu koje potječu iz razdoblja između 9000. i 8000. godina prije Krista [L11]. Iako su prve zidane konstrukcije bile najvjerojatnije gomile prirodnog kamena [O2], razvojem ljudskih vještina i alata kameni blokovi zadobivali su sve pravilnije oblike, a paralelno s kamenom za pravljenje blokova počinje se koristiti ukalupljeno blato ili glina koji su u početku sušeni na zraku, a kasnije i pečeni u posebnim pećima radi postizanja veće čvrstoće. Osim usavršavanja tehnike izrade blokova kroz razne kulture u ljudskoj povijesti razvijaju se i različiti konstrukcijski oblici poput stupova za postizanje visine te greda, lukova, svodova i kupola za premošćivanje raspona.

Svoju dugu tradiciju, ali i raširenost po cijelom svijetu, zidanje pripisuje svojoj jednostavnosti ali i dugovječnosti zidanih konstrukcija koja se očituje u mnogim takvim građevinama starim više stotina pa i nekoliko tisuća godina. Samo neki od primjera takvih

građevina (slika 1.1), koje su ujedno postale simboli pojedinih kultura, su piramide u Egiptu koje potječu iz razdoblja između 2800.-2000. prije Krista, Partenon u Grčkoj iz petog stoljeća prije Krista, Kineski zid čija je gradnja započela u petom stoljeću prije Krista te Koloseum u Rimu iz prvog stoljeća.



(a)



(b)



(c)



(d)

**Slika 1.1** Stare kamene konstrukcije: (a) Egipatske piramide; (b) Partenon u Ateni; (c) Kineski zid; (d) Koloseum u Rimu

Unatoč jednostavnosti koja se očituje pri gradnji zidanih konstrukcija, razumijevanje i opisivanje mehaničkog ponašanja takvih konstrukcija, osobito u uvjetima seizmičkog opterećenja, i danas predstavlja pravi izazov zahvaljujući samoj prirodi zidane konstrukcije koja zbog prisutnosti sljubnica između blokova, koje mogu a i ne moraju biti popunjene mortom, pokazuje kompleksno i izrazito nelinearno ponašanje.

Mnoge zidane konstrukcije nalaze se u seizmički aktivnim područjima u kojima je potres otkrio svu njihovu ranjivost. U tim potresima često stradavaju zidane građevine i spomenici koji se svrstavaju u kategoriju kulturne baštine, kao i suvremene zidane konstrukcije. Da bi se smanjio

broj ljudskih žrtava te smanjila oštećenja takvih konstrukcija, potrebno je dati bolji uvid u ponašanje zidanih konstrukcija pod seizmičkim djelovanjem. Upravo iz ovog razmatranja proizlazi i glavna motivacija za izradu ove disertacije koja za cilj ima razvijanje numeričkog modela za simulaciju ponašanja zidanih konstrukcija pod seizmičkim opterećenjem. Očekuje se da bi ovaj numerički model mogao pomoći pri procjeni seizmičke otpornosti zidanih konstrukcija kao i pri donošenju odluka vezanih za poduzimanje zahvata kojima bi se povećala seizmička otpornost postojećih zidanih konstrukcija.

Predviđanje mehanizma sloma zidanih konstrukcija izloženih seizmičkom opterećenju nameće potrebu za razvijanjem numeričkog modela koji može obuhvatiti pojave vezane za ponašanje zidanih konstrukcija u linearno-elastičnoj fazi, pojavu i razvoj pukotina, gubitak energije uslijed pojave nelinearnih efekata, inercijalne efekte uslijed gibanja, međudjelovanja koja su posljedica dinamičkog kontakta te naposljetku postizanje stanja mirovanja koje se javlja kao posljedica gubitka energije u konstrukciji.

Sve navedene efekte moguće je obuhvatiti kombiniranom metodom konačno-diskretnih elemenata (FEM/DEM) pa je upravo iz tog razloga računalni program Y-2D koji se zasniva na kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata korišten u ovom radu kao polazište u analizi zidanih konstrukcija.

Ciljevi ovog rada su sljedeći:

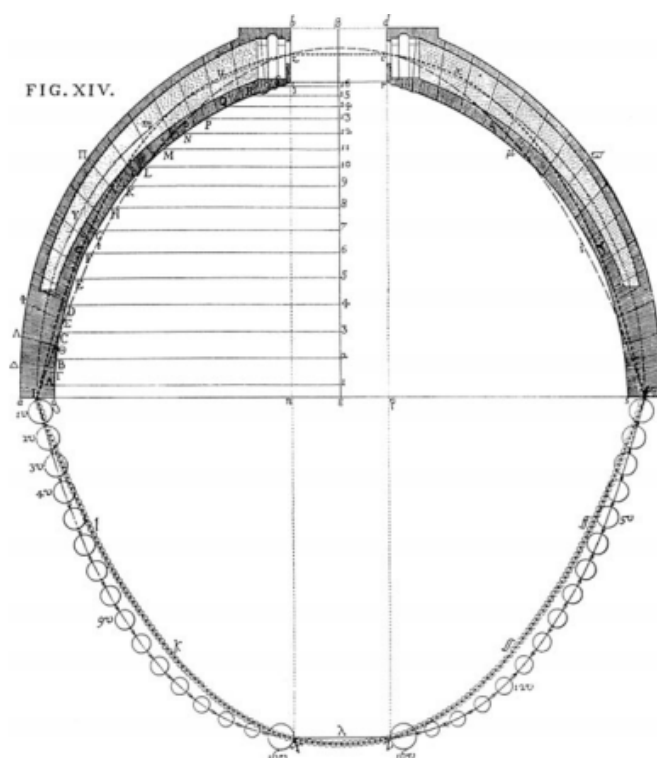
- provjeriti valjanost i primjenjivost postojećeg računalnog programa Y-2D u analizi suho zidanih kamenih konstrukcija usporedbom numeričkih rezultata s rezultatima eksperimenata koji su dostupni u literaturi;
- razviti numerički model za simulaciju klamfi i trnova u kamenim konstrukcijama;
- demonstrirati primjenu ugrađenog modela klamfi i trnova na realnim konstrukcijama izloženima seizmičkom opterećenju;
- razviti novi numerički model materijala u konačnom te kontaktnom elementu kojim bi se omogućila analiza nearmiranih zidanih konstrukcija pomoću kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata na pojednostavljenoj mikro razini. Model materijala u konačnom elementu mogao bi simulirati ortotropno ponašanje, mogućnost sloma u tlaku kao i pojavu tlačnog omekšanja. Model materijala u kontaktnom elementu za simuliranje veze bloka i morta bi, uz postojeću mogućnost pucanja u vlaknu i posmiku, uzimao u obzir povećanje energije loma u posmiku uslijed povećanja predtlačnog naprezanja, smanjenje

koeficijenta trenja uslijed povećanja posmične deformacije te cikličko ponašanje veze mort-blok;

- provjeriti valjanost ugrađenog modela materijala za analizu nearmiranih zidanih konstrukcija usporedbom numeričkih rezultata s rezultatima eksperimenata koji su dostupni u literaturi;
- demonstrirati primjenu novo razvijenog modela materijala za nearmirane zidane konstrukcije u kombinaciji s postojećim numeričkim modelom armature u analizi zidanih konstrukcija omeđenih armirano-betonskim serklažima;

## 1.2 OSVRT NA MODELIRANJE ZIDANIH KONSTRUKCIJA IZLOŽENIH SEIZMIČKOM OPTEREĆENJU

Tijekom dugog niza godina vrlo malo se govorilo o proračunu zidanih konstrukcija. Vještina izrade zidanih konstrukcija stjecala se na temelju iskustva i prenosila s naraštaja na naraštaj. Rimski arhitekt Vitruvius u svom djelu Deset knjiga o arhitekturi [V4] uspoređuje kvalitetu kamena i drva s raznih lokacija te govori o proporcijama raznih konstrukcijskih elemenata i građevina, međutim, o proračunu se ne govori ništa.



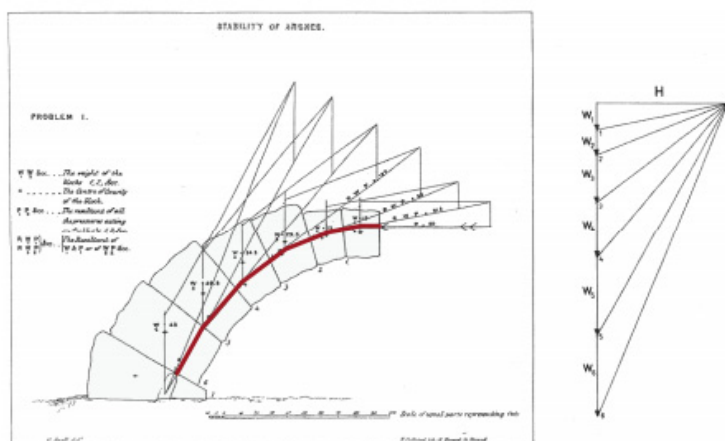
Crtež 1.1 Polenijeva analiza ravnoteže kupole Svetog Petra u Rimu [P14]



Smatralo se da ako konstrukcija ima prave proporcije da je ona tada konstrukcijski ispravna i takvo se razmišljanje zadržalo kroz cijeli srednji vijek. Brojne impozantne građevine nastale u tom razdoblju, koje i danas postoje, pokazuju da iskustveno znanje o stabilnosti i raspodjeli sila unutar zidane konstrukcije u tom vremenu nije bilo zanemarivo.

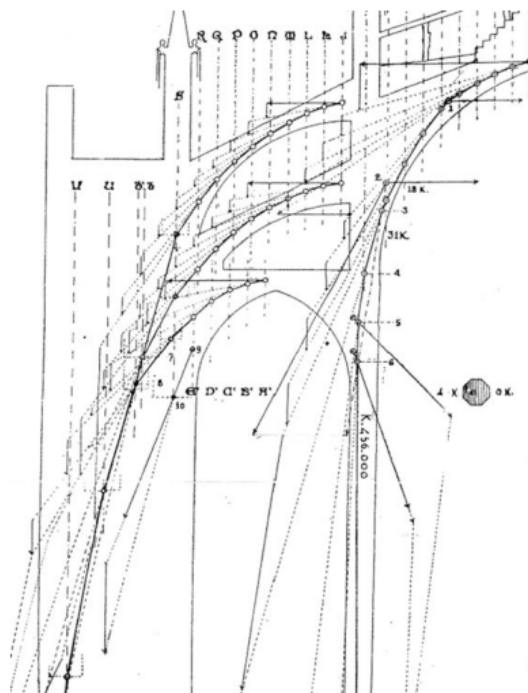
Pojavom renesanse u 15. stoljeću, paralelno s gradnjom sve vitkijih konstrukcija, javila se i potreba za teoretskom podlogom pri gradnji istih. U drugoj polovini 17. stoljeća Robert Hooke je uočio da dijelovi kamenog luka imaju oblik obrnute obješene lančanice. Matematički oblik obješene lančanice izveo je David Gregory koji je 1698. neovisno došao do Hookove tvrdnje i proširio je na način da se može primijeniti kod lukova konačne debljine. Prema Gregoryju lukovi su stabilni kada se unutar njihove debljine može položiti obješena lančanica. Analogija s lančanicom koristila se kroz 18. i 19. stoljeće za dizajn i analizu kamenih mostova i kupola. Jedan od najznačajnijih takvih primjera je analiza kupole Svetog Petra u Vatikanu koju je napravio Poleni [P14] (crtež 1.1).

S druge pak strane u Francuskoj se kroz 18. stoljeće javljao drugačiji pogled na isti problem. La Haire, Couplet i Coulomb luk su doživljavali kao niz krutih blokova koji mogu imati relativne pomake. Prema Coupletu kolaps se dogodi kada se u luku pojavi dovoljan broj zglobova da se stvori mehanizam [H3]. Prvu generalnu teoriju o stabilnosti lukova objavio je Coulomb 1773. [C10]. U njoj je on razvio matematičku bazu za opisivanje različitih oblika kolapsa lukova uzimajući u obzir relativne rotacije i klizanje između blokova. Coulomb je smatrao da se klizanje među blokovima rijetko događa pa je sugerirao da se u razmatranju za praktične svrhe uzimaju samo oblici sloma uzrokovani relativnim rotacijama blokova.



Crtež 1.2 Grafička analiza kamenog luka [S11]

Daljnji napredak u analizi lukova dogodio se u 19. stoljeću pojavom grafičke statike i teorijom tlačne linije. Grafička statika koristila se za analizu mnogih vrsta kamenih mostova i građevina sve do početka 20. stoljeća. Snell [S11] je na primjer koristio grafičku metodu da bi izračunao stabilnost kamenog luka. Na crtežu 1.2 prikazan je verižni poligon koji je Snell koristio kako bi skicirao tlačnu liniju kamenog luka. Na sličan način je Rubio teorijom tlačnih linija analizirao katedralu u Mallorci [R8] (crtež 1.3).



**Crtež 1.3** Detalj Rubijeve primjene grafičke statike u analizi katedrale u Mallorci [R8]

Moderna analiza konstrukcija, koja uzima u obzir elastična svojstva materijala, započela je s Hookovim zakonom ( $\sigma = E \varepsilon$ ) formuliranim 1676. godine na kojem se temelji teorija elastičnosti nastala u 19. stoljeću.

Da bi se moglo govoriti o proračunu i modeliranju zidanih konstrukcija, potrebno je uočiti njihova glavna obilježja. Glavno obilježje svih zidanih konstrukcija je njihova kompozitna priroda koju čine blokovi odvojeni sljubnicama koje mogu, ali i ne moraju biti ispunjene mortom. Prisutnost sljubnica koje u zidanoj konstrukciji predstavljaju najslabiju kariku uzrok je izrazitog nelinearnog i kompleksnog ponašanja, što stvara velike poteškoće u numeričkom modeliranju. Upravo iz ovog razloga postoji široka paleta metoda i numeričkih modela za proračun zidanih konstrukcija koje se razlikuju po stupnju složenosti, obujmu ulaznih podataka i točnosti rješenja. Budući da svaka metoda ima svoje područje primjene, ne može se govoriti o najboljoj metodi već o izboru najbolje metode ovisno o konstrukciji koju želimo analizirati, ulaznim podacima kojima

raspoložemo, rezultatima koje želimo dobiti te naposljetku iskustvu i kvalifikaciji samog istraživača [L12]. Najbolja metoda može se definirati kao ona koja daje tražene informacije s prihvatljivim pogreškama na najbrži način. U ovom poglavlju neće se pobliže opisivati svaka od tih metoda već će se prikazati samo glavne značajke te područje primjene pojedinih metoda.

U numeričkom modeliranju zidanih konstrukcija postoje dva osnovna pristupa, a to su idealizacija pomoću kontinuuma i diskontinuumu.

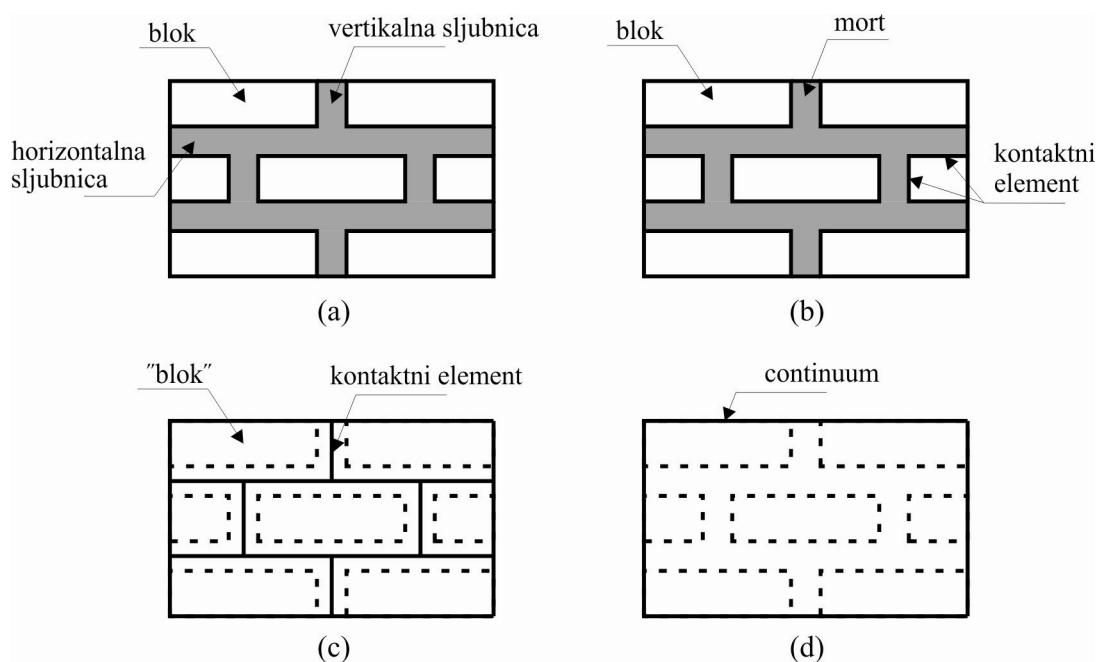
Usvajanje hipoteze o kontinuumu pretpostavlja da su naprezanja i deformacije nad promatranim volumenom opisane kontinuiranim funkcijama. Veze između naprezanja i deformacija dane su konstitutivnim zakonom ponašanja materijala. Kombinirajući konstitutivni zakon ponašanja materijala s jednadžbama ravnoteže moguće je dobiti diferencijalne jednadžbe čije rješavanje uz zadovoljavanje rubnih uvjeta daje rješenje danog problema u smislu pomaka i naprezanja. Budući da se uglavnom radi o diferencijalnim jednadžbama čije je rješenje nepoznato u analitičkom obliku, najčešće se takve jednadžbe zajedno s rubnim uvjetima, primjenjujući dinamičke zakone očuvanja energije prevode u varijacijski problem, odnosno slabu formulaciju koja se može rješavati približnim numeričkim postupcima od kojih je najraširenija metoda konačnih elemenata.

Nasuprot tome, idealizacija pomoću diskontinuumu konstrukciju promatra kao skup diskretnih elemenata koji se tijekom analize mogu razdvajati, slobodno gibati te ponovno naći u međusobnoj dinamičkoj interakciji. Kod ovakvog pristupa diskretni elementi se uglavnom promatraju kao apsolutno kruti, a numerička integracija jednadžbi gibanja blokova u vremenu najčešće se provodi eksplicitnim putem. Numerički modeli koji usvajaju ovakav pristup ubrajaju se u metode diskretnih elemenata.

U posljednje vrijeme sve je više numeričkih modela koji kombiniraju prednosti idealizacije konstrukcije pomoću kontinuuma i diskontinuumu. Neke od takvih metoda razvile su se iz metoda konačnih elemenata, dok su se druge razvile iz metoda diskretnih elemenata. One koje su se razvile iz metoda konačnih elemenata prednosti idealizacije pomoću diskontinuumu ostvaruju preko kontaktnih elemenata koji mogu biti ugrađeni između mreže konačnih elemenata. Pomoću kontaktnih elemenata opisuje se diskontinuitet u polju pomaka u slučaju nastanka pukotine. S druge pak strane numerički modeli koji su se razvili iz metoda diskretnih elemenata prednosti idealizacije preko kontinuuma najčešće ostvaruju na način da se svaki diskretni element diskretizira s vlastitom mrežom konačnih elemenata, čime je moguće uzeti u obzir deformabilnost elemenata.

Neovisno o tome o kojem se pristupu govori, s obzirom na stupanj jednostavnosti i točnosti može se govoriti o mikro modeliranju, pojednostavljenom mikro modeliranju te makro modeliranju [L11] (crtež 1.4).

Kod makro modeliranja sve točke konstrukcije imaju jednaka svojstva, tj. isti konstitutivni zakon ponašanja koji se dobio na temelju svojstava reprezentativnog volumena dovoljno velike veličine prema teoriji osrednjavanja odnosno homogeniziranja. U ovom slučaju svojstva morta i svojstva blokova su jednoliko razmazana po konstrukciji koju tretiramo kao homogeni anizotropni kontinuum. Ovakav pristup prikladan je za analizu većih konstrukcija jer je proračunski najmanje zahtjevan. Ako je reprezentativni volumen reda veličine jednog bloka i manje, tada se govori o detaljnom mikro modeliranju kod kojeg su blok i mort diskretizirani i modelirani s konačnim elementima, dok je veza bloka i morta prezentirana s kontaktnim elementima. U ovom pristupu konstitutivni zakoni ponašanja morta i bloka promatraju se odvojeno. Zbog svojih velikih proračunskih zahtjeva ovaj pristup prikladan je za modeliranje manjih konstrukcijskih detalja, ali ne i realnih konstrukcija. Kod pojednostavljenog mikro modeliranja prošireni blok modeliran je s konačnim elementima dok je veza morta i bloka opisana kontaktnim elementima koji ujedno predstavljaju mjesta potencijalnih pukotina. Ovim pristupom dolazi do gubitka točnosti budući da se Poissonov koeficijent u mortu, koji znatno utječe na tlačnu čvrstoću zidane konstrukcije, ne uzima u obzir.



**Crtež 1.4** Razine modeliranja zidanih konstrukcija: (a) predložak zidane konstrukcije; (b) detaljno mikro modeliranje; (c) pojednostavljeno mikro modeliranje; (d) makro modeliranje [L11]

Što se tiče samog načina tretiranja potresnog opterećenja, metode namijenjene za seizmičku analizu zidanih konstrukcija mogu se svrstati u linearne, u koje se ubraja pojednostavljena ekvivalentna statička analiza i modalna analiza, te nelinearne, u koje se ubraja statička metoda postupnog guranja i metoda odgovora u vremenu.

Kod pojednostavljene ekvivalentne statičke analize potresno opterećenje se aproksimira s ekvivalentnim statičkim opterećenjem i to na dva načina. Prvi način je da se konstrukcija izloži konstantnom horizontalnom ubrzanju. Ovim pristupom zanemarena je činjenica da tijekom potresa konstantno ubrzanje podloge traje samo kratki vremenski period. Također su zanemareni i rezonantni efekti koji se u konstrukciji javljaju tijekom potresa zbog elastičnih svojstava materijala. Ovaj pristup prikladan je za analizu stabilnosti nekih vrsta starih kamenih konstrukcija kao što su lukovi kod kojih elastična svojstva materijala ne igraju veliku ulogu. Drugi način je da se po visini konstrukcije zada raspodijeljeno opterećenje koje raste od dna prema vrhu čime se uzima u obzir raspodjela horizontalnih sila uzrokovana dinamičkim odgovorom konstrukcije. Seizmički proračun konstrukcije pomoću modalne analize uglavnom se radi preko metode konačnih elemenata pomoću koje je moguće izračunati vlastite oblike i frekvencije. S obzirom na udio pojedinog vlastitog oblika u seizmičkom odgovoru, po visini konstrukcije zadaju se opterećenja koja se zatim kombiniraju raznim postupcima.

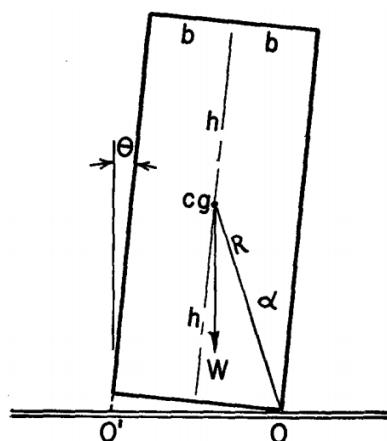
Metoda postupnog guranja bazira se na postupnom povećavanju amplitude horizontalnih sila uz paralelno praćenje odgovora konstrukcije [F1]. Metoda odgovora u vremenu sastoji se u tome da se za određeni zapis ubrzanja podloge izračuna odgovor konstrukcije u vremenu u obliku naprezanja, deformacija i pomaka.

U nastavku će se pobliže opisati glavne značajke te mogućnost primjene danas najčešće korištenih numeričkih metoda u seizmičkoj analizi zidanih konstrukcija.

### **1.2.1 Dinamičke analitičke metode**

Cilj ovih metoda je analitičkim putem predvidjeti odgovor konstrukcije uslijed dinamičke pobude ili predvidjeti najmanju vrijednost horizontalnog ubrzanja podloge koja će uzrokovati slom konstrukcije. Budući da se u ovim metodama elementi konstrukcije pretpostavljaju kao apsolutno kruti, pretpostavljeno je da do sloma konstrukcije neće doći zbog prekoračenja čvrstoće materijala već isključivo zbog gubitka stabilnosti. Zbog vrlo složenih analitičkih jednadžbi, ove metode su ograničene na analizu jednostavnijih konstrukcija kao što su blokovi na horizontalnoj podlozi, portalni okviri te lukovi.

Prvi koji je koristeći zakone dinamike analizirao prevrtanje apsolutno krutog bloka na horizontalnoj podlozi izloženog konstantnom horizontalnom, sinusnom te potresnom ubrzanju podloge bio je Housner [H8]. Uvodeći pretpostavke da između bloka i podloge nema klizanja, da nema odskakanja bloka od podloge, da je blok dovoljno vitak, tj. da je kut  $\alpha$  (crtež 1.5) manji od  $20^\circ$  te da je kut rotacije  $\Theta$  prilikom osciliranja mali, Housner je analizirao potrebno vrijeme trajanja pravokutnog odnosno sinusnog impulsa koji bi uzrokovao prevrtanje bloka. Gubitak energije prilikom sudara bloka s podlogom Housner je uzeo u obzir uvodeći pretpostavku da je prilikom naizmjenične rotacije bloka oko jednog i drugog ruba očuvan moment količine gibanja. Također je pokazao kako je stabilnost visokog tankog bloka prilikom potresnog opterećenja mnogo veća od one koju ima pri konstantnom ubrzanju podloge. Housnerov rad podloga je za brojne druge radove koji su se bavili problemom njihanja bloka na podlozi.



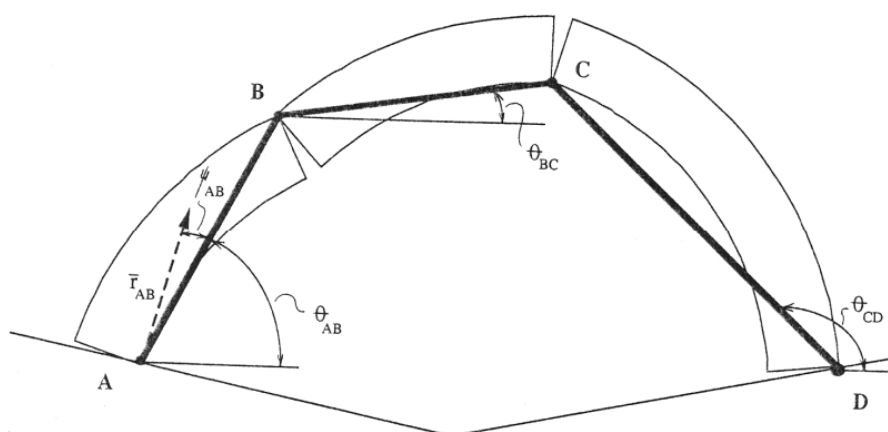
Crtež 1.5 Blok koje se njiše [H8]

Nadovezujući se na Hausnerov rad, Yim [Y1] je, između ostalih, problemu njihanja bloka na horizontalnoj podlozi prišao ne uvodeći pretpostavku malih kutova rotacije. Rješavajući jednadžbu gibanja numeričkim putem, Yim [Y1] je problem prevrtanja bloka uslijed seizmičke pobude promatrao s probabilističkog stajališta budući da se pokazalo da dinamički odgovori bloka na različita ubrzanja podloge s istom amplitudom znatno variraju od malih oscilacija pa sve do potpunog prevrtanja.

Dok se Yim [Y1] fokusirao na dinamički odgovor bloka uslijed slučajnih ubrzanja podloge, Spanos i Koh [S11] fokusirali su se na dinamički odgovor bloka uslijed harmonijskog ubrzanja podloge. Slijedeći Spanosa i Koha, velik broj znanstvenika istraživao je dinamički odgovor bloka uslijed harmonijskog ubrzanja podloge [H6, L5, S5, T1, Y2]. Svi ovi radovi temelje se na pretpostavci da se dinamičko gibanje može opisati preko spektara odgovora.

Da bi se ispitalo mnogo kompleksnije ponašanje bloka uslijed ubrzanja podloge istraživači su u svojim radovima razmatrali i mogućnost klizanja te odskakanja bloka od podloge [A7, L6, P15, S1, S4, S6].

Nekoliko istraživača proučavalo je odgovor sustava koji se sastoji od više blokova. Tako su Sinopoli i Sepe [S10] proučavali odgovor okvirne konstrukcije napravljene od tri bloka izložene horizontalnom ubrzanju podloge. Na sličan način je Spanos sa svojim suradnicima [S13] analizirao dinamiku konstrukcije sastavljene od dva bloka, međutim, jednažbe za analizu dinamike ova dva bloka bile su toliko složene da su znanstvenici zaključili da je za dinamičku analizu sustava više blokova pogodnija metoda diskretnih elemenata o kojoj će u nastavku biti riječ.



**Crtež 1.6** Mehanizam formiran kod kamenog luka uslijed horizontalnog ubrzanja podloge [O3]

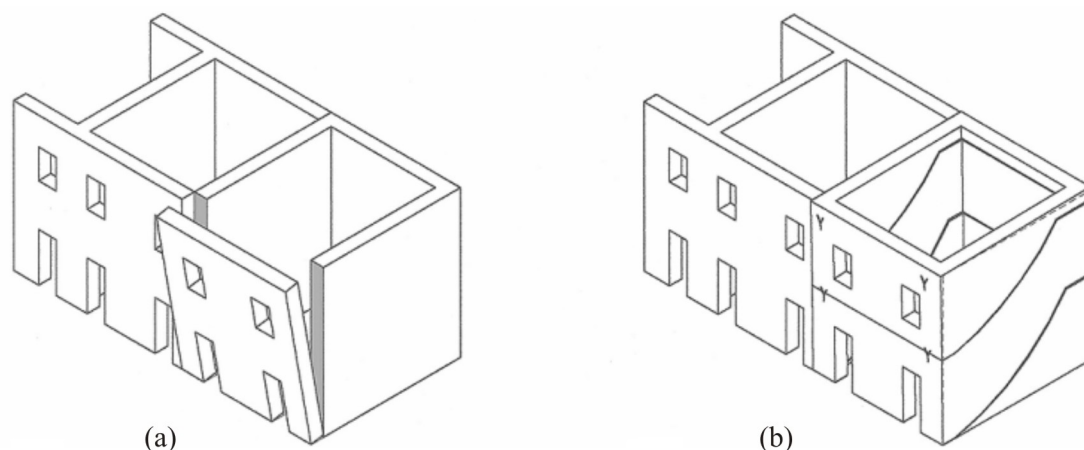
Osim analize blokova, neki su znanstvenici analitičke metode koristili za analizu stabilnosti lukova izloženih konstantnom horizontalnom ubrzanju podloge [C8, O3]. Oba autora koristila su ekvivalentnu statičku analizu da bi utvrdili mjesta nastanka zglobova u luku pretpostavljajući da ta mjesta ostaju nepromijenjena tijekom dinamičkog odgovora konstrukcije. Pojednostavljenje ovakvog sustava koji se sastoji od više blokova na sustav s jednim stupnjem slobode (crtež 1.6) omogućuje analitičko rješenje.

Složenost analitičkih metoda pri proračunu dinamičkog odgovora složenijih zidanih konstrukcija na seizmičku pobudu potakla je znanstvenike na razvoj numeričkih metoda. Najprikladnija numerička metoda za proračun stabilnosti zidanih konstrukcija koja može analizirati dinamiku krutih tijela je metoda diskretnih elemenata.

### 1.2.2 Metoda graničnih stanja

Metode graničnih stanja temelje se na pretpostavkama koje je Couplet postavio još 1730. godine, a to su: (1) zidana konstrukcija nema vlačnu čvrstoću, (2) zidana konstrukcija ima beskonačnu čvrstoću u tlaku i (3) klizanje među sljubnicama ne može se pojaviti. Ove pretpostavke među prvima je koristio Heyman [H5] u analizi stabilnosti kamenih lukova. Naime usvajanje ovih pretpostavki omogućuje primjenu kinematičkog i statičkog teorema plastičnosti pomoću kojih se za zadani vektor vanjskog opterećenja  $\mathbf{F}$  može odrediti faktor opterećenja  $\alpha$  kojim je potrebno uvećati vanjsko opterećenje da dođe do sloma konstrukcije.

Statički teorem ili teorem donje granice kaže da je konstrukcija stabilna, tj. da neće doći do sloma, ako se za zadano vanjsko opterećenje može pronaći statički prihvatljivo polje unutrašnjih sila. Najveća vrijednost faktora opterećenja za koji je konstrukcija još u ravnoteži predstavlja donju granicu faktora sigurnosti. Kinematički teorem kaže da je konstrukcija nestabilna ako se može pronaći takav mehanizam za koji je rad vanjskih sila veći ili jednak nuli. Najniža vrijednost faktora opterećenja za koji je rad vanjskih sila na pretpostavljenom mehanizmu jednak nuli predstavlja gornju granicu faktora sigurnosti konstrukcije. Na temelju ovih teorema može se zaključiti da koeficijent sigurnosti konstrukcije dobiven statičkim ili kinematičkim pristupom mora biti isti.



**Crtež 1.7** Mehanizam sloma vanjskih zidova starih zgrada: (a) bez poprečnih veza; (b) s poprečnim vezama [C3]

Klasične metode graničnih stanja koristile su statički pristup koji se temeljio na korištenju verižnog poligona pri grafičkoj interpretaciji tlačnih linija kod kamenih lukova [H4, K1]. Ako bi se tlačna linija nalazila unutar kontura luka, to bi značilo da je luk statički stabilan. Razvojem računala, Harvey i Maunder [H2] koristili su tablični proračun za dobivanje trodimenzionalnog oblika tlačne linije, dok je Block sa suradnicima [B6, B7] razvio interaktivnu kompjutorsku



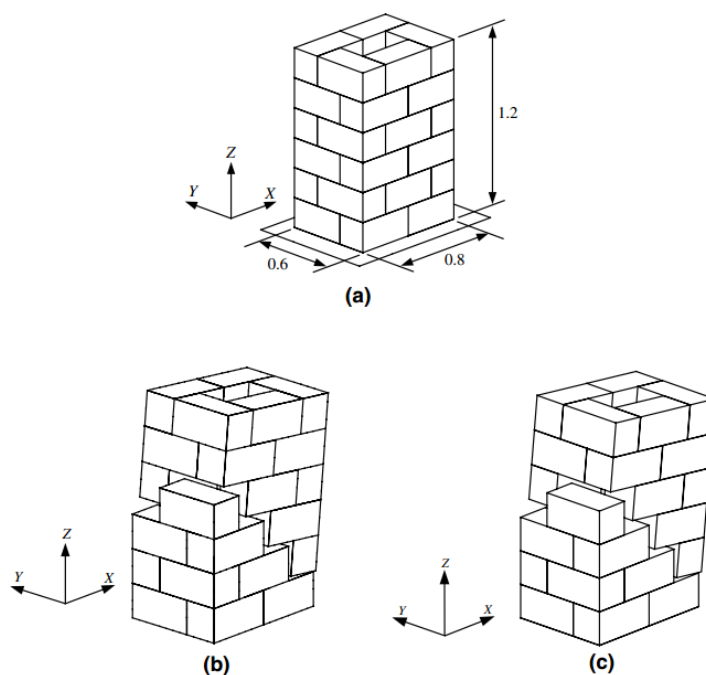
analizu baziranu na kombinaciji statičkog i kinematičkog teorema za dobivanje tlačne linije kod trodimenzionalnih problema.

Osim analize lukova, metoda graničnih stanja koristila se i za druge vrste konstrukcija. Na temelju razmatranja načina kolapsa starih zidanih građevina Giuffré [G7, G8] i Carocci [C3] su nakon dekompozicije konstrukcije na krute blokove koristili kinematički pristup da bi procijenili njihovu seizmičku otpornost (crtež 1.7). Metoda je prikladna za analizu onih vrsta konstrukcija kod kojih međukatne konstrukcije nisu kruto povezane sa zidovima. Giuffré je također pobudio veliko zanimanje svojim prijedlogom kombinacije blokovske prezentacije konstrukcije s metodama kapaciteta nosivosti [F2, L1] za procjenu seizmičke otpornosti zidanih konstrukcija. Roca [R6] je između ostalih predložio metodu za analizu armiranih zidanih konstrukcija koja se bazira na statičkom teoremu. Ochsendorf [O1] je koristio metodu graničnih stanja kod analize lukova kod kojih je došlo do deformacije temelja, dok je De Luca [D1] koristio metodu konačnih elemenata u kombinaciji s metodom graničnih stanja u analizi seizmičke otpornosti kamenih lukova. Nakon što je pomoću metode konačnih elemenata bazirane na linearno elastičnoj analizi pronašao mjesta nastanka zglobova, De Luca je metodu graničnih stanja koristio pri određivanju ultimativnog opterećenja koje bi izazvalo slom konstrukcije.

U novije vrijeme razvijen je veliki broj metoda graničnih stanja [B1, G5, L7, M6] baziranih uglavnom na kinematičkom pristupu koje su implementirane u računalne programe. Većina tih metoda zasniva se na sljedećim pretpostavkama: (1) zidana konstrukcija nema vlačnu čvrstoću, (2) zidana konstrukcija ima beskonačnu čvrstoću u tlaku, (3) posmično ponašanje u kontaktu između blokova savršeno je plastično, (4) granično opterećenje javlja se pri malim pomacima. Slično kao metode graničnih stanja baziranih na grafičkom pristupu, ove metode uz pretpostavku krutog, savršeno plastičnog ponašanja materijala imaju za cilj procijeniti kapacitet nosivosti te dati uvid u mehanizam sloma konstrukcije.

Da bi se model krutog, savršeno plastičnog ponašanja materijala mogao matematički primjenjivati, usvojena je funkcija tečenja  $\varphi$  definirana u jedinici naprezanja za koju vrijedi: ako je  $\varphi < 0$ , materijal ostaje krut; ako je  $\varphi = 0$  materijal postaje plastičan; ako je  $\varphi > 0$  nastupilo je nedopustivo stanje naprezanja. Skup stanja za koje vrijedi  $\varphi = 0$  čine plohu tečenja. Sva stanja koja se nalaze unutar ili na plohi tečenja zadovoljavaju kriterij tečenja, dok se ona stanja koja padaju izvan plohe tečenja smatraju nedopustivima. Za stanja naprezanja koja se nalaze na plohi tečenja materijal postaje plastičan što znači da je potrebno definirati smjer tečenja koji je određen funkcijom tečenja. Ako je smjer tečenja okomit na plohu tečenja, tada se govori o asocijativnom zakonu tečenja koji je usvojen kod klasičnih metoda graničnih stanja u koje se ubrajaju prethodno

spomenuti modeli. Asocijativni zakon tečenja podrazumijeva da je kut dilatancije jednak kutu trenja što za većinu kamenih konstrukcija u kojima je kut dilatancije približno jednak nuli nije točno. Ovaj se problem može riješiti usvajajući neasocijativni zakon tečenja koji vodi nestandardnoj metodi graničnih stanja u kojoj teoremi graničnih stanja (kinematički i statički) nisu striktno primjenjivi. Model kojeg su razvili Orduña i Lourenço [O4, O5, O6], koji uzima u obzir ograničenu tlačnu čvrstoću, te Gilbertov model [G6] samo su neki od modela baziranih na nestandardnoj metodi graničnih stanja. Na crtežu 1.8 prikazan je zidani stup čiji su mehanizam sloma Orduña i Lourenço [O5] računali metodom graničnih stanja i metodom konačnih elemenata.



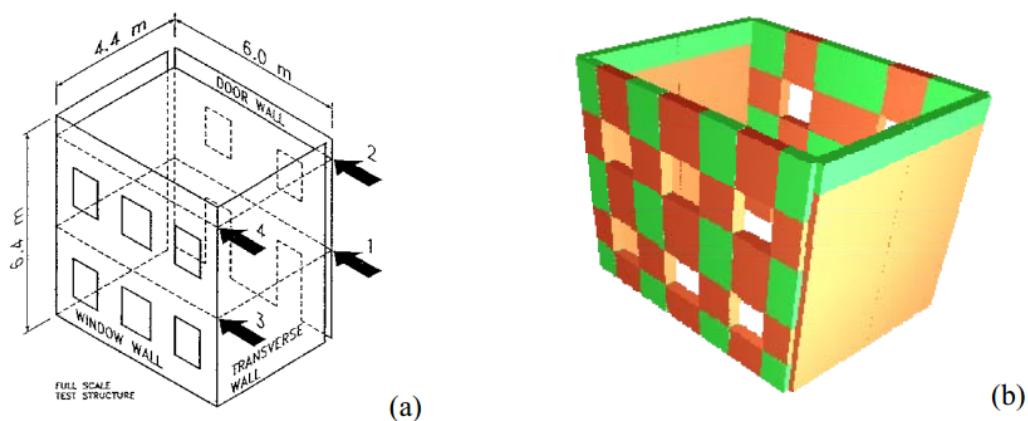
**Crtež 1.8** Zidani stup: (a) model; (b) mehanizam sloma metodom konačnih elemenata; (c) mehanizam sloma metodom graničnih stanja [O5]

### 1.2.3 Metoda konačnih elemenata

Metoda konačnih elemenata je zahvaljujući svojoj dugoj tradiciji najčešće korištena metoda ne samo za proračun zidanih konstrukcija nego i za proračun konstrukcija uopće. Do danas je razvijeno mnoštvo numeričkih modela baziranih na metodi konačnih elemenata koji se razlikuju prema vrsti konačnih elemenata kojima je konstrukcija diskretizirana te prema konstitutivnom zakonu ponašanja materijala koji može biti linearan i nelinearan.

Proračunski najjednostavniji način modeliranja zidanih konstrukcija metodom konačnih elemenata je diskretizacija konstrukcije skeletnim sustavom korištenjem linijskih konačnih

elemenata. Molins i Roca [M10] razvili su numerički model za analizu prostornih konstrukcija koji se sastoji od prostornih linijskih elemenata s promjenjivim poprečnim presjekom. U model je uključena materijalna i geometrijska nelinearnost kao i Mohr-Coulombov kriterij loma u posmiku. Za analizu zidanih zidova također je razvijeno nekoliko pojednostavljenih modela koji konstrukciju aproksimiraju s ekvivalentnim okvirnim sustavom [B3, D3, R7, S8].

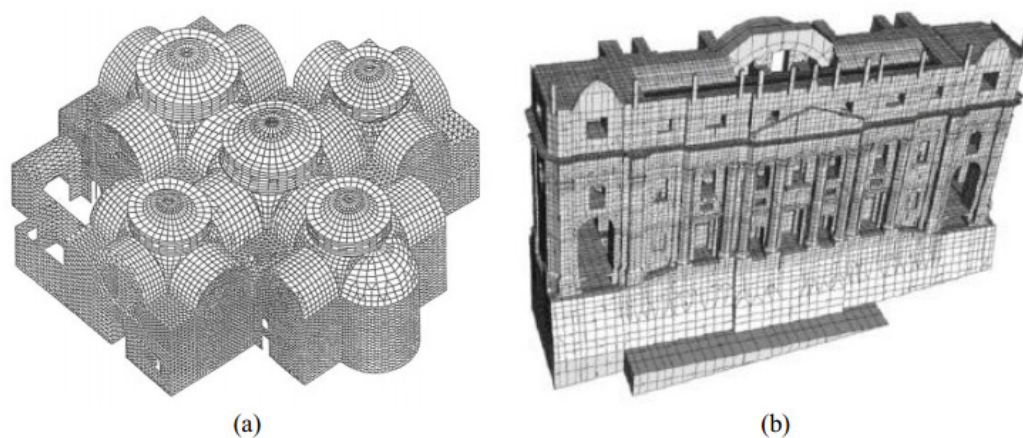


**Crtež 1.9** Modeliranje zidane konstrukcije pomoću makroelemenata: (a) shema testa; (b) model pomoću makroelemenata [G1]

U zadnje vrijeme mnogo radova posvećeno je modeliranju zidanih konstrukcija pomoću makroelemenata [B9, C2, C5, C7, G1] čime su broj stupnjeva slobode i vrijeme proračuna znatno smanjeni. Svaki makroelement može predstavljati cijeli zid ili se zid, osobito u slučaju postojanja otvora, može aproksimirati pomoću više makroelemenata koji se postavljaju na način da veza između dva makroelementa bude na mjestu gdje se može očekivati nastanak pukotine (crtež 1.9). Ovim pristupom, koji je u nekim slučajevima prikladan za određivanje mehanizma sloma te kapaciteta nosivosti konstrukcije, nije moguće pobliže opisati ponašanje pojedinih konstrukcijskih elemenata.

Zbog poteškoća u diskretizaciji starih kamenih konstrukcija pomoću strukturalnih elemenata, ali i potrebe za detaljnijom analizom, poseglo se za dvodimenzionalnim i trodimenzionalnim konačnim elementima pomoću kojih se zidana konstrukcija modelira na makrorazini. Makromodeliranje najčešće je korišten pristup koji se koristi za analizu zidanih konstrukcija u praksi jer je u ovom slučaju postignut najbolji omjer između cijene proračuna te razine točnosti. Najjednostavniji numerički modeli ovog tipa, bazirani na linearno elastičnom ponašanju materijala, često su se u nedostatku kvalitetnijih modela, ali i proračunskih zahtjeva koristili za analizu velikih zidanih konstrukcija. Na taj način su Mola i Vitaliani analizirali crkvu svetog Marka u Veneciji [M9] (crtež 1.10), Macchi je sa suradnicima na sličan način modelirao

toranj u Pisi [M2] te ulaz u baziliku svetog Petra u Rimu [M1], dok je Croci [C11] analizirao Koloseum u Rimu.



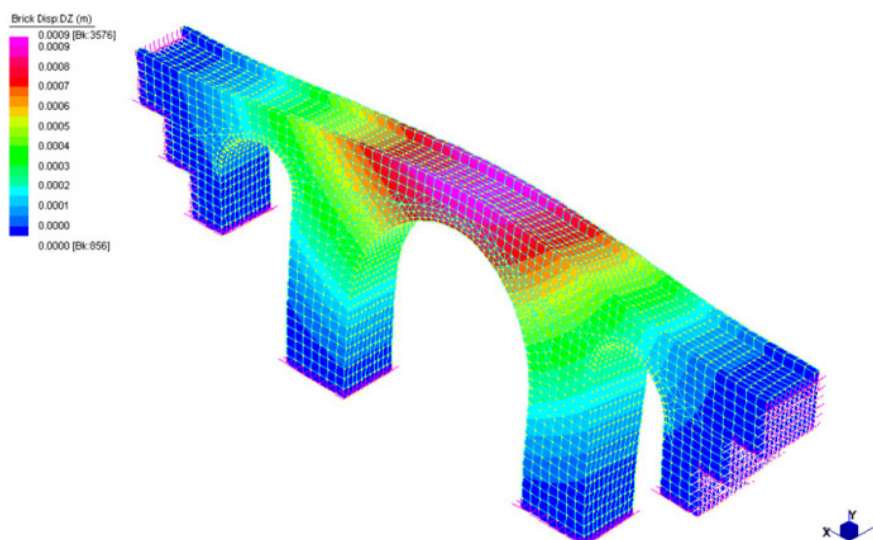
**Crtež 1.10** Modeli konačnih elemenata: (a) bazilika svetog Marka u Veneciji [M9]; (b) ulaz u baziliku svetog Petra u Rimu [M1]

Budući da zidane konstrukcije zbog vrlo malih vlačnih čvrstoća pokazuju izrazito nelinearno ponašanje već i pri vrlo malim razinama opterećenja, primjena linearne analize u modeliranju zidanih konstrukcija smatra se neprihvatljivom jer može dovesti do krivih rezultata i krivih zaključaka. Njena primjena može biti opravdana u nekim slučajevima u kojima se želi promatrati ponašanje konstrukcije do pojave prvih pukotina ili se žele procijeniti mjesta nastanka prvih pukotina na koja će se zatim primijeniti detaljnija analiza. Jedino je nelinearnom analizom moguće obuhvatiti sve efekte koji se javljaju u zidanoj konstrukciji počevši od pojave i razvoja pukotina pa sve do konačnog sloma. Prikladni nelinearni makromodeli namijenjeni za analizu zidanih konstrukcija uzimaju u obzir različite vlačne i tlačne čvrstoće kao i različita elastična i neelastična svojstva duž materijalnih osi, čime se konstrukcija tretira kao homogeni ortotropni kontinuum. Elastični i neelastični parametri takvog kontinuuma najčešće se određuju na temelju eksperimentalnih ispitivanja uzoraka dovoljno velike veličine izloženih homogenom stanju napreznja. Kao alternative složenim eksperimentalnim ispitivanjima mogu se odrediti svojstva pojedinačnih komponenti zidane konstrukcije (morta i blokova) koja služe kao ulazni podaci za tehnike numeričke homogenizacije. Opsežan pregled tehnika numeričke homogenizacije može se naći u [R5].

Najpoznatije teorije za formuliranje nelinearnog konstitutivnog zakona ponašanja materijala su teorija plastičnosti i mehanika oštećenja.

Teorija plastičnosti nastoji opisati plastično ponašanje materijala pojavom trajne deformacije. Iako je isprva bila namijenjena za modeliranje duktilnih materijala, danas se

intenzivno koristi i za druge materijale kao što je tlo, beton te zidana konstrukcija [A2, A6, L10, L11, L13]. Budući da je teorija plastičnosti prikladna samo za monotono opterećenje, većina prethodno spomenutih modela nije sposobna uzeti u obzir cikličko opterećenje. Da bi uklonili taj nedostatak neki su znanstvenici u klasičnu teoriju plastičnosti implementirali najznačajnije osobine materijala koje karakteriziraju cikličko ponašanje kao što su histerezni gubitak energije te opadanje krutosti [O2, R1].



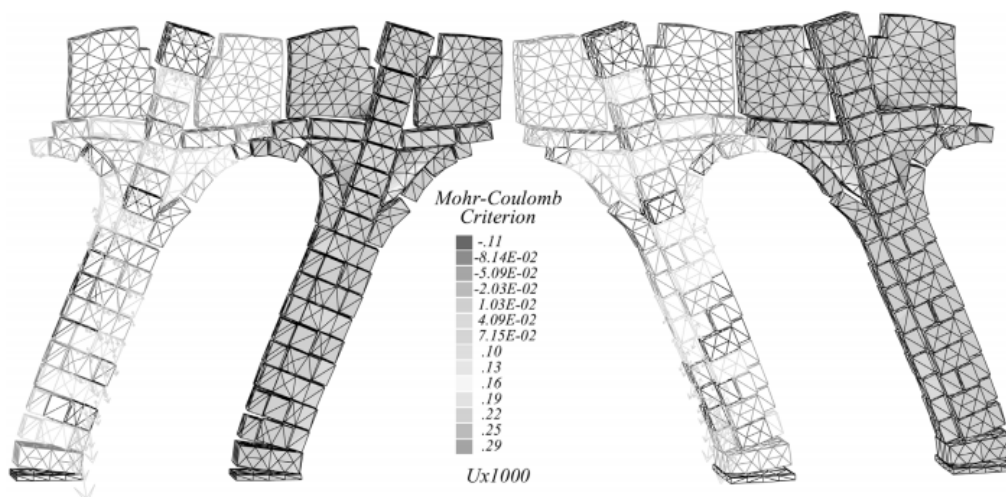
**Crtež 1.11** Detalj iz 3D analize lučnog kamenog mosta svetog Marcela u Italiji [P7]

Glavna osobina mehanike oštećenja je sami koncept oštećenja koji se može definirati kao opadanje elastičnih svojstava materijala uslijed pojave i razvoja mikropukotina što za posljedicu ima smanjivanje površine koja prenosi unutrašnje sile. Kao rezultat procesa oštećenja, dolazi do opadanja elastičnih svojstava materijala. Zbog svoje matematičke složenosti ovim pristupom uglavnom se usvaja pretpostavka o izotropnom materijalu, međutim postoji također i mnoštvo numeričkih modela koji uzimaju u obzir ortotropno ponašanje materijala [B4, C9, P8].

Makromodeliranje intenzivno se koristilo za analizu seizmičkog odgovora kompleksnih konstrukcija kao što su lučni mostovi [P7, R2] (crtež 1.11), povijesne građevine [M4] te katedrale [C9].

Nedostatak većine makromodela je u tome što nisu u mogućnosti simulirati diskontinuitete koji se javljaju između blokova ili dijelova zidane konstrukcije. Takvi diskontinuiteti koji su unaprijed određeni kao što je to kod starih kamenih konstrukcija ili se mogu kasnije javiti u obliku pukotina, mogu dovesti do raznih efekata kao što je klizanje ili rotacija određenih dijelova konstrukcije, odvajanje blokova i sl. Sve ove efekte nije moguće obuhvatiti klasičnom metodom

konačnih elemenata zasnovanoj na prezentaciji konstrukcije kontinuumom. Jedan od načina rješavanja ovog problema je umetanje kontaktnih elemenata između mreže konačnih elemenata [C1, L8, P1, P6]. Kontaktni elementi u ovom pristupu predstavljaju mjesta potencijalnih pukotina. U ovom pristupu nužno je da mreža konačnih elemenata bude barem takva da je svaki blok diskretiziran sa svojom mrežom što vodi modeliranju na mikrorazini ili pojednostavljenoj mikrorazini.



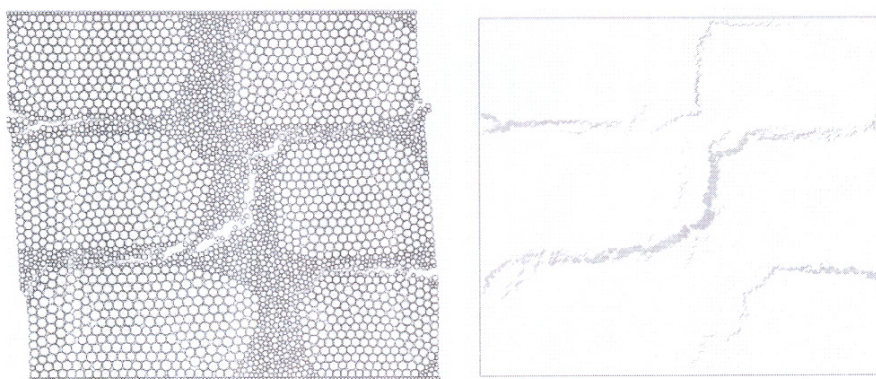
**Crtež 1.12** 3D prikaz sloma stupova samostana svetog Vice u Lisabonu [P6]

U kontaktnim elementima koncentrirana je materijalna nelinearnost, dok je ponašanje u konačnim elementima najčešće linearno elastično. Nelinearno ponašanje kontaktnih elemenata bazirano je na teoriji plastičnosti [L9, M3] ili mehanici oštećenja [G2, G3, G4]. Ako se radi o modeliranju na pojednostavljenoj mikrorazini, tada kontaktni elementi opisuju nelinearno ponašanje morta te veze bloka i morta dok se u bloku pretpostavlja linearno-elastično ponašanje opisano konačnim elementima. U slučaju modeliranja na pravoj mikrorazini, blok i mort se modeliraju s različitim konačnim elementima između kojih su implementirani kontaktni elementi kojima je opisana materijalna nelinearnost. U tom se slučaju jednim kontaktnim elementima opisuje nelinearno ponašanje morta, drugim bloka, a trećim se opisuje veza bloka i morta. Ovakav proračunski pristup se zbog svojih velikih proračunskih zahtjeva koristi uglavnom za analizu manjih konstrukcijskih detalja izloženih heterogenom stanju naprezanja ili za potrebe tehnika homogenizacije gdje se na temelju mehaničkih karakteristika morta i blokova nastoji dobiti konstitutivni zakon ponašanja zidane konstrukcije. Almeida [A4] te Pegon i Pinto [P6] (crtež 1.12) samo su neki od istraživača koji su se koristili metodom konačnih elemenata u kombinaciji s kontaktnim elementima u analizi zidanih konstrukcija.

## 1.2.4 Metoda diskretnih elemenata

Metoda diskretnih elemenata je grupa metoda koje su Cundall i Hart [C12] definirali kao računalni pristup koji: (1) omogućava konačne pomake i rotacije diskretnih tijela uključujući njihovo potpuno odvajanje, (2) automatski prepoznaje nove kontakte između tijela kako proračun napreduje. Začetnik te grupe metoda bio je Cundall [C14] koji je utemeljio metodu poznatu pod nazivom *Distinct Element Method* (DEM) čija je prvotna namjena bila simuliranje klizanja i razdvajanja povezanih stijenskih masa duž unaprijed određenih pukotina odnosno diskontinuiteta. Metoda se temeljila na eksplicitnoj numeričkoj integraciji jednadžbi gibanja krutih blokova u vremenu. Blokovi su mogli imati proizvoljne pomake, a metoda je također uključivala i međusobnu interakciju blokova. Osim dinamičkih proračuna, metoda je imala mogućnost dobivanja statičkog rješenja koristeći viskozno prigušenje kao u metodama dinamičke relaksacije.

Tijekom vremena razvijalo se sve više numeričkih modela koji su imali obilježja metode diskretnih elemenata, a koji su svoju primjenu našli u analizi zidanih konstrukcija [L3, P3, S9]. Glavno obilježje metode diskretnih elemenata, koje je omogućilo njenu primjenu u analizi zidanih konstrukcija, prezentacija je konstrukcije kao skupa zasebnih blokova međusobno povezanih kontaktnim elementima. Ovaj pristup omogućio je simuliranje kolapsa konstrukcije uslijed rotacije, klizanja među sljubnicama te udarnog opterećenja. Do danas se razvila široka paleta numeričkih modela baziranih na metodi diskretnih elemenata. Svi ti modeli međusobno se razlikuju s obzirom na oblik diskretnih elemenata, način proračuna kontaktnih sila među diskretnim elementima, način prepoznavanja kontakta, način proračuna jednadžbi gibanja u vremenu, itd.

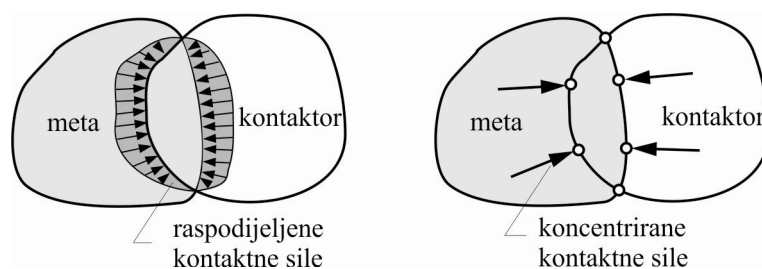


**Crtež 1.13** Čestični model dijela kamenog zida: pukotine pod vertikalnim i posmičnim opterećenjem [L4]

S obzirom na oblik diskretnih elemenata, moguće je razlikovati blokovske modele kod kojih su blokovi prezentirani poligonalnim elementima [C14, S7] te zrnate modele diskretnih elemenata

kod kojih su blokovi prezentirani kao skup kružnih diskova u 2D ili sfera u 3D [C13]. Ovi posljednji prikladni su za mikromodeliranje tla te ostalih granularnih materijala. Zrnati modeli su proračunski vrlo efikasni budući da je za prepoznavanje i interakciju kontakta dovoljno izračunati samo udaljenost centara dvaju diskova odnosno sfera, dok je kod blokovskih modela taj dio proračuna mnogo složeniji. Među prvima koji je zrnate modele koristio pri analizi nepravilnih kamenih konstrukcija bio je Lemos [L4] koji je kamene blokove modelirao s većim, a mort s manjim česticama (crtež 1.13). Različite čvrstoće pridružene su vezama između ta dva tipa čestica sukladno različitim čvrstoćama materijala. Petrinic [P10] je razvio model koji dopušta interakciju zrnatih čestica i poligonalnih blokova pomoću kojeg je analizirao kameni most u kojem je kamene blokove modelirao s četveročvornim blokovskim elementima, dok je ispunu između kamenih blokova modelirao sa znatim elementima.

Što se tiče proračuna kontaktnih sila između diskretnih elemenata, Cundall i Hart [C12] kontakte su klasificirali na krute i meke. Mekani kontakti [C12, C13], koji su uglavnom zastupljeni u metodama diskretnih elemenata, dopuštaju preklapanje između dva diskretna elementa u kontaktu. Na temelju veličine preklopa koji se regulira *penalty* koeficijentom računa se vrijednost kontaktne sile. Ovakva formulacija kontakta u literaturi se još naziva *Smooth contact* ili *Force-Displacement* formulacija. Nasuprot tome, kod krutih kontakata [A1, S7] isključena je mogućnost preklapanja diskretnih elemenata. Ovakva formulacija kontakta u literaturi je poznata još pod nazivom *Non-smooth contact* formulacija, a ostvaruje se najčešće numeričkom iteracijom u svakom vremenskom koraku [S7].



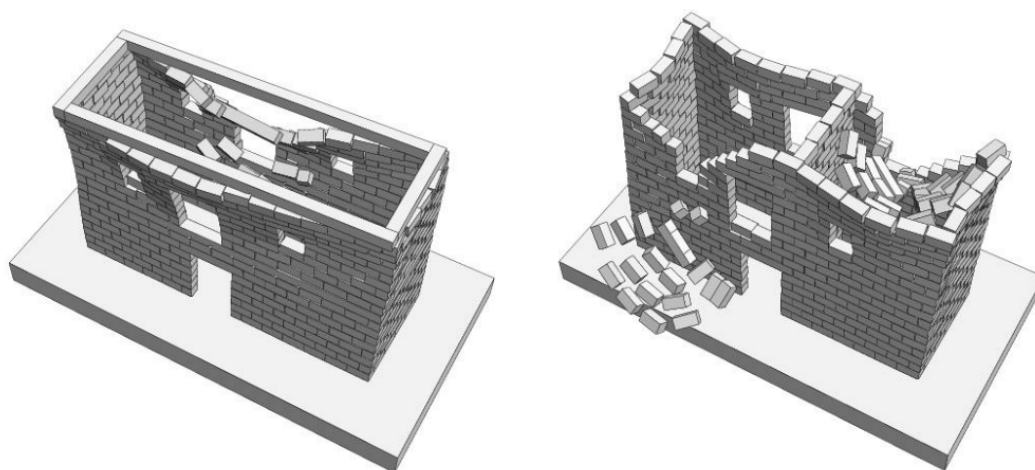
Crtež 1.14 Raspodijeljene i koncentrirane kontaktne sile

Kod mekih kontakata, s obzirom na samu prezentaciju kontakta među diskretnim elementima, moguće je govoriti o koncentriranim te raspodijeljenim kontaktnim silama (crtež 1.14). Koncentrirane kontaktne sile koje su prisutne u velikom broju modela metode diskretnih elemenata ostvarene su nizom kontaktnih točaka. Sila u svakoj kontaktnoj točki može se dobiti na temelju konstitutivnog zakona ponašanja u kontaktu koji je najčešće zapisan u obliku naprezanje-relativni pomak. Da bi naprezanje duž kontakta bilo dobro opisano potreban je dovoljan broj



kontaktnih točaka. Kod linijskih odnosno površinskih kontakata [B2, M16, P10] naprezanje duž kontakta opisano je kontinuiranom funkcijom čime su izbjegnuti numerički problemi koji mogu dovesti do koncentracije naprezanja, što je vrlo važno u slučajevima u kojima se simulira pojava i razvoj pukotina.

Sama priroda metode diskretnih elemenata, koja za cilj ima opisati ponašanje blokova koji mogu imati proizvoljne pomake, moguću interakciju između blokova te izrazitu nelinearnost u kontaktnim elementima čini tehnike rješavanja preko matrične prezentacije manje atraktivnima i neprikladnima. Upravo iz ovog razloga većina numeričkih modela koja se bazira na metodi diskretnih elemenata koristi eksplicitnu numeričku integraciju jednadžbi gibanja u vremenu preuzetu iz modela molekularne dinamike. Kod apsolutno krute prezentacije blokova, gibanje svakog bloka opisano je u 2D s dvije translacije i jednom rotacijom, dok je u 3D opisano s tri translacije i tri rotacije. Kod numeričkih modela koji su usvojili mekanu prezentaciju kontakta koja se zasniva na korištenju *penalty* metode, eksplicitni pristup nameće potrebu za vrlo malim vremenskim korakom kako bi se osigurala numerička stabilnost. Osim eksplicitnog pristupa, neki numerički modeli koriste implicitni pristup te koriste matrične tehnike pri rješavanju sustava jednadžbi [A1, S7]. Ovaj pristup omogućuje izbor većeg vremenskog koraka, međutim, vrijeme proračuna unutar jednog vremenskog koraka je duže, a usput se često javljaju i problemi vezani za konvergenciju rješenja.

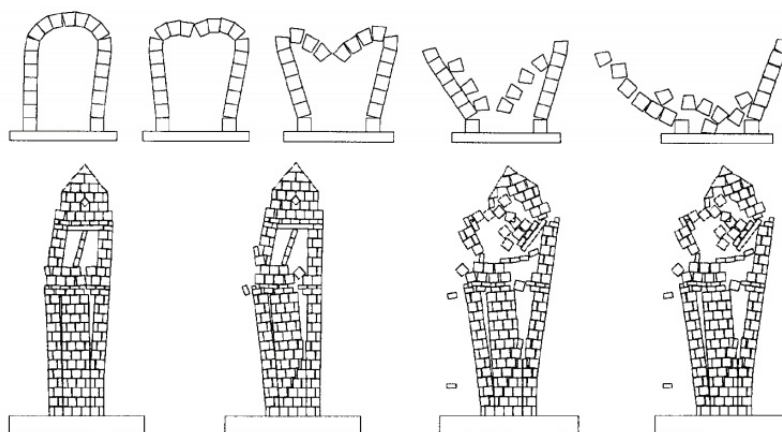


**Crtež 1.15** Mehanizam kolapsa kamene kuće s gredom na vrhu zidova (lijevo) i bez grede (desno) dobiven programom 3DEC [A3]

Metoda diskretnih elemenata prikladna je za modeliranje zidane konstrukcije na pojednostavljenoj mikrorazini gdje su blokovi prezentirani kao diskretni elementi međusobno povezani kontaktnim elementima koji simuliraju prisutnost morta ili pravoj mikrorazini gdje su i mort i blokovi diskretizirani nizom manjih elemenata s tim da su kontaktnim elementima u bloku

dana jedna, kontaktnim elementima u mortu druga, a kontaktnim elementima između morta i bloka treća svojstva. Njihanje bloka na krutoj podlozi [D2, P9, W1], statička i dinamička analiza zidanih nosivih zidova (crtež 1.15) [A3, P3, S2], analiza kamenih mostova [B5, L2], stabilnost stupova s arhitravom [P4, P17, P18], analiza kamenih lukova [P2, P3, L3] te dinamička analiza kamenih zvonika i bazilika (crtež 1.16) [A8, D4] samo su neki primjeri korištenja metode diskretnih elemenata u analizi zidanih konstrukcija.

Kod većine prethodno spomenutih numeričkih modela koji se baziraju na metodi diskretnih elemenata blokovi se uglavnom tretiraju kao kruti, što ih čini neprikladnima za analizu onih tipova konstrukcija kod kojih se stanje naprezanja i deformacija unutar diskretnog elementa ne može zanemariti. Pretpostavka apsolutno krutih blokova prikladna je za modeliranje onih tipova zidanih konstrukcija do čijeg sloma dolazi uglavnom zbog gubitka stabilnosti koji je posljedica stvaranja mehanizma unutar konstrukcije, što je često slučaj kod starih kamenih konstrukcija koje nemaju veliko predtlačno naprezanje. Za ovakve probleme, elastična svojstva blokova mogu se koncentrirati u kontaktnim elementima ako se radi o mekanim kontaktima ili se mogu zanemariti. Stanje naprezanja i deformacija unutar diskretnog elementa može se uzeti na način da se svaki diskretni element diskretizira s vlastitom mrežom konačnih elemenata. U ovom pristupu se metoda konačnih elemenata koristi za izračun polja naprezanja i deformacija unutar diskretnog elementa, dok se metoda diskretnih elemenata koristi za proračun kontaktnih sila.



**Crtež 1.16** Seizmičko ponašanje i način kolapsa za dvije različite zidane konstrukcije izložene potresnom opterećenju [A8]

U posljednje vrijeme pojavio se velik broj numeričkih modela u kojima se nastojalo iskoristiti prednosti metode konačnih i diskretnih elemenata [B2, C15, H1, M5, P10, S7]. Cundall [C15] i Hart [H1] koristili su deformabilne blokove s vlastitom mrežom konačnih elemenata: trokuta u 2D i piramida u 3D. Oba numerička koda imaju algoritme za automatsko prepoznavanje

te interakciju kontakata. Barbosa [B2] je predstavio model diskretno-konačnih elemenata u kojem su deformabilni blokovi prezentirani s kvadrilateralnim izoparametarskim konačnim elementima. Petrinic [P10] je razvio 2D model koristeći poligonalne blokove diskretizirane mrežom trokutnih konačnih elemenata te krutih diskova. Metoda koju je razvio Mamaghani [M5], pod nazivom *Discrete Finite Elements*, također se temeljila na prezentaciji blokova internom mrežom konačnih elemenata. Shi i Goodman [S7] razvili su metodu pod nazivom *Discontinuous Deformation Analysis* (DDA) gdje je pretpostavljeno da je stanje naprezanja i deformiranja u deformabilnim blokovima homogeno. Poboľšan model deformabilnosti unutar ove metode postignut je pomoću baznih funkcija većeg reda kojima je moguće uzeti u obzir nehomogeno stanje naprezanja i deformiranja unutar bloka ili preko koncepta podblokova u kojem je svaki pojedinačni blok podijeljen na podblokove između kojih je omogućeno raspucavanje [P5].

Jedan od pristupa koji koristi prednosti metode konačnih i diskretnih elemenata je kombinirana metoda konačno-diskretnih elemenata (FEM/DEM) koju je razvio Munjiza [M15, M17]. FEM/DEM metoda namijenjena je prvenstveno za simuliranje procesa fragmentacije [M14, M16] uzimajući u obzir deformabilne blokove koji mogu pucati uslijed čega od jednog bloka tijekom analize može nastati njih više. U okviru ove metode blokovi su diskretizirani vlastitom mrežom trokutnih konačnih elemenata između kojih se mogu umetnuti kontaktni elementi u kojima je modelirana materijalna nelinearnost i pomoću kojih je opisana pojava i razvoj pukotina. Kontaktne sile računaju se na principu potencijalnih kontaktnih sila uzimajući u obzir Coulombov model suhog trenja. Metoda koristi eksplicitnu numeričku integraciju jednadžbi gibanja u vremenu. Detaljan opis ove metode koja je korištena u ovom radu za seizmičku analizu zidanih konstrukcija prikazan je u nastavku rada.

### 1.3 SADRŽAJ RADA

Cilj ovog rada je razvoj numeričkih modela za seizmičku 2D analizu zidanih konstrukcija zasnovanih na kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata. Kako je priroda ponašanja suho zidanih kamenih konstrukcija i suvremenih zidanih konstrukcija različita zbog različitih materijala i načina izvedbe, u sklopu rada razvijena su dva odvojena numerička modela.

Prvi novo razvijeni numerički model odnosi se na simulaciju čeličnih klamfi i trnova u suho zidanim kamenim konstrukcijama. Model je implementiran u računalni program Y-2D koji se temelji na kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata. Na ovaj način omogućena je analiza seizmičke otpornosti kamenih konstrukcija ojačanih klamfama i trnovima.

Drugi razvijeni numerički model namijenjen je analizi nearmiranih zidanih konstrukcija. Model, između ostalog, uzima u obzir ortotropno ponašanje materijala, mogućnost sloma u vlaku, tlaku i posmiku uključujući pojavu omekšanja, promjenu koeficijenta trenja u vezi bloka i morta ovisno o posmičnoj deformaciji, promjenu energije loma u vezi morta i bloka u posmiku ovisno o predtlačnom naprezanju te glavne osobine vezane za cikličko ponašanje materijala. I ovaj je model također implementiran u računalni program Y-2D.

Rad je podijeljen u osam poglavlja.

U *prvom poglavlju* općenito se govori o potrebi analize zidanih konstrukcija izloženih seizmičkom opterećenju, iz čega je proizašla i glavna motivacija za izradu ovog rada. U sklopu ovog poglavlja prikazani su ciljevi rada te je dan pregled metoda i numeričkih modela namijenjenih analizi zidanih konstrukcija koji su do danas razvijeni u svijetu. Na kraju je prikazan sadržaj rada.

U *drugom poglavlju* prikazane su osnove kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata koja je namijenjena za dinamičku analizu diskretnih elemenata koji se mogu naći u kontaktu. Svaki diskretni element diskretiziran je s mrežom konačnih elemenata između kojih su umetnuti kontaktni elementi pomoću kojih je moguće simulirati pojavu i razvoj pukotina te naposljetku potpuni lom u kojem od jednog može nastati više novih diskretnih elemenata.

U okviru ovog poglavlja prikazan je numerički model temperaturnog djelovanja na konstrukcije koji je u sklopu ovog rada implementiran u program Y-2D. Također je implementirana mogućnost zadavanja statičkog trenja uz postojeće dinamičko trenje koje je već postojalo u programu.

U *trećem poglavlju* provedena je analiza *penalty* koeficijenta i koeficijenta prigušenja uslijed kontaktnog međudjelovanja diskretnih elemenata u kamenim konstrukcijama. Koeficijent prigušenja doveden je u vezu s koeficijentom restitucije, a sam model prigušenja u kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata uspoređen je s viskozim prigušenjem u metodi konačnih elemenata. Pored toga izvršena je verifikacija statičkog i dinamičkog trenja te numeričkog modela temperaturnog djelovanja.

U *četvrtom poglavlju* govori se o analizi kamenih konstrukcija pomoću kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata. Pristup koji se koristio u ovoj vrsti analize temelji se na numeričkom mikromodelu. U sklopu ovog poglavlja provedena je provjera valjanosti postojećeg numeričkog modela u analizi slobodnog njihanja bloka, opisivanju posmičnog ponašanja u suhom kontaktu između blokova te analizi kamenih zidova izloženih monotonom te cikličkom

opterećenju usporedbom numeričkih rezultata s rezultatima eksperimenata dostupnih u literaturi. Također, provedena je analiza numeričkih parametara u sklopu koje su predložena dva načina kojima se kombiniranom metodom konačno-diskretnih elemenata može uzeti u obzir površinska hrapavost kamenih blokova koja utječe na normalnu i posmičnu krutost zidova.

U *petom poglavlju* predstavljen je novi numerički model za simulaciju čeličnih klamfi i trnova u kamenim konstrukcijama. Ovaj model implementiran je u računalni program Y-2D čime je omogućena procjena seizmičke otpornosti kamenih konstrukcija ojačanih klamfama i trnovima pomoću kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata. Provedena je verifikacija ugrađenog modela te je prikazana njegova primjena u inkrementalnoj seizmičkoj analizi realnih kamenih konstrukcija.

U *šestom poglavlju* razvijen je novi numerički model materijala za simulaciju ponašanja nearmiranih zidanih konstrukcija. Naime, postojeći računalni program Y-2D, koji je imao linearno elastično ponašanje materijala u konačnom elementu, proširen je novim modelom koji ima mogućnost simuliranja ortotropnog ponašanja materijala, mogućnost sloma u tlaku kao i pojavu tlačnog omekšanja. Razvijen je i novi numerički model kontaktnog elementa za simulaciju veze morta i bloka. Model uzima u obzir mogućnost pucanja u vlaku i posmiku, pojavu omekšanja u vlaku i posmiku, smanjenje koeficijenta trenja uslijed povećanja posmične deformacije, povećanje energije loma u posmiku uslijed povećanja predtlačnog naprezanja te cikličko ponašanje veze mort-blok. Validacija razvijenih numeričkih modela provedena je usporedbom dobivenih numeričkih rezultata s rezultatima eksperimenata dostupnih u literaturi.

U *sedmom poglavlju* iznijet će se najvažniji zaključci ovog rada kao i pravci daljnjih istraživanja temeljeni na rezultatima dobivenima u radu.

*Osmo poglavlje* sadrži pregled korištene literature.

## **2. OSNOVE KOMBINIRANE METODE KONAČNO-DISKRETNIH ELEMENATA**

---

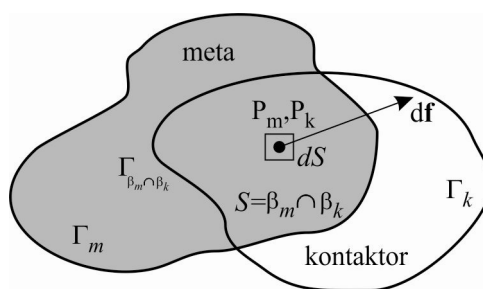
U ovom poglavlju prikazat će se teoretska podloga kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata koja je u ovom radu korištena kao polazište za analizu kamenih i zidanih konstrukcija.

Kombinirana metoda konačno-diskretnih elemenata koju je razvio Munjiza [M15, M17] zasniva se na simulaciji ponašanja velikog broja diskretnih elemenata koji se mogu naći u međusobnoj interakciji. Svaki diskretni element je diskretiziran s vlastitom mrežom konačnih elemenata čime je omogućena njegova deformabilnost. Materijalna nelinearnost, uključujući pojavu i razvoj pukotina te naposljetku fragmentaciju diskretnih elemenata, omogućena je modelom kontaktnih elemenata koji su implementirani između konačnih elemenata. Da bi se svi ovi efekti obuhvatili, u okviru ove metode razvijeni su algoritmi koji u svakom vremenskom koraku uključuju detekciju i interakciju kontakta, praćenje stanja naprezanja i deformacija u konačnom i kontaktnom elementu, pojavu i razvoj pukotina, integraciju jednadžbe gibanja u vremenu koja uključuje velike pomake i rotacije te vizualizaciju spomenutih efekata.

## 2.1 DETEKCIJA I INTERAKCIJA KONTAKTA

Algoritam za detekciju kontakta ima za cilj prepoznati sve elemente koji se nalaze u mogućem kontaktu, a eliminirati sve one koji su dovoljno daleko da više ne mogu biti u kontaktu. U sklopu kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata implementiran je NBS algoritam [M12] koji je prema autorovu saznanju do sada najbrži algoritam za prepoznavanje kontakata među elementima sličnih dimenzija. Vrijeme potrebno za prepoznavanje kontakata u ovom algoritmu proporcionalno je s brojem elemenata.

Nakon prepoznavanja elemenata koji se nađu u kontaktu potrebno je proračunati kontaktne sile za što je zaslužan algoritam za interakciju kontakta. Kontaktne sile javljaju se između dva diskretna elementa od kojih se jedan proglašava kontaktorom, a drugi metom [M13]. Kada su u kontaktu, kontaktor i meta se preklapaju preko površine  $S$  koja je omeđena vanjskim rubom  $\Gamma_{\beta_m \cap \beta_k}$  kao što je prikazano na crtežu 2.1.



Crtež 2.1 Kontaktna diferencijalna sila u okolini točaka  $P_m$  i  $P_k$  [M17]

Za potrebe proračuna kontaktnih sila nad kontaktorom i nad metom uspostavljena su potencijalna polja  $\varphi_k$  i  $\varphi_m$  čiji potencijal opada od središta tih elemenata prema rubovima. Ako promatramo točku  $P_k$  koja se nalazi na kontaktoru, tada je diferencijalna sila kojom meta svojim potencijalom, zbog prodora kontaktora u metu, djeluje na diferencijalno malu površinu  $dS_k$  u okolini točke  $P_k$  prema teoriji potencijala jednaka

$$-\text{grad}\varphi_m(P_k)dS_k \quad (2.1)$$

S druge strane, sila kojom kontaktor svojim potencijalom, zbog prodora mete u kontaktor, djeluje na diferencijalno malu površinu  $dS_m$  u okolini točke  $P_m$  koja se nalazi na meti jednaka je

$$-\text{grad}\varphi_k(P_m)dS_m \quad (2.2)$$

Po zakonu akcije i reakcije sila kojom točka  $P_m$  djeluje na točku  $P_k$  kao posljedica potencijala kontaktora jednaka je

$$\text{grad}\varphi_k(P_m)dS_m \quad (2.3)$$

Ukupna kontaktna diferencijalna sila na točku  $P_k$  koja se nalazi na kontaktoru uzimajući u obzir da je

$$dS_k = dS_m = dS \quad (2.4)$$

može se napisati u obliku

$$d\mathbf{f}_k = [\text{grad}\varphi_k(P_m) - \text{grad}\varphi_m(P_k)]dS \quad (2.5)$$

Da bi se dobila ukupna kontaktna sila na kontaktor, potrebno je provesti integraciju prethodnog izraza preko cijele preklapajuće površine  $S$  iz čega slijedi izraz

$$\mathbf{f}_k = \int_{S=\beta_m \cap \beta_k} [\text{grad}\varphi_k - \text{grad}\varphi_m]dS \quad (2.6)$$

koji se još može zapisati u obliku

$$\mathbf{f}_k = \oint_{\Gamma_{\beta_m \cap \beta_k}} \mathbf{n}_\Gamma (\varphi_k - \varphi_m) d\Gamma \quad (2.7)$$

gdje je  $\mathbf{n}_\Gamma$  jedinična vanjska normala na rub  $\Gamma$  preklapajuće površine  $S$ . Ako bi se htjela dobiti ukupna kontaktna sila na metu, tada bi se proveo isti postupak s tim da bi kontaktor i meta zamijenili uloge.

Iz prethodnog izlaganja vidi se da je polje kontaktnih sila, u smislu prodora kontaktora u metu i mete u kontaktor, konzervativno polje budući da su sile dobivene kao gradijent potencijalne funkcije. Ako uzmemo točku  $P_k$  koja se nalazi na kontaktoru, tada rad potencijalnih sila mete nad točkom  $P_k$  prilikom prodora točke  $P_k$  u metu, po nekoj putanji čije su početne i krajnje točke  $A$  i  $B$ , ovisi samo o vrijednostima potencijala  $\varphi_m$  u točkama  $A$  i  $B$ . Prema zakonu o održanju energije, u slučaju da nema nikakvih gubitaka energije pri kontaktu, ukupna energija u sustavu prije i poslije kontakta mora biti jednaka što znači da ako se točke  $A$  i  $B$  odaberu na rubu mete odnosno,



ako je u točki A započelo prodiranje a u točki B završilo, tada bi ukupni rad potencijalnih sila mete nad točkom  $P_k$  morao biti jednak nuli što se može zapisati kao

$$\varphi_m(A) - \varphi_m(B) = 0 \quad (2.8)$$

odnosno

$$\varphi_m(A) = \varphi_m(B) \quad (2.9)$$

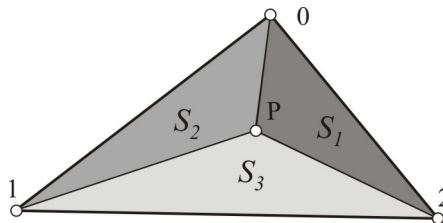
Slična se analiza može napraviti i za kontaktor iz čega se dobije da za bilo koje dvije točke A i B koje se nalaze na rubu kontaktora mora vrijediti

$$\varphi_k(A) - \varphi_k(B) = 0 \quad (2.10)$$

odnosno

$$\varphi_k(A) = \varphi_k(B) \quad (2.11)$$

To znači da vrijednost potencijala na rubnim točkama kontaktora i mete mora biti konstantna.



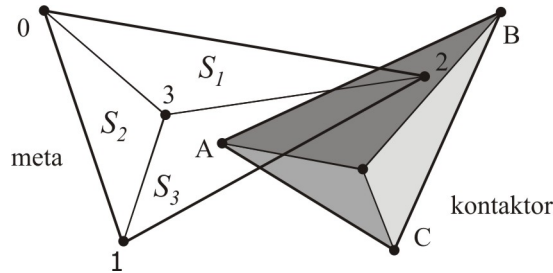
**Crtež 2.2** Potencijal  $\varphi$  u točki P konačnog elementa [M17]

U kombiniranoj metodi konačnih i diskretnih elemenata može postojati mnoštvo diskretnih elemenata koji se nalaze u kontaktu. Svaki diskretni element je nadalje diskretiziran s više konačnih elemenata na koje se diskretni element može raspasti što znači da se problem pronalaženja kontaktnih sila mora riješiti na razini konačnih elemenata. Budući da je potencijalni broj kontakata među konačnim elementima jako velik, u svrhu što bržeg proračuna kontaktnih sila kao i sila koje su posljedica deformiranja izabran je najjednostavniji konačni element u ravnini, a to je trokutni tročvorni konačni element. Za trokutne tročvorne konačne elemente najrazumljivije je potencijal  $\varphi$  u nekoj točki P konačnog elementa definirati kao

$$\varphi(P) = \min \{3S_1 / S, 3S_2 / S, 3S_3 / S\} \quad (2.12)$$

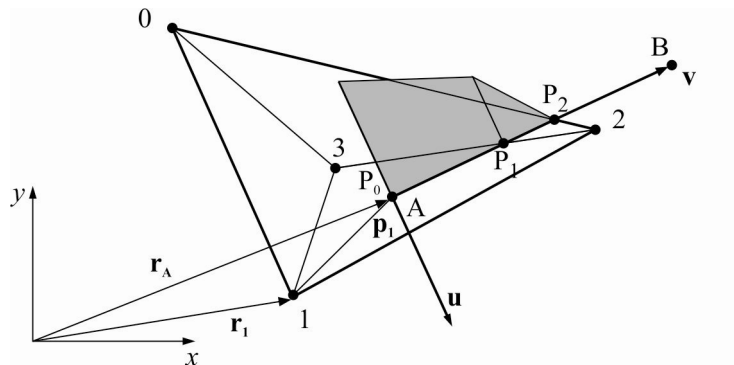
gdje su  $S_i (i = 1, 2, 3)$  površine podtrokuta kao što je prikazano na crtežu 2.2.

Sukladno izrazu (2.7) problem određivanja kontaktnih sila između dva trokutna konačna elementa može se reducirati na interakciju kontaktora s bridovima mete te interakciju mete s bridovima kontaktora. Na crtežu 2.3. prikazana su dva trokutna konačna elementa u kontaktu.



Crtež 2.3 Kontakt kontaktora i mete [M17]

Da bi se odredila ukupna kontaktna sila koja djeluje na kontaktoru na bridu AB (crtež 2.4), potrebno je najprije odrediti karakteristične točke ( $P_0$ ,  $P_1$  i  $P_2$ ) u kojima se odredi i vrijednost potencijala kao interpolacija između centralnog čvora 3 u kojem je vrijednost potencijala jednaka 1 i rubnih čvorova 0, 1, 2 u kojima je vrijednost potencijala jednaka 0.

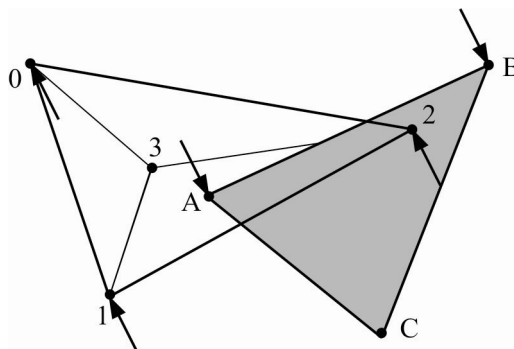


Crtež 2.4 Distribucija kontaktnih sila [M17]

Ukupna sila na bridu AB dobije se kao površina potencijala  $\varphi(v)$  na bridu AB iz izraza

$$\mathbf{f}_{k,AB} = \frac{1}{\mathbf{u}^2} \mathbf{u} \int_0^L p_0 \varphi(v) dv \quad (2.13)$$

gdje je  $p_0$  *penalty* koeficijent [M13], dok se  $\mathbf{u}^2$  uključuje u izraz ako vektori  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{v}$  nisu jedinični.



Crtež 2.5 Ekvivalentne čvorne sile [M17]

Ukupna kontaktna sila prezentirana je u obliku ekvivalentnih čvornih sila u točkama A i B te odgovarajućih čvornih sila u čvorovima mete kao što je prikazano na crtežu 2.5.

Nakon što se cijeli postupak ponovi za sve bridove kontaktora, isti postupak se ostvaruje na bridovima mete.

U sklopu algoritma kontaktnih sila implementiran je Coulombov model suhog trenja za posmične sile [X1]. Postojeći numerički model koji je uzimao u obzir dinamičko trenje u sklopu ovog rada proširen je na način da je uzeto u obzir i statičko trenje pa se posmične sile računaju sukladno izrazu

$$\mathbf{f}_t = -k_t \delta_t \quad (2.14)$$

gdje je  $\mathbf{f}_t$  tangencijalna elastična kontaktna sila,  $k_t$  je *penalty* koeficijent za trenje,  $\delta_t$  je tangencijalni vektor pomaka između dva elementa. Ako je  $\mathbf{f}_t$  veća od maksimalne sile trenja koja je definirana Coulomb-ovim zakonom,  $|\mathbf{f}_t| > \mu_{st} |\mathbf{f}_n|$ , tada elementi klize jedan duž drugog, dok je posmična sila između njih definirana preko elastične normalne sile  $\mathbf{f}_n$  prema

$$\mathbf{f}_t = -\mu_{din} \mathbf{f}_n \quad (2.15)$$

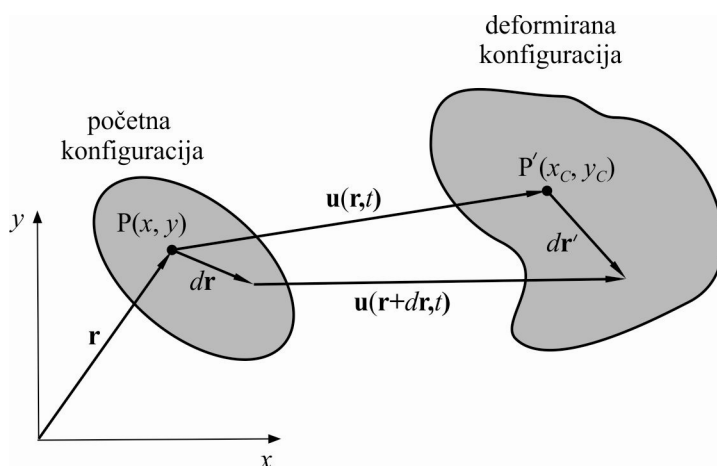
gdje je  $\mu_{st}$  statički koeficijent trenja, a  $\mu_{din}$  dinamički koeficijent trenja.

## 2.2 DEFORMABILNOST KONAČNIH ELEMENATA

Deformabilno tijelo promatrano kao jedan kontinuum sastoji se od skupa točaka omeđenih vanjskom konturom. Točke deformabilnog tijela mogu mijenjati svoj položaj u prostoru tijekom vremena što rezultira pomacima deformabilnog tijela. Pomaci deformabilnog tijela mogu se

razložiti na dvije komponente, a to su pomaci deformabilnog tijela kao krutog tijela koji uključuju translaciju i rotaciju te pomaci koji uzrokuju deformiranje što podrazumijeva promjenu volumena i oblika.

Pomaci deformabilnog tijela u svakom vremenskom trenutku ispunjavaju uvjete kontinuiteta, a to znači da će skup materijalnih točaka koje su u početnoj konfiguraciji formirale zatvorenu glatku krivulju formirati zatvorenu glatku krivulju u bilo kojem vremenskom trenutku u deformiranoj konfiguraciji. Isto tako, skup materijalnih točaka koje su u početnoj konfiguraciji formirale glatku zatvorenu plohu formirat će glatku zatvorenu plohu i u deformiranoj konfiguraciji, a sve točke koje su se u početnoj konfiguraciji nalazile unutar te plohe, nalazit će se unutar te plohe i kasnije.



Crtež 2.6 Deformabilno tijelo u početnoj i deformiranoj konfiguraciji

Na crtežu 2.6 prikazano je tijelo u početnoj i deformiranoj konfiguraciji. U točki  $P$  u početnoj konfiguraciji izabran je diferencijalni vektor  $d\mathbf{r}$  koji u deformiranoj konfiguraciji prelazi u vektor  $d\mathbf{r}'$ . Prema crtežu 2.6 može se pisati

$$d\mathbf{r}' = d\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \quad (2.16)$$

gdje je  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  vektorsko polje pomaka. Ako se drugi član u prethodnom izrazu razvije u Taylorov red te se zadrže samo linearni članovi, dobit će se

$$\mathbf{u}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (2.17)$$

Uvrštavajući izraz (2.17) u (2.16) dobije se

$$d\mathbf{r}' = d\mathbf{r} + \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (2.18)$$

odnosno

$$d\mathbf{r}' = \left( 1 + \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right) d\mathbf{r} \quad (2.19)$$

što raspisano po komponentama ima oblik

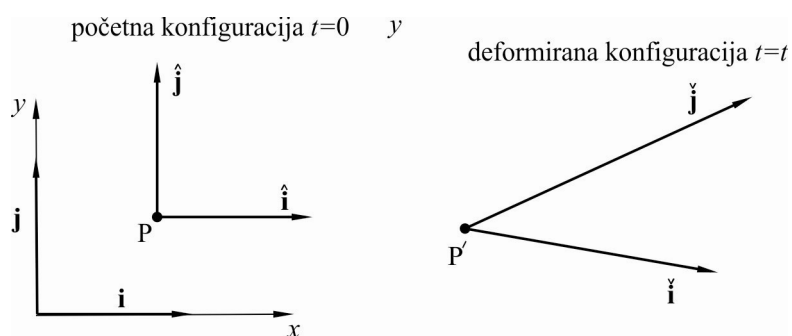
$$d\mathbf{r}' = \begin{Bmatrix} dx' \\ dy' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \mathbf{F} d\mathbf{r} \quad (2.20)$$

Uzimajući u obzir da je

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= x_c(x, y, t) - x \\ v(x, y, t) &= y_c(x, y, t) - y \end{aligned} \quad (2.21)$$

izraz (2.20) prelazi u

$$d\mathbf{r}' = \begin{Bmatrix} dx' \\ dy' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial x} & \frac{\partial x_c}{\partial y} \\ \frac{\partial y_c}{\partial x} & \frac{\partial y_c}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \mathbf{F} d\mathbf{r} \quad (2.22)$$



Crtež 2.7 Fizikalna interpretacija tenzora gradijenta deformiranja

Tenzor  $\mathbf{F}$  u izrazima (2.20) i (2.22) naziva se gradijent deformiranja. Ako se odaberu dva jedinična vektora ( $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ ) koja su u početnoj konfiguraciji paralelna s osima  $(x, y)$ , tada će stupci u

tenzoru gradijenta deformiranja predstavljati komponente tih vektora u deformiranoj konfiguraciji (crtež 2.7), tako da se može pisati

$$\mathbf{F} = [\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}}] \quad (2.23)$$

Vektor  $d\mathbf{r}'$  koji je nastao preslikavanjem vektora  $d\mathbf{r}$  u sebi sadrži pomake koji su se dogodili zbog rotacije deformabilnog tijela kao krutog tijela te pomake koji su nastali kao posljedica deformiranja. Da bi se moglo odvojeno promatrati te dvije vrste pomaka potrebno je, koristeći teorem o polarnoj dekompoziciji, tenzor  $\mathbf{F}$  napisati kao produkt dvaju tenzora od kojih je jedan ortogonalan, a drugi pozitivno definitan, simetričan

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R} \quad (2.24)$$

Tenzor  $\mathbf{R}$  prezentira rotaciju i za njega vrijedi da je  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$  i  $\det \mathbf{R} = +1$ . Tenzori  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{V}$  prezentiraju rastezanje i za njih vrijedi da su pozitivno definitni, tj.  $\mathbf{e} \mathbf{U} \mathbf{e} \geq 0$ ,  $\mathbf{e} \mathbf{V} \mathbf{e} \geq 0$  te da su simetrični, tj.  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$ ,  $\mathbf{V} = \mathbf{V}^T$ . Tenzor  $\mathbf{U}$  se naziva desni tenzor rastezanja, dok se  $\mathbf{V}$  naziva lijevi tenzor rastezanja. Pojam lijevi i desni odnosi se na stranu s koje se ti tenzori nalaze u odnosu na tenzor  $\mathbf{R}$ .

U praksi postoji više tenzora kojima se prezentira deformiranje deformabilnih tijela. Osim prethodno spomenutih tenzora  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{V}$ , u literaturi ih se spominje još, a među najpoznatijima su lijevi i desni Cauchy-Greenov tenzor deformiranja. Budući da rotacija popraćena s inverznom rotacijom ne uzrokuje nikakve pomake u tijelu ( $\mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{1}$ ), ideja se sastoji u tome da se iz tenzora  $\mathbf{F}$  eliminira rotacija na način da se pomnoži s  $\mathbf{F}^T$ . Lijevi Cauchy-Greenov tenzor deformiranja definiran je kao

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = (\mathbf{V} \mathbf{R}) (\mathbf{V} \mathbf{R})^T = \mathbf{V} \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{V}^T = \mathbf{V} \mathbf{V}^T = \mathbf{V}^2 \quad (2.25)$$

Da bi se moglo dovesti u vezu naprezanja i deformacije, potrebno je definirati neku relativnu mjeru deformiranja što je postignuto tenzorom deformacije. Iz lijevog Cauchy-Greenovog tenzora deformiranja moguće je izračunati lijevi Green-St.Venantov tenzor deformacija koji je po definiciji jednak

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F} \mathbf{F}^T - \mathbf{I}) \quad (2.26)$$

Da bi se lijevi Green-St.Venantov tenzor deformacija mogao razlučiti na dio koji obuhvaća promjenu volumena i na dio koji obuhvaća promjenu oblika, potrebno je gradijent deformiranja  $\mathbf{F}$  napisati kao umnožak tri tenzora od kojih će jedan predstavljati čistu rotaciju  $\mathbf{R}$ , drugi promjenu oblika bez promjene volumena  $\mathbf{V}_d$ , a treći promjenu volumena bez promjene oblika  $\mathbf{V}_s$

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}_s \mathbf{V}_d \mathbf{R} \quad (2.27)$$

Važno je napomenuti da je  $\det \mathbf{F} = \det \mathbf{V}_s$  i  $\det \mathbf{V}_d = 1$ . Lijevi Green-St.Venantov tenzor deformacija može se napisati kao

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{E}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{V}_s \mathbf{V}_d \mathbf{R})(\mathbf{V}_s \mathbf{V}_d \mathbf{R})^T - \mathbf{I}] \\ &= \frac{1}{2}[\mathbf{V}_s \mathbf{V}_d \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{V}_d^T \mathbf{V}_s^T - \mathbf{I}] \\ &= \frac{1}{2}[\mathbf{V}_s \mathbf{V}_d \mathbf{V}_d^T \mathbf{V}_s^T - \mathbf{I}] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Budući da tenzor  $\mathbf{V}_s$  ne uzrokuje nikakvu promjenu oblika nego samo promjenu volumena koji se uveća za  $(\det \mathbf{F})$  puta, može se zaključiti da se tenzor  $\mathbf{V}_s$  može napisati u obliku

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{I} \sqrt{\det \mathbf{F}} \quad (2.29)$$

jer se svaka stranica diferencijalnog elementa produlji za  $\sqrt{\det \mathbf{F}}$  puta. Uvrštavajući izraz (2.29) u (2.28) dobije se

$$\check{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}[\mathbf{V}_d \mathbf{V}_d^T (|\det \mathbf{F}|) - \mathbf{I}] \quad (2.30)$$

Dio lijevog Green-St.Venantovog tenzora deformacija koji se odnosi na promjenu oblika izgleda kao

$$\check{\mathbf{E}}_d = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_d \mathbf{V}_d^T - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{F}\mathbf{F}^T}{|\det \mathbf{F}|} - \mathbf{I} \right) \quad (2.31)$$

dok dio koji se odnosi na promjenu volumena ima oblik

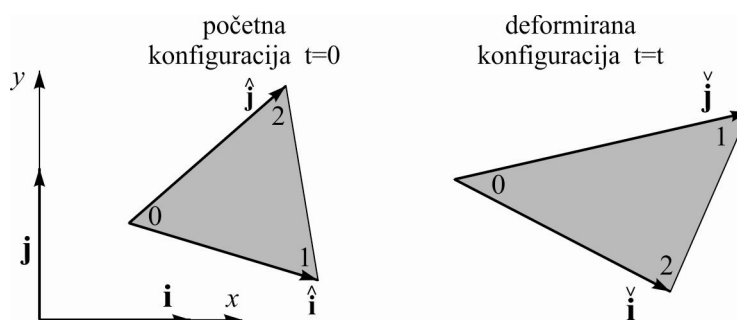
$$\check{\mathbf{E}}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_s \mathbf{V}_s^T - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} |\det \mathbf{F}| - \mathbf{I}) = \mathbf{I} \left( \frac{|\det \mathbf{F}| - 1}{2} \right) \quad (2.32)$$

Poznavajući tenzor deformacija, Cauchyjev tenzor naprezanja može se dobiti koristeći Hookov zakon sukladno izrazu

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \tilde{\mathbf{E}}_d + \frac{E}{1-2\nu} \tilde{\mathbf{E}}_s \quad (2.33)$$

gdje je  $E$  modul elastičnosti dok je  $\nu$  Poissonov koeficijent.

U sklopu kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata, deformabilnost diskretnih elemenata omogućena je njihovom diskretizacijom pomoću mreže konačnih elemenata. Budući da se i proračun kontaktnih sila temelji na istoj diskretizaciji, zbog potrebe za što jednostavnijim i bržim algoritmom odabran je geometrijski najjednostavniji konačni element. U ravninskim problemima to je trokutni tročvorni konačni element. Da bi se opisalo deformiranje trokutnog konačnog elementa te uspostavila veza između naprezanja i deformacija, usvojena su tri koordinatna sustava kao što je prikazano na crtežu 2.6.



Crtež 2.8 Trokutni konačni element u početnoj i deformiranoj konfiguraciji [M17]

Korištenje trokutnog tročvornog konačnog elementa ima za posljedicu da je gradijent deformiranja konstantan u svim točkama trokuta zbog toga što su trenutne koordinate nad konačnim elementom opisane linearnim funkcijama oblika

$$\begin{aligned} x_c &= \alpha_x x + \beta_x y + \gamma_x \\ y_c &= \alpha_y x + \beta_y y + \gamma_y \end{aligned} \quad (2.34)$$

što rezultira da su parcijalne derivacije tih funkcija po  $x$  i  $y$  konstante.

Najjednostavnije je izračunati gradijent deformiranja  $\mathbf{F}$  na deformiranoj konfiguraciji  $(\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}})$  koji ima oblik



$$\widehat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial \widehat{x}_i} & \frac{\partial x_c}{\partial \widehat{y}_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial \widehat{x}_i} & \frac{\partial y_c}{\partial \widehat{y}_i} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

gdje su  $x_c$  i  $y_c$  trenutne koordinate u globalnom koordinatnom sustavu ( $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ), a  $\widehat{x}_i$  i  $\widehat{y}_i$  su koordinate definirane u deformiranom lokalnom koordinatnom sustavu. Ako se npr. uzme član  $\partial x_c / \partial \widehat{x}_i$ , tada bi se on po matematičkoj formulaciji, uzimajući u obzir da je

$$\begin{aligned} x_c &= x_c(\widehat{x}_i, \widehat{y}_i) \\ y_c &= y_c(\widehat{x}_i, \widehat{y}_i) \end{aligned} \quad (2.36)$$

izračunao na način

$$\frac{\partial x_c}{\partial \widehat{x}_i} = \lim_{\Delta \widehat{x}_i \rightarrow 0} \frac{x_c(\widehat{x}_i + \Delta \widehat{x}_i, \widehat{y}_i) - x_c(\widehat{x}_i, \widehat{y}_i)}{\Delta \widehat{x}_i} \quad (2.37)$$

Budući da je gradijent deformiranja  $\mathbf{F}$  konstantan na tročvornom trokutnom konačnom elementu, u prethodnom izrazu nije potrebno da  $\Delta \widehat{x}_i$  teži prema nuli već se može uzeti neka konačna duljina, pa se može pisati

$$\frac{\partial x_c}{\partial \widehat{x}_i} = \frac{x_{1c} - x_{0c}}{|\widehat{\mathbf{i}}|} \quad (2.38)$$

gdje su  $x_{1c}$  i  $x_{0c}$   $x$  koordinate čvora 1 i 0 u trenutnoj konfiguraciji. Slično se može pokazati i za ostale članove tenzora  $\widehat{\mathbf{F}}$  iz čega slijedi

$$\widehat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \frac{x_{1c} - x_{0c}}{|\widehat{\mathbf{i}}|} & \frac{x_{2c} - x_{0c}}{|\widehat{\mathbf{j}}|} \\ \frac{y_{1c} - y_{0c}}{|\widehat{\mathbf{i}}|} & \frac{y_{2c} - y_{0c}}{|\widehat{\mathbf{j}}|} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Da bi se izračunao član tenzora  $\mathbf{F}$  npr.  $\partial x_c / \partial x_i$ , to se može napraviti usmjerenim deriviranjem na sljedeći način

$$\frac{\partial x_c}{\partial x_i} = \frac{\partial x_c}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial x_c}{\partial \bar{y}_i} \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial x_i} \quad (2.40)$$

Slično se može napraviti i s ostalim članovima tenzora  $\mathbf{F}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_c}{\partial y_i} &= \frac{\partial x_c}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial y_i} + \frac{\partial x_c}{\partial \bar{y}_i} \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial y_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial x_i} &= \frac{\partial y_c}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial y_c}{\partial \bar{y}_i} \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial x_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial y_i} &= \frac{\partial y_c}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial y_i} + \frac{\partial y_c}{\partial \bar{y}_i} \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial y_i} \end{aligned} \quad (2.41)$$

koji se sada može prikazati u obliku

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial x_i} & \frac{\partial x_c}{\partial y_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial x_i} & \frac{\partial y_c}{\partial y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial \bar{x}_i} & \frac{\partial x_c}{\partial \bar{y}_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial \bar{x}_i} & \frac{\partial y_c}{\partial \bar{y}_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_i} & \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial y_i} \\ \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial x_i} & \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial y_i} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Koristeći izraz (2.39), prethodni izraz može biti zapisan u obliku

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial x_i} & \frac{\partial x_c}{\partial y_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial x_i} & \frac{\partial y_c}{\partial y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1c} - x_{0c} & x_{2c} - x_{0c} \\ y_{1c} - y_{0c} & y_{2c} - y_{0c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{|\hat{\mathbf{i}}|} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_i} & \frac{1}{|\hat{\mathbf{i}}|} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial y_i} \\ \frac{1}{|\hat{\mathbf{j}}|} \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial x_i} & \frac{1}{|\hat{\mathbf{j}}|} \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial y_i} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Stupci drugog tenzora s desne strane predstavljaju komponente baznih normiranih vektora ( $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ )

zapisanih preko baznih vektora ( $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ ) što omogućuje da se izraz (2.43) prikaže u obliku

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial x_i} & \frac{\partial x_c}{\partial y_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial x_i} & \frac{\partial y_c}{\partial y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial \bar{x}_i} & \frac{\partial x_c}{\partial \bar{y}_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial \bar{x}_i} & \frac{\partial y_c}{\partial \bar{y}_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_x & j_x \\ i_y & j_y \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Budući da je veza između deformirane ( $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ ) i početne konfiguracije ( $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ) definirana kao

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_x & \hat{j}_x \\ \hat{i}_y & \hat{j}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i}_x & \hat{j}_x \\ \hat{i}_y & \hat{j}_y \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.45)$$

te uzimajući u obzir da je

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_x & \hat{j}_x \\ \hat{i}_y & \hat{j}_y \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x_{1i} - x_{0i} & x_{2i} - x_{0i} \\ y_{1i} - y_{0i} & y_{2i} - y_{0i} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.46)$$

izraz (2.44) se može pisati u obliku

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial x_i} & \frac{\partial x_c}{\partial y_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial x_i} & \frac{\partial y_c}{\partial y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1c} - x_{0c} & x_{2c} - x_{0c} \\ y_{1c} - y_{0c} & y_{2c} - y_{0c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1i} - x_{0i} & x_{2i} - x_{0i} \\ y_{1i} - y_{0i} & y_{2i} - y_{0i} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.47)$$

gdje je  $x_{ii}$  ( $i=1,2$ ) odnosno  $y_{ii}$  ( $i=1,2$ ),  $x$  odnosno  $y$  koordinata  $i$ -tog čvora u početnoj konfiguraciji.

Na isti način moguće je izračunati i gradijent brzine koji će, primjenjujući analogiju s tenzorom  $\mathbf{F}$ , imati oblik

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_{xc}}{\partial x_i} & \frac{\partial v_{xc}}{\partial y_i} \\ \frac{\partial v_{yc}}{\partial x_i} & \frac{\partial v_{yc}}{\partial y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{x1c} - v_{x0c} & v_{x2c} - v_{x0c} \\ v_{y1c} - v_{y0c} & v_{y2c} - v_{y0c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1c} - x_{0c} & x_{2c} - x_{0c} \\ y_{1c} - y_{0c} & y_{2c} - y_{0c} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.48)$$

Poznavajući gradijent deformiranja  $\mathbf{F}$  moguće je izračunati lijevi Cauchy-Greenov tenzor deformiranja  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial x_i} & \frac{\partial x_c}{\partial y_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial x_i} & \frac{\partial y_c}{\partial y_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial x_i} & \frac{\partial y_c}{\partial x_i} \\ \frac{\partial x_c}{\partial y_i} & \frac{\partial y_c}{\partial y_i} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Na sličan način može se dobiti tenzor brzine deformiranja  $\mathbf{D}$  dobiven iz gradijenta brzine. Budući da gradijent brzine  $\mathbf{L}$  u sebi sadrži komponente brzine koje su posljedica brzine deformiranja te brzine rotacije, potrebno je uzeti u obzir samo simetrični dio gradijenta brzine koji sadrži komponente vezane uz brzinu deformiranja u obliku

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial v_{xc}}{\partial x_i} & \frac{\partial v_{xc}}{\partial y_i} \\ \frac{\partial v_{yc}}{\partial x_i} & \frac{\partial v_{yc}}{\partial y_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial v_{xc}}{\partial x_i} & \frac{\partial v_{yc}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial v_{xc}}{\partial y_i} & \frac{\partial v_{yc}}{\partial y_i} \end{bmatrix} \right) \quad (2.50)$$

Iz lijevog Cauchy-Greenovog tenzora deformiranja, za male deformacije slijedi Green-St. Venantov tenzor deformacija

$$\check{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}^2 - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial x_i} & \frac{\partial x_c}{\partial y_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial x_i} & \frac{\partial y_c}{\partial y_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial x_i} & \frac{\partial y_c}{\partial x_i} \\ \frac{\partial x_c}{\partial y_i} & \frac{\partial y_c}{\partial y_i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad (2.51)$$

koji se može prikazati dijelom koji u sebi sadrži doprinos od promjene oblika

$$\check{\mathbf{E}}_d = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{V}^2}{|\det \mathbf{F}|} - \mathbf{I} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{B}}{|\det \mathbf{F}|} - \mathbf{I} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{|\det \mathbf{F}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial x_i} & \frac{\partial x_c}{\partial y_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial x_i} & \frac{\partial y_c}{\partial y_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial x_i} & \frac{\partial y_c}{\partial x_i} \\ \frac{\partial x_c}{\partial y_i} & \frac{\partial y_c}{\partial y_i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad (2.52)$$

i dijelom koji doprinosi promjeni volumena

$$\check{\mathbf{E}}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_s \mathbf{V}_s^T - \mathbf{I}) = \mathbf{I} \left( \frac{|\det \mathbf{F}| - 1}{2} \right) = \left( \frac{|\det \mathbf{F}| - 1}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Poznavajući tenzor deformacija, Cauchyjev tenzor naprezanja može se dobiti koristeći Hookov zakon sukladno izrazu (2.33) koji se još može zapisati u obliku

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \check{\mathbf{E}} + \lambda \varepsilon_v \mathbf{I} + \bar{\mu} \mathbf{D} \quad (2.54)$$

gdje su  $\mu$  i  $\lambda$  Laméove konstante,  $\varepsilon_v$  je volumenska deformacija koja je jednaka

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (2.55)$$

dok zadnji član s desne strane izraza (2.54) predstavlja doprinos brzine deformiranja, u kojem je  $\bar{\mu}$  koeficijent prigušenja.

Za potrebe proučavanja odgovora konstrukcije uslijed temperaturnog djelovanja u sklopu ovog rada unutar kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata implementirano je temperaturno opterećenje u funkciji vremena.

Kod slobodnog elastičnog izotropnog tijela promjena temperature izaziva deformacije koje se mogu prikazati u obliku [Š1]

$$\check{\mathbf{E}} = \alpha_t \Delta T \mathbf{I} \quad (2.56)$$

gdje je  $\alpha_t$  koeficijent toplinskog širenja dok je  $\Delta T$  promjena temperature. Tenzor naprezanja uzimajući u obzir i deformacije koje su posljedica promjene temperature može se prikazati u obliku [G10]

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \check{\mathbf{E}} + \lambda \varepsilon_v \mathbf{I} + \bar{\mu} \mathbf{D} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_t \Delta T \mathbf{I} \quad (2.57)$$

U slučaju ravninskog stanja naprezanja vrijedi

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0 \quad (2.58)$$

Uvrštavajući  $\sigma_{zz} = 0$  u (2.57) slijedi

$$\lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu \varepsilon_{zz} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_t \Delta T = 0 \quad (2.59)$$

odnosno

$$\varepsilon_{zz} = \frac{(3\lambda + 2\mu) \alpha_t \Delta T - \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})}{\lambda + 2\mu} \quad (2.60)$$

Uvrštavajući (2.60) u (2.55) slijedi

$$\varepsilon_v = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \left( 1 - \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \right) + \frac{(3\lambda + 2\mu) \alpha_t \Delta T}{2\mu + \lambda} \quad (2.61)$$

što uzimajući u obzir da je

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} = \frac{A_c - A_t}{A_t} \quad (2.62)$$

gdje je  $A_c$  površina trokutnog konačnog elementa u konačnoj konfiguraciji, a  $A_i$  površina u početnoj konfiguraciji prelazi u

$$\varepsilon_v = \left( \frac{A_c - A_i}{A_i} \right) \left( 1 - \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \right) + \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_t \Delta T}{2\mu + \lambda} \quad (2.63)$$

Za slučaj ravninskog stanja deformacija vrijedi

$$\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0 \quad (2.64)$$

iz čega slijedi

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \quad (2.65)$$

što uzimajući u obzir izraz (2.62) prelazi u

$$\varepsilon_v = \frac{A_c - A_i}{A_i} \quad (2.66)$$

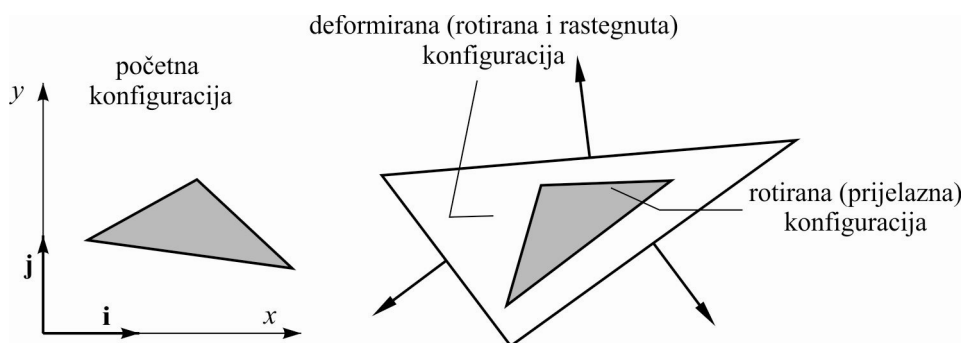
Dakle, veza između napreznja i deformacija definirana je izrazom (2.57) samo što se za slučaj ravninskog stanja napreznja za  $\varepsilon_v$  koristi izraz (2.63), dok se u slučaju ravninskog stanja deformacija koristi izraz (2.66).

Sila po jedinici duljine stranice trokutnog elementa u deformiranoj konfiguraciji može se izračunati pomoću komponenti jedinične normale položene na stranicu trokuta u deformiranoj konfiguraciji prikazanoj na crtežu 2.9.

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (2.67)$$

Sila po jedinici duljine stranice trokutnog elementa koja pripada pojedinom čvoru definirana je izrazom

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \mathbf{s} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$



Crtež 2.9 Vektori normale na trokut [M17]

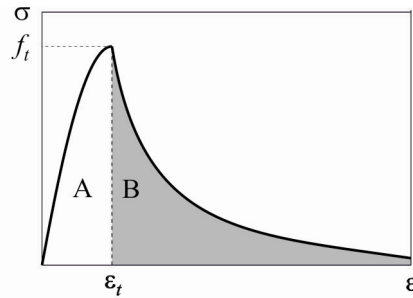
### 2.3 PRIJELAZ IZ KONTINUUMA U DISKONTINUUM

Prijelaz iz kontinuuma u diskontinuum u kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata nastaje pojavom procesa loma i fragmentacije. Tipična kombinirana metoda konačno-diskretnih elemenata bazira se na simulaciji loma masivnog sustava koji može započeti s nekoliko, a završiti s vrlo velikim brojem diskretnih elemenata. Pukotina se obično pojavljuje kroz oštećenje, popuštanje ili slom mikrostrukturalnih elemenata materijala. Da bi se objasnio ovaj kompleksni model koji ovisi o svojstvima materijala, potrebno je uzeti u obzir promjene polja opterećenja i naprezanja uslijed mikrostrukturalnih oštećenja i nastale koncentracije opterećenja. Pojava i razvoj pukotina u kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata ostvarena je modelom diskretnih pukotina koji je implementiran u kontaktnim elementima koji se nalaze između mreže konačnih elemenata.

Model pukotina koji je implementiran u kontaktnim elementima namijenjen je za simuliranje inicijalizacije i razvoja pukotina u materijalu opterećenom u vlaku (mod I) i posmiku (mod II). Model se bazira na aproksimaciji eksperimentalnih krivulja naprezanja – deformacije betona u direktnom vlaku [H7]. Ove krivulje mogu se koristiti i kod ostalih heterogenih materijala kao što je kamen, cigla i sl.

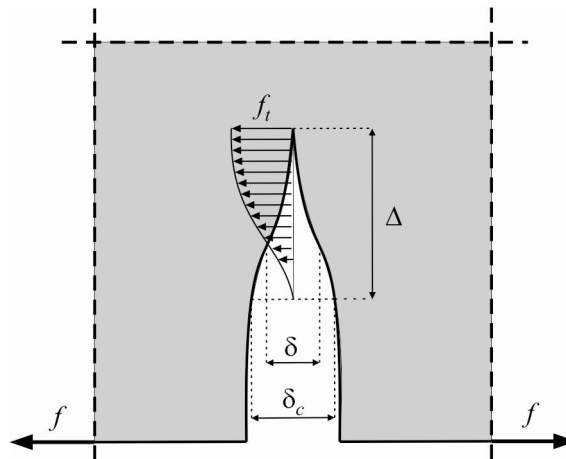
Površina ispod krivulje naprezanje-deformacija u vlaku podijeljena je na dva dijela kao što je prikazano na crtežu 2.10. U ovom modelu dio 'A' je implementiran u ponašanje konačnih elemenata na standardan način preko konstitutivnog zakona ponašanja materijala i preuzet je iz već razvijenog modela u okviru kombinirane metode konačno diskretnih elemenata [M17]. Dio 'B' prezentira vlačno omekšanje nakon dostizanja vlačne čvrstoće gdje naprezanje opada s povećanjem deformacije. Funkcija vlačnog omekšanja koju je Hordijk [H7] predložio na temelju eksperimenata provedenih na vlačno opterećenim betonskim uzorcima uključena je u model materijala namijenjena za analizu ponašanja armiranobetonskih konstrukcija [Ž1]. To je

modelirano s diskretnim modelom pukotine prikazanim na crtežu 2.11, u kojem je zbog jednostavnosti pretpostavljeno da se pukotina poklapa s rubom konačnog elementa.



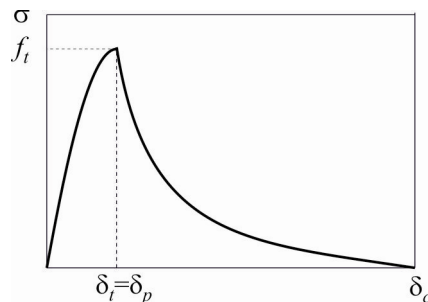
**Crtež 2.10** Vlačno omekšanje prikazano u relaciji naprezanje – deformacija

Razdvajanje rubova dvaju susjednih konačnih elemenata inducira naprezanje koje se uzima kao funkcija veličine razdvajanja  $\delta$ , prikazana na crtežu 2.12.



**Crtež 2.11** Diskretni model pukotine

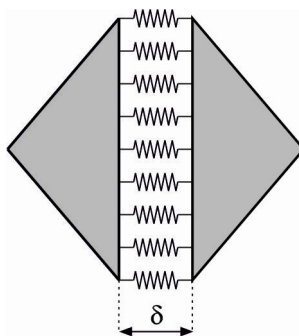
Površina ispod krivulje naprezanje-pomak od trenutka pojave pukotine ( $\delta_t$ ) do trenutka kada naprezanje padne na nulu ( $\delta_c$ ) predstavlja energiju loma  $G_f$ . To je rad koji je potrebno utrošiti za nastanak pukotine jedinične površine.



**Crtež 2.12** Vlačno omekšanje prikazano u relaciji naprezanje – pomak



Teoretski bi razdvajanje rubova dvaju susjednih konačnih elemenata trebalo biti jednako nuli sve do postizanja vlačne čvrstoće materijala, što bi značilo da je  $\delta_t = 0$ . U prikazanom modelu odvajanje susjednih rubova dvaju konačnih elemenata osigurano je topologijom konačnih elemenata na način da niti jedan čvor ne pripada dvama konačnim elementima. Kontinuitet među konačnim elementima do postizanja vlačne čvrstoće osiguran je pomoću *penalty* metode. Na rubu konačnog elementa u smjeru normale modelirana je opruga velike krutosti, kao što je prikazano na crtežu 2.13, tako da vrijedi  $\delta_t = \delta_p$ .



Crtež 2.13 Normalne opruge [M11]

Za razdvajanje  $\delta < \delta_p$  vrijedi odnos

$$\sigma = \left[ \frac{2\delta}{\delta_p} - \left( \frac{\delta}{\delta_p} \right)^2 \right] f_t \quad (2.69)$$

gdje je

$$\delta_p = 2hf_t / p_0 \quad (2.70)$$

odvajanje u trenutku kada naprezanje odgovara vlačnoj čvrstoći materijala  $f_t$ ,  $h$  je veličina konačnog elementa, a  $p_0$  je *penalty* koeficijent.

U graničnom slučaju kada je

$$\lim_{p_0 \rightarrow \infty} \delta_p = 0 \quad (2.71)$$

odvajanje rubova dvaju susjednih konačnih elemenata jednako je nuli, što odgovara trenutku kada je postignuta vlačna čvrstoća materijala  $f_t$ .

S povećanjem odvajanja  $\delta > \delta_p$ , naprezanje među rubovima konačnih elemenata opada i u trenutku  $\delta = \delta_c$  naprezanje postaje  $\sigma = 0$ . Za područje  $\delta_c > \delta > \delta_p$  usvojena je veza između naprezanja i pomaka u obliku

$$\sigma = z f_t \quad (2.72)$$

gdje je  $z$  funkcija eksperimentalne krivulje koja opisuje ponašanje betona u vlaku [H7] s koeficijentima  $c_1 = 3.00$  i  $c_2 = 6.93$ .

$$z = [1 + (Dc_1)^3] e^{-Dc_2} - D(1 + c_1^3) e^{-c_2} \quad (2.73)$$

Parametar  $D$  u izrazu (2.49) iznosi

$$D = \begin{cases} 0, & \text{za } \delta < \delta_p \Rightarrow z = 1; \\ 1, & \text{za } \delta > \delta_c \Rightarrow z = 0; \\ (\delta - \delta_p) / (\delta_c - \delta_p) & \text{inače} \end{cases} \quad (2.74)$$

Kompletna veza  $\sigma - \delta$  u vlaku za monotono opterećenje može se prikazati u obliku

$$\sigma = \begin{cases} 2 \frac{\delta}{\delta_p} f_t & \text{za } \delta < 0; \\ \left[ 2 \frac{\delta}{\delta_p} - \left( \frac{\delta}{\delta_p} \right)^2 \right] f_t z & \text{za } 0 < \delta < \delta_p; \\ f_t z & \text{za } \delta > \delta_p \end{cases} \quad (2.75)$$

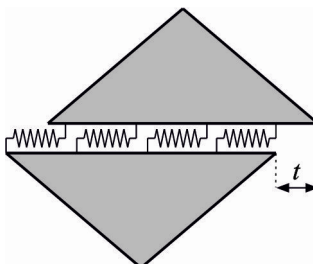
Za pukotine opterećene u posmiku pretpostavljeno je da se ponašaju na sličan način kao što je to prikazano za vlak. Do trenutka dok se ne dosegne posmična čvrstoća materijala, rubovi dvaju susjednih konačnih elemenata pridržani su pomoću posmičnih naprezanja koja se računaju pomoću *penalty* metode. Rubovi su pridržani posmičnim oprugama kao što je prikazano na crtežu 2.14 sukladno izrazu

$$\tau = \left[ \frac{2t}{t_p} - \left( \frac{t}{t_p} \right)^2 \right] f_s \quad (2.76)$$

gdje je

$$t_p = 2hf_s / p_0 \quad (2.77)$$

odvajanje u trenutku kada naprezanje odgovara posmičnoj čvrstoći materijala  $f_s$ ,  $h$  je veličina konačnog elementa, a  $p_0$  je *penalty* koeficijent.



Crtež 2.14 Posmične opruge [M11]

U graničnom slučaju kada je

$$\lim_{p_0 \rightarrow \infty} t_p = 0 \quad (2.78)$$

klizanje rubova dvaju susjednih konačnih elemenata jednako je nuli, što odgovara trenutku kada je postignuta posmična čvrstoća materijala  $f_s$ .

S povećanjem klizanja  $t > t_p$ , naprezanje među rubovima konačnih elemenata opada i u trenutku  $t = t_c$  naprezanje postaje  $\tau = 0$ . Za područje  $t_c > t > t_p$  pretpostavljena je veza između naprezanja i klizanja u obliku

$$\tau = zf_s \quad (2.79)$$

gdje je  $D$  definiran izrazom

$$D = \begin{cases} 0, & \text{za } |t| < t_p \Rightarrow z = 1; \\ 1, & \text{za } |t| > t_c \Rightarrow z = 0; \\ (|t| - t_p) / (t_c - t_p) & \text{inače} \end{cases} \quad (2.80)$$

Kompletna relacija koja opisuje vezu  $\tau - t$  u posmiku može se prikazati u obliku

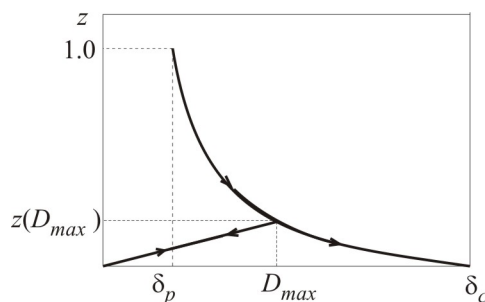
$$\tau = \begin{cases} \left[ 2 \frac{|t|}{t_p} - \left( \frac{|t|}{t_p} \right)^2 \right] f_s z & \text{za } |t| < t_p; \\ f_s z & \text{za } |t| > t_p \end{cases} \quad (2.81)$$

U slučaju da je pukotina opterećena u vlaklu i posmiku, tada se za proračun normalnih odnosno posmičnih naprezanja i dalje koriste isti izrazi kao što je to prethodno objašnjeno, s tim da se usvaja faktor oštećenja  $D$  koji je definiran kao

$$D = \begin{cases} 0, & \text{za } \delta \leq \delta_p \text{ i } |t| \leq t_p; \Rightarrow z = 1; \\ 1, & \text{za } \delta \geq \delta_c \text{ ili } |t| \geq t_c; \Rightarrow z = 0; \\ (\delta - \delta_p) / (\delta_c - \delta_p), & \text{za } \delta > \delta_p \text{ i } |t| \leq t_p; \\ (|t| - t_p) / (t_c - t_p), & \text{za } \delta \leq \delta_p \text{ i } |t| > t_p; \\ \sqrt{\left( \frac{\delta - \delta_p}{\delta_c - \delta_p} \right)^2 + \left( \frac{|t| - t_p}{t_c - t_p} \right)^2} & \text{za } \delta_p < \delta < \delta_c \text{ i } t_p < |t| < t_c \end{cases} \quad (2.82)$$

Kriterij loma određen je uvjetom

$$D \leq 1 \quad (2.83)$$



Crtež 2.15 Cikličko ponašanje betona u kontaktnom elementu

Cikličko ponašanje betona u kontaktnom elementu [Ž1] nakon pojave pukotine uzima se u obzir na način da se pamti maksimalno oštećenje betona  $D_{max}$  u kontaktnom elementu koje je definirano izrazom (2.58). Ako je oštećenje  $D$  manje od maksimalnog oštećenja  $D_{max}$  koje se pojavilo u kontaktnom elementu, tada je funkcija ponašanja betona  $z$  u vlaklu, prikazana na crtežu 2.15, definirana izrazom

$$z = z(D_{max}) \frac{D(\delta_c - \delta_p) + \delta_p}{D_{max}(\delta_c - \delta_p) + \delta_p} \quad (2.84)$$

odnosno u posmiku

$$z = z(D_{max}) \frac{D(t_c - t_p) + t_p}{D_{max}(t_c - t_p) + t_p} \quad (2.85)$$

## 2.4 VREMENSKA DISKRETIZACIJA

U kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata, svaki diskretni element diskretiziran je s trokutnim tročvornim konačnim elementima. Oblik i položaj svakog diskretnog elementa u ravnini opisan je s trenutnim koordinatama čvorova konačnih elemenata koje se mogu prikazati u obliku

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

gdje je  $n$  ukupan broj stupnjeva slobode sustava. Na sličan je način polje brzina nad diskretnim elementom opisano pomoću brzina čvorova konačnih elemenata

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dots \\ \dot{x}_i \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

dok je polje ubrzanja nad diskretnim elementom prikazano kao

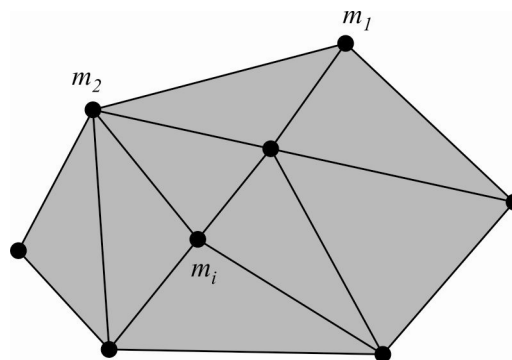
$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \cdots \\ \ddot{x}_i \\ \cdots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Da bi se mogli uzeti u obzir inercijalni efekti, u proračun je potrebno uvesti masu koja je u kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata koncentrirana u čvorove konačnih elemenata. (crtež 2.16). Ovakav način tretiranja mase vodi prema modelu koncentriranih masa koje se može prikazati u obliku

$$\mathbf{m} = \mathbf{I} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_1 \\ m_2 \\ \cdots \\ m_i \\ \cdots \\ m_n \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

Na ovaj način svaki stupanj slobode sustava ima svoju pripadajuću masu.

Ukupne sile koje se javljaju u čvorovima konačnih elemenata posljedica su interakcije između dva ili više diskretnih elemenata u kontaktu, deformiranja konačnog elementa, vanjskih sila koje djeluju na sustav te sila prigušenja.



Crtež 2.16 Model koncentriranih masa

Sve te zbrojene sile mogu se prikazati u obliku vektora čvornih sila koji ima oblik



### 3. ANALIZA NUMERIČKIH PARAMETARA

---

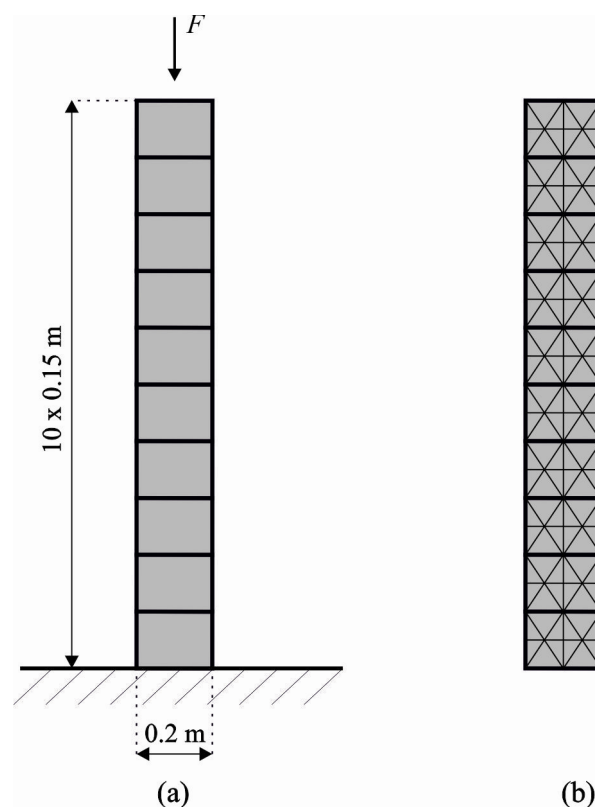
Pri proračunu zidanih konstrukcija kombiniranom metodom konačno-diskretnih elemenata javlja se nekoliko numeričkih parametara čija procjena može značajno utjecati na točnost numeričkog rješenja. U ovom poglavlju provest će se analiza *penalty* koeficijenta i koeficijenta prigušenja. Vrijednost *penalty* koeficijenta značajna je kod problema u kojima se prati veza sila-pomak, dok vrijednost koeficijenta prigušenja utječe na gubitak energije prilikom dinamičkog kontakta dvaju diskretnih elemenata, što može značajno utjecati na ponašanje suho zidanih kamenih konstrukcija za vrijeme potresa. U sklopu ovog poglavlja analizirana je veza između koeficijenta prigušenja i koeficijenta restitucije, a sam model prigušenja u kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata uspoređen je s viskoznim prigušenjen koje se koristi u metodi konačnih elemenata. Pored toga, izvršena je verifikacija statičkog trenja te numeričkog modela temperaturnog djelovanja koje je u sklopu ove radnje implementirano u računalni program Y-2D.



### 3.1 ANALIZA *PENALTY* KOEFICIJENTA

Zbog korištenja *penalty* metode prilikom proračuna kontaktnih sila, u kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata dolazi do pogreške rješenja u analizi onih problema u kojima se prati veza sila-pomak. *Penalty* koeficijentom regulira se veličina penetracije jednog konačnog elementa u drugi prilikom kontaktnog međudjelovanja, ali isto tako i veličina razdvajanja konačnih elemenata prije pojave pukotine. To direktno utječe na veličinu pogreške koja se regulira iznosom *penalty* koeficijenta.

Teoretski bi se vrijednost *penalty* koeficijenta mogla odabrati ekstremno velika čime bi se u startu eliminirao utjecaj pogreške pomaka, međutim, veća vrijednost *penalty* koeficijenta, zbog korištenja eksplicitne integracije jednadžbi gibanja, rezultira manjim vremenskim korakom zbog čega se vrijeme proračuna može višestruko produžiti. U numeričkim primjerima koji se provode kombiniranom metodom konačno-diskretnih elemenata potrebno je procijeniti minimalnu vrijednost *penalty* koeficijenta koja će relativnu pogrešku pomaka svesti na prihvatljivu razinu.



Crtež 3.1 Kameni stup: (a) geometrija; (b) diskretizacija sustava

U ovom primjeru izvršena je analiza utjecaja *penalty* koeficijenta na točnost rješenja za slučaj djelovanja normalnog tlačnog opterećenja prilikom analize suho zidanih kamenih konstrukcija. U tu svrhu odabran je kameni stup sastavljen od deset blokova suho složenih jedan

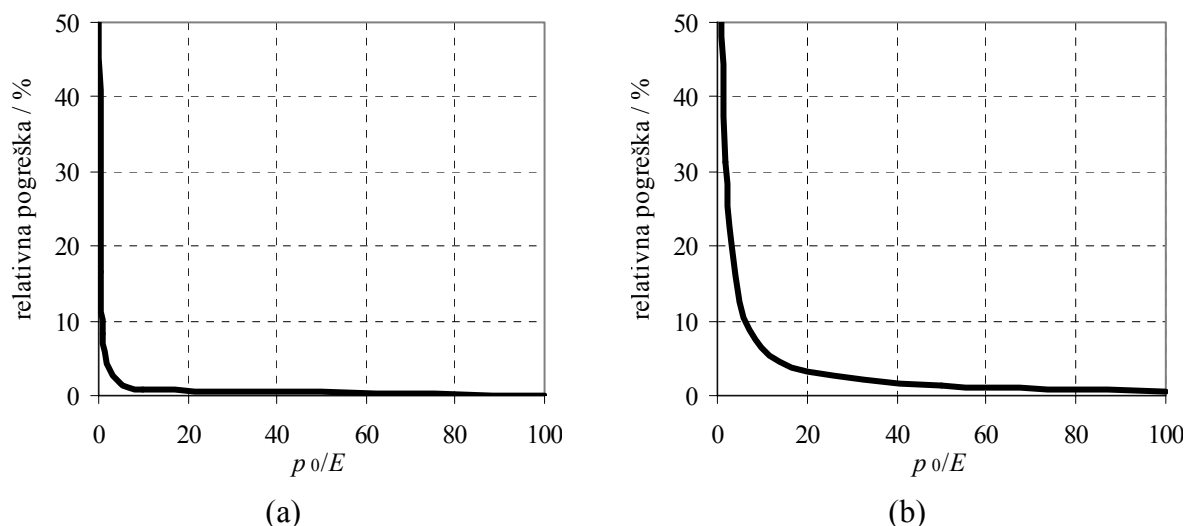
na drugi kao što je prikazano na crtežu 3.1-a. Na vrhu stupa zadana je monotono rastuća vertikalna tlačna sila koja uzrokuje vertikalni pomak vrha stupa čiju je vrijednost moguće analitički odrediti. Na temelju poznatog analitičkog i dobivenog numeričkog rješenja pomaka vrha stupa određena je relativna pogreška pomaka.

Diskretizacija sustava korištena u numeričkoj analizi prikazana je na crtežu 3.1-b, dok su usvojene karakteristike kamena prikazane u tablici 3.1.

**Tablica 3.1** Karakteristike materijala kao ulazni parametri

Kamen	
Modul elastičnosti, $E$ (GPa)	20.0
Poissonov koeficijent, $\nu$	0.0

Analiza je provedena s i bez mogućnosti pucanja kamenih blokova uz različite vrijednosti *penalty* koeficijenta  $p_0$ . Za slučaj kada blokovi imaju mogućnost pucanja, trokutni konačni elementi međusobno su odvojeni kontaktnim elementima. Kontaktne sile između susjednih konačnih elemenata računaju se na principu *penalty* metode. U slučaju kada blokovi nemaju mogućnost pucanja trokutni konačni elementi kojima je diskretiziran pojedini blok nisu odvojeni. U ovom slučaju prodor je moguć samo između trokutnih konačnih elemenata koji se nalaze uz horizontalne sljubnice susjednih blokova. Na temelju ovog razmatranja za očekivati je da će relativna pogreška pomaka za istu vrijednost *penalty* koeficijenta biti veća u slučaju kada je omogućeno pucanje kamenih blokova u odnosu na onu kada pucanje blokova nije omogućeno.



**Crtež 3.2** Relativna pogreška u odnosu na vrijednost *penalty* koeficijenta za analizu: (a) bez mogućnosti pucanja blokova; (b) s mogućnošću pucanja blokova

Na crtežu 3.2-a i 3.2-b prikazana je veličina relativne pogreške rješenja u odnosu na analitičko rješenje, ovisno o vrijednosti *penalty* koeficijenta, za slučaj kada blokovi nemaju te kada imaju mogućnost pucanja. Iz prikazanih rezultata može se vidjeti da u oba slučaja veličina relativne pogreške opada sa povećanjem *penalty* koeficijenta. U slučaju kada blokovi nemaju mogućnost pucanja, vrijednost relativne pogreške je manja od jedan posto već pri vrijednosti *penalty* koeficijenta deset puta većeg od modula elastičnosti materijala. Za slučaj kada blokovi imaju mogućnost pucanja, vrijednost relativne pogreške manja je od jedan posto pri vrijednosti *penalty* koeficijenta sto puta većeg od modula elastičnosti. Daljnjim povećanjem vrijednosti *penalty* koeficijenta, relativna pogreška rješenja dodatno se smanjuje.

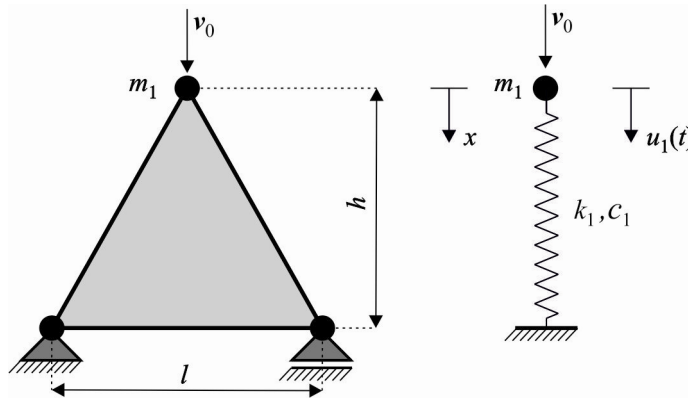
Vrijednosti relativnih pogrešaka rješenja prikazane na crtežu 3.2 odnose se na diskretizaciju sustava prikazanu na crtežu 3.1-b. U slučaju kada blokovima nije dana mogućnost pucanja, s povećanjem gustoće mreže relativna pogreška pomaka linearno će opadati. U slučaju kada je pucanje blokova omogućeno, vrijednost relativne pogreške pomaka ne ovisi o gustoći mreže [M17].

## 3.2 ANALIZA PRIGUŠENJA

U kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata gubitak energije uslijed dinamičkih efekata ostvaren je preko modela prigušenja koje je opisano u drugom poglavlju izrazom (2.54). Prigušenje se u ovoj metodi također koristi kod statičkih analiza kada se uslijed nanošenja monotono rastućeg opterećenja žele izbjeći dinamički efekti. Da bi se ispravno mogla procijeniti veličina koeficijenta prigušenja koja će se koristiti u numeričkoj analizi, potrebno je dobro poznavati sve efekte koje prigušenje u konstrukciji može izazvati.

U analizama koje su provedene u nastavku, razmatrana je veličina koeficijenta prigušenja u odnosu na kritično prigušenje sustava. Također je razmatrana veza između prigušenja u FEM/DEM metodi s viskoznom prigušenjem koje se koristi u metodi konačnih elemenata.

Analiza je započeta s trokutnim elementom kojemu su dva čvora fiksirana, dok je u trećem čvoru zadana početna brzina  $v_0$  kako je to prikazano na crtežu 3.3.



Crtež 3.3 Trokutni konačni element i ekvivalentni jednostupnjevnji sustav

Budući da se oscilacije mase  $m_1$  događaju samo u vertikalnom smjeru, trokutni element može se zamijeniti ekvivalentnim jednostupnjevnim sustavom (JS) (crtež 3.3) kod kojeg su koeficijent elastične krutosti  $k_1$ , koeficijent viskoznog prigušenja  $c_1$  i masa  $m_1$  jednaki:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{E l}{2 h} \\ c_1 &= \frac{\bar{\mu} l}{2 h} \\ m_1 &= \rho \frac{l h}{6} \end{aligned} \quad (3.1)$$

gdje je  $\bar{\mu}$  koeficijent prigušenja,  $E$  modul elastičnosti, a  $\rho$  gustoća materijala trokuta. Uzimajući u obzir izraz (3.1) dinamička jednadžba ravnoteže JS ima oblik [M8]

$$m_1 \ddot{u}_1 + c_1 \dot{u}_1 + k_1 u_1 = 0 \quad (3.2)$$

s rubnim i početnim uvjetima

$$\begin{aligned} u_1(0) &= 0 \\ \dot{u}_1(0) &= v_0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Za slučaj da je koeficijent prigušenja  $\bar{\mu}$  jednak nuli, vlastita kružna frekvencija promatranog sustava iznosila bi

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \frac{\sqrt{3}}{h} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{\sqrt{3}}{h} v_z = \frac{1.732050808}{h} v_z \quad (3.4)$$

gdje je  $v_z$  brzina zvuka u materijalu koja je jednaka [M8]

$$v_z = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.5)$$

Period slobodnih neprigušenih oscilacija jednak je

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi h}{\sqrt{3} v_z} = \frac{3.627598728 h}{v_z} \quad (3.6)$$

Koeficijent kritičnog prigušenja  $\bar{\mu}_{kr}$  može se dobiti iz relacije

$$c_{lkr} = 2 m_1 \omega \quad (3.7)$$

iz čega uzimajući u obzir izraz (3.1) slijedi

$$\bar{\mu}_{kr} = \frac{2}{\sqrt{3}} h \sqrt{E \rho} \quad (3.8)$$

Budući da teoretski najveća frekvencija sustava  $\omega_{\max}$  koja se može uzeti u obzir ovisi o veličini konačnog elementa, to se iz izraza (3.4) i (3.5) može dobiti

$$\omega_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{h} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.9)$$

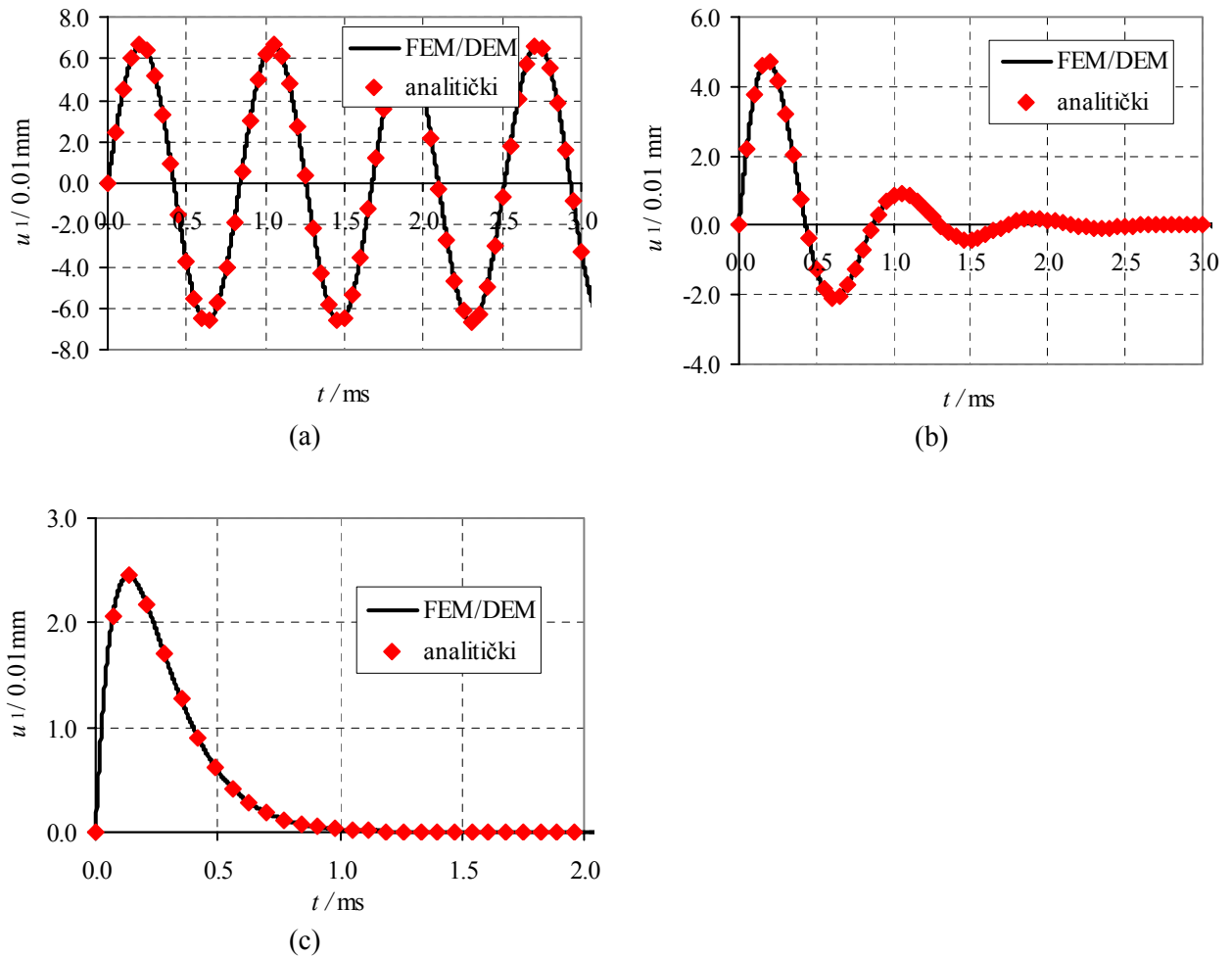
Na slici 3.4 prikazane su usporedbe oscilacija mase  $m_1$  dobivene FEM/DEM metodom s analitičkim rješenjem jednadžbe (3.2) i (3.3) za parametre prikazane u tablici 3.2.

**Tablica 3.2** Parametri korišteni u numeričkoj analizi

Parametri	
Modul elastičnosti, $E$ (GPa)	30.0
Poissonov koeficijent, $\nu$	0.0
Gustoća, $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	2500
Duljina trokuta, $l$ (m)	1.0
Visina trokuta, $h$ (m)	0.8
Početna brzina, $v_0$ (m/s)	0.5

Koeficijent prigušenja  $\bar{\mu}$  variran je s vrijednostima:  $\bar{\mu} = 0.0$  Pa s,  $\bar{\mu} = 2.0 \cdot 10^6$  Pa s te  $\bar{\mu} = \bar{\mu}_{kr} = 8.0 \cdot 10^6$  Pa s.

Ovim primjerom pokazano je da se u nekim jednostavnim slučajevima može uspostaviti veza između koeficijenta prigušenja  $\bar{\mu}$  te koeficijenta viskoznog prigušenja  $c$ . Također je izvedena relacija po kojoj se može odrediti kritično prigušenje sustava s jednim stupnjem slobode.

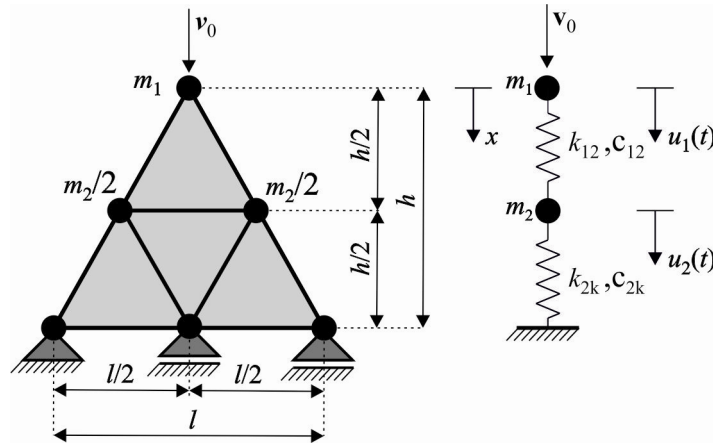


**Crtež 3.4** Usporedba numeričkog i analitičkog rješenja oscilacija mase  $m_1$  za prigušenja: (a)

$\bar{\mu} = 0.0 \text{ Pa s}$ ; (b)  $\bar{\mu} = 2.0 \cdot 10^6 \text{ Pa s}$ ; (c)  $\bar{\mu} = \bar{\mu}_{kr} = 8.0 \cdot 10^6 \text{ Pa s}$

Ako se isti trokut diskretizira s gušćom mrežom kako je to prikazano na crtežu 3.5 problem se može svesti na sustav s dva stupnja slobode čije su karakteristike

$$\begin{aligned}
 k_{12} &= \frac{El}{2h} \quad , \quad k_{2k} = \frac{3El}{2h} \\
 c_{12} &= \frac{\bar{\mu}l}{2h} \quad , \quad c_{2k} = \frac{3\bar{\mu}l}{2h} \\
 m_1 &= \frac{\rho lh}{24} \quad , \quad m_2 = \frac{\rho lh}{4}
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$



Crtež 3.5 Trokutni konačni element i ekvivalentni dvostupnjevni sustav

Dinamička jednadžba ravnoteže promatranog sustava ima oblik

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

gdje su

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \frac{\rho l h}{4} \begin{bmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \frac{\bar{\mu} l}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} &= \frac{E l}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

s rubnim i početnim uvjetima

$$\dot{\mathbf{u}}(0) = \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

U slučaju da je prigušenje  $\bar{\mu}$  jednako nuli, vlastite kružne frekvencije slobodnih oscilacija promatranog sustava iznosile bi

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{0.609107537}{h/2} v_z \\ \omega_2 &= \frac{3.482669667}{h/2} v_z \end{aligned} \quad (3.14)$$

odakle se sukladno izrazu (3.6) mogu dobiti prvi i drugi vlastiti period koji iznose

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{10.31539576 h / 2}{v_z} \\ T_2 &= \frac{1.80412899 h / 2}{v_z} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Pripadajući maseno ortonormirani vlastiti vektori prikazani su pomoću vlastite matrice koja u ovom slučaju ima oblik

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{hl\rho}} \begin{bmatrix} 0.51311465 & 4.87203391 \\ 1.88999491 & -0.209477979 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Množeći izraz (3.11) s  $\Phi^T \Phi$  dobije se

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{u}} + \Phi^T \mathbf{C} \Phi \dot{\mathbf{u}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{u} = 0 \quad (3.17)$$

što se može pisati kao

$$\bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{K}} \mathbf{u} = 0 \quad (3.18)$$

gdje je

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}} &= \mathbf{I} \\ \bar{\mathbf{C}} &= \begin{bmatrix} \frac{\mu \omega_1^2}{E} & 0 \\ 0 & \frac{\mu \omega_2^2}{E} \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{K}} &= \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Budući da su matrice  $\bar{\mathbf{M}}$ ,  $\bar{\mathbf{C}}$  i  $\bar{\mathbf{K}}$  dijagonalne, do rješenja izraza (3.18) može se doći spektralnom analizom na način da se vektor pomaka  $\mathbf{u}$  prikaže u obliku

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{y} \quad (3.20)$$

gdje je  $\mathbf{y}$  vektor vremenskih funkcija. Za odabrane parametre i slučaj neprigušenih oscilacija, maseno ortonormirana matrica vlastitih oblika  $\Phi$  jednaka je



$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.01147359197 & 0.1089419863 \\ 0.04447537914 & -0.0046840698 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

dok je vektor vremenskih funkcija jednak

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0.000090628 \sin(5275.026007t) \\ 0.000150501 \sin(30160.80405t) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

U slučaju da postoji prigušenje  $\bar{\mu}$ , iz izraza (3.19) vidljivo je da prigušenje za  $i$ -tu frekvenciju iznosi

$$\bar{c}_i = \frac{\bar{\mu} \omega_i^2}{E} \quad (3.23)$$

Kritično prigušenje za  $i$ -tu frekvenciju iznosi

$$\bar{c}_{i,kr} = 2\omega_i \quad (3.24)$$

Iz ovog se može zaključiti da je za promatrani problem i odabrani koeficijent prigušenja  $\bar{\mu}$ , relativno prigušenje  $\xi_i$  pojedine frekvencije jednako

$$\xi_i = \frac{\bar{c}_i}{\bar{c}_{i,kr}} = \frac{\bar{\mu} \omega_i}{2E} \quad (3.25)$$

Ako bi se promatrani trokut diskretizirao s još gušćom mrežom, tada bi odabrano prigušenje u FEM/DEM metodi prigušilo sve frekvencije za koje vrijedi

$$\omega_i \geq \frac{2E}{\bar{\mu}} \quad (3.26)$$

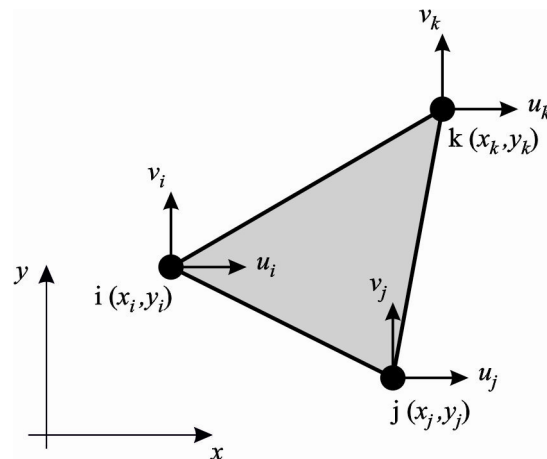
odnosno vlastite periode za koje vrijedi

$$T_i \leq \frac{\pi \bar{\mu}}{E} \quad (3.27)$$

Ovim primjerom pokazano je da se u nekim slučajevima, u kojima je matrica prigušenja sustava  $\bar{C}$  dijagonalna, može uspostaviti veza između koeficijenta prigušenja  $\bar{\mu}$  s relativnim

prigušenjem  $\xi_i$  pojedine frekvencije sustava te da se dinamički odgovor sustava može promatrati u okviru modalne analize.

U prethodnom primjeru matrica prigušenja sustava  $\mathbf{C}$  bila je proporcionalna matrici krutosti  $\mathbf{K}$ . Da bi se pronašao općeniti odnos matrice prigušenja prema matrici masa ili krutosti, potrebno je promatrati sve stupnjeve slobode trokutnog elementa (vidi crtež 3.6) i vidjeti postoji li veza između matrice prigušenja s matricom masa ili matricom krutosti.



Crtež 3.6 Trokutni konačni element s prikazanim stupnjevima slobode

Matrica masa konačnog elementa ima oblik

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A t}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

gdje je  $t$  debljina elementa,  $A$  površina, a  $\rho$  gustoća elementa. Matrica krutosti  $\mathbf{K}$  konačnog elementa jednaka je [K2]

$$\mathbf{K} = t \mathbf{A} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \quad (3.29)$$

gdje su matrice  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{D}$  jednake

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_j - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j & 0 \\ 0 & x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_k - x_i \\ x_k - x_j & y_j - y_k & x_i - x_k & y_k - y_i & x_k - x_i & y_i - y_j \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

odnosno

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Može se također pokazati da analogno izrazu (3.29) matrica prigušenja  $\mathbf{C}$  konačnog elementa ima oblik

$$\mathbf{C} = t A \bar{\mu} \mathbf{B}^T \mathbf{I} \mathbf{B} \quad (3.32)$$

Iz prethodnog izraza vidljivo je da matrica prigušenja  $\mathbf{C}$  nije proporcionalna ni matrici masa  $\mathbf{M}$  ni matrici krutosti  $\mathbf{K}$ . Sukladno izrazima (3.17) i (3.18) matrica  $\bar{\mathbf{C}}$  uzimajući u obzir izraz (3.32) jednaka je

$$\bar{\mathbf{C}} = \Phi^T \mathbf{C} \Phi = t A \mu \Phi^T \mathbf{B}^T \mathbf{I} \mathbf{B} \Phi \quad (3.33)$$

odakle se može zaključiti da u općem slučaju matrica prigušenja  $\bar{\mathbf{C}}$  nije dijagonalna matrica nego puna.

Na temelju provedene analize može se zaključiti da se u općem slučaju u kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata ne može dinamički odgovor konstrukcije promatrati u okviru modalne analize gdje svaki vlastiti oblik ima svoje prigušenje. Također se ne može uspostaviti veza između koeficijenta prigušenja  $\bar{\mu}$  i relativnog prigušenja  $\xi_i$  pojedine frekvencije sustava, međutim, izrazi (3.25), (3.26) i (3.27) i dalje se mogu koristiti kao grube aproksimacije te veze.

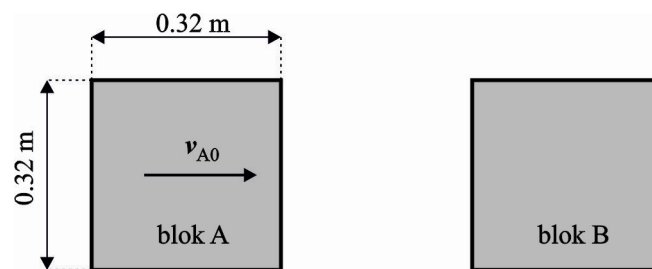
### 3.3 ANALIZA KONTAKTNOG MEĐUDJELOVANJA

Gubitak energije koji se događa uslijed sudara dvaju tijela, u kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata opisuje se preko modela prigušenja definiranog koeficijentom prigušenja kako je to prikazano u drugom poglavlju izrazom (2.54). Da bi se u kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata mogao simulirati gubitak energije prilikom sudara dvaju diskretnih elemenata potrebno je ispravno procijeniti veličinu koeficijenta prigušenja. Fizikalna veličina

kojom se u praksi najčešće opisuje gubitak energije prilikom sudara dvaju tijela naziva se koeficijent restitucije i njega je moguće eksperimentalno odrediti.

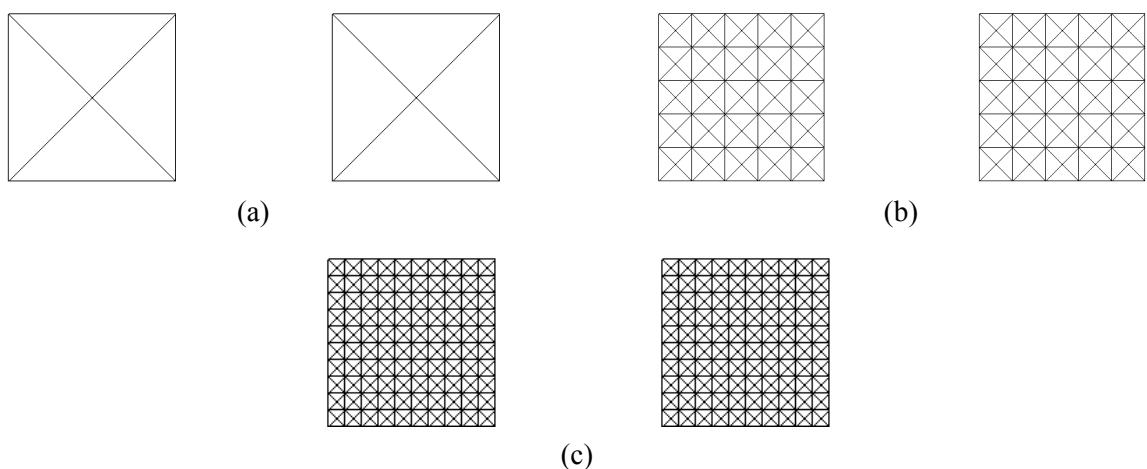
U numeričkim primjerima koji su provedeni u nastavku analizirana je veza između koeficijenta prigušenja i koeficijenta restitucije. Također je analizirana ovisnost koeficijenta restitucije o gustoći mreže konačnih elemenata, vrijednosti *penalty* koeficijenta, brzini sudara te o tome je li je usvojena mogućnost odnosno nemogućnost pucanja blokova. Cilj analize bio je utvrditi postoji li između koeficijenta prigušenja i koeficijenta restitucije nekakav jedinstveni odnos, te ako postoji, pod kojim uvjetima on vrijedi i kako izgleda.

Numerička analiza provedena je na dva kamena bloka A i B. Bloku A zadana je početna brzina  $v_{A0}$  kojom putuje prema bloku B koji miruje sve dok ne dođe do sudara. Nakon sudara blok A nastavlja se gibati brzinom  $v_{A1}$ , a blok B brzinom  $v_{B1}$ . Shematski prikaz problema zajedno s geometrijskim karakteristikama blokova prikazan je na crtežu 3.7.



Crtež 3.7 Sudar dvaju kamenih blokova

Analiza je provedena s različitim gustoćama mreža konačnih elemenata kojima su diskretizirani blokovi.



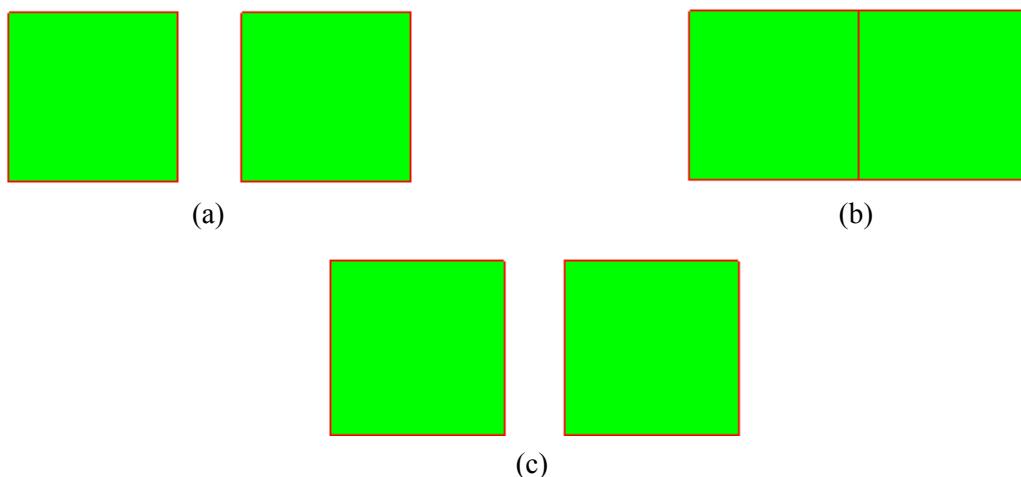
Crtež 3.8 Predložci mreža konačnih elemenata bloka korištene u analizi: (a) tip A (osam elemenata); (b) tip B (200 elemenata); (c) tip C (800 elemenata)

Predložci mreža konačnih elemenata korištenih u numeričkoj analizi prikazani su na crtežu 3.8. Analiza je također provedena s različitim vrijednostima koeficijenta prigušenja  $\bar{\mu}$  (0.1E+06, 0.5E+06, 1.0E+06, 5.0E+06), različitim vrijednostima *penalty* koeficijenta  $p_0$  ( $E$ , 10  $E$ , 25  $E$ , 100  $E$ ) gdje je  $E$  modul elastičnosti materijala te različitim početnim brzinama bloka A,  $v_{A0}$  (3.0 m/s i 10.0 m/s). Karakteristike materijala korištene u numeričkoj analizi prikazane su u tablici 3.3.

**Tablica 3.3** Karakteristike materijala kao ulazni parametri

Kamen	
Modul elastičnosti, $E$ (GPa)	30.5
Poissonov koeficijent, $\nu$	0.2
Gustoća, $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	2340

Na crtežu 3.9. prikazane su karakteristične faze sudara analiziranog u programu Y-2D. U prvoj fazi blok A putuje prema bloku B koji miruje (crtež 3.9-a). U drugoj fazi blok A i B se nalaze u kontaktu (crtež 3.9-b), dok se u trećoj fazi svaki blok nastavlja gibati svojom brzinom



**Crtež 3.9** Faze sudara: a) blok A putuje prema bloku B, b) blok A i B se nalaze u kontaktu, c) blok A i B se gibaju svaki svojom brzinom

Ako se na ukupan sustav koji se sastoji od blokova A i B primjeni drugi Newtonov zakon može se pisati

$$\frac{d(m_c \mathbf{v}_c)}{dt} = \mathbf{f}_c(t) \quad (3.34)$$

gdje je  $m_c$  masa sustava koja je jednaka zbroju masa blokova A i B,  $\mathbf{v}_c$  brzina centra mase sustava dok je  $\mathbf{f}_c(t)$  ukupna sila koja djeluje na centar mase sustava. Budući da na sustav ne djeluje nikakva vanjska sila te da se masa sustava ne mijenja, izraz (3.34) prelazi u

$$\frac{d(\mathbf{v}_c)}{dt} = 0 \quad (3.35)$$

što znači da brzina središta mase sustava, koja je jednaka

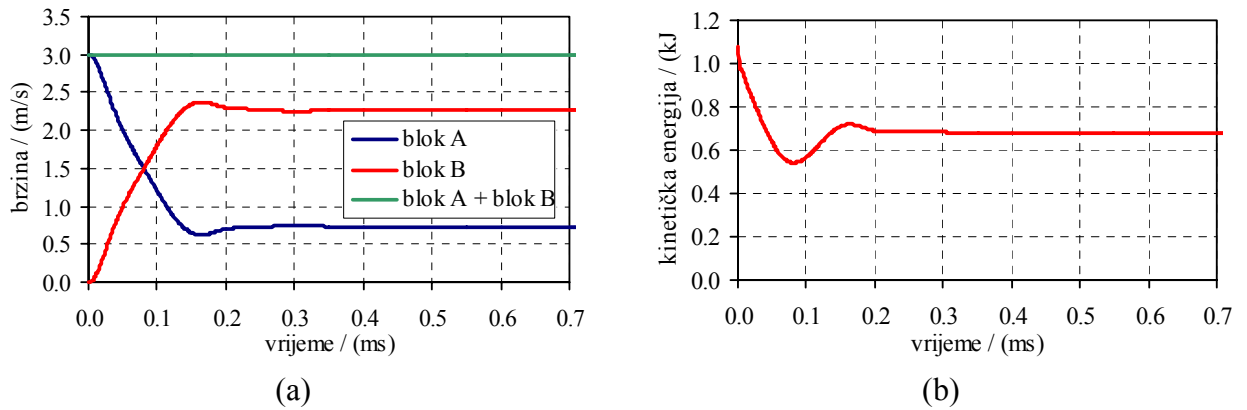
$$\mathbf{v}_c = \frac{\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B}{2} \quad (3.36)$$

gdje su  $\mathbf{v}_A$  i  $\mathbf{v}_B$  brzine blokova A i B, ostaje nepromijenjena tijekom vremena. Uzimajući u obzir da je početna brzina bloka B jednaka nuli, prethodni izraz može se pisati u obliku

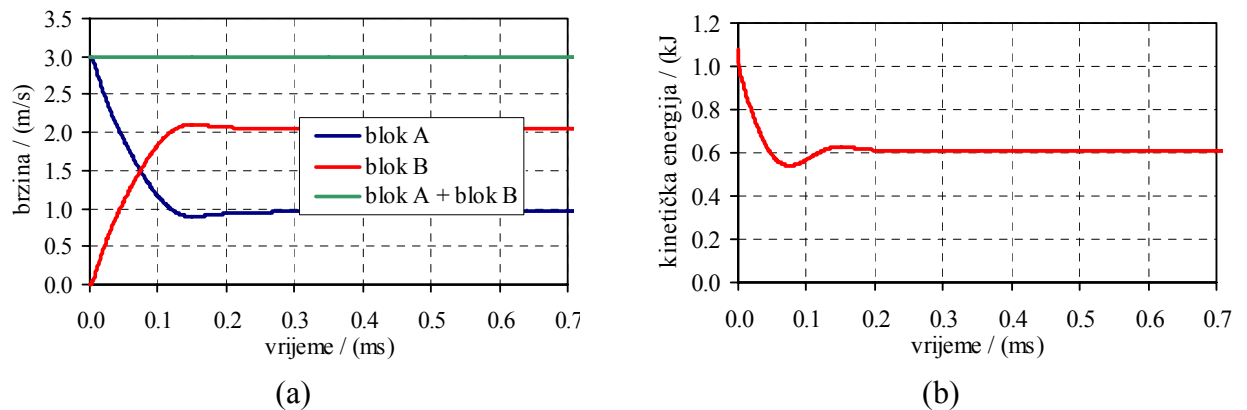
$$v_A + v_B = v_{A0} \quad (3.37)$$

Prethodni izraz koji je posljedica zakona očuvanja količine gibanja mora biti ispunjen u svakom vremenskom trenutku.

Na crtežima 3.10 i 3.11 prikazane su brzine blokova te kinetička energija za sudar sa sljedećim parametrima:  $p_0=100 E$ , predložak mreže B,  $v_{A0}=3.0$  m/s. Koeficijent prigušenja  $\bar{\mu}$  je u prvom slučaju iznosio  $\bar{\mu} = 5.0e+05$  Pas dok je u drugom slučaju iznosio  $\bar{\mu} = 1.0e+06$  Pas. U prikazanim dijagramima vremenu od nula sekundi odgovara trenutak kada su se blokovi našli u kontaktu. Iz crteža je vidljivo da je zbroj brzina blokova A i B u vremenu konstantan sukladno izrazu (3.36) što znači da je zadovoljen zakon očuvanja količine gibanja. Također se može vidjeti kako se kinetička energija u trenutku kontakta počinje smanjivati. U trenutku kada kinetička energija postigne svoj minimum, potencijalna energija unutar blokova poprima svoju maksimalnu vrijednost. Nakon toga potencijalna energija blokova pretvara se u kinetičku energiju dok razlika između početne i konačne kinetičke energije predstavlja energiju koja se izgubila prilikom kontakta. Iz prikazanih dijagrama kinetičke energije u tijeku vremena, može se uočiti da je u drugom slučaju gdje je koeficijent prigušenja bio veći konačna kinetička energija manja odnosno gubitak energije veći.



**Crtež 3.10** Sudar s usvojenim parametrima:  $\bar{\mu}=5.0e+05$  Pas,  $p_0=100 E$ , predložak mreže B,  $v_{A0} = 3.0$  m/s : (a) brzine blokova; (b) ukupna kinetička energija



**Crtež 3.11** Sudar sa usvojenim parametrima:  $\bar{\mu}=1.0e+06$ ,  $p_0=100 E$ , predložak mreže B,  $v_{A0} = 3.0$  m/s : (a) brzine blokova; (b) ukupna kinetička energija

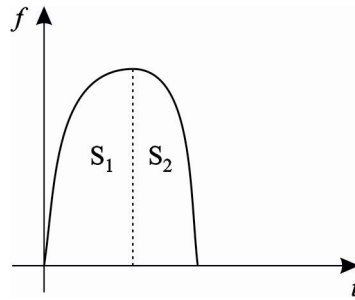
Uslijed gubitaka energije prilikom sudara blokova, impuls  $S_1$  i  $S_2$  (vidi crtež 3.8), koji su posljedica kontaktne sile  $f$  između dva bloka, nisu jednaki te se može pisati

$$S_2 = k S_1 \quad (3.38)$$

gdje je  $k$  koeficijent restitucije koji se kreće u granicama između nule i jedan. Vrijednost koeficijenta restitucije može se dovesti u vezu s brzinama blokova A i B prije sudara i nakon sudara [G11] u obliku

$$k = \frac{v_{B1} - v_{A1}}{v_{A0} - v_{B0}} \quad (3.39)$$

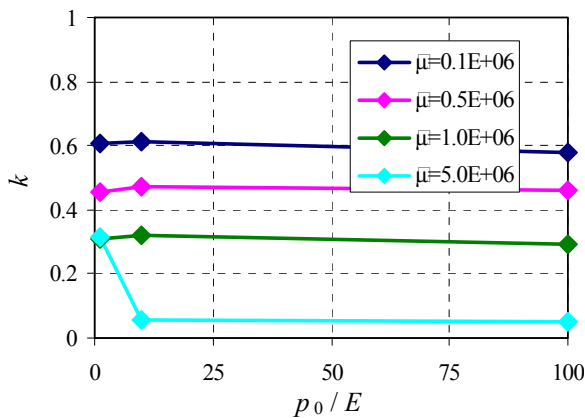
gdje su  $v_{A0}$  i  $v_{B0}$  brzine blokova A i B prije sudara, dok su  $v_{A1}$  i  $v_{B1}$  brzine blokova A i B nakon sudara.



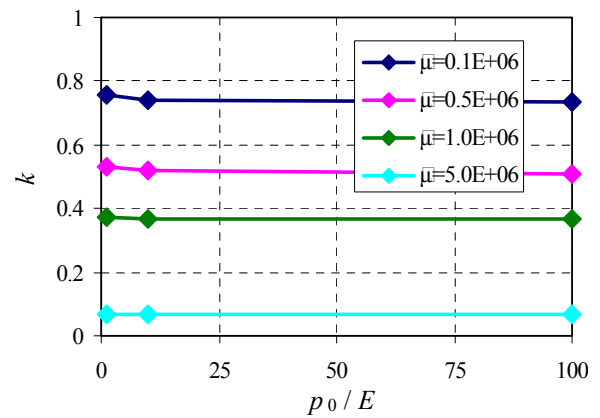
Crtež 3.8 Kontaktna sila u vremenu u trenutku sudara

Koeficijent restitucije je mjera gubitka energije prilikom sudara čija vrijednost ovisi o vrsti materijala.

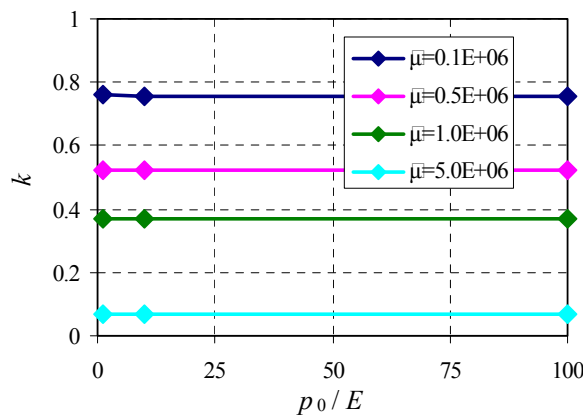
Na crtežima 3.12 i 3.13 redom su prikazane numerički dobivene vrijednosti koeficijenta restitucije u ovisnosti o raznim vrijednostima koeficijenta prigušenja, *penalty* koeficijenta te gustoći mreže konačnih elemenata za slučaj kada je početna brzina bloka A  $v_{A0} = 3.0$  m/s odnosno  $v_{A0} = 10.0$  m/s. U oba slučaja blokovima nije dana mogućnost pucanja.



(a)



(b)

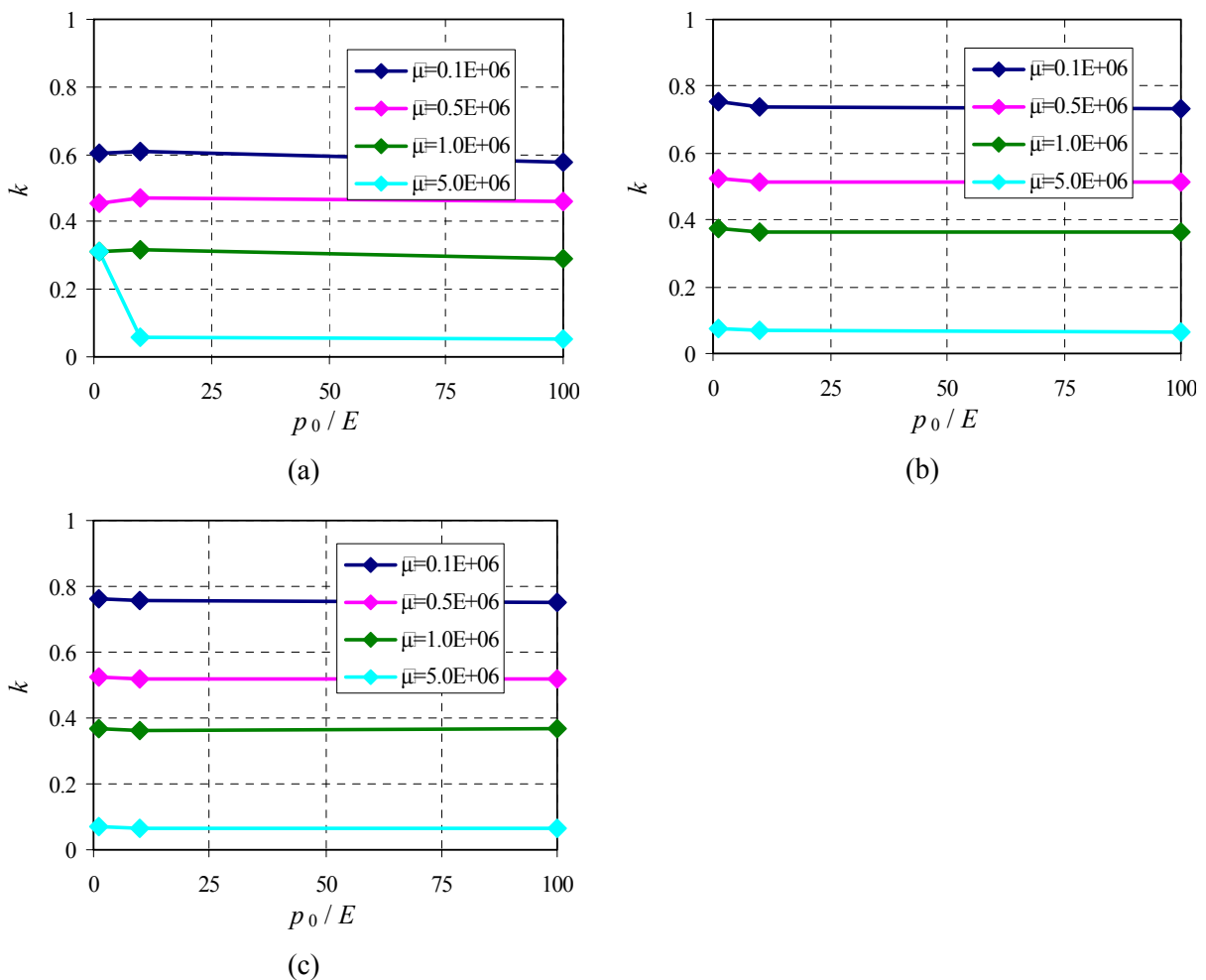


(c)

Crtež 3.12 Koeficijenti restitucije kada je  $v_{A0} = 3.0$  m/s uz nemogućnost pucanja blokova za: (a) mrežu A; (b) mrežu B; (c) mrežu C



Iz prikazanih rezultata može se uočiti da je koeficijent restitucije gotovo neovisan o *penalty* koeficijentu ukoliko je vrijednost *penalty* koeficijenta deset puta veća od modula elastičnosti materijala. Također se uočava da s porastom koeficijenta prigušenja koeficijent restitucije opada što je i bilo za očekivati, budući da su gubici energije prilikom sudara s većim koeficijentom prigušenja veći. Nadalje, zapaža se da su kod mreža B i C, neovisno o početnoj brzini bloka A, za odabrani koeficijent prigušenja razlike u koeficijentima restitucije zanemarive, dok su te razlike kod mreže A značajne u odnosu na mrežu B i C. Iz izloženih razmatranja može se zaključiti da u slučaju kada blokovima nije dana mogućnost pucanja te kada su vrijednosti *penalty* koeficijenta deset puta veće od modula elastičnosti materijala, koeficijent restitucije ne ovisi o gustoći mreže ni o *penalty* koeficijentu ako je mreža konačnih elemenata dovoljno gusta.

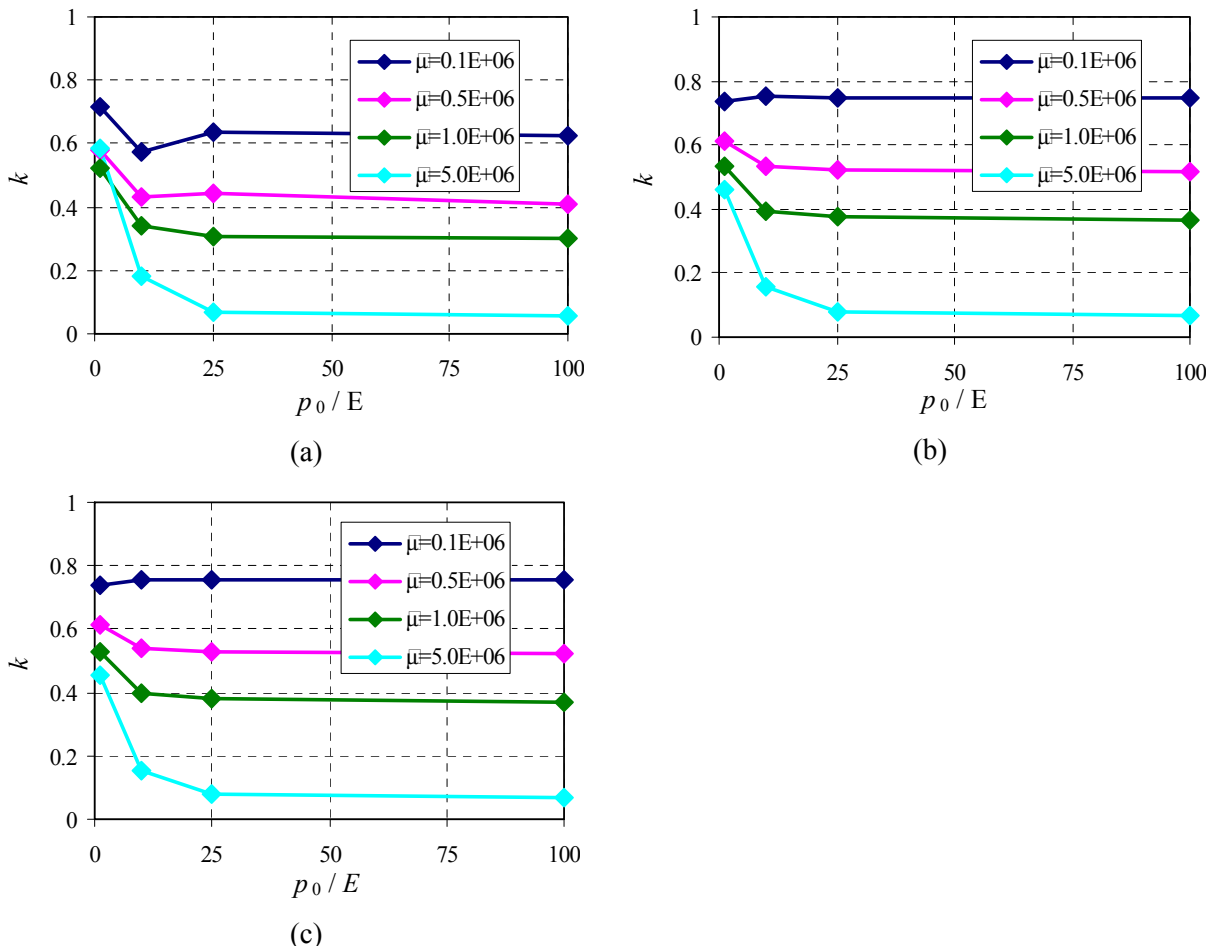


**Crtež 3.13** Koeficijenti restitucije kada je  $v_{A0} = 10.0$  m/s uz nemogućnost pucanja blokova za: (a) mrežu A; (b) mrežu B; (c) mrežu C

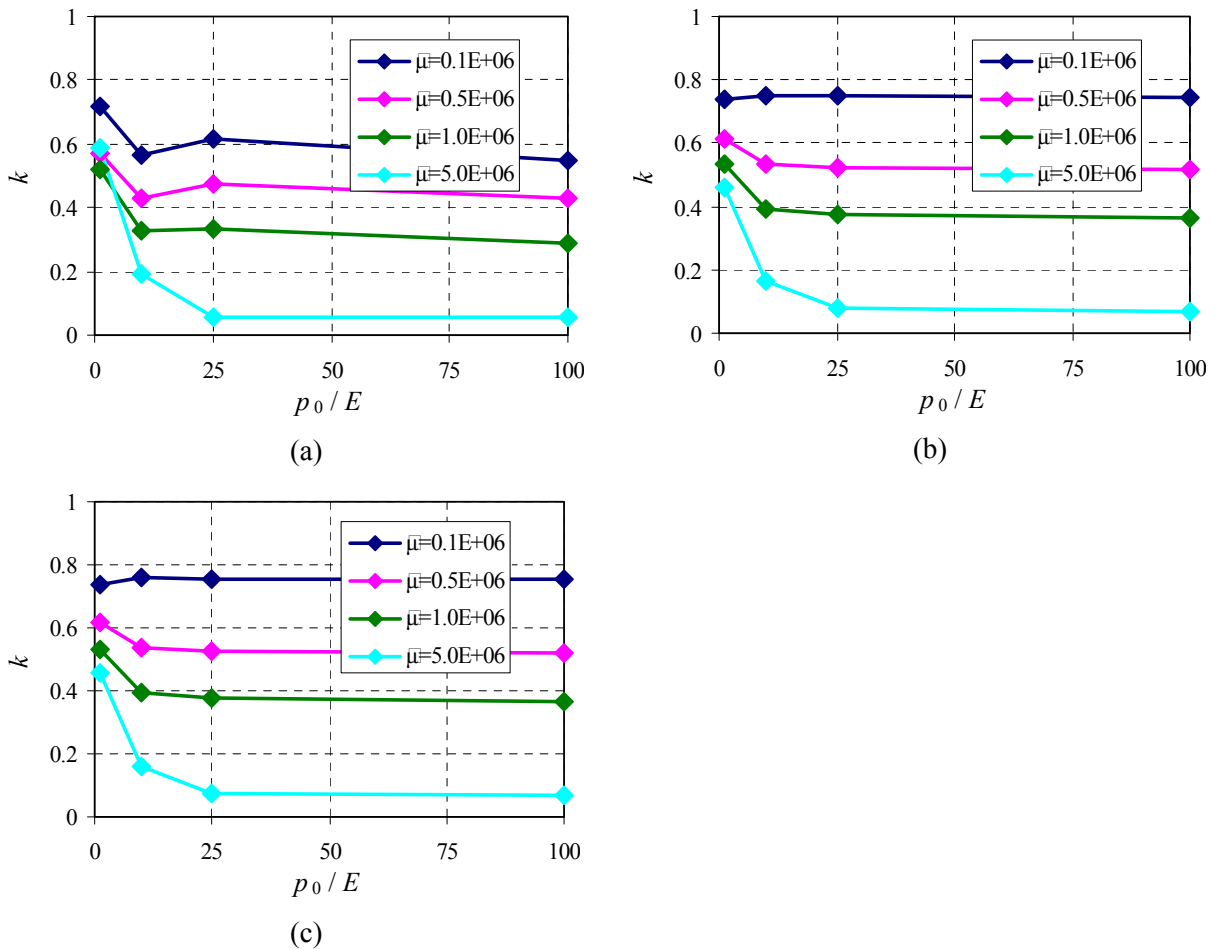
Na crtežima 3.14 i 3.15 redom su prikazane numerički dobivene vrijednosti koeficijenta restitucije za slučaj kada je početna brzina bloka A  $v_{A0} = 3.0$  m/s odnosno  $v_{A0} = 10.0$  m/s te kada blokovi imaju mogućnost pucanja. U ovom slučaju između trokutnih konačnih elemenata umetnuti

su kontaktne elementi što znači da je svaki konačni element fizički odvojen od susjednog konačnog elementa. Budući da su susjedni konačni elementi prije pojave pukotine pridržani *penalty* metodom preko modela krutih opruga u normalnom i poprečnom smjeru, kako je to opisano u drugom poglavlju, nametnula se potreba ispitivanja utjecaja kontaktnog elementa na koeficijent restitucije. Kako bi se izbjegla pojava pukotina, u svim primjerima je usvojena vlačna i posmična čvrstoća u iznosu od 100 MPa.

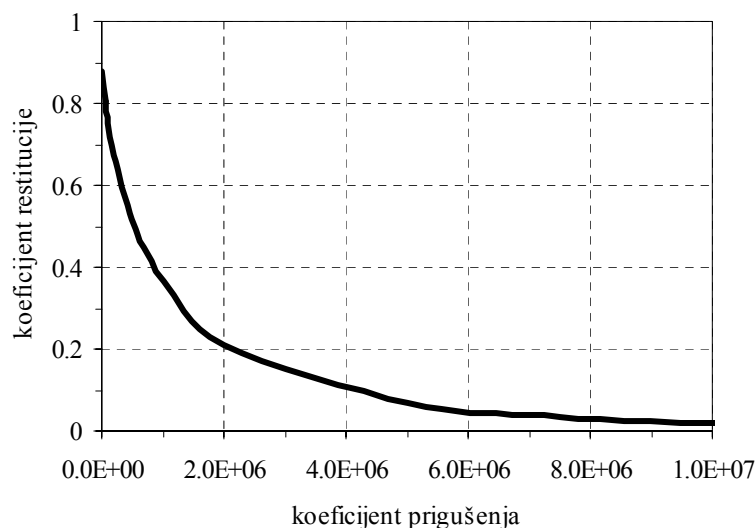
Iz prikazanih rezultata može se uočiti zanemariva razlika u koeficijentima restitucije između mreže B i C dok je kod mreže A ta razlika, slično kao u slučaju kada blokovima nije dana mogućnost pucanja, u usporedbi s mrežom B i C značajna. Također se može uočiti da za odabrani koeficijent prigušenja i vrijednost *penalty* koeficijenta 25 puta veću od modula elastičnosti materijala, koeficijent restitucije poprima gotovo konstantnu vrijednost koja ne ovisi o početnoj brzini bloka A.



**Crtež 3.14** Koeficijenti restitucije kada je  $v_{A0} = 3.0$  m/s uz mogućnost pucanja blokova za: (a) mrežu A; (b) mrežu B; (c) mrežu C



**Crtež 3.15** Koeficijenti restitucije kada je  $v_{A0} = 10.0$  m/s uz mogućnost pucanja blokova za: (a) mrežu A; (b) mrežu B; (c) mrežu C



**Crtež 3.16** Veza koeficijenta restitucije i koeficijenta prigušenja  $\bar{\mu}$

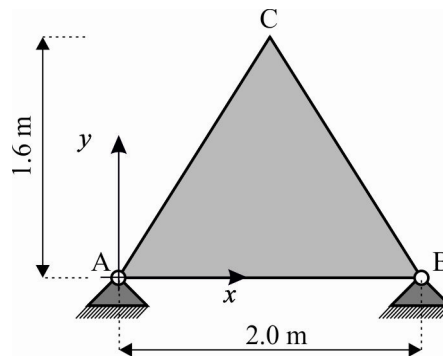
Uzimajući u obzir rezultate numeričkih analiza prikazanih na crtežima 3.12-3.15, može se zaključiti da za vrijednosti *penalty* koeficijenta 25 puta veće od modula elastičnosti materijala i

dovoljno gustu mrežu konačnih elemenata između koeficijenta restitucije i koeficijenta prigušenja postoji jedinstvena veza, neovisna o brzini sudara diskretnih elemenata i o postojanju kontaktnih elemenata između mreže konačnih elemenata. Ta veza, koja je značajna pri procjeni koeficijenta prigušenja  $\bar{\mu}$  na temelju poznatog koeficijenta restitucije, prikazana je na crtežu 3.16.

### 3.4 VERIFIKACIJA TEMPERATURNOG DJELOVANJA

U sklopu ovog rada unutar kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata implementiran je model temperaturnog djelovanja kao funkcije vremena, stoga je u ovom primjeru izvršena verifikacija tog algoritma. U tu svrhu odabran je trokutni element geometrijskih karakteristika prikazanih na crtežu 3.17 koji je izložen djelovanju temperature kao funkcije u vremenu

$$\Delta T = 40t \text{ (}^{\circ}\text{C/s)} \quad (3.40)$$



Crtež 3.17 Trokutni konačni element izložen temperaturnom djelovanju

Mehaničke karakteristike materijala korištene u analizi prikazane su u tablici 3.4

Tablica 3.4 Karakteristike materijala kao ulazni parametri

Materijal	
Modul elastičnosti, $E$ (GPa)	30.0
Poissonov koeficijent, $\nu$	0.2
Koeficijent temperaturnog rastezanja, $\alpha_t$ (MPa)	1.0e-5

Ako je jedan od ležajeva A ili B klizni, deformacija trokuta u  $x$  smjeru iznosila bi

$$\varepsilon_{xx} = \alpha_t \Delta T \quad (3.41)$$

Budući da je deformacija trokuta u  $x$  smjeru spriječena, to se u trokutu javlja tlačno naprezanje  $\sigma_{xx}$  koje iznosi

$$\sigma_{xx} = E \alpha_t \Delta T \quad (3.42)$$

što nakon uvrštavanja poznatih parametara prelazi u

$$\sigma_{xx} = 12.0t \text{ MPa} \quad (3.43)$$

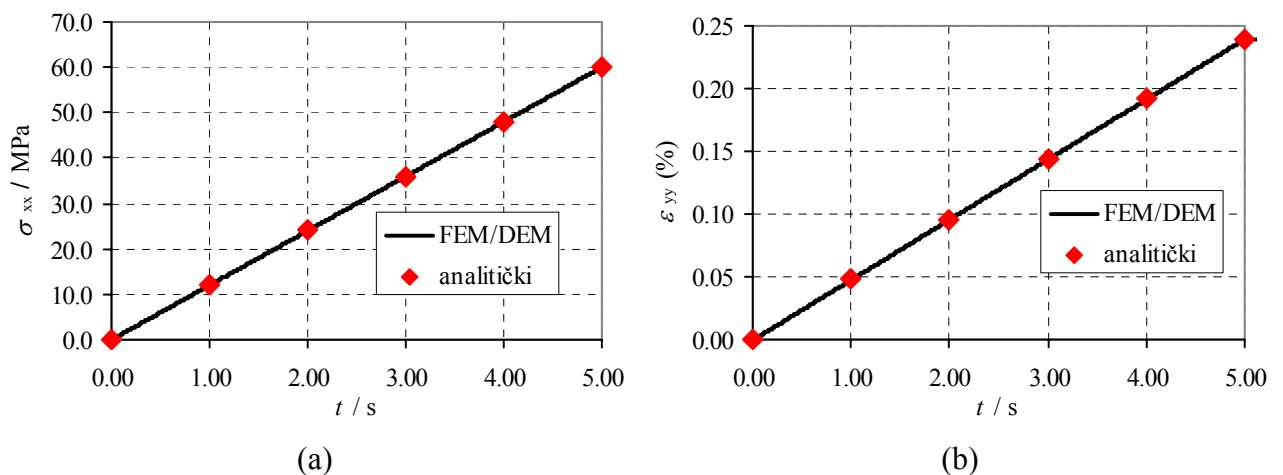
Deformacija trokuta u  $y$  smjeru, koja je jednaka zbroju deformacija od temperature te deformacije uzrokovane naprezanjem u  $x$  smjeru, jednaka je

$$\varepsilon_{yy} = \alpha_t \Delta T + \alpha_t \Delta T \nu = \alpha_t \Delta T (1 + \nu) \quad (3.44)$$

što nakon uvrštavanja poznatih parametara prelazi u

$$\varepsilon_{yy} = 0.00048t \quad (3.45)$$

Na slici 3.18-a i 3.18-b prikazana je usporedba numeričkog i analitičkog rješenja naprezanja  $\sigma_{xx}$  i deformacije  $\varepsilon_{yy}$  u funkciji vremena. Iz prikazanih rezultata vidi se slaganje numeričkog i analitičkog rješenja.



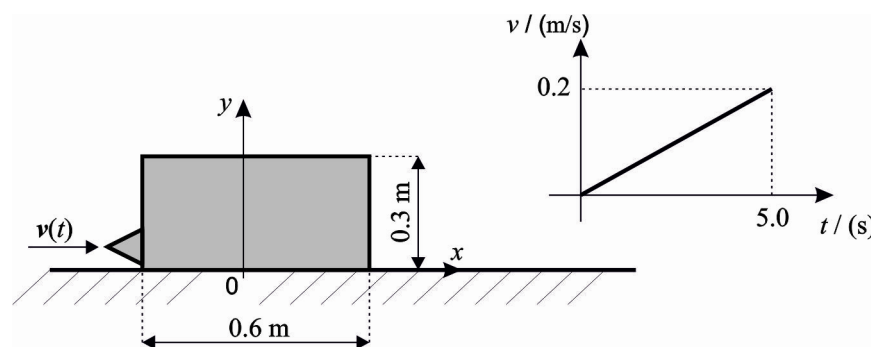
**Crtež 3.18** Usporedba numeričkih i analitičkih rezultata u trokutu: (a) usporedba naprezanja  $\sigma_{xx}$ ; (b) usporedba deformacija  $\varepsilon_{yy}$

### 3.5 VERIFIKACIJA STATIČKOG I DINAMIČKOG TRENJA

U sklopu ovog rada u Y-2D računalni program baziran na kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata implementiran je model statičkog trenja. U ovom primjeru provedena je verifikacija implementiranog modela. Za primjer je odabran kameni blok koji leži na hrapavoj horizontalnoj podlozi. Na blok djeluje trokutni element kojemu je zadana funkcija brzine u obliku

$$v(t) = 0.04 t \text{ (m/s)} \quad (3.46)$$

Shematski prikaz problema prikazan je na crtežu 3.5.



Crtež 3.19 Blok na hrapavoj podlozi

Karakteristike kamena korištene u numeričkoj analizi prikazane su u tablici 3.5.

Tablica 3.5 Karakteristike materijala kao ulazni parametri

Kamen	
Prostorna težina, $\gamma$ (kN/m <sup>3</sup> )	23.40
Statički koeficijent trenja, $\mu_{st}$	0.4
Dinamički koeficijent trenja, $\mu_{din}$	0.2

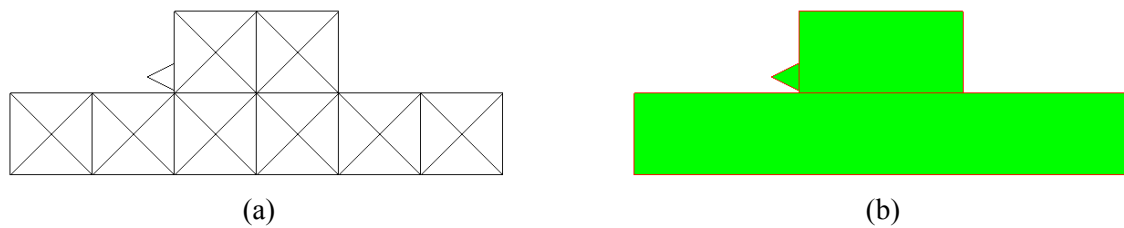
Na temelju prikazanih podataka može se izračunati težina bloka koja iznosi  $G = 4.212$  kN. Vrijednost statičke sile trenja jednaka je

$$f_s = G \mu_{st} = 1.6848 \text{ kN} \quad (3.47)$$

dok je vrijednost dinamičke sile trenja jednaka

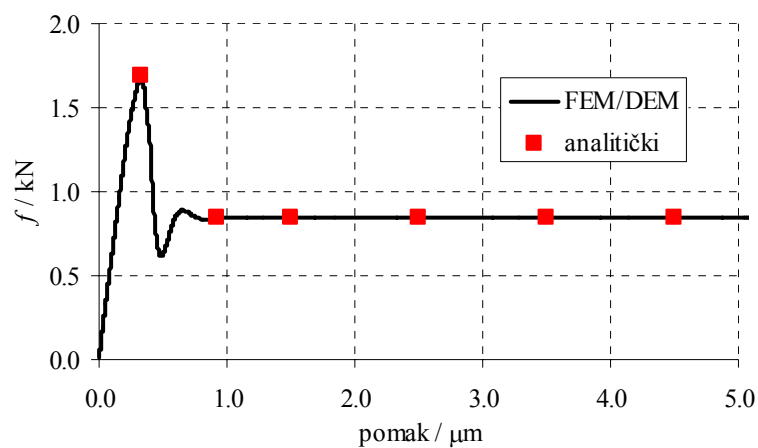
$$f_{din} = G \mu_{din} = 0.8424 \text{ kN} \quad (3.48)$$

Na crtežu 3.20-a prikazana je diskretizacija sustava, dok je na slici 3.20-b prikazan blok u fazi gibanja.



**Crtež 3.20** Blok na hrapavoj podlozi: (a) diskretizacija sustava u trenutku  $t = 0.0$  s; (b) blok u trenutku  $t = 25.0$  ms

Na crtežu 3.21 prikazana je usporedba sile trenja  $f$  u ovisnosti o pomaku bloka dobivena analitički i numerički.



**Crtež 3.21** Usporedba sile trenja u tijeku vremena dobivena analitički i numerički

Na dijagramu se može uočiti da se statička i dinamička sila trenja dobivena kombiniranom metodom konačno-diskretnih elemenata podudara s analitičkim rješenjem što potvrđuje da kombinirana metoda konačno-diskretnih elemenata može realno opisati probleme u kojima se javlja utjecaj trenja, pri čemu statički i dinamički koeficijent trenja ne poprimaju jednaku vrijednost.

## **4. ANALIZA SUHO ZIDANIH KAMENIH KONSTRUKCIJA**

---

U ovom poglavlju prikazana je analiza suho zidanih kamenih konstrukcija primjenom postojećeg numeričkog modela baziranog na kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata. Nakon prikazanog načina diskretizacije kamene konstrukcije, provedena je validacija numeričkog modela u opisivanju određenih pojava koji se u kamenoj konstrukciji javljaju uslijed seizmičkog opterećenja kao što su slobodno njihanje bloka, cikličko ponašanje suhog kontakta između dvaju blokova, cikličko ponašanje zida u ravnini te pojava fragmentacije kamenog bloka uslijed prekoračenja čvrstoće materijala. U prikazanim primjerima numerički rezultati dobiveni kombiniranom metodom konačno-diskretnih elemenata uspoređeni su s rezultatima eksperimenata.

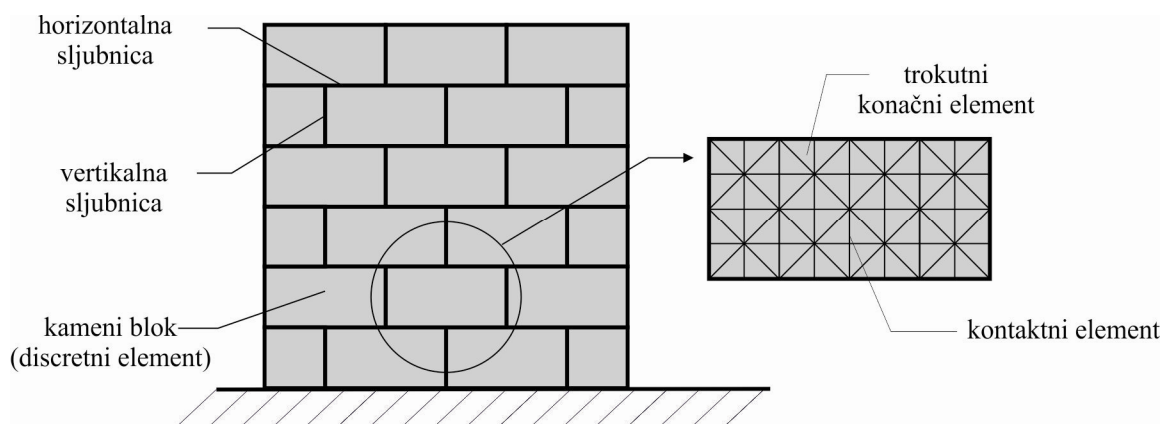
U ovom poglavlju također su izvršene analize u kojima su predložena dva načina kojima se u okviru ove metode može uzeti u obzir efekt površinske hrapavosti blokova koja utječe na normalnu i posmičnu krutost kamenih zidova.

Na kraju poglavlja prikazana je mogućnost primjene ove metode u inkrementalnoj seizmičkoj analizi realnih kamenih konstrukcija.



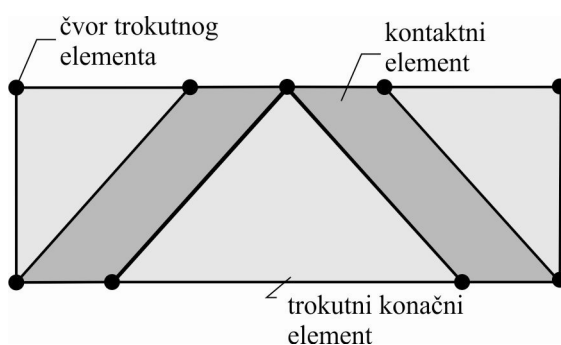
## 4.1 DISKRETIZACIJA KONSTRUKCIJE

Suho zidana kamena konstrukcija se u okviru kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata promatra kao skup diskretnih elemenata odnosno kamenih blokova. Svaki kameni blok diskretiziran je vlastitom mrežom trokutnih konačnih elemenata između kojih su implementirani kontaktni elementi koji predstavljaju mjesta potencijalnih pukotina (crtež 4.1).



Crtež 4.1 Diskretizacija konstrukcije

Ponašanje materijala u konačnim elementima je linearno-elastično, dok je materijalna nelinearnost koja se javlja nakon nastanka pukotina opisana kontaktnim elementima. Ponašanje materijala u kontaktnom elementu opisano je u poglavlju 2.3. Pojava pukotine odnosno odvajanje rubova susjednih konačnih elemenata omogućeno je na način da su susjedni rubovi trokutnih konačnih elemenata opisani s različitim čvorovima kao što je prikazano na crtežu 4.2.



Crtež 4.2 Konačni i kontaktni element

Kontaktne sile koje se javljaju između susjednih blokova, uključujući i sile trenja, baziraju se na principu potencijalnih kontaktnih sila kako je to objašnjeno u poglavlju 2.1.

Za potrebe diskretizacije konstrukcije mrežom konačnih elemenata u sklopu ove radnje razvijen je računalni program *Bmsh* kojemu se geometrija konstrukcije zadaje u dxf formatu.

Program ima mogućnost diskretizacije četverostraničnih blokova s dva predložka mreže konačnih elemenata proizvoljne gustoće. Jedan od predložaka prikazan je na crtežu 4.1.

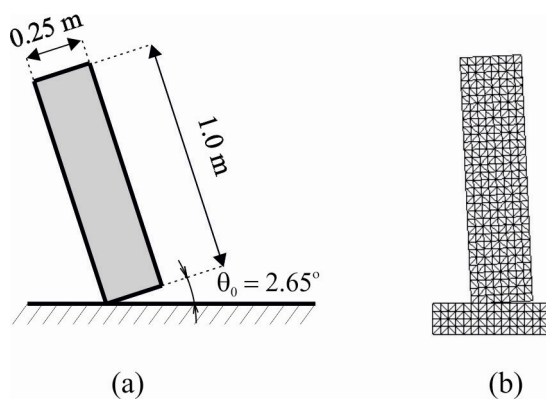
## 4.2. VALIDACIJA NUMERIČKOG MODELA

Validacija postojećeg numeričkog modela u analizi kamenih konstrukcija provedena je na tri primjera u kojima su numerički rezultati uspoređeni s rezultatima eksperimenta. U ovim primjerima analizirani su glavni efekti koji se u kamenim konstrukcijama mogu javiti za vrijeme seizmičke pobude. U prvom primjeru analizirano je slobodno njihanje jednog bloka na horizontalnoj podlozi, u drugom primjeru provedena je analiza posmičnog ponašanja u suhom kontaktu između dva kamena bloka dok je u trećem primjeru analizirano monotono i cikličko ponašanje kamenog zida u ravnini.

### 4.2.1 Slobodno njihanje kamenog bloka

U ovom primjeru provedena je validacija kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata u analizi slobodnog njihanja kamenog bloka. Rezultati dobiveni FEM/DEM metodom uspoređeni su s eksperimentalnim i numeričkim rezultatima preuzetim iz literature [P16]. Eksperiment je proveden na kamenom uzorku od granita izloženog slobodnom njihanju u Nacionalnom laboratoriju građevinarstva u Portugalu [P9]. Numeričke rezultate preuzete iz literature [P16] Prieto je dobio preko formulacije slobodnog njihanja krutog bloka na podlozi koristeći viskozno prigušenje na kontaktu bloka i podloge.

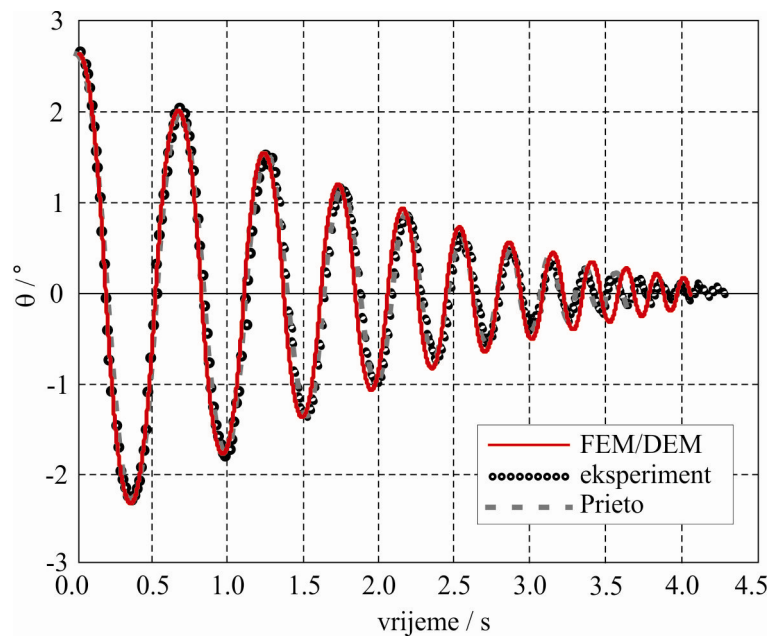
Geometrija uzorka zajedno s mrežom konačnih elemenata prikazana je na crtežu 4.3. Debljina uzorka iznosila je 0.754 m, dok je masa iznosila 503 kg.



Crtež 4.3 Testni uzorak: (a) geometrija; (b) mreža konačnih elemenata

U numeričkoj analizi *penalty* koeficijent  $p_0$  iznosio je  $46 \cdot 10^{10}$ . Koeficijent prigušenja  $\bar{\mu}$  odabran je u iznosu od  $4.5 \cdot 10^6$  (N/m<sup>2</sup>/s) da bi se dobilo najbolje slaganje numeričkih i eksperimentalnih rezultata. U FEM/DEM metodi gubitak energije nije modeliran u kontaktu između bloka i podloge. To je postignuto unutar konačnih elemenata sukladno izrazu (2.54). Kada se blok i podloga nađu u kontaktu, brzina deformacije uzrokuje gubitak energije zbog pojave sile prigušenja unutar konačnih elemenata bloka. Kao posljedica, kinetička energija bloka nakon sudara manja je nego prije sudara.

Na crtežu 4.4 prikazana je usporedba slobodnog njihanja bloka u vremenu dobivena FEM/DEM metodom s rezultatima eksperimenta i numeričkim rezultatima koje je dobio Prieto [P16].



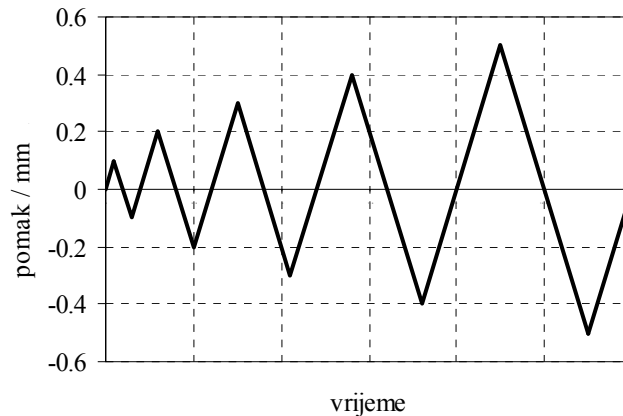
Crtež 4.4 Njihanje bloka u funkciji vremena

Prikazana krivulja kut-vrijeme pokazuje vrlo dobro slaganje rezultata dobivenih FEM/DEM metodom s rezultatima eksperimenta i numeričkim rezultatima [P16]. Ovi rezultati pokazuju da je FEM/DEM metodom moguće simulirati efekte slobodnog njihanja koji mogu biti vrlo važni u seizmičkoj analizi kamenih konstrukcija.

#### 4.2.2. Posmično ponašanje kontakta dvaju blokova

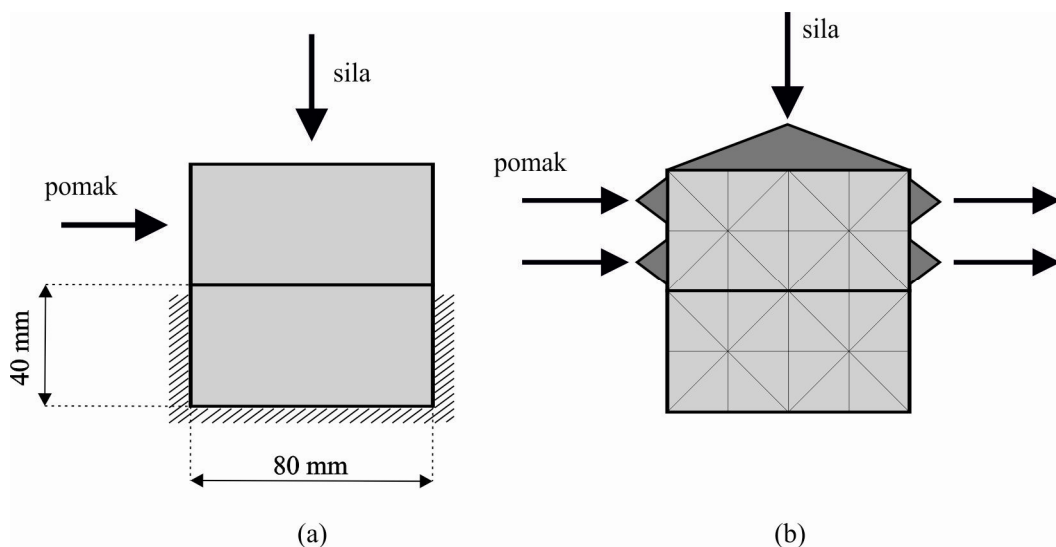
U ovom primjeru analizirano je posmično ponašanje dvaju kamenih blokova da bi se pokazala točnost pri opisivanju odnosa normalnog i posmičnog naprezanja u suhom kontaktu između dva kamena bloka. Ovaj eksperiment proveli su Vasconcelos i Lourenço [V2] s tri različita

predtlačna naprezanja (0.5 MPa, 0.75 MPa and 1.0 MPa). Nakon nanošenja vertikalne predtlačne sile, posmični testovi provedeni su zadavanjem kontroliranih pomaka čija je funkcija u vremenu prikazana na crtežu 4.5.



**Crtež 4.5** Funkcija pomaka u vremenu za posmične testove između dva bloka

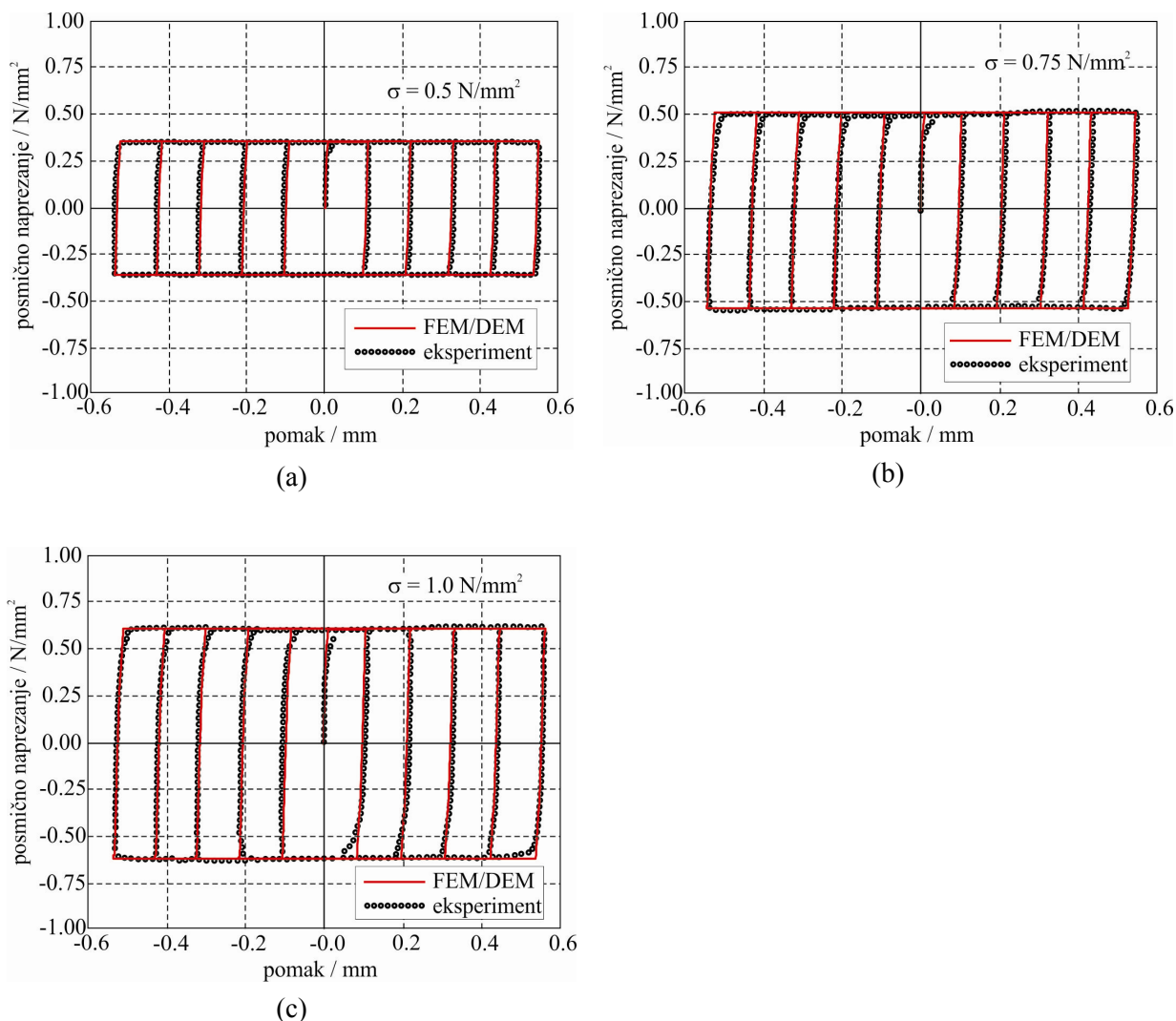
Geometrija bloka zajedno s mrežom konačnih elemenata prikazana je na crtežu 4.6. U numeričkoj analizi *penalty* koeficijent za trenje  $k_t$  usvojen je u iznosu  $88 \cdot 10^9$ .



**Crtež 4.6** Testni uzorak: (a) geometrija blokova; (b) mreža konačnih elemenata

Na crtežu 4.7 prikazana je usporedba rezultata dobivenih kombiniranom metodom konačno-diskretnih elemenata s rezultatima eksperimenta.

Sa crteža se može vidjeti da veza posmično naprezanje-pomak, dobivena kombiniranom metodom konačno-diskretnih elemenata, pokazuje vrlo dobro slaganje s eksperimentalnim rezultatima. Ovi rezultati pokazuju da kombinirana metoda konačno-diskretnih elemenata može simulirati posmično ponašanje u kontaktu između dva kamena bloka.



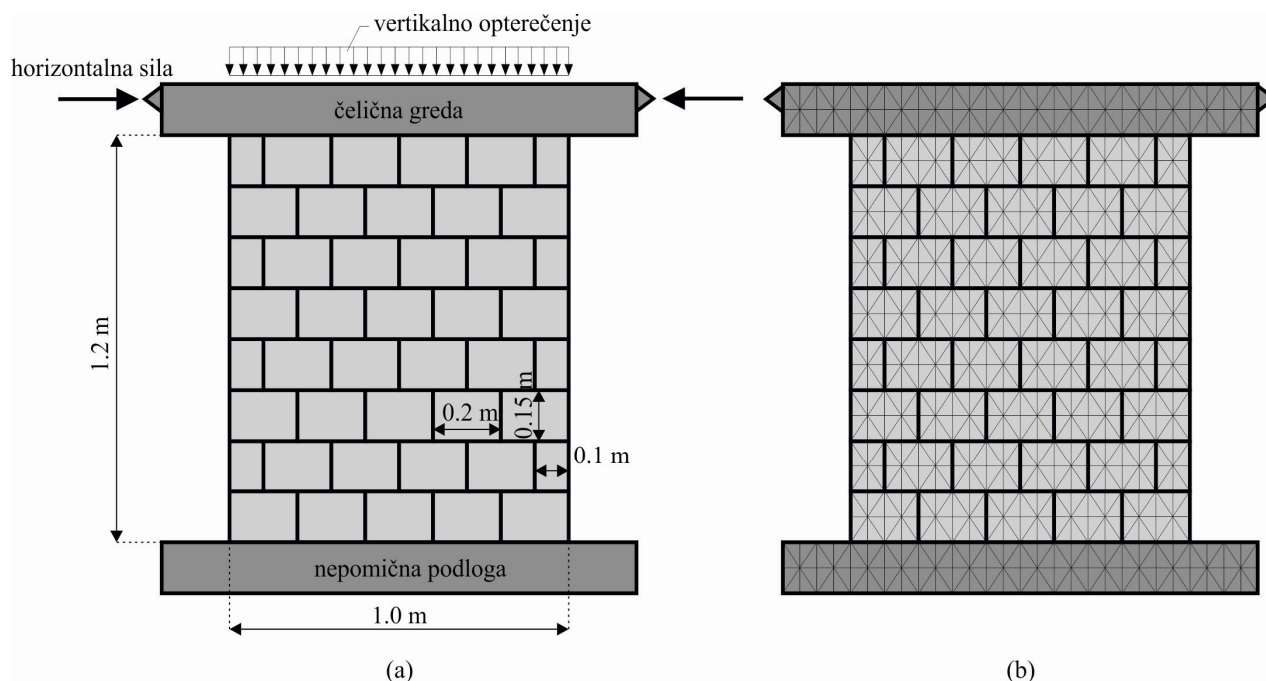
**Crtež 4.7** Dijagrami posmično naprezanje-pomak za cikličko opterećenje uslijed predtlačnog naprezanja od: (a) 0.5 MPa; (b) 0.75 MPa; (c) 1.0 MPa

### 4.2.3 Monotono i cikličko ponašanje suho zidanog kamenog zida

U ovom primjeru provedena je analiza suho zidanog kamenog zida izloženog monotonom i cikličkom opterećenju. Korišten je primjer s poznatim rezultatima eksperimenta [V3] i numeričkim rezultatima [S3] kako bi se utvrdila točnost kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata u analizi suho zidanih kamenih konstrukcija izloženih ovakvoj vrsti opterećenja.

Analiza je provedena za tri različite predtlačne sile (100 kN, 175 kN and 250 kN) što odgovara predtlačnom naprezanju od 0.5 MPa, 0.875 MPa i 1.25 MPa. Nakon nanošenja vertikalne sile, horizontalno opterećenje u obliku kontroliranog horizontalnog pomaka zadano je na vrhu čelične grede (crtež 4.8).

Geometrija zida zajedno s mrežom konačnih elemenata prikazana je na crtežu 4.8.



Crtež 4.8 Kameni zid: (a) geometrija; (b) mreža konačnih elemenata

Zid se sastojao od pravilno ispilanih kamenih blokova dimenzija 200 mm (dužina)  $\times$  150 mm (visina)  $\times$  200 mm (širina).

Kontaktne elemente koji predstavljaju mjesta potencijalnih pukotina u kamenim blokovima umetnuti su između mreže konačnih elemenata. Mehaničke karakteristike kontaktnih elemenata kao što su vlačna čvrstoća, energija loma u vlaknu te koeficijent trenja usvojene kao srednje vrijednosti mehaničkih karakteristika kamenih blokova preuzete su iz literature i prikazane u tablici 4.1.

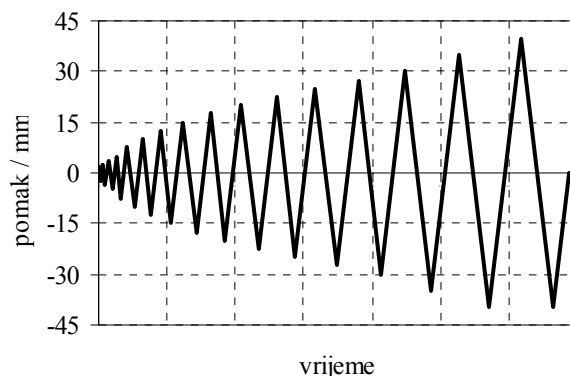
Tablica 4.1 Mehaničke karakteristike kamena [V3]

Modul elastičnosti	Vlačna čvrstoća	Tlačna čvrstoća	Energija loma	Koeficijent trenja
$E$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$G_f^l$ (N/m)	$\mu$
20200	2.8	69.2	186	0.65

Horizontalno opterećenje koje je u cikličkim testovima zadano u funkciju vremena prikazano je na crtežu 4.9.

Neravnine koje se javljaju na kontaktu između dvaju blokova, kao i geometrija samog zida, imaju utjecaj na normalnu i posmičnu krutost zida. Ovaj fenomen jasno upućuje na složenost ponašanja kao i na poteškoće u numeričkom modeliranju kamenih zidova [O2]. U ovoj analizi

normalna krutost zida uzeta je u obzir preko ekvivalentnog modula elastičnosti zida, dok je posmična krutost dodatno regulirana *penalty* koeficijentom za trenje.



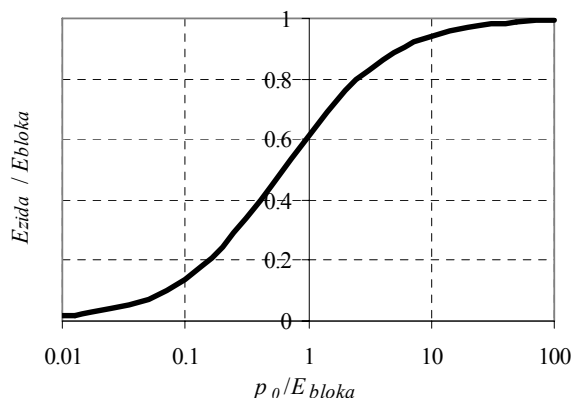
Crtež 4.9 Pomak u funkciji vremena

Zbog hrapavosti površine blokova, moduli elastičnosti kamenih blokova i samog zida nisu jednaki. U tablici 4.2 prikazane su srednje vrijednosti modula elastičnosti zida za tri različita predtlačna naprezanja dobivene kao omjer srednjeg normalnog naprezanja i deformacije zida [V3]. Ove vrijednosti korištene su u numeričkoj analizi.

Tablica 4.2 Srednje vrijednosti modula elastičnosti zida [V3]

Moduli elastičnosti zida		
$\sigma = 0.5$ (MPa)	$\sigma = 0.875$ (MPa)	$\sigma = 1.25$ (MPa)
3287.5	4068.9	4722.0

U FEM/DEM metodi postoje dva pristupa koji uzimaju u obzir efekt površinske hrapavosti kamenih blokova. U prvom pristupu, efekt površinske hrapavosti kamenih blokova na normalnu krutost zida moguće je uzeti u obzir preko redukcije *penalty* koeficijenta  $p_0$  za normalne kontaktne sile. U tom slučaju *penalty* koeficijent funkcija je predložka mreže konačnih elemenata.



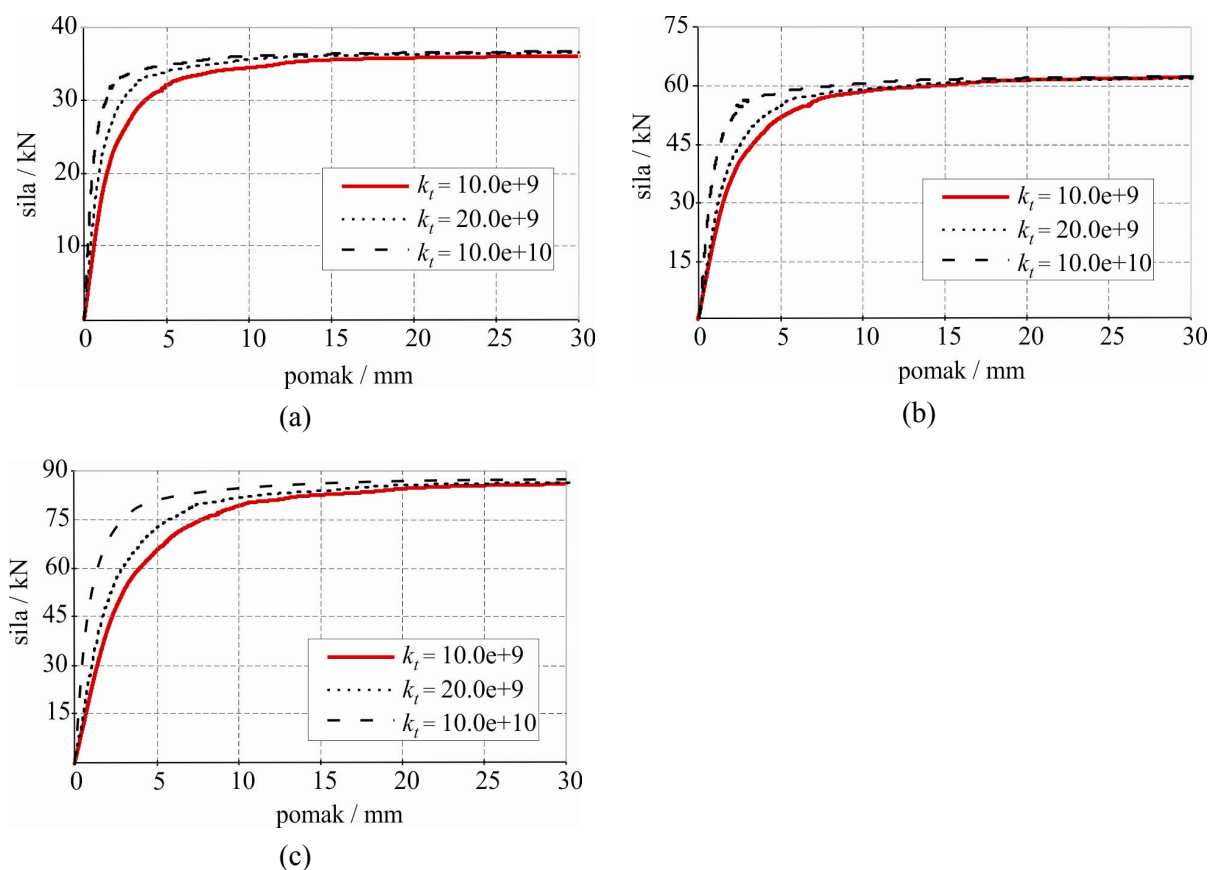
Crtež 4.10 Vrijednosti *penalty* koeficijenta  $p_0$  za redukciju normalne krutosti zida

Vrijednost *penalty* koeficijenta  $p_0$  potrebnog za redukciju normalne krutosti zida određene na temelju prethodno provedene analize prikazane na crtežu 4.10. Ove vrijednosti prikazane su u funkciji omjera modula elastičnosti zida i kamenih blokova. Efekt površinske hrapavosti na posmičnu krutost zidova može se regulirati preko *penalty* koeficijenta za trenje  $k_t$ .

U drugom pristupu efekt površinske hrapavosti kamenih blokova na normalnu krutost zida može se uzeti u obzir preko reducirane vrijednosti modula elastičnosti kamenih blokova, dok se posmična krutost može dodatno regulirati pomoću *penalty* koeficijenta za trenje.

Oba pristupa daju slične numeričke rezultate. U numeričkoj analizi koja je provedena u nastavku odabran je drugi pristup budući da je univerzalan i neovisan o predlošku mreže konačnih elemenata. Također, u ovom pristupu nisu potrebne prethodne analize.

Na crtežu 4.11 prikazani su rezultati analize utjecaja *penalty* koeficijenta za posmične kontaktne sile ( $k_t$ ) na dijagrame sila-pomak uslijed monotono rastućeg opterećenja.



**Crtež 4.11** Utjecaj *penalty* koeficijenta  $k_t$  na dijagrame sila-pomak uslijed monotonog opterećenja za predlačna naprezanja: (a) 0.5 MPa; (b) 0.875 MPa and (c) 1.25 MPa

Iz prikazanih rezultata može se vidjeti da *penalty* koeficijenta  $k_t$ , kojim se uzima u obzir smanjenje posmične krutosti zida uslijed površinske hrapavosti blokova, nema značajan utjecaj na



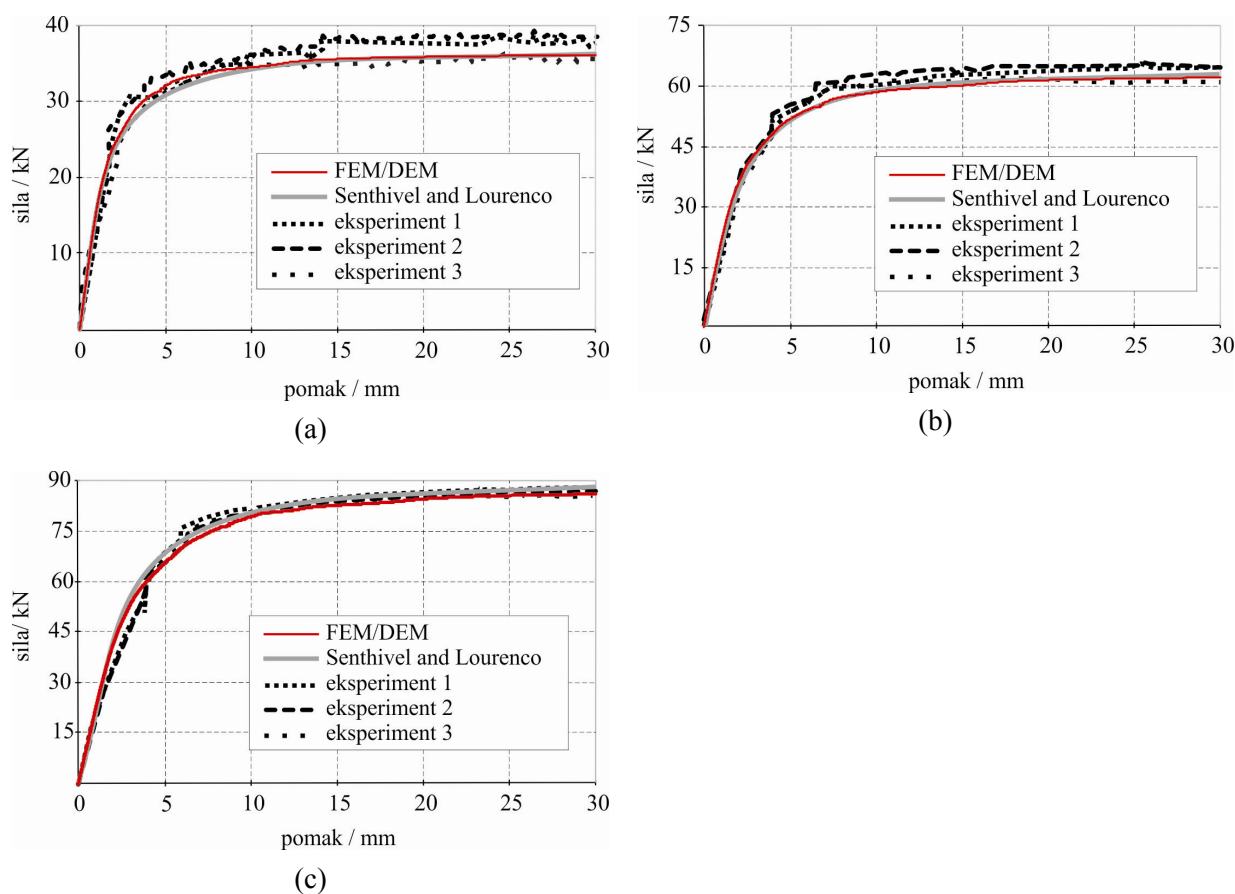
slojno opterećenje. Utjecaj koeficijenta  $k_t$  na vezu sila-pomak najviše je uočljiv u prvom dijelu krivulje u kojem se zid još uvijek ponaša kao kruto tijelo. Nakon što se uslijed horizontalne sile, zbog nemogućnosti prenošenja vlačnih sila među kamenim blokovima, pojavi rotacija dijela zida oko ruba, krivulja sila-pomak pokazuje da krutost konstrukcije teži prema nuli a utjecaj *penalty* koeficijenta  $k_t$  sve je manji.

Vrijednosti *penalty* koeficijenta  $k_t$  za tri različita predtlačna naprezanja odabrane su tako da se numerički rezultati najbolje poklapaju s rezultatima eksperimenta i prikazane su u tablici 4.3.

**Tablica 4.3** Odabrane vrijednosti *penalty* koeficijenta  $k_t$  za zid

Penalty koeficijenti		
$\sigma = 0.5$ (MPa)	$\sigma = 0.875$ (MPa)	$\sigma = 1.25$ (MPa)
$10 \cdot 10^9$	$12.5 \cdot 10^9$	$12.5 \cdot 10^9$

Rezultati dobiveni FEM/DEM metodom za odabrane vrijednosti  $k_t$  uspoređeni su s eksperimentalnim i numeričkim rezultatima dobivenim od Senthivela i Lourença [S3] za monotono rastuće opterećenje na crtežu 4.12.



**Crtež 4.12** Dijagrami sila pomak za predtlačna naprezanja od: (a) 0.5 MPa; (b) 0.875 MPa; (c) 1.25 MPa

U literaturi [S3] numerički rezultati dobiveni su dvodimenzionalnom nelinearnom analizom koristeći metodu konačnih elemenata. Budući da eksperimentalni rezultati nisu pokazivali pojavu pukotina u kamenim blokovima prije postizanja graničnog opterećenja, Senthievel i Lourenço nisu razmatrali mogućnost pucanja blokova.

Rezultati prikazani na crtežu 4.12 pokazuju da se krivulje sila-pomak dobivene FEM/DEM metodom, uzimajući u obzir potencijalne pukotine u kamenim blokovima, vrlo dobro podudaraju s eksperimentalnim krivuljama i numeričkim rezultatima [S3] u kojima nije razmatrana mogućnost pucanja. Razlog ovoj činjenici leži u tome što u intervalu u kojem su krivulje crtane nije nastupilo pucanje blokova.

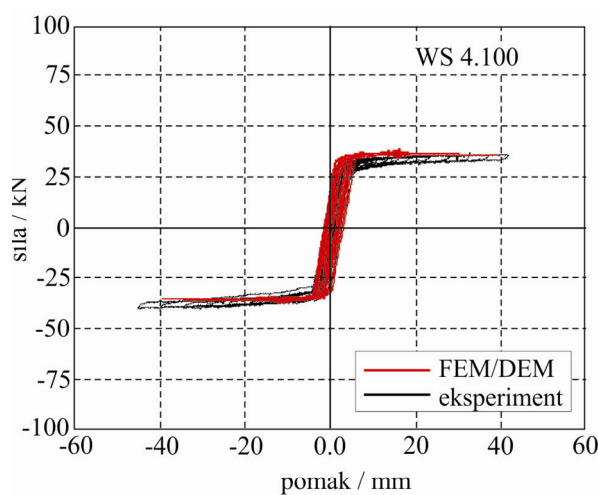
Numerička rješenja granične sile uslijed djelovanja monotono rastućeg opterećenja dobivenog FEM/DEM metodom prikazana su u tablici 4.4 te pokazuju vrlo dobro slaganje s eksperimentalnim rezultatima.

**Tablica 4.4** Usporedba numeričkog i eksperimentalnog graničnog opterećenja

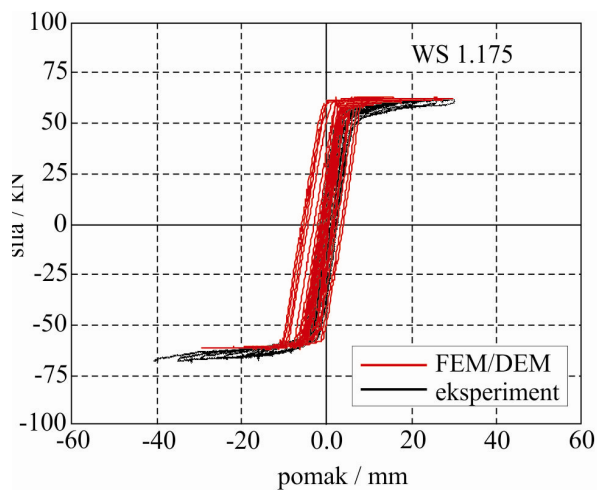
Zidovi	Eksperiment (kN)	FEM/DEM (kN)	Omjer
$\sigma = 0.5$ (MPa)	36.9	36.8	0.997
$\sigma = 0.875$ (MPa)	63.1	61.5	0.975
$\sigma = 1.25$ (MPa)	85.6	86.76	1.014

Za djelovanje cikličkog opterećenja rezultati dobiveni kombiniranom metodom konačno-diskretnih elemenata također su uspoređeni s rezultatima eksperimenta i prikazani su na crtežu 4.13. Karakteristike materijala u numeričkoj analizi zidova izloženih cikličkom opterećenju usvojene su kao u analizi za monotono rastuće opterećenje (tablica 4.2 i tablica 4.3).

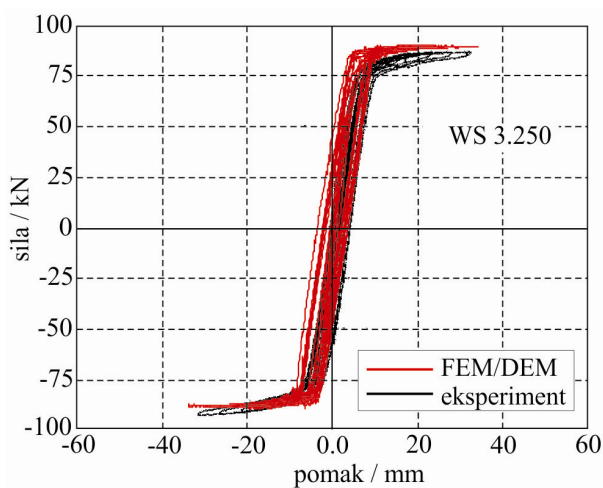
Usporedbom krivulja sila-pomak dobivenih eksperimentalno i numerički primjenom FEM/DEM metode može se uočiti da numerički rezultati za sva tri slučaja opterećenja vrlo dobro opisuju globalno ponašanje konstrukcije.



(a)



(b)

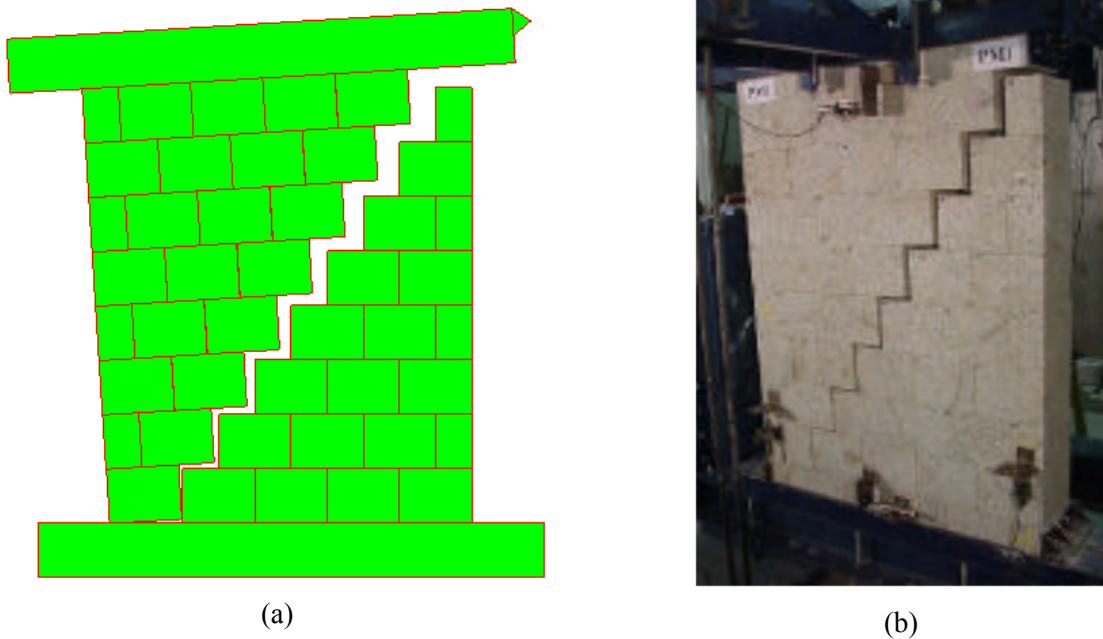


(c)

**Crtež 4.13** Usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata za predtlačno naprezanje od: (a) 0.5 MPa; (b) 0.875 MPa; (c) 1.25 MPa

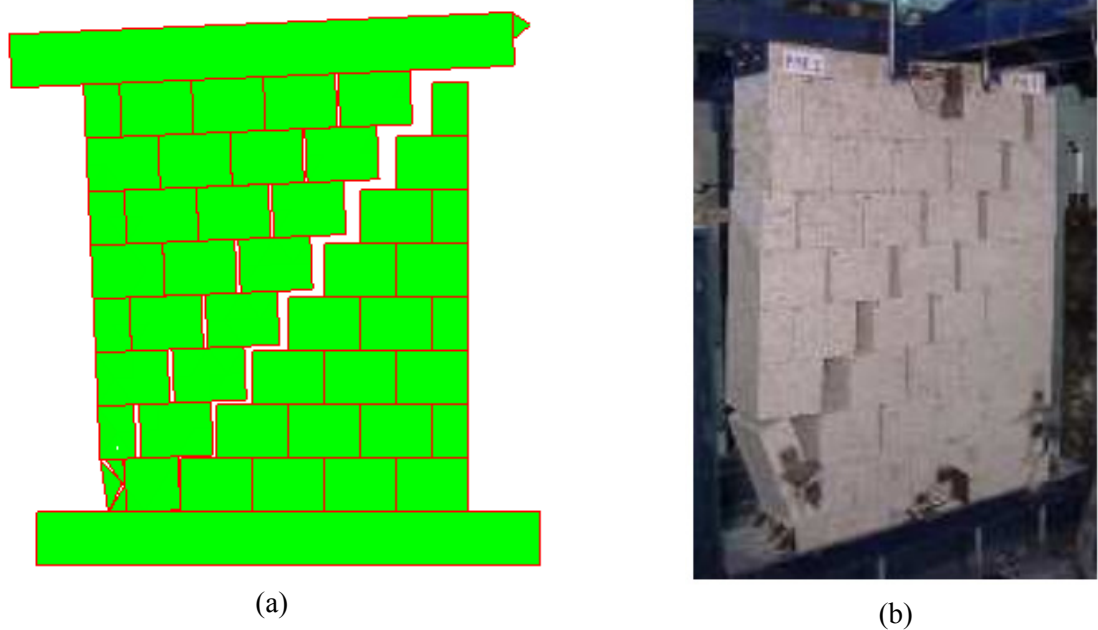
Način pucanja kamenog zida, koji se pojavljuje nakon dostizanja graničnog opterećenja, dobiven eksperimentalno i numerički, uspoređen je na slikama 4.1 - 4.3. Sa crteža se može vidjeti da u slučaju djelovanja malog predtlačnog opterećenja, što u ovom primjeru odgovara iznosu od 0.5 MPa, do potpunog sloma konstrukcije dolazi zbog pojave mehanizma uslijed rotacije dijela zida oko ruba. Za veća predtlačna opterećenja kao što su u ovom primjeru 0.875 MPa i 1.250 MPa nakon započete rotacije može doći do prekoračenja čvrstoće materijala zbog čega nastaje pucanje kamenih blokova.

Sa crteža se također može vidjeti da je oblik potpunog sloma zida dobiven numerički FEM/DEM metodom sličan onom dobivenom eksperimentalno.

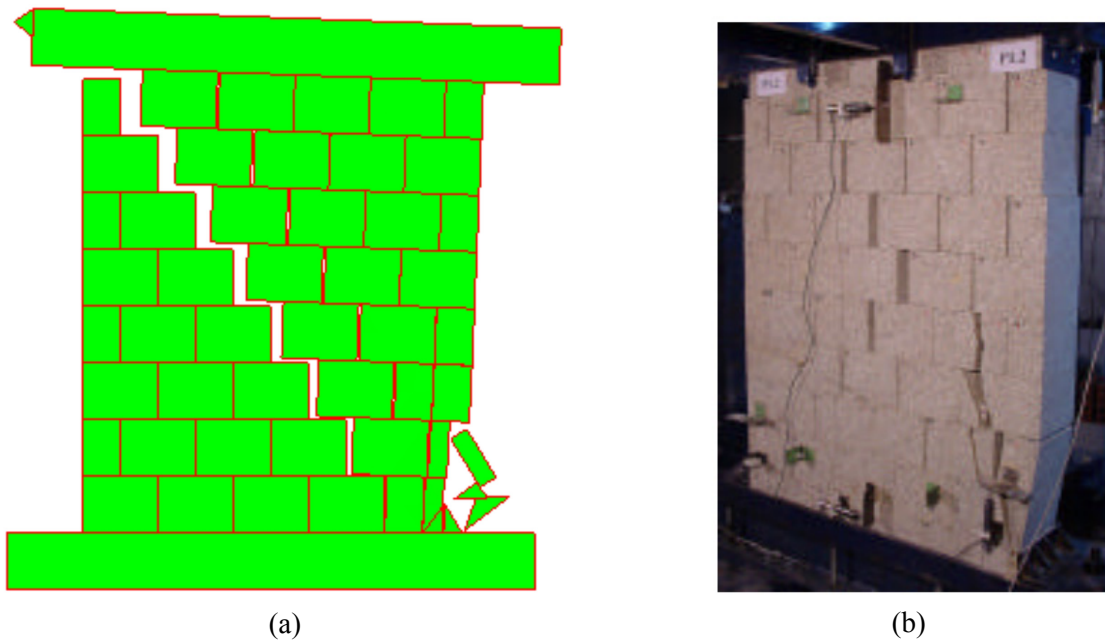


**Slika 4.1** Oblik loma kamenog zida za predtlačno naprezanje 0.5 MPa: (a) numerički (b) eksperiment

Iako u ovom primjeru numeričke analize provedene s i bez mogućnosti pucanja blokova daju slične rezultate, svrha ovog primjera bila je pokazati mogućnost primjene FEM/DEM metode u simuliranju pucanja kamenih blokova što može biti osobito važno u analizi kamenih konstrukcija izloženih velikim tlačnim naprezanjima kada se potpuni slom konstrukcije ne događa zbog globalnog gubitka stabilnosti već zbog prekoračenja čvrstoće materijala u blokovima.



**Slika 4.2** Oblik loma kamenog zida za predtlačno naprezanje 0.875 MPa: (a) numerički (b) eksperiment



Slika 4.3 Oblik loma kamenog zida za predtlačno naprežanje 1.25 MPa: (a) numerički (b) eksperiment

### 4.3 PRIMJENA NUMERIČKOG MODELA

#### 4.3.1 Seizmička analiza konstrukcije Protirona u Splitu

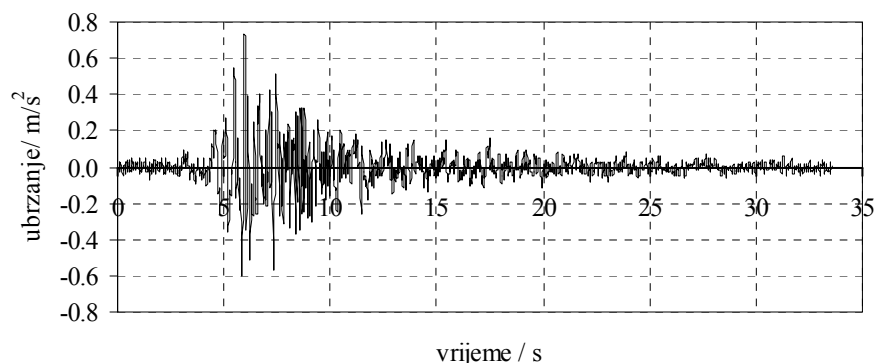
U sljedećem primjeru pokazana je primjena kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata u simulaciji dinamičkog odgovora konstrukcije Protirona u Splitu (slika 4.4) na seizmičko djelovanje.

Protiron je prostor koji je spajao, odnosno odvajao sjeverni dio Dioklecijanove palače koji je služio za slugu, vojsku i sl. od južnog dijela gdje se nalazio carev stan. Protiron se nalazi s južne strane Peristila (trga ispred splitske katedrale sv. Dujma) i s njega se car obraćao stanovnicima drugog dijela palače. Na ulazu u Protiron nalaze se četiri masivna stupa od crvenog granita na kojima stoje dorski kapiteli. Kapiteli nose široki zabat s lučnim nadvojem u sredini. Kapiteli su sa stupovima i naglavnom gredom povezani čeličnim trnovima. Kroz povijest, najvjerojatnije djelovanjem različitih potresa, došlo je do pomicanja kamenih blokova koji čine široki zabat, a također je došlo i do razmicanja središnjih stupova. Da bi se spriječilo daljnje pomicanje, za vrijeme Austro-Ugarske, kameni blokovi su povezani bakrenim klamfama.



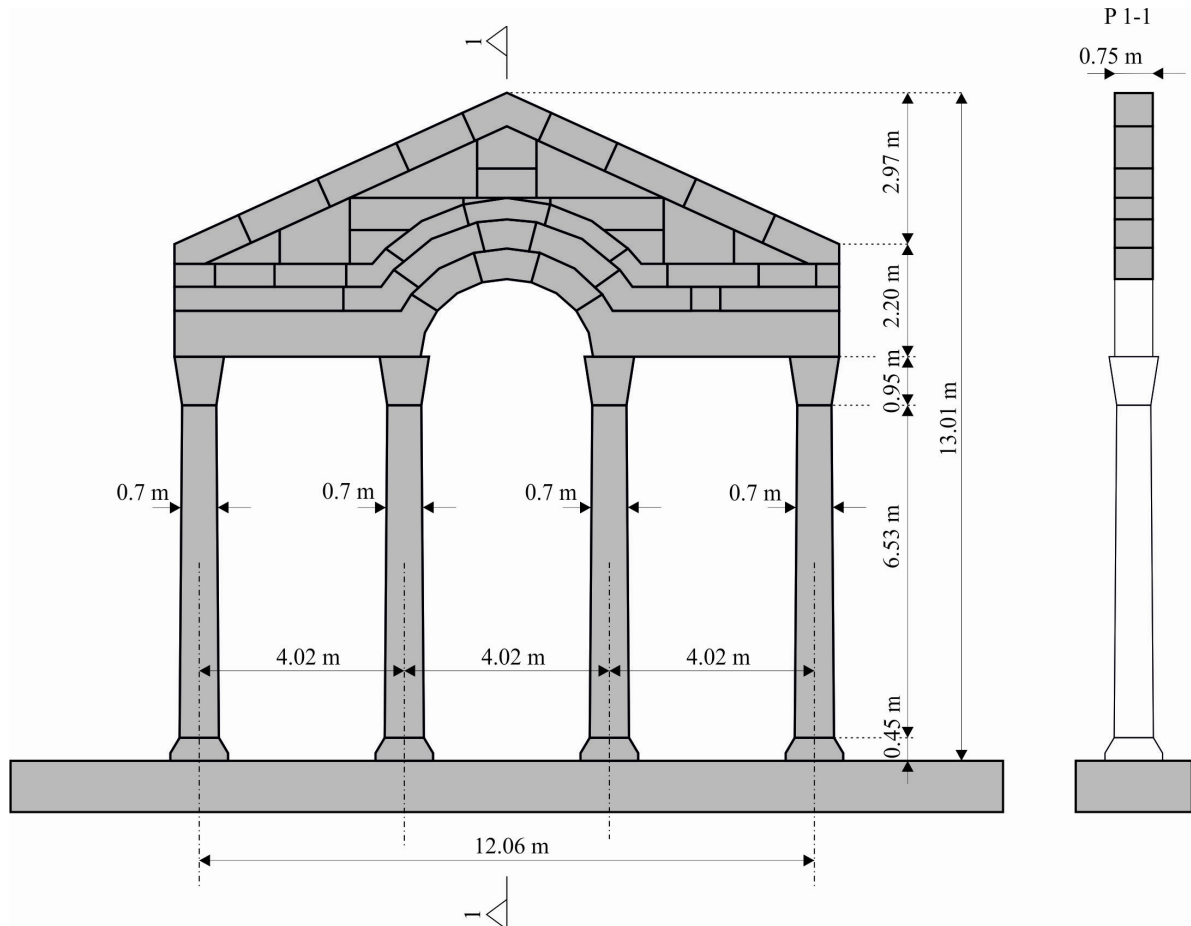
Slika 4.4 Ulaz u Protiron na Peristilu u Splitu

U ovom primjeru izvršena je inkrementalna dinamička [V1] analiza Protirona na izvornoj konstrukciji bez metalnih klamfi i bez metalnih trnova. Konstrukcija je izložena horizontalnom ubrzanju podloge (crtež 4.14) koje je snimljeno 15.4.1979. g. u Dubrovniku kraj Pomorske škole na tlu kategorije A za vrijeme potresa čiji je epicentar bio u Crnoj Gori. Akcelelogram je prvo skaliran na vršno ubrzanje od 0.22 g koje je karakteristično za Split. Nakon toga je vršno ubrzanje postupno povećavano do potpunog sloma konstrukcije.

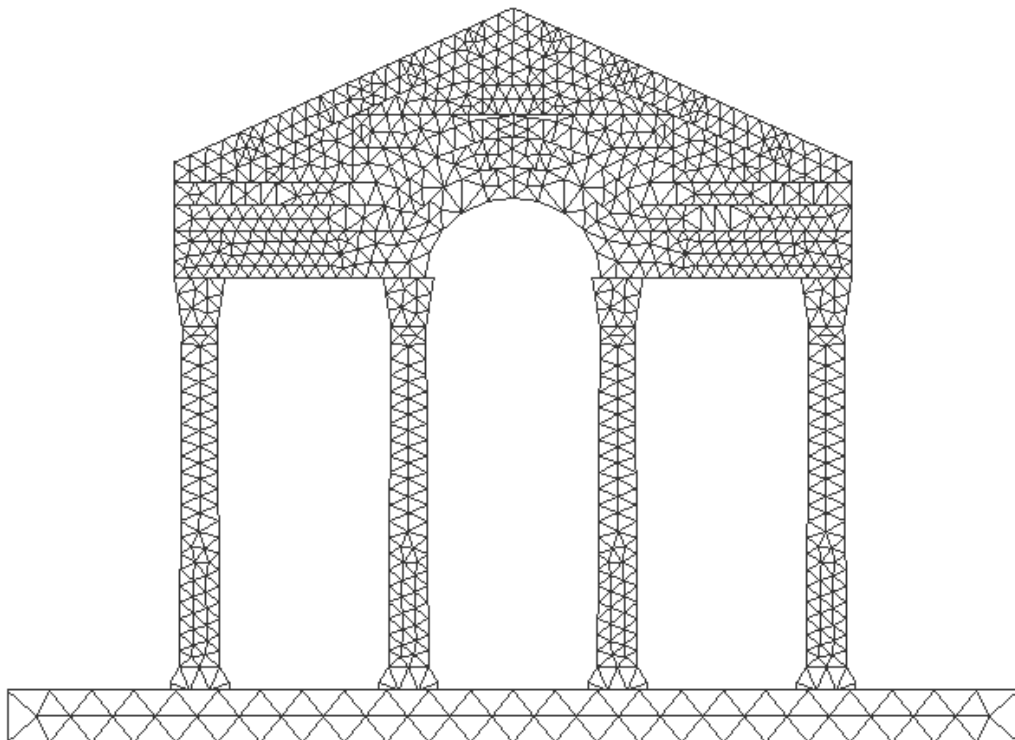


Crtež 4.14 Vremenski zapis ubrzanja za vrijeme potresa u Petrovcu 1979.

Na crtežu 4.15 i 4.16 prikazana je geometrija konstrukcije te mreža konačnih elemenata. U numeričkoj analizi pretpostavljeno je da će do potpunog sloma konstrukcije doći uslijed gubitka stabilnosti tako da mogućnost pucanja kamenih blokova nije uzeta u obzir.



Crtež 4.15 Geometrija konstrukcije



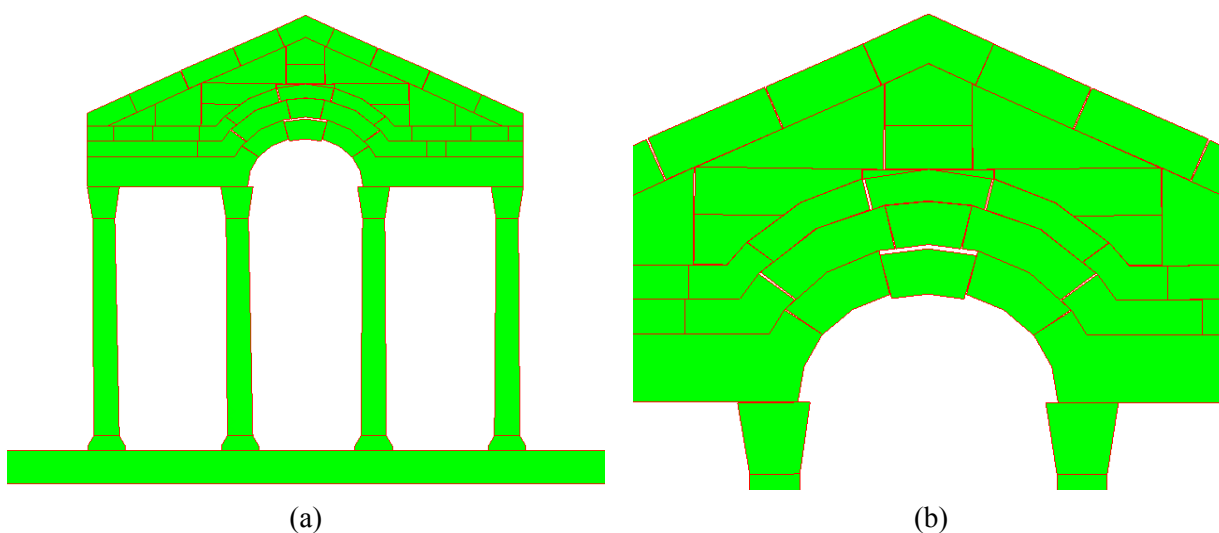
Crtež 4.16 Mreža konačnih elemenata

Mehaničke karakteristike kamena korištene u analizi prikazane su u tablici 4.5.

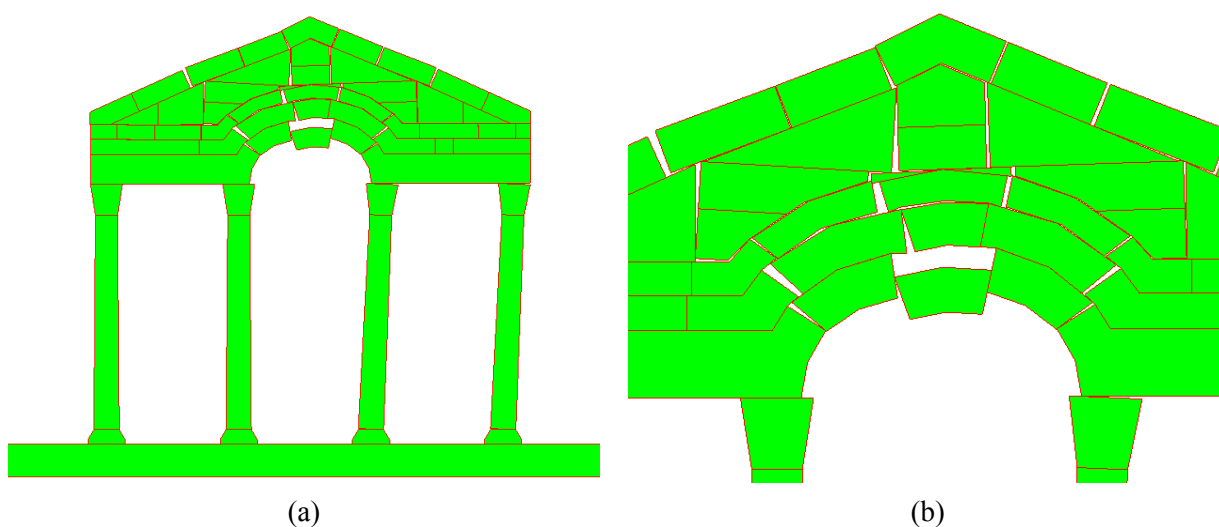
**Tablica 4.5** Mehaničke karakteristike kamena

Modul elastičnosti	Statički koeficijent trenja	Dinamički koeficijent trenja	Koeficijent prigušenja
$E$ (MPa)	$\mu_{st}$	$\mu_{din}$	$\bar{\mu}$
48400	0.6	0.6	$4.5 \cdot 10^6$

Dinamička analiza konstrukcije pokazuje da se za vršno ubrzanje od  $a_g=0.22$  g, javljaju značajni pomaci kamenih blokova (crtež 4.17-a) pogotovo u kamenom luku koji su prikazani na crtežu 4.17-b



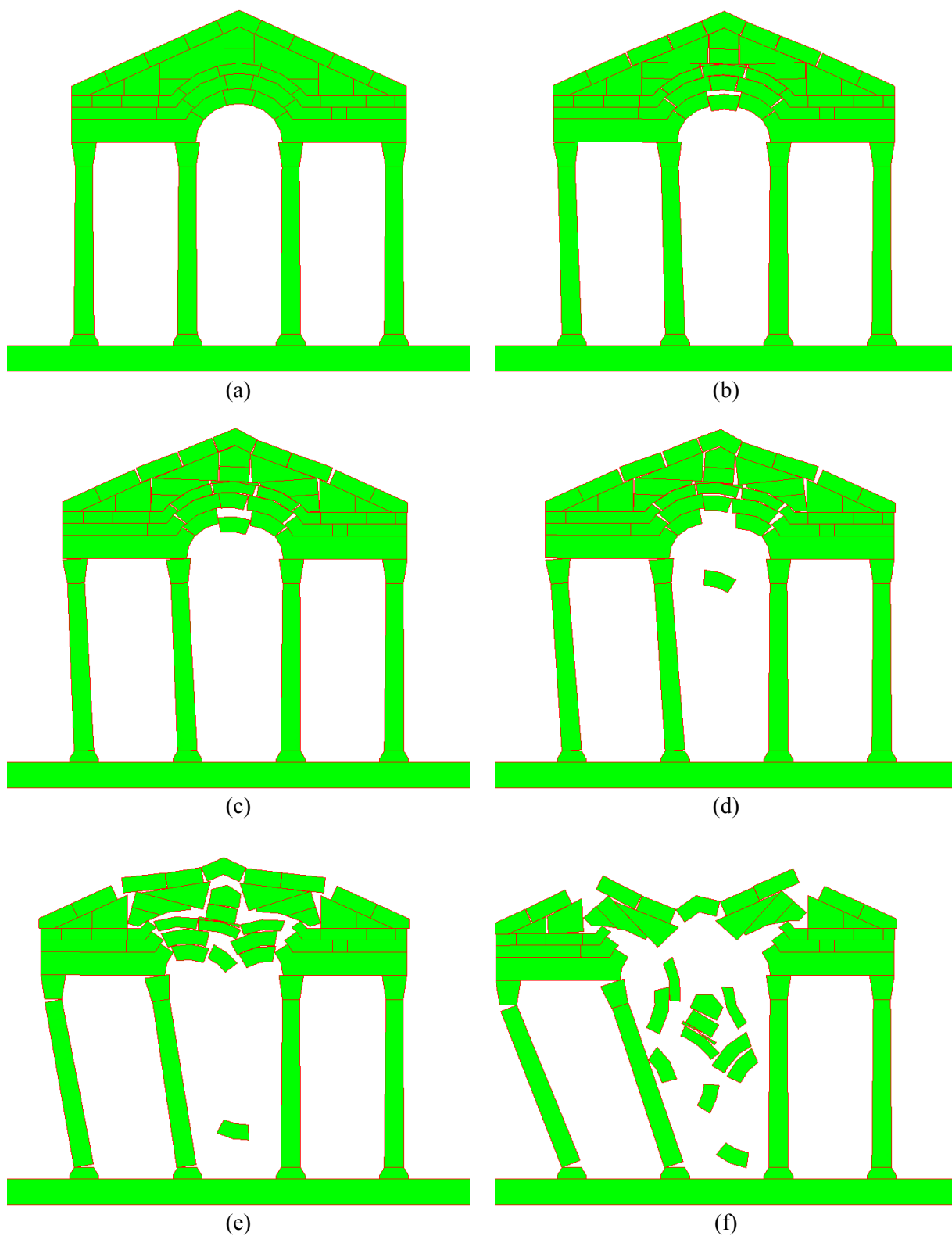
**Crtež 4.17** Konstrukcija Protirona nakon potresa vršnog ubrzanja  $a_g=0.22$  g: (a) cijela konstrukcija; (b) uvećan središnji dio



**Crtež 4.18** Konstrukcija Protirona nakon potresa vršnog ubrzanja  $a_g=0.50$  g: (a) cijela konstrukcija; (b) uvećan središnji dio



Za vršno ubrzanje od 0.50 g dolazi do još većih pomaka, a očigledno je i razmicanje središnjih stupova konstrukcije te odizanje naglavne grede od rubova kapitela. Na crtežu 4.18-a prikazana je konstrukcija nakon završetka, dok je na crtežu 4.18-b prikazan njen središnji dio.



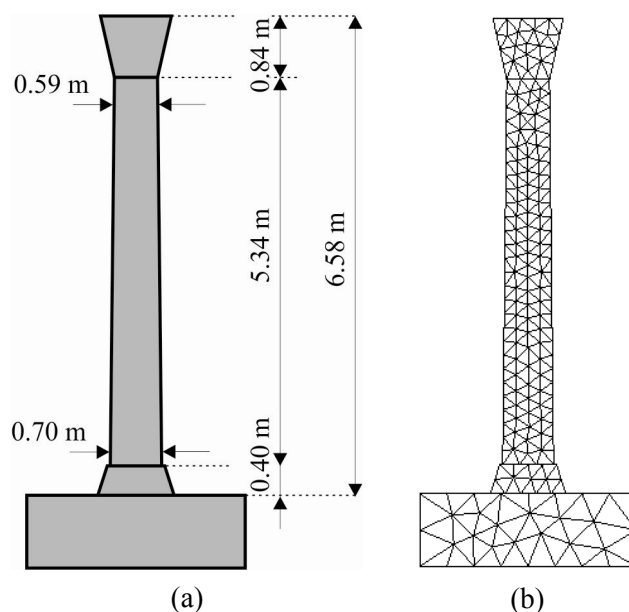
**Crtež 4.19** Mehanizam potpunog sloma konstrukcije Protiron pri vršnom ubrzanju  $a_g=0.6$  g u vremenu: (a)  $t=0.0$  s; (b)  $t=11.91$  s; (c)  $t=13.27$  s; (d)  $t=16.33$  s; (e)  $t=17.86$  s; (f)  $t=18.54$  s

Na crtežu 4.19 prikazan je mehanizam potpunog sloma konstrukcije tijekom vremena pri vršnom ubrzanju od 0.6 g. Sa crteža se može uočiti razdvajanje središnjih stupova dok naposljetku ne dođe do urušavanja središnjeg dijela konstrukcije.

Provedena analiza pokazuje da se u konstrukciji Protirona bez metalnih klamfi već pri vršnom ubrzanju od 0.22 g javljaju značajni pomaci centralnih blokova. Povećanjem ubrzanja povećavaju se i pomaci konstrukcije, a za vršno ubrzanje 0.60 g nastaje slom konstrukcije.

### 4.3.2 Seizmička analiza slobodno stojećeg kamenog stupa

U sljedećem primjeru analizirana je stabilnost slobodno stojećih kamenih stupova. Za primjer je odabran jedan karakteristični stup koji se nalazi ispred katedrale sv. Duje u Splitu. Geometrija stupa zajedno s mrežom konačnih elemenata prikazana je na crtežu 4.20. Mehaničke karakteristike materijala korištene u numeričkoj analizi usvojene su kao kod konstrukcije Protirona i prikazane su u tablici 4.5.

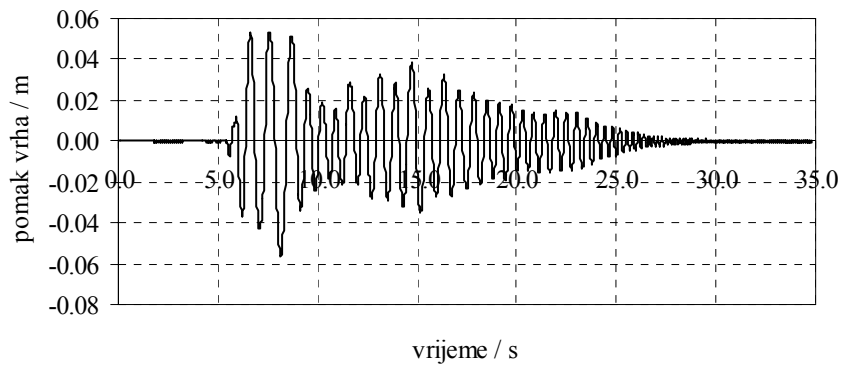


**Crtež 4.20** Kameni stup: (a) geometrija; (b) mreža konačnih elemenata

Stup je izložen horizontalnom ubrzanju podloge (crtež 4.16) kao i konstrukcija Protirona iz prethodnog primjera. Akcelelogram je prvo skaliran na vršno ubrzanje od 0.22 g koje je karakteristično za Split, a nakon toga je vršno ubrzanje postupno povećavano do prevrtanja stupa.

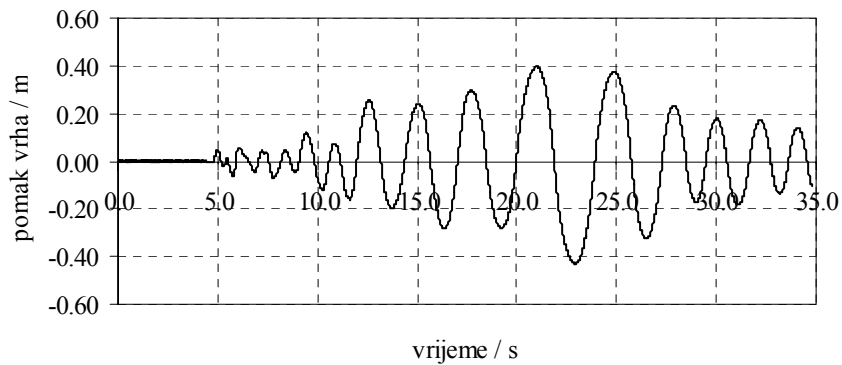
Na crtežu 4.21 prikazan je pomak vrha stupa tijekom vremena za vršno ubrzanje 0.22 g. S dijagrama se može uočiti da maksimalni pomak vrha stupa iznosi 4.48 cm što se, uzimajući u

obzir da pomak vrha pri kojem dolazi do prevrtanja promatranog stupa iznosi 70.07 cm, može smatrati relativno malim pomakom.



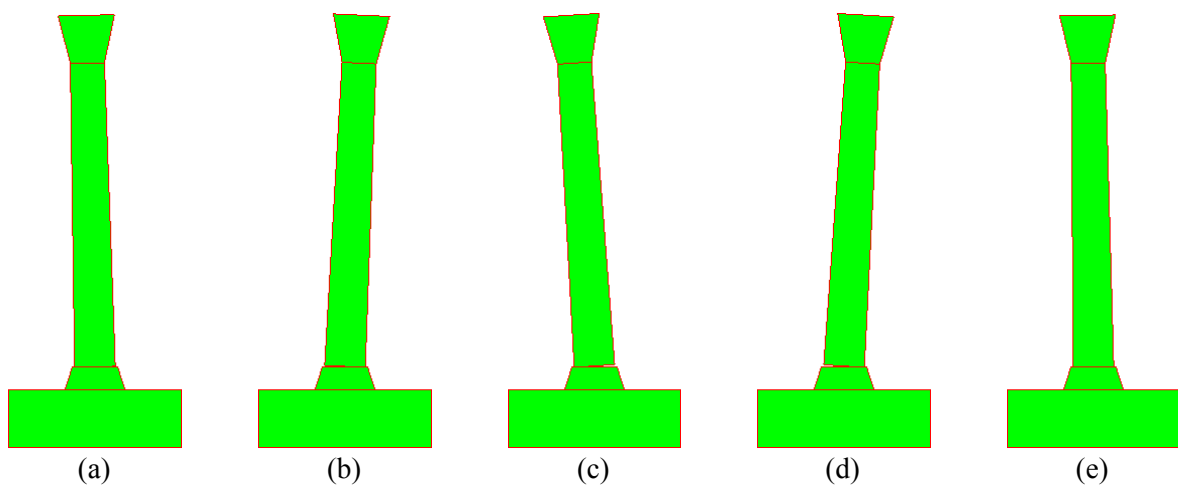
**Crtež 4.21** Pomak vrha stupa za vršno ubrzanje 0.22 g

Na crtežu 4.22 prikazan je pomak vrha stupa tijekom vremena za vršno ubrzanje od 0.6 g. Maksimalni pomak vrha stupa u ovom slučaju iznosi 41.2 cm.



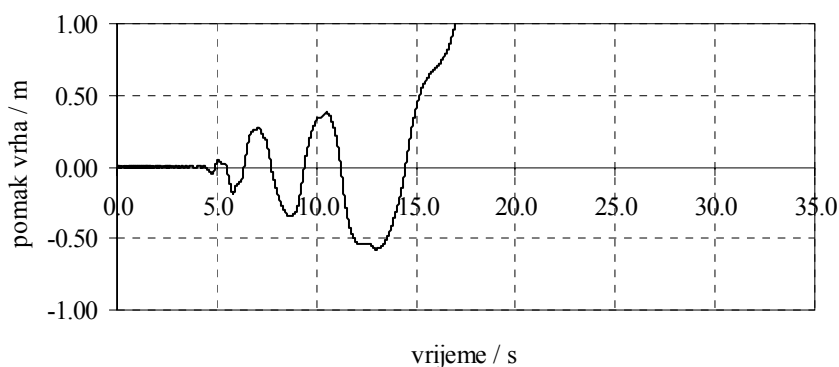
**Crtež 4.22** Pomak vrha stupa za vršno ubrzanje 0.6 g

Stup u različitim vremenskim trenucima za vršno ubrzanje od 0.6 g prikazan je na crtežu 4.23.

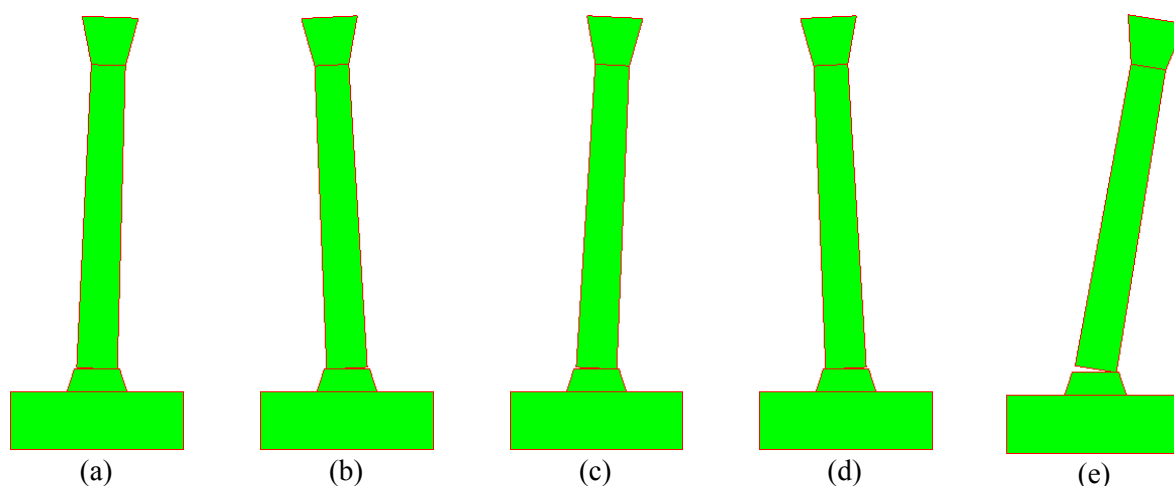


**Crtež 4.23** Kamene stup za vršno ubrzanje 0.6 g u vremenskim trenucima: (a) 11.7 s; (b) 17.9 s; (c) 23.2 s; (d) 25.0 s; (e) 33.4 s

Pri vršnom ubrzanju od 0.7 g dolazi do prevrtanja stupa. Na crtežima 4.24 i 4.25 redom su prikazani pomaci vrha stupa te stup u različitim vremenskim trenucima za vršno ubrzanje 0.7 g.



**Crtež 4.24** Pomak vrha stupa za vršno ubrzanje 0.7 g

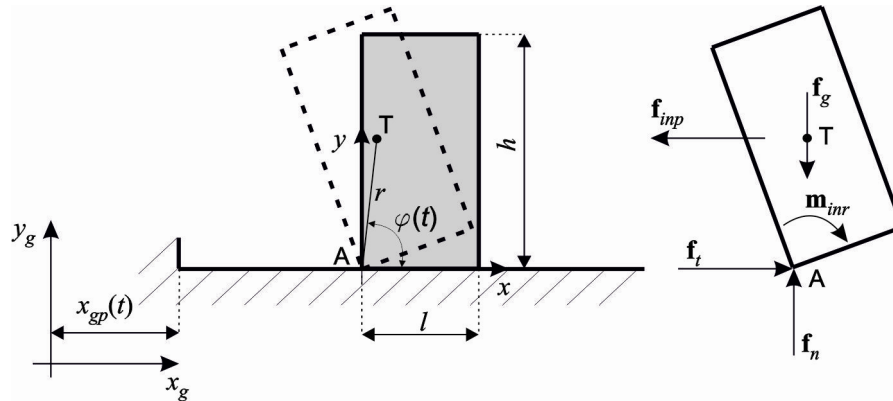


**Crtež 4.25** Kameni stup za vršno ubrzanje 0.7 g u vremenskim trenucima: (a) 7.3 s; (b) 9.0 s; (c) 10.8 s; (d) 13.4 s; (e) 17.0 s

Iz prikazanih rezultata može se uočiti da do gubitka stabilnosti promatranog stupa dolazi pri relativno velikom vršnom ubrzanju podloge koje iznosi 0.7 g. Konstantno horizontalno ubrzanje podloge koje bi uzrokovalo prevrtanje stupa iznosilo bi približno, kako će to u nastavku biti prikazano, 0.11 g. Uzrok ovoj pojavi, da promatrani potres s vršnim ubrzanjima između 0.11 g i 0.7 g ne uzrokuju prevrtanje stupa, leži u činjenici da je trajanje maksimalnih ubrzanja tijekom potresa relativno kratko pa se stup ne stigne u tako kratkom vremenu prevrnuti. U nastavku ovog poglavlja provest će se analize u kojima će se analizirati minimalno potrebno vrijeme trajanja impulsa koje će uzrokovati prevrtanje stupa.

Da bi se pronašlo potrebno vrijeme trajanja impulsa potrebnog da uzrokuje prevrtanje stupa promatrat će se pravokutni blok izložen horizontalnom ubrzanju podloge  $\ddot{x}_{gp}(t)$ . Geometrija bloka

zajedno sa svim silama koje djeluju na blok za vrijeme prevrtanja bloka uzrokovanog horizontalnom ubrzanju podloge prikazane su na crtežu 4.26.



Crtež 4.26 Blok izložen horizontalnom ubrzanju podloge s pripadnim silama

Da bi došlo do prevrtanja bloka oko točke A potrebno je da moment inercijalnih sila  $f_{inp}$  od prijenosnog ubrzanja oko točke A bude veći od momenta sila gravitacije  $f_g$ , što se može pisati u obliku

$$f_{inp} \frac{h}{2} > f_g \frac{l}{2} \quad (4.1)$$

Uzimajući u obzir

$$\begin{aligned} f_{inp} &= m \ddot{x}_{gp}(t) \\ f_g &= m g \end{aligned} \quad (4.2)$$

gdje je  $m$  masa, a  $g$  gravitacija, izraz (4.1) prelazi u

$$\frac{\ddot{x}_{gp}(t)}{g} > \frac{l}{h} \quad (4.3)$$

Dinamička jednačba ravnoteže u obliku sume svih momenata oko točke A ima oblik

$$f_{inp} r \sin \varphi(t) - f_g r \cos \varphi(t) - m_{inr} = 0 \quad (4.4)$$

gdje je  $m_{inr}$  moment inercijalnih sila uslijed relativnog ubrzanja bloka oko točke A koji je jednak

$$m_{inr} = I_A \ddot{\varphi}(t) \quad (4.5)$$

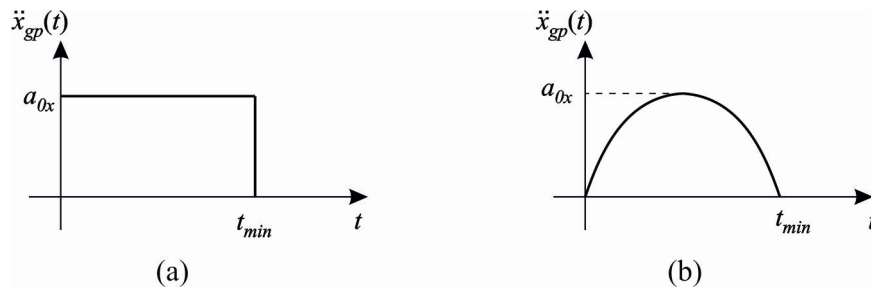
gdje je  $I_A$  moment tromosti stupa oko točke A koji je jednak

$$I_A = \frac{m}{3} (l^2 + h^2) = \frac{4m}{3} r^2 \quad (4.6)$$

Uzimajući u obzir (4.2) i (4.6) izraz (4.4) prelazi u

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{3}{4r} \ddot{x}_{gp}(t) \sin \varphi(t) - \frac{3g}{4r} \cos \varphi(t) \quad (4.7)$$

Rješenje jednadžbe (4.7) ovisi o funkciji ubrzanja podloge te o početnim uvjetima. U nastavku je određeno potrebno vrijeme trajanja ubrzanja podloge za slučaj kada pobuda ima oblik pravokutnog impulsa i sinusnog poluvala (crtež 4.27).



Crtež 4.27 Ubrzanje podloge u obliku: (a) pravokutnog impulsa; (b) sinusnog poluvala

### Pravokutni impuls

U ovom slučaju ubrzanje podloge poprima oblik

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{gp}(t) &= a_{0x} \quad \text{za } 0 < t < t_{\min} \\ \ddot{x}_{gp}(t) &= 0 \quad \text{inače} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Rješenje danog problema svodi se na rješavanje jednadžbe (4.7) s početnim uvjetima

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi_0 = \operatorname{arctg} \left( \frac{h}{l} \right) \\ \dot{\varphi}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

odakle se rješavanjem uzimajući u obzir izraz (4.8) dobije

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{3g}{2r}} \sqrt{\frac{a_{0x}}{g} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) + (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)} \quad (4.10)$$

Kut  $\varphi_{\min} = \varphi(t_{\min})$  do kojeg bi trebao djelovati impuls odredit će se iz uvjeta da je kinetička energija u trenutku  $t = t_{\min}$  jednaka razlici potencijalne energije između položaja za  $\varphi = 90^\circ$  i  $\varphi = \varphi_{\min}$  što se može pisati u obliku

$$m g r(1.0 - \sin \varphi_{\min}) = \frac{I_A}{2} \left( \frac{d\varphi(t_{\min})}{dt} \right)^2 \quad (4.11)$$

iz kojeg uzimajući u obzir (4.6) slijedi

$$\sqrt{1.0 - \sin \varphi_{\min}} = \sqrt{\frac{2r}{3g}} \dot{\varphi}(t_{\min}) \quad (4.12)$$

Uvrštavajući (4.10) u (4.12) za  $\varphi = \varphi_{\min}$  dobije se

$$\varphi_{\min} = \arccos \left( \frac{-g}{a_{0x}} + \frac{g}{a_{0x}} \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \right) \quad (4.13)$$

Vremenski trenutak u kojem se ostvari kut definiran prethodnim izrazom određen je integracijom izraza (4.10) što se može pisati u obliku

$$t_{\min} = \sqrt{\frac{2r}{3g}} \int_{\varphi_0}^{\varphi_{\min}} \frac{1}{\sqrt{\frac{a_{0x}}{g} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) + (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)}} d\varphi \quad (4.14)$$

odnosno

$$t_{\min} / \sqrt{\frac{2r}{3g}} = \lambda \quad (4.15)$$

gdje je

$$\lambda = \int_{\varphi_0}^{\varphi_{\min}} \frac{1}{\sqrt{\frac{a_{0x}}{g} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) + (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)}} d\varphi \quad (4.16)$$

bezdimenzionalni koeficijent. Vrijednost koeficijenta  $\lambda$  određena je numeričkim putem koristeći eksplicitnu numeričku integraciju jednadžbe gibanja (4.7) s početnim uvjetima (4.9) u vremenu.

Vremenski period  $t_0$  do  $t_{\min}$  može se podijeliti na  $n$  jednakih vremenskih intervala duljine  $\Delta t$  tako da vrijedi

$$t_i = t_0 + i \Delta t \quad i=0, \dots, n \quad (4.17)$$

Aproksimirajući kutno ubrzanje u trenutku  $t_i$  na način da diferencijalnu vezu zamijenimo diferencijskom, iz izraza

$$\ddot{\varphi}(t_i) = \frac{d\dot{\varphi}(t_i)}{dt} \approx \frac{\dot{\varphi}(t_{i+1}) - \dot{\varphi}(t_i)}{\Delta t} \quad (4.18)$$

dobije se

$$\dot{\varphi}(t_{i+1}) = \dot{\varphi}(t_i) + \ddot{\varphi}(t_i) \Delta t \quad (4.19)$$

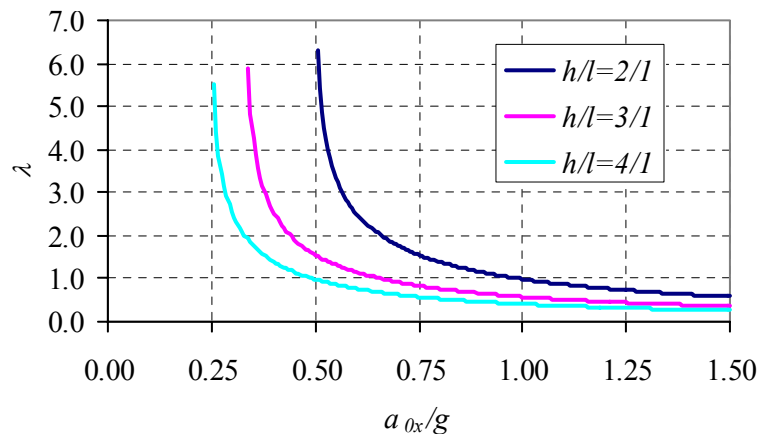
a iz

$$\dot{\varphi}(t_{i+1}) = \frac{d\varphi(t_i)}{dt} \approx \frac{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}{\Delta t} \quad (4.20)$$

slijedi

$$\varphi(t_{i+1}) = \varphi(t_i) + \dot{\varphi}(t_{i+1}) \Delta t \quad (4.21)$$

Vrijednosti koeficijenta  $\lambda$  za razne omjere  $h/l$  te razne omjere  $a_{0x}/g$  prikazani su na crtežu 4.28.



**Crtež 4.28** Vrijednosti bezdimenzionalnog koeficijenta  $\lambda$



### Impuls u obliku sinusnog poluvala

U ovom slučaju ubrzanje podloge dano je izrazom

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{gp}(t) &= a_{0x} \sin\left(\frac{\pi}{t_{\min}} t\right) \quad \text{za } 0 < t < t_{\min} \\ \ddot{x}_{gp}(t) &= 0 \quad \text{inače} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Rješenje promatranog problema svodi se na rješavanje jednadžbe (4.7) s početnim uvjetima

$$\begin{aligned} \varphi(t_0) &= \varphi_0 = \arctan\left(\frac{h}{l}\right) \\ \dot{\varphi}(t_0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

gdje je  $t_0$  vrijeme u kojem započinje rotacija bloka oko točke A. Ovo se može odrediti iz uvjeta da je moment inercijalnih sila u tom trenutku jednak momentu sila gravitacije odakle uvrštavajući izraz (4.22) u (4.3) slijedi

$$t_0 = \frac{t_{\min}}{\pi} \arcsin\left(\frac{l g}{h a_{0x}}\right) \quad (4.24)$$

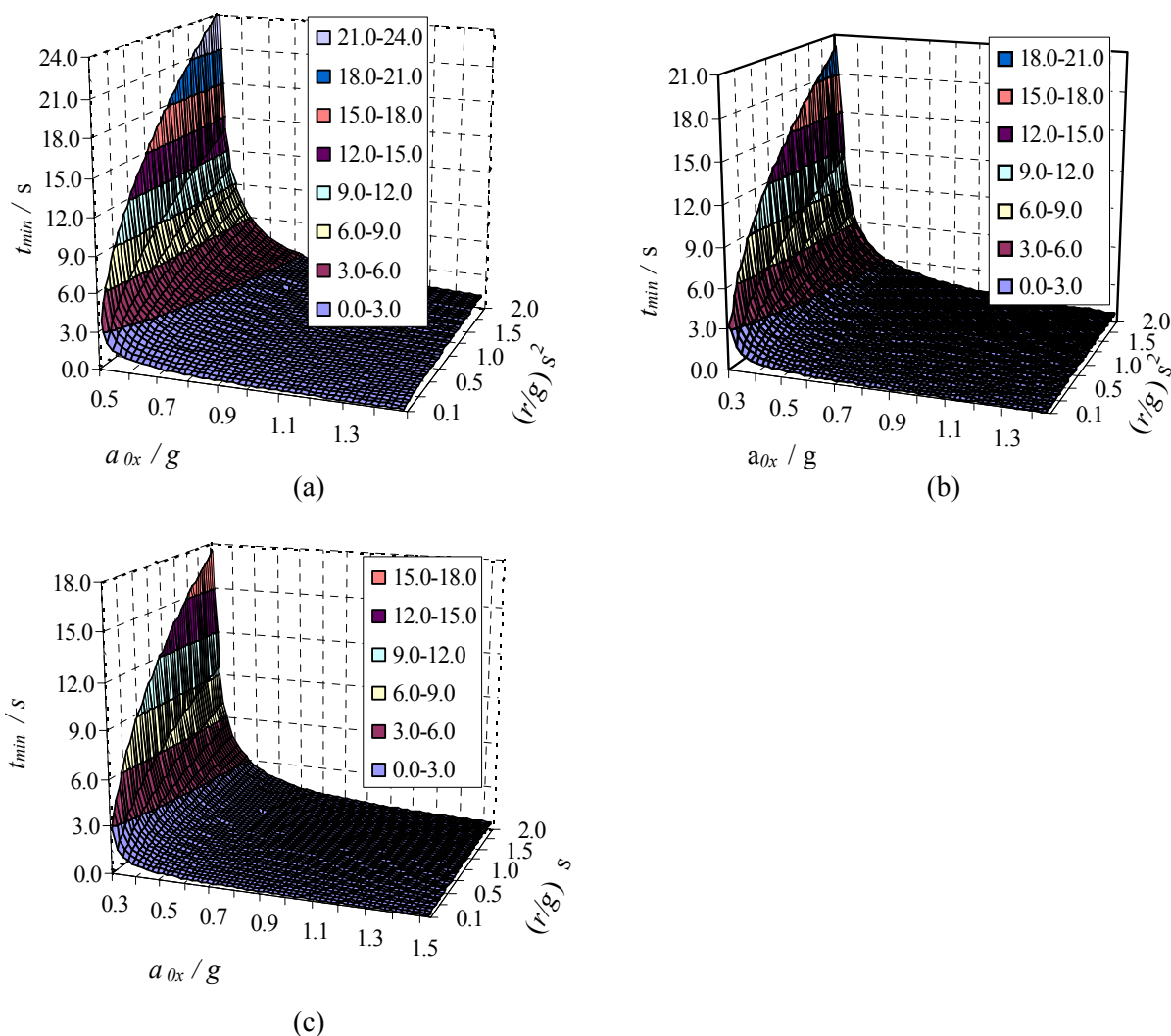
Rješavanjem jednadžbe (4.7) s početnim uvjetima (4.23) uzimajući u obzir izraz (4.22) dobije se

$$\dot{\varphi}(t_{\min}) = \frac{3g}{4r} \int_{t_0}^{t_{\min}} \left( \frac{a_0}{g} \sin\left(\frac{\pi}{t_{\min}} t\right) \sin\varphi(t) - \cos\varphi(t) \right) dt \quad (4.25)$$

Kut  $\varphi_{\min} = \varphi(t_{\min})$  do kojeg bi trebao djelovati impuls odredit će se kao u prethodnom slučaju iz uvjeta da je kinetička energija u trenutku  $t = t_{\min}$  jednaka razlici potencijalne energije između položaja za  $\varphi = 90^\circ$  i  $\varphi = \varphi_{\min}$ . Uvrštavajući izraz (4.25) u (4.12) dobije se

$$\sqrt{\frac{2r}{3g}} \sqrt{(1.0 - \sin\varphi(t_{\min}))} - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_{\min}} \left( \frac{a_0}{g} \sin\left(\frac{\pi}{t_{\min}} t\right) \sin\varphi(t) - \cos\varphi(t) \right) dt = 0 \quad (4.26)$$

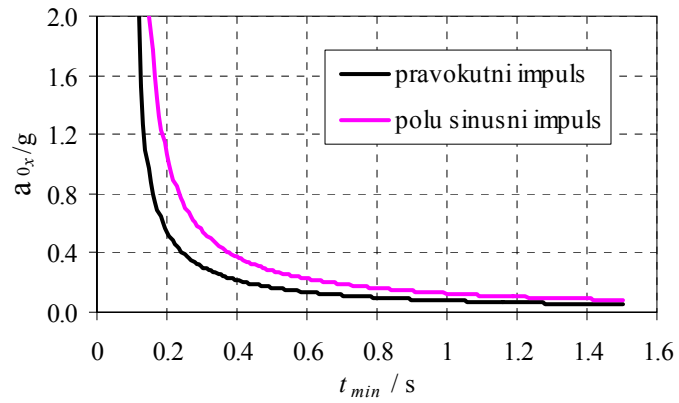
Do rješenja jednadžbe definirane izrazom (4.26) nije moguće doći analitičkim putem, stoga je rješenje određeno numerički kao što je to pokazano u prethodnom primjeru.



Crtež 4.29 Vrijednosti  $t_{\min}$  za: (a)  $h/l=2/1$ ; (b)  $h/l=3/1$ ; (c)  $h/l=4/1$

Pretpostavljajući vrijednost za  $t_{\min}$ , moguće je iterativnom metodom polovljenja doći do rješenja izraza za  $t_{\min}$ . Na crtežu 4.29 prikazane su vrijednosti za  $t_{\min}$  u ovisnosti o  $a_{0x}/g$ ,  $r/g$ ,  $h/l$ .

Ako bi se kameni stup prikazan na crtežu 4.22 aproksimirao pravokutnim stupom omjera stranica  $h/l = 6.18 \text{ m} / 0.70 \text{ m}$ , tada je vrijeme trajanja pravokutnog impulsa odnosno impulsa u obliku sinusnog poluvala potrebnog za prevrtanje stupa u ovisnosti o amplitudi impulsa prikazano na crtežu 4.30. Krivulje prikazane na crtežu 4.30 dobivene su u računalnom programu *Prevrtanje bloka* razvijenom u sklopu ovog razmatranja, čiji su ulazni podaci širina i visina stupa.



**Crtež 4.30** Vrijeme trajanja ubrzanja podloge u obliku pravokutnog impulsa i sinusnog poluvala potrebnog za prevrtanje stupa s dimenzijama  $h/l = 6.18 \text{ m} / 0.70 \text{ m}$

Iznos konstantnog horizontalnog ubrzanja podloge koje bi uzrokovalo prevrtanje stupa može se dobiti iz izraza (4.3) što bi u konkretnom slučaju iznosilo približno 0.11 g.

## **5. NOVI NUMERIČKI MODEL ČELIČNIH KLAMFI I TRNOVA**

---

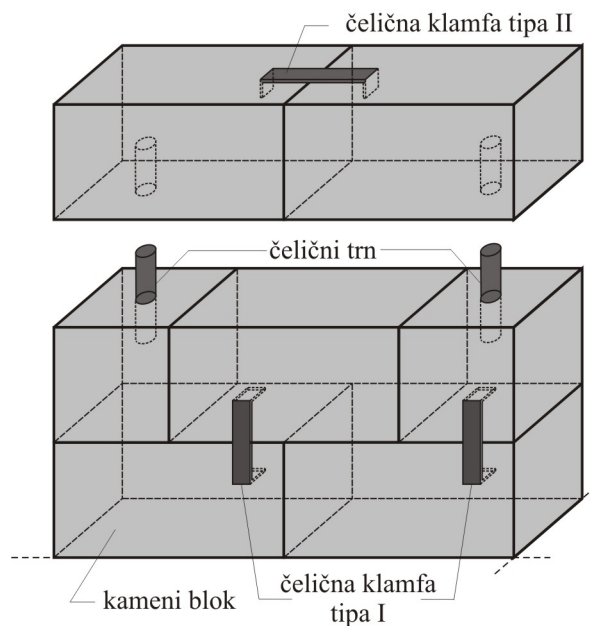
Prilikom gradnje novih ili rekonstrukcije postojećih kamenih konstrukcija kao što su lučni mostovi te konstrukcije sa stupovima u kombinaciji s naglavnim gredama, često se koriste čelične klamfe i trnovi. Uloga klamfi i trnova je povećanje seizmičke otpornosti konstrukcije na način da preuzimaju vlačne odnosno poprečne sile među susjednim blokovima uslijed tendencije njihova razdvajanja.

Nakon prikaza osnovnih tipova klamfi i trnova koji se u praksi najčešće koriste, u ovom poglavlju prezentiran je novi numerički model čeličnih klamfi i trnova implementiran u kompjuterski program Y-2D baziran na kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata.

Provjera točnosti, odnosno verifikacija numeričkog modela, provedena je na nekoliko jednostavnih primjera, a prikazana je također i primjena numeričkog modela u inkrementalnoj seizmičkoj analizi realnih kamenih konstrukcija.

## 5.1 TIPOVI KLAMFI I TRNOVA

Pri izradi mnogih vrsta kamenih konstrukcija, kao što su na primjer kameni lučni mostovi, kameni stupovi u kombinaciji s naglavnim gredama, kameni zidovi i sl., koriste se čelične klamfe i trnovi koji povećavaju seizmičku otpornost konstrukcije. Čelične klamfe i trnovi također se koriste i u svrhu povećavanja seizmičke otpornosti starih kamenih konstrukcija među kojima je i velik broj onih koji se svrstavaju u kategoriju kulturne baštine.



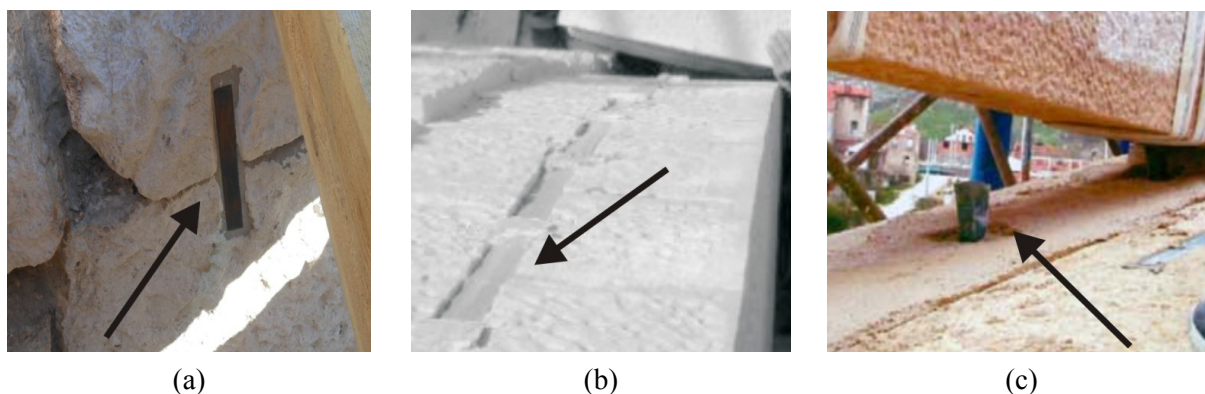
**Crtež 5.1** Shematski prikaz klamfi i trnova

U svrhu povećavanja seizmičke otpornosti postojećih kamenih konstrukcija najčešće se koriste čelične klamfe položene okomito na ravninu zida (tip I – crtež 5.1). S bočnih strana dva susjedna kamena bloka neposredno uz sljubnicu naprave se dvije rupe unutar kojih se umetne čelična klamfa. Rupe se naknadno ispune najčešće epoksi smolom ili nekim drugim materijalom da bi se osiguralo dobro prijanjanje klamfe i kamena. Na slici 5.1-a prikazan je detalj zabata konstrukcije Protirona u Splitu u kojem su dva kamena bloka povezana takvom vrstom klamfe.

Prilikom gradnje kamenih lukova često se koriste čelične klamfe u ravnini konstrukcije (tip II – crtež 5.1). Primjer takve vrste klamfi koje su se koristile za povezivanja blokova kamenog luka prilikom obnove Starog mosta u Mostaru prikazan je na slici 5.1-b. Prilikom ugradnje ovog tipa čeličnih klamfi na gornjem licu kamenih blokova naprave se dvije rupe u koje se zatim umetne metalna klamfa, a rupe se zatim ispune, kao u prethodnom slučaju, najčešće epoksi smolom.

Uloga jednog i drugog tipa klamfi je preuzimanje vlačne sile koja se može javiti uslijed tendencije razdvajanja kamenih blokova. Na ovaj način klamfe, ako su dobro razmještene, doprinose monolitizaciji kamene konstrukcije što povećava njenu otpornost na seizmičko djelovanje.

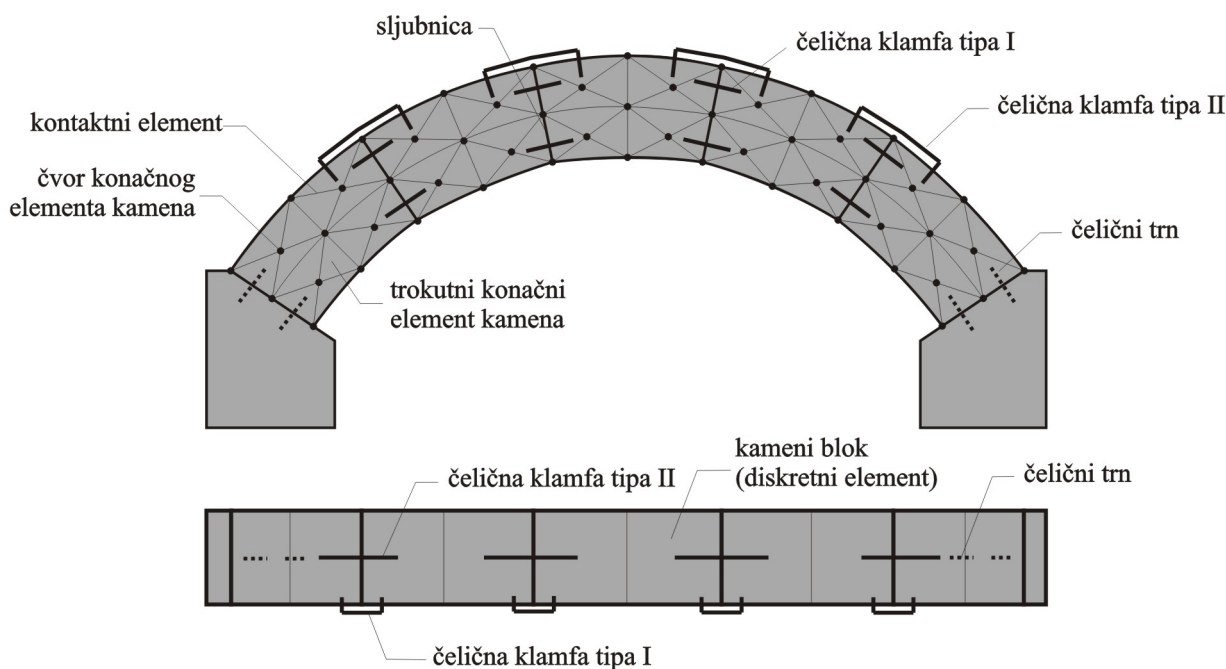
Osim čeličnih klamfi, prilikom gradnje kamenih lukova koriste se i čelični trnovi (crtež 5.1). Čelični trnovi preuzimaju poprečne sile koje se mogu javiti između dva susjedna kamena bloka uslijed tendencije relativnog klizanja po zajedničkoj sljubnici. Na slici 5.1-c prikazani su čelični trnovi ugrađeni u kamene blokove koji su se koristili za gradnju kamenog luka Starog mosta u Mostaru. Trnovi se također koriste kod povezivanja kapitela s kamenim stupom i naglavnom gredom.



**Slika 5.1** Čelične klamfe i trnovi: (a) klamfa okomita na ravninu konstrukcije; (b) klamfa u ravnini konstrukcije klamfa; (c) čelični trnovi ugrađeni u kamene blokove [G12]

Da bi se pomoću kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata mogli analizirati ovakvi tipovi kamenih konstrukcija u kompjuterski program Y-2D implementiran je novi numerički model čeličnih klamfi i trnova koji će u nastavku biti objašnjen.

Na crtežu 5.2 shematski je prikazana diskretizacija kamenog luka u sklopu kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata s ugrađenim čeličnim klamfama i trnovima.



Crtež 5.2 Diskretizacija kamenog luka s ugrađenim klamfama i trnovima

## 5.2. PRIKAZ NUMERIČKOG MODELA KLAMFI I TRNOVA

### 5.2.1 Klamfe tipa I

U numeričkom modelu svaka klamfa ovog tipa definirana je s koordinatama krajnjih točaka  $P_0$  i  $P_1$  u početnoj konfiguraciji (vidi crtež 5.3). Osnovna pretpostavka ovog numeričkog modela je da ne može doći do bočnog izvlačenja klamfe iz kamenog bloka. Da bi se u bilo kojem vremenskom trenutku mogla odrediti deformacija čelične klamfe potrebno je poznavati koordinate točaka  $P_0$  i  $P_1$  u trenutnoj konfiguraciji koje se mogu odrediti na temelju poznatih koordinata čvorova pripadnog konačnog elementa.

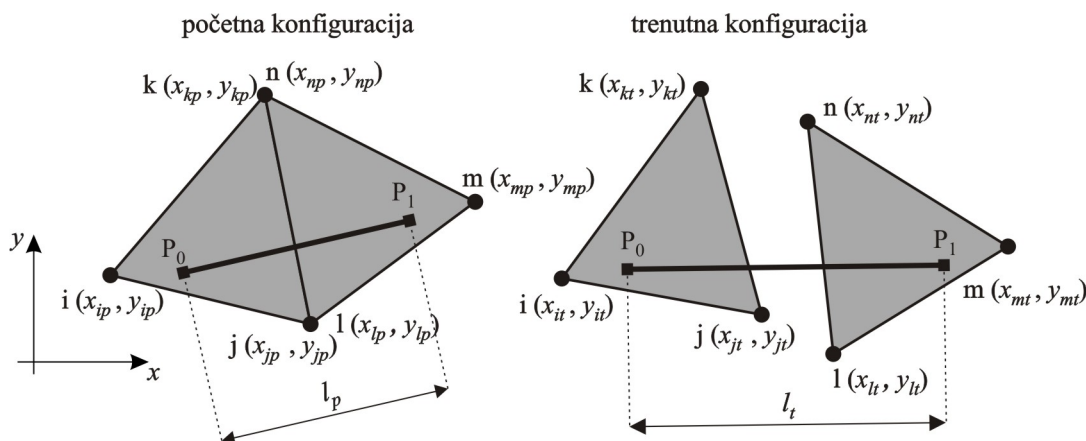
Budući da se u kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata koriste trokutni tročvorni konačni elementi, koordinate točke  $P_0$  u trenutnoj konfiguraciji  $x_{0t}$  i  $y_{0t}$  mogu se dobiti iz jednakosti

$$\begin{aligned} x_{0t} &= a_0 + a_1 x_{0p} + a_2 y_{0p} \\ y_{0t} &= b_0 + b_1 x_{0p} + b_2 y_{0p} \end{aligned} \quad (5.1)$$

gdje su  $x_{0p}$  i  $y_{0p}$  koordinate točke  $P_0$  u početnoj konfiguraciji. Nepoznati koeficijenti  $a_i$ ,  $b_i$   $i = 0, 1, 2$  mogu se dobiti iz poznatih koordinata čvorova pripadnog konačnog elementa u početnoj i trenutnoj konfiguraciji odakle se dobije šest jednadžbi iz kojih slijedi

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{x_{it}(x_{jp}y_{kp} - x_{kp}y_{jp}) + x_{ip}(x_{kt}y_{jp} - x_{jt}y_{kp}) + y_{ip}(x_{jt}x_{kp} - x_{jp}x_{kt})}{x_{ip}(y_{jp} - y_{kp}) + x_{jp}(y_{kp} - y_{ip}) + x_{kp}(y_{ip} - y_{jp})} \\
 a_1 &= \frac{x_{it}(y_{jp} - y_{kp}) + x_{jt}(y_{kp} - y_{ip}) + x_{kt}(y_{ip} - y_{jp})}{x_{ip}(y_{jp} - y_{kp}) + x_{jp}(y_{kp} - y_{ip}) + x_{kp}(y_{ip} - y_{jp})} \\
 a_2 &= -\frac{x_{it}(x_{jp} - x_{kp}) + x_{ip}(x_{kt} - x_{jt}) + x_{jt}x_{kp} - x_{jp}x_{kt}}{x_{ip}(y_{jp} - y_{kp}) + x_{jp}(y_{kp} - y_{ip}) + x_{kp}(y_{ip} - y_{jp})} \\
 b_0 &= \frac{y_{it}(x_{jp}y_{kp} - x_{kp}y_{jp}) + x_{ip}(y_{kt}y_{jp} - y_{jt}y_{kp}) + y_{ip}(y_{jt}x_{kp} - x_{jp}y_{kt})}{x_{ip}(y_{jp} - y_{kp}) + x_{jp}(y_{kp} - y_{ip}) + x_{kp}(y_{ip} - y_{jp})} \\
 b_1 &= \frac{y_{it}(y_{jp} - y_{kp}) + y_{jt}(y_{kp} - y_{ip}) + y_{kt}(y_{ip} - y_{jp})}{x_{ip}(y_{jp} - y_{kp}) + x_{jp}(y_{kp} - y_{ip}) + x_{kp}(y_{ip} - y_{jp})} \\
 b_2 &= -\frac{y_{it}(x_{jp} - x_{kp}) + x_{ip}(y_{kt} - y_{jt}) + y_{jt}x_{kp} - x_{jp}y_{kt}}{x_{ip}(y_{jp} - y_{kp}) + x_{jp}(y_{kp} - y_{ip}) + x_{kp}(y_{ip} - y_{jp})}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Uvrštavajući (5.2) u (5.1) mogu se odrediti koordinate točke  $P_0$  u trenutnoj konfiguraciji. Na analogan način mogu se odrediti i koordinate točke  $P_1$ .



Crtež 5.3 Čelična klamfa tipa I u početnoj i trenutnoj konfiguraciji

Na temelju koordinata točaka  $P_0$  i  $P_1$  u početnoj konfiguraciji može se izračunati početna duljina klamfe  $l_p$ , dok se iz koordinata tih točaka u konačnoj konfiguraciji može izračunati trenutna duljina klamfe  $l_t$ . Deformacija klamfe jednaka je



$$\varepsilon_{sc} = \frac{l_t - l_p}{l_p} \quad (5.3)$$

Iz poznate deformacije klamfe može se dobiti naprezanje u klamfi.

Osnovni model materijala koji definira vezu naprezanja i deformacije čelika prikazan je na crtežu 5.4-a. Da bi se obuhvatilo i cikličko ponašanje čelika, koristi se poboljšani Katov model naprezanje-deformacija. Model je prikazan na crtežu 5.4-b.

Veza naprezanja i deformacija čelika definirana je sljedećim izrazima

(1) rasterećenje

$$\sigma_{sc} = \sigma_y - E_s (\varepsilon_{sh} - \varepsilon_{sc}) \quad (5.4)$$

(2) negativno opterećenje (crtež 5.4-b, krivulja 2)

$$\sigma_{sc} = -f_y \left[ a - \{a(a-1)\} / \left\{ -\left(\frac{E_B}{f_y}\right) (\varepsilon_{sc} - \varepsilon_{sh} + \varepsilon_y) + a - 1 \right\} \right] \quad (5.5)$$

gdje su  $E_B = -(E_s / 6) \log_{10}(\varepsilon_{sh} - \varepsilon_y)$ ,  $a = E_s / (E_s - E_B)$ .

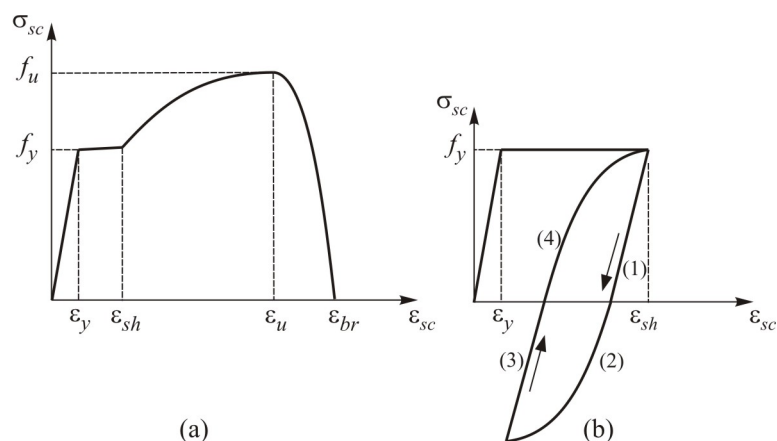
(3) ponovno opterećenje-rasterećenje (crtež 5.4-b, krivulja 3)

$$\sigma_{sc} = \sigma_{pm} + E_s (\varepsilon_{sc} - \varepsilon_{pm}) \quad (5.6)$$

gdje je  $\sigma_{pm}$  minimalna vrijednost naprezanja  $\sigma$  u povijesti opterećenja,

(4) ponovno opterećenje (crtež 5.4-b, krivulja 4)

$$\sigma_{sc} = \sigma_y + \sigma_{pm} + f_y \left[ a - \{a(a-1)\} / \left\{ -\left(\frac{E_B}{f_y}\right) (\varepsilon_y - \varepsilon_{sc} + \varepsilon_{pm}) + a - 1 \right\} \right] \quad (5.7)$$

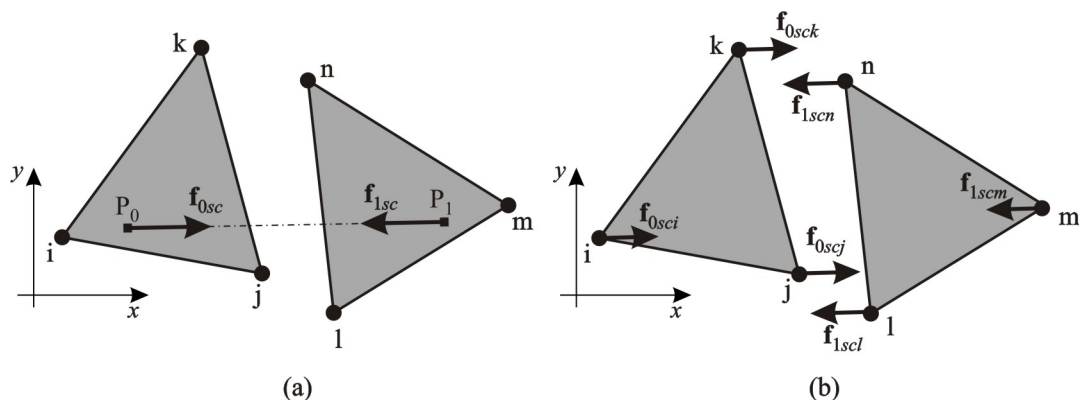


Crtež 5.4 Veza naprezanje-deformacija u čeliku za: (a) za monotono opterećenje; (b) cikličko opterećenje

Sila u čeličnoj klamfi (crtež 5.5-a) jednaka je

$$|\mathbf{f}_{0sc}| = |\mathbf{f}_{1sc}| = A_{sc} \sigma_{sc} \quad (5.8)$$

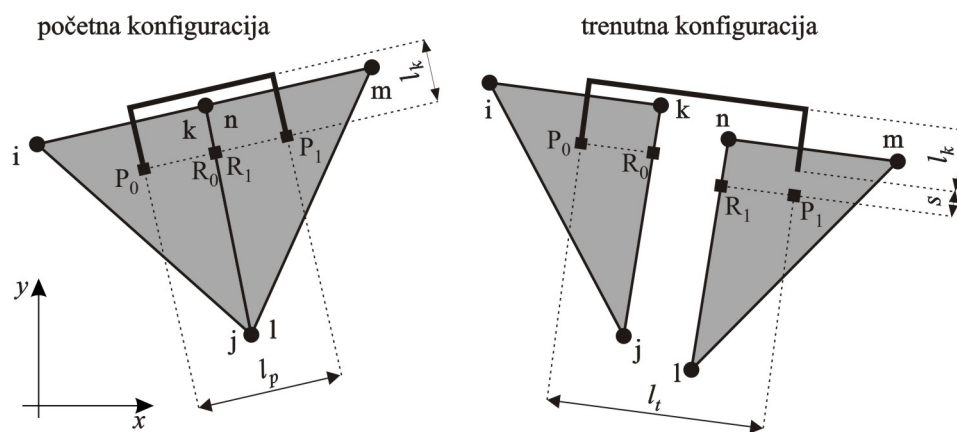
gdje je  $A_{sc}$  površina poprečnog presjeka klamfe. Sile  $\mathbf{f}_{0sc}$  i  $\mathbf{f}_{1sc}$  koje djeluju u točkama  $P_0$  i  $P_1$  se u obliku ekvivalentnih čvornih sila prenose u čvorove pripadnog konačnog elementa (crtež 5.5-b).



Crtež 5.5 Raspodjela sile iz klamfe u čvorove konačnog elementa: (a) sila u klamfi; (b) ekvivalentne čvorne sile

## 5.2.2 Klamfe tipa II

U numeričkom modelu svaka klamfa ovog tipa definirana je s koordinatama krajnjih točaka  $P_0$  i  $P_1$  u početnoj konfiguraciji te duljinom sidrenja klamfe u kamenu blok  $l_k$  (crtež 5.6). Da bi se u bilo kojem vremenskom trenutku mogla odrediti deformacija čelične klamfe potrebno je poznavati koordinate krajnjih točaka  $P_0$  i  $P_1$  te koordinate referentnih točaka  $R_0$  i  $R_1$  u trenutnoj konfiguraciji (crtež 5.6).



Crtež 5.6 Čelična klamfa tipa II u početnoj i trenutnoj konfiguraciji

Koordinate krajnjih odnosno referentnih točaka u trenutnoj konfiguraciji određene su na isti način na koji je to opisano kod klamfi tipa I. Nakon razdvajanja normalnih pomaka  $l_t$  i poprečnih pomaka  $s$ , deformacija klamfe može se napisati u obliku

$$\varepsilon_{sc} = \frac{l_t - l_p}{l_p} \quad (5.9)$$

Iz poznate deformacije može se dobiti naprezanje iz Katovog modela čelika kako je to pokazano kod klamfi okomitih na ravninu konstrukcije.

U slučaju da se u trenutnoj konfiguraciji pojavi i poprečni pomak  $s$  uzeta je u obzir redukcija naprezanja  $\sigma'_{sc}$  u obliku

$$\sigma'_{sc} = z \sigma_{sc} \quad (5.10)$$

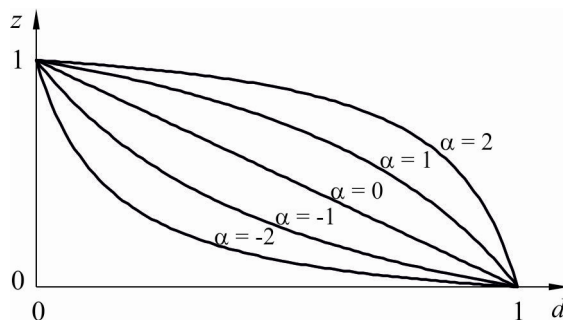
gdje je  $z$  koeficijent redukcije. Kada je poprečni pomak jednak nuli, ne javlja se nikakva redukcija što znači da je koeficijent redukcije jednak jedinici. Pri poprečnom pomaku koji je jednak duljini  $l_k$  klamfa nije u mogućnosti preuzeti naprezanje što znači da je koeficijent redukcije jednak nuli. Za područje  $0 < s < l_k$  koeficijent redukcije ovisi o većem broju parametara kao što su elastična svojstva kamena, elastična svojstva čelične klamfe, širina rupe u koju je umetnuta čelična klamfa, svojstva materijala kojim je zapunjena rupa nakon što je klamfa umetnuta, poprečni presjek klamfe i sl. U ovom numeričkom modelu za koeficijent redukcije odabrana je funkcija oblika [C4]

$$z = 1.0 - \frac{e^{-\alpha} D}{1.0 + (e^{-\alpha} - 1.0) D} \quad (5.11)$$

u kojoj se parametar  $D$  računa sukladno izrazu

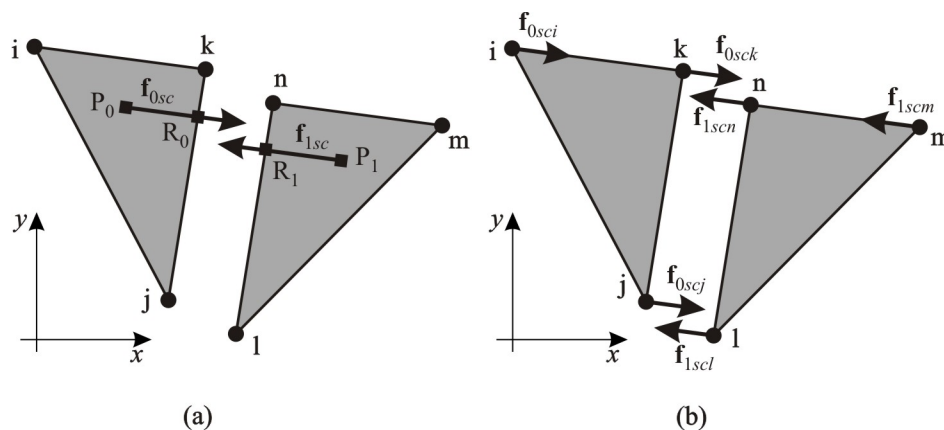
$$D = \begin{cases} 0.0 & \text{za } s = 0.0; \\ 1.0 & \text{za } s \geq l_k; \\ s / l_k & \text{inače.} \end{cases} \quad (5.12)$$

Oblik funkcije  $z$  za razne vrijednosti parametra  $\alpha$  prikazan je na crtežu 5.7.



Crtež 5.7 Koeficijent redukcije u ovisnosti o parametru  $\alpha$

U nedostatku eksperimentalnih ispitivanja za parametar  $\alpha$  odabrana je vrijednost  $\alpha = 0$ . U slučaju da postoje eksperimentalna istraživanja koeficijenta redukcije za konkretne vrste klamfi, vrijednost parametra  $\alpha$  moguće je odabrati na način da se koeficijent redukcije najbolje poklapa s vrijednostima eksperimentalnih rezultata.



Crtež 5.8 Raspodjela sile iz klamfe u čvorove konačnog elementa: (a) sila u klamfi; (b) ekvivalentne čvorne sile

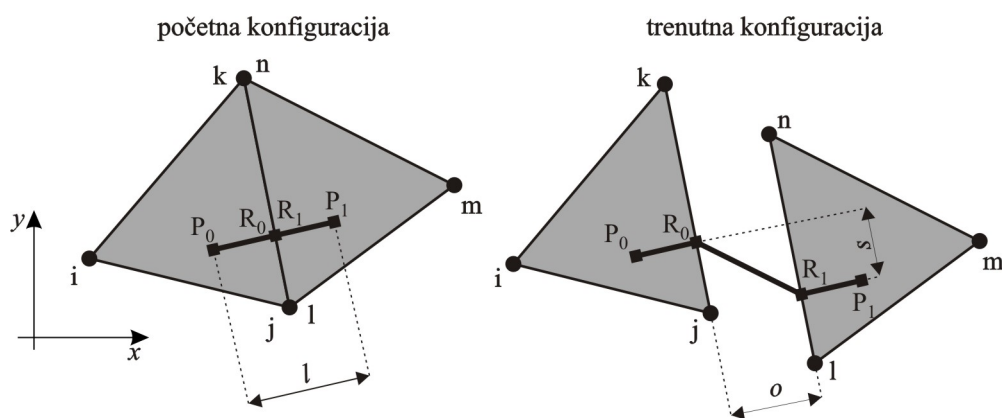
Sila u čeličnoj klamfi (crtež 5.8-a) jednaka je

$$|\mathbf{f}_{0sc}| = |\mathbf{f}_{1sc}| = A_{sc} \sigma'_{sc} \quad (5.13)$$

gdje je  $A_{sc}$  površina poprečnog presjeka klamfe. Sile  $\mathbf{f}_{0sc}$  i  $\mathbf{f}_{1sc}$  koje djeluju u točkama  $P_0$  i  $P_1$  se u obliku ekvivalentnih čvornih sila prenose u čvorove pripadnog konačnog elementa (crtež 5.8-b).

### 5.2.3 Trnovi

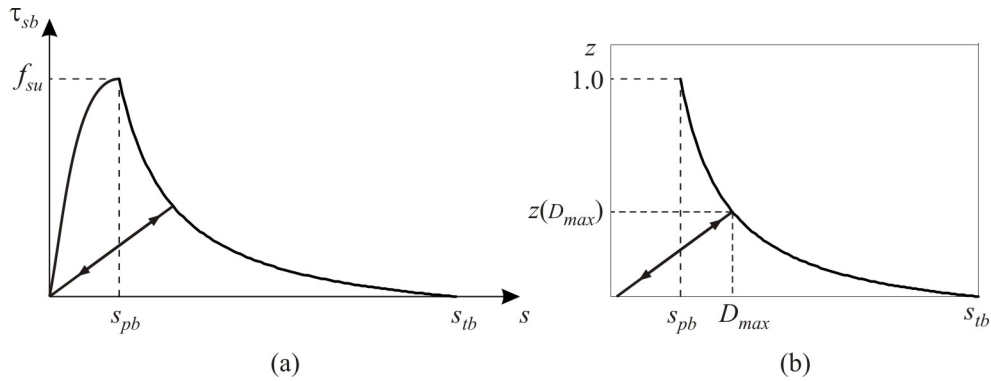
Svaki trn u numeričkom modelu definiran je s koordinatama krajnjih točaka  $P_0$  i  $P_1$  u početnoj konfiguraciji (vidi crtež 5.9). Da bi se mogla odrediti deformacija trna u bilo kojem vremenskom trenutku potrebno je poznavati koordinate krajnjih točaka  $P_0$  i  $P_1$  te koordinate referentnih točaka  $R_0$  i  $R_1$  u trenutnoj konfiguraciji (vidi crtež 5.9).



Crtež 5.9 Čelični trn u početnoj i trenutnoj konfiguraciji

Koordinate krajnjih i referentnih točaka određene su na analogan način kako je to prikazano u primjeru klamfi tipa I.

Povećavanjem poprečnog pomaka  $s$  dolazi do povećavanja posmičnih napreznja  $\tau_{sb}$  u trnu sve do postizanja posmične čvrstoće trna  $f_{su}$  (crtež 5.10-a). Poprečni pomak u tom trenutku jednak je  $s_{pb}$ . Daljnjim povećavanjem poprečnog pomaka dolazi do smanjivanja posmičnih napreznja sve dok u trenutku  $s = s_{tb}$  posmično napreznje ne postane jednako nuli. Vrijednosti  $s_{pb}$  i  $s_{tb}$  kao i oblik krivulja koje definiraju odnos između posmičnih napreznja i poprečnog pomaka ovisi o većem broju parametara kao što su elastična svojstva kamena i trna, širina rupe u koju je trn umetnut, elastična svojstva materijala kojima je rupa ispunjena, poprečni presjek trna, duljina sidrenja trna u kameni blok i potrebno ih je za svaki konkretan slučaj eksperimentalno odrediti.



**Crtež 5.10** Model materijala u čeličnom trnu: (a) veza posmičnih napreznja i poprečnog pomaka; (b) ciklično ponašanje

U ovom numeričkom modelu pretpostavljeno je da se za područje  $0 \leq |s| < s_{pb}$  posmična napreznja ponašaju prema relaciji

$$\tau_{sb} = \left( 2 \frac{s}{s_{pb}} - \left( \frac{s}{s_{pb}} \right)^2 \right) f_{su} \quad (5.14)$$

gdje je  $s_{pb}$  vrijednost koju je potrebno zadati kao ulazni podatak. Za područje  $s_{pb} \leq |s| < s_{tb}$  veza između posmičnih napreznja i poprečnog pomaka dana je u obliku

$$\tau_{sb} = z f_{su} \quad (5.15)$$

gdje je  $z$  funkcija definirana izrazom (5.11) pri čemu je parametar  $D$  jednak

$$D = \begin{cases} 0.0 & \text{za } |s| < s_{pb}; \\ 1.0 & \text{za } |s| \geq s_{tb}; \\ (|s| - s_{pb}) / (s_{tb} - s_{pb}) & \text{inače} \end{cases} \quad (5.16)$$

Kompletna relacija koja opisuje odnos  $\tau_{sb} - s$  može se prikazati u obliku

$$\tau_{sb} = \begin{cases} \left( 2 \frac{|s|}{s_{pb}} - \left( \frac{|s|}{s_{pb}} \right)^2 \right) f_{su} z & \text{za } |s| \leq s_{pb}; \\ z f_{su} & \text{za } |s| > s_{pb} \end{cases} \quad (5.17)$$

U slučaju da je trn u mogućnosti prenositi i normalna napreznja  $\sigma_{sb}$ , pretpostavljeno je da se ona ponašaju na sličan način kao posmična napreznja. Do trenutka dok se ne dosegne

maksimalno normalno naprezanje koje trn može podnijeti  $f_{tb}$ , normalna naprezanja dana su izrazom

$$\sigma_{sb} = \left( 2 \frac{o}{o_{pb}} - \left( \frac{o}{o_{pb}} \right)^2 \right) f_{tb} \quad (5.18)$$

gdje je  $o_{pb}$  vrijednost koju je potrebno zadati kao ulazni podatak. S povećanjem normalnog pomaka  $o$  naprezanja  $\sigma_b$  opadaju i u trenutku  $o = o_{tb}$  postaju jednaka nuli. Za područje  $o_{pb} \leq o < o_{tb}$  normalna naprezanja dana su izrazom

$$\sigma_{sb} = z f_{tb} \quad (5.19)$$

pri čemu je parametar  $D$  definiran kao

$$D = \begin{cases} 0.0 & \text{za } o < o_{pb}; \\ 1.0 & \text{za } o \geq o_{tb}; \\ (o - o_{pb}) / (o_{tb} - o_{pb}) & \text{inače} \end{cases} \quad (5.20)$$

Kompletna relacija koja opisuje odnos  $\sigma_{sb} - o$  dana je u obliku

$$\sigma_{sb} = \begin{cases} \left( 2 \frac{o}{o_{pb}} - \left( \frac{o}{o_{pb}} \right)^2 \right) f_{tb} z & \text{za } o \leq o_{pb}; \\ z f_{tb} & \text{za } o > o_{pb} \end{cases} \quad (5.21)$$

Ako u trenutnoj konfiguraciji postoji normalni i poprečni pomak, tada se za proračun normalnih odnosno posmičnih naprezanja i dalje koriste isti izrazi kao što je to prethodno objašnjeno, s tim da se usvaja faktor oštećenja  $D$  koji je definiran kao

$$D = \begin{cases} 0.0 & \text{za } o < o_{pb} \text{ i } |s| < s_{pb}; \\ \sqrt{\left(\frac{o - o_{pb}}{o_{tb}}\right)^2 + \left(\frac{|s| - s_{pb}}{s_{tb}}\right)^2} & \text{za } o > o_{pb} \text{ i } |s| > s_{pb}; \\ \frac{o - o_{pb}}{o_{tb}} & \text{za } o > o_{pb} \text{ i } |s| \leq s_{pb}; \\ \frac{|s| - s_{pb}}{s_{tb}} & \text{za } |s| > s_{pb} \text{ i } o \leq o_{pb}; \\ 1.0 & \text{za } |s| \geq s_{tb} \text{ i } o \geq o_{tb} \end{cases} \quad (5.22)$$

Cikličko ponašanje trna (crtež 5.10-b) nakon prekoračenja posmične čvrstoće uzeto je u obzir na način da se pamti maksimalno oštećenje trna  $D_{max}$  definirano izrazom (5.16). Ako je oštećenje  $D$  manje od maksimalnog oštećenja  $D_{max}$  koje se pojavilo u trnu, tada je funkcija ponašanja materijala  $z$  definirana izrazom

$$z = z(D_{max}) \frac{D(s_{tb} - s_{pb}) + s_{pb}}{D_{max}(s_{tb} - s_{pb}) + s_{pb}} \quad (5.23)$$

Iz poznatog posmičnog naprežanja  $\tau_{sb}$  posmična sila u trnu određena je prema izrazu

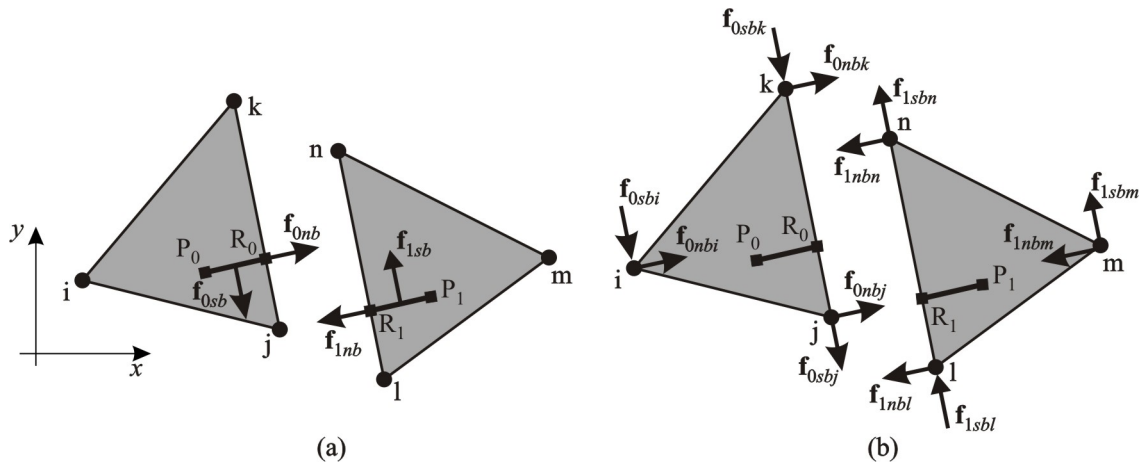
$$|\mathbf{f}_{0sb}| = |\mathbf{f}_{1sb}| = A_{sb} \tau_{sb} \quad (5.24)$$

gdje je  $A_{sb}$  površina poprečnog presjeka trna. Na sličan način određena je normalna sila u trnu prema izrazu

$$|\mathbf{f}_{0nb}| = |\mathbf{f}_{1nb}| = A_{sb} \sigma_{sb} \quad (5.25)$$

Sile  $\mathbf{f}_{0sb}$ ,  $\mathbf{f}_{1sb}$ ,  $\mathbf{f}_{0nb}$  i  $\mathbf{f}_{1nb}$ , za koje je pretpostavljeno da djeluju na polovini dijela trna koji je usidren u kamenu blok, u obliku ekvivalentnih čvornih sila prenose se u čvorove pripadnog konačnog elementa (vidi crtež 5.10).



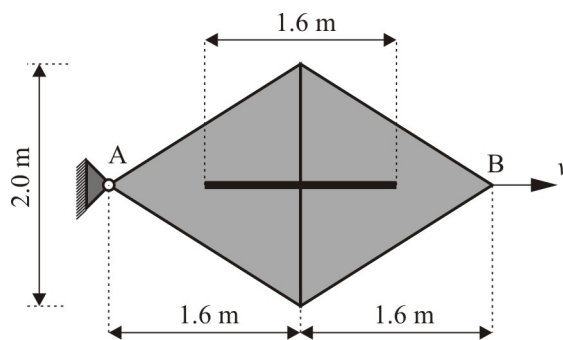


Crtež 5.10 Raspodjela sile iz trna u čvorove konačnog elementa: (a) sila u trnu; (b) ekvivalentne čvorne sile

## 5.3 VERIFIKACIJA NUMERIČKOG MODELA

### 5.3.1 Verifikacija modela klamfi tipa I za monotono rastuće opterećenje

U nastavku je izvršena verifikacija ugrađenog modela klamfi tipa I za slučaj monotono rastućeg opterećenja. Za primjer su odabrana dva trokutna apsolutno kruta elementa koja su međusobno povezana jednom čeličnom klamfom kao što je prikazano na crtežu 5.11.



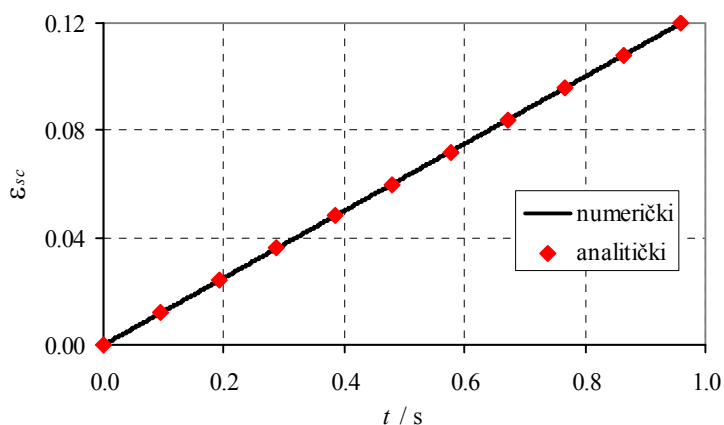
Crtež 5.11 Geometrija i opterećenje elementa

Kao opterećenje uzeta je konstantna brzina u točki B u iznosu od  $v = 0.2 \text{ m/s}$ . Materijalne karakteristike čelika korištene u analizi prikazane su u tablici 5.1.

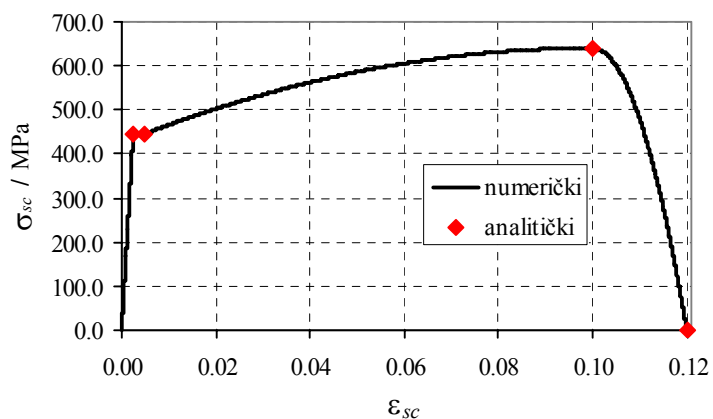
**Tablica 5.1** Karakteristike čelika kao ulazni parametri

Čelik	
Modul elastičnosti, $E_s$ (MPa)	183 000
Granica popuštanja, $f_y$ (MPa)	446
Granična čvrstoća, $f_u$ (MPa)	640
Promjer šipke, $D$ (m)	0.05
Deformacija na kraju tečenja, $\varepsilon_{sh}$	0.005
Granična deformacija, $\varepsilon_u$	0.1
Deformacija u trenutku loma, $\varepsilon_{br}$	0.12

Na crtežu 5.12 prikazane su deformacije u čeličnoj klamfi tijekom vremena dobivene analitički i numerički FEM/DEM metodom.

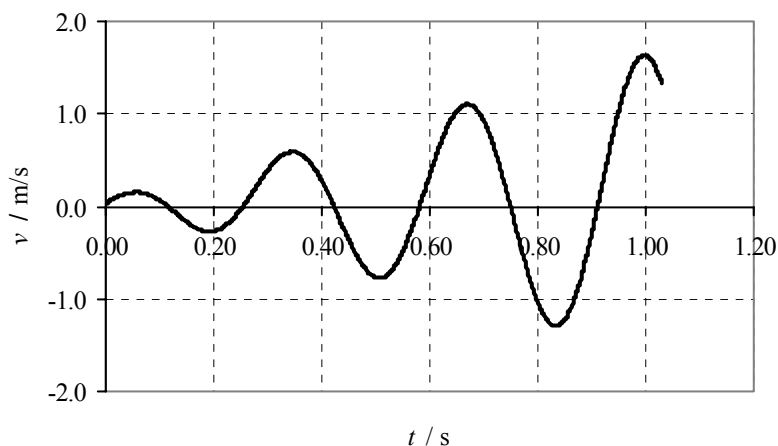
**Crtež 5.12** Veza napreznja i deformacija u čeličnoj klamfi

Na crtežu 5.13 prikazana su napreznja u čeličnoj klamfi u ovisnosti o deformacijama. Može se uočiti da se vrijednosti napreznja i deformacija dobivene numerički točno podudaraju s ulaznim vrijednostima kojima je definiran oblik krivulje napreznja i deformacija.

**Crtež 5.13** Veza napreznja i deformacija u čeličnoj klamfi

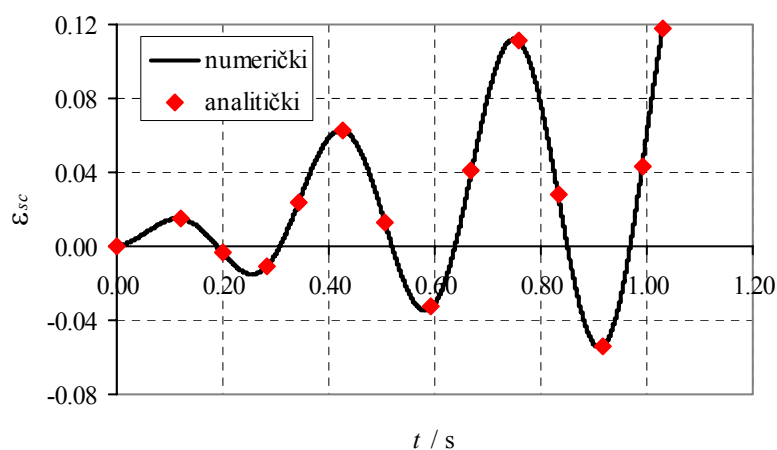
### 5.3.2 Verifikacija modela klamfi tipa I za cikličko opterećenje

U nastavku je izvršena verifikacija ugrađenog modela klamfi tipa I uslijed cikličkog opterećenja. Za primjer su odabrana dva trokutna elementa geometrijskih karakteristika prikazanih na crtežu 5.11. Usvojene materijalne karakteristike prikazane su u tablici 5.1. Cikličko opterećenje je ostvareno djelovanjem brzine u točki B čija je funkcija u ovisnosti o vremenu prikazana na crtežu 5.14.



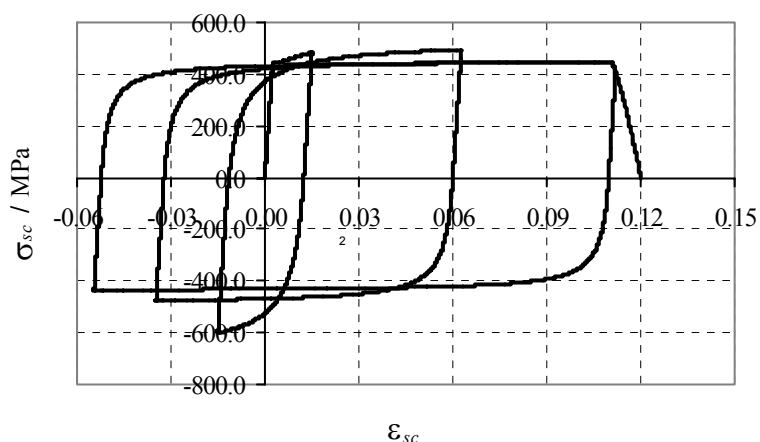
Crtež 5.14 Funkcija djelovanja brzine u vremenu

Deformacija čelične klamfe dobivena numerički i analitički za ovakvu vrstu opterećenja prikazana je na crtežu 5.15 gdje se može uočiti točno podudaranje rezultata.



Crtež 5.15 Deformacija čelične klamfe u ovisnosti o vremenu

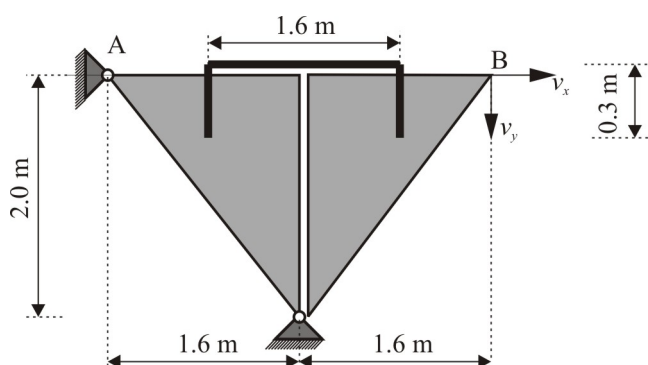
Na crtežu 5.16 prikazana je veza naprezanja i deformacija u klamfi gdje se može uočiti ponašanje materijala po usvojenom Katovom modelu cikličkog ponašanja čelika.



Crtež 5.16 Veza naprezanja i deformacija u klamfi za slučaj cikličkog opterećenja

### 5.3.3 Verifikacija modela klamfi tipa II za monotono rastuće opterećenje

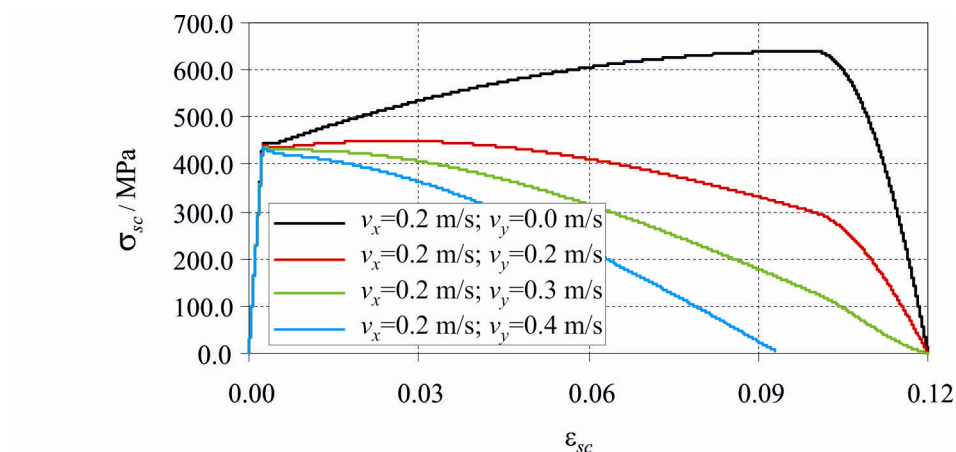
U nastavku je izvršena verifikacija utjecaja poprečnog pomaka na redukciju naprezanja u klamfama tipa II za slučaj monotono rastućeg opterećenja. Za primjer su odabrana dva trokutna apsolutno kruta elementa koja su međusobno povezana jednom čeličnom klamfom kao što je prikazano na crtežu 5.17. Usvojene materijalne karakteristike prikazane su u tablici 5.1.



Crtež 5.17 Geometrija i opterećenje elementa

Analiza je izvršena za četiri slučaja opterećenja. Opterećenje je ostvareno djelovanjem brzine  $v_x$  i  $v_y$  u točki B kao što je prikazano na crtežu 5.17. Brzina  $v_x$  u sva četiri slučaja usvojena je u iznosu od 0.2 m/s, dok je iznos brzine  $v_y$  mijenjan u iznosima od 0.0 m/s, 0.2 m/s, 0.3 m/s i 0.4 m/s.

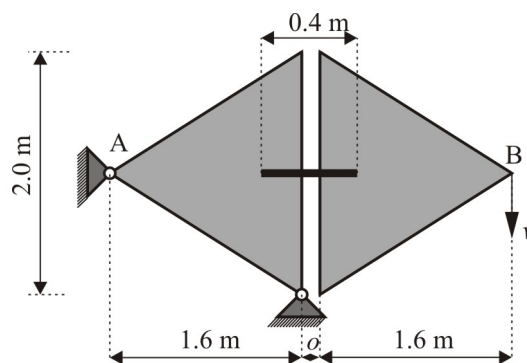
Na crtežu 5.18 prikazana je veza naprezanja i deformacija u klamfi za sve slučajeve opterećenja gdje se može uočiti da uslijed većeg posmičnog pomaka dolazi do veće redukcije naprezanja u klamfi.



Crtež 5.18 Veza napreznja i deformacija klamfi za različite slučajeve opterećenja

### 5.3.4 Verifikacija modela trnova za monotono rastuće opterećenje

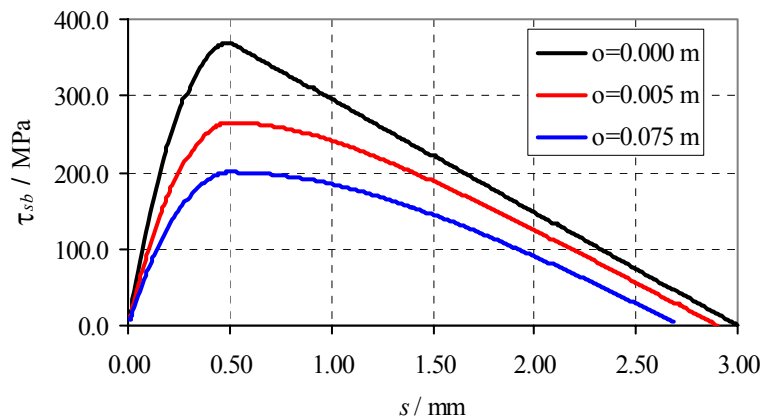
U nastavku je izvršena verifikacija ugrađenog modela trnova za slučaj monotono rastućeg opterećenja. Za primjer su odabrana dva trokutna apsolutno kruta elementa koja su međusobno povezana jednim čeličnim trnom kao što je prikazano na crtežu 5.19. Posmično opterećenje ostvareno je djelovanjem brzine u točki B koja je usvojena u iznosu od  $v = 0.2 \text{ m/s}$ . Usvojene materijalne karakteristike prikazane su u tablici 5.1.



Crtež 5.19 Geometrija i opterećenje elementa

Analiza je provedena sa ciljem verifikacije utjecaja početnog normalnog pomaka  $o$  na redukciju posmičnog napreznja u trnu. U tu svrhu početni normalni pomak mijenjan je u iznosu od  $0.0 \text{ m}$ ,  $0.05 \text{ m}$  i  $0.075 \text{ m}$ . Parametri  $o_{pb}$ ,  $o_{tb}$ ,  $s_{pb}$  i  $s_{tb}$  koji definiraju vezu između posmičnih napreznja i posmičnih pomaka usvojeni su redom u iznosu od  $0.01 D$ ,  $0.2 \text{ m}$ ,  $0.01 D$ ,  $0.05 D$  gdje je  $D$  promjer trna.

Na crtežu 5.20. prikazana je veza posmičnih naprezanja i posmičnih pomaka u čeličnom trnu gdje se može uočiti da je s povećanjem početnog normalnog pomaka ostvarena veća redukcija posmičnog naprezanja.

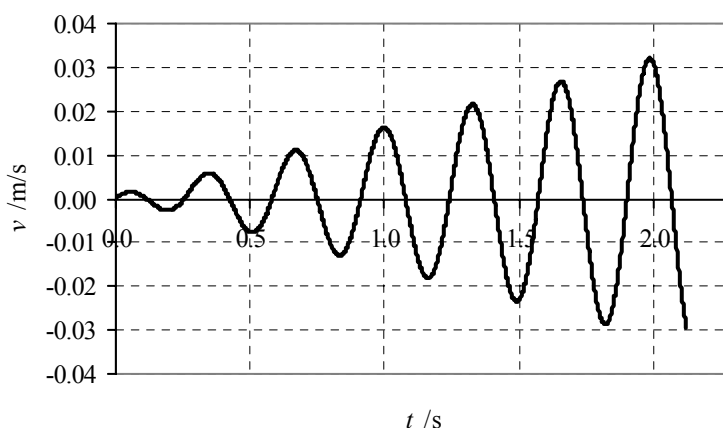


Crtež 5.20 Veza posmičnih naprezanja i posmičnih pomaka u trnu za različite vrijednosti  $o$

### 5.3.5 Verifikacija modela trnova za cikličko opterećenje

U nastavku je izvršena verifikacija ugrađenog modela trnova za slučaj cikličkog opterećenja. Za primjer su odabrana dva trokutna elementa geometrijskih karakteristika prikazanih na crtežu 5.19. Usvojene materijalne karakteristike prikazane su u tablici 5.1.

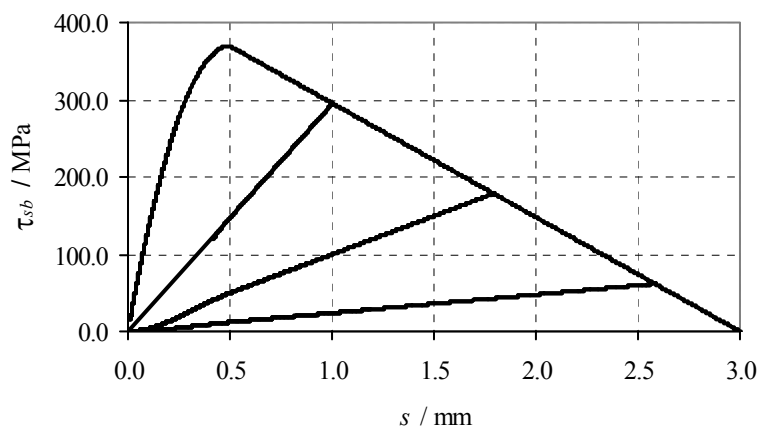
Cikličko opterećenje je ostvareno djelovanjem brzine u točki B čija je funkcija u ovisnosti o vremenu prikazana na crtežu 5.21.



Crtež 5.21 Funkcija djelovanja brzine u vremenu

U ovoj analizi parametri  $\sigma_{pb}$ ,  $\sigma_{tb}$ ,  $s_{pb}$  i  $s_{tb}$  koji definiraju vezu između posmičnih naprezanja i posmičnih pomaka usvojeni su redom u iznosu od  $0.01 D$ ,  $0.2 m$ ,  $0.01 D$ ,  $0.05 D$  gdje je  $D$  promjer trna.

Na crtežu 5.22. prikazana je veza apsolutnih vrijednosti posmičnih naprezanja i posmičnih pomaka u čeličnom trnu ostvarena za cikličko opterećenje. Može se uočiti ponašanje materijala po usvojenom modelu cikličkog ponašanja čelika u posmiku koje je definirano izrazom (5.23).

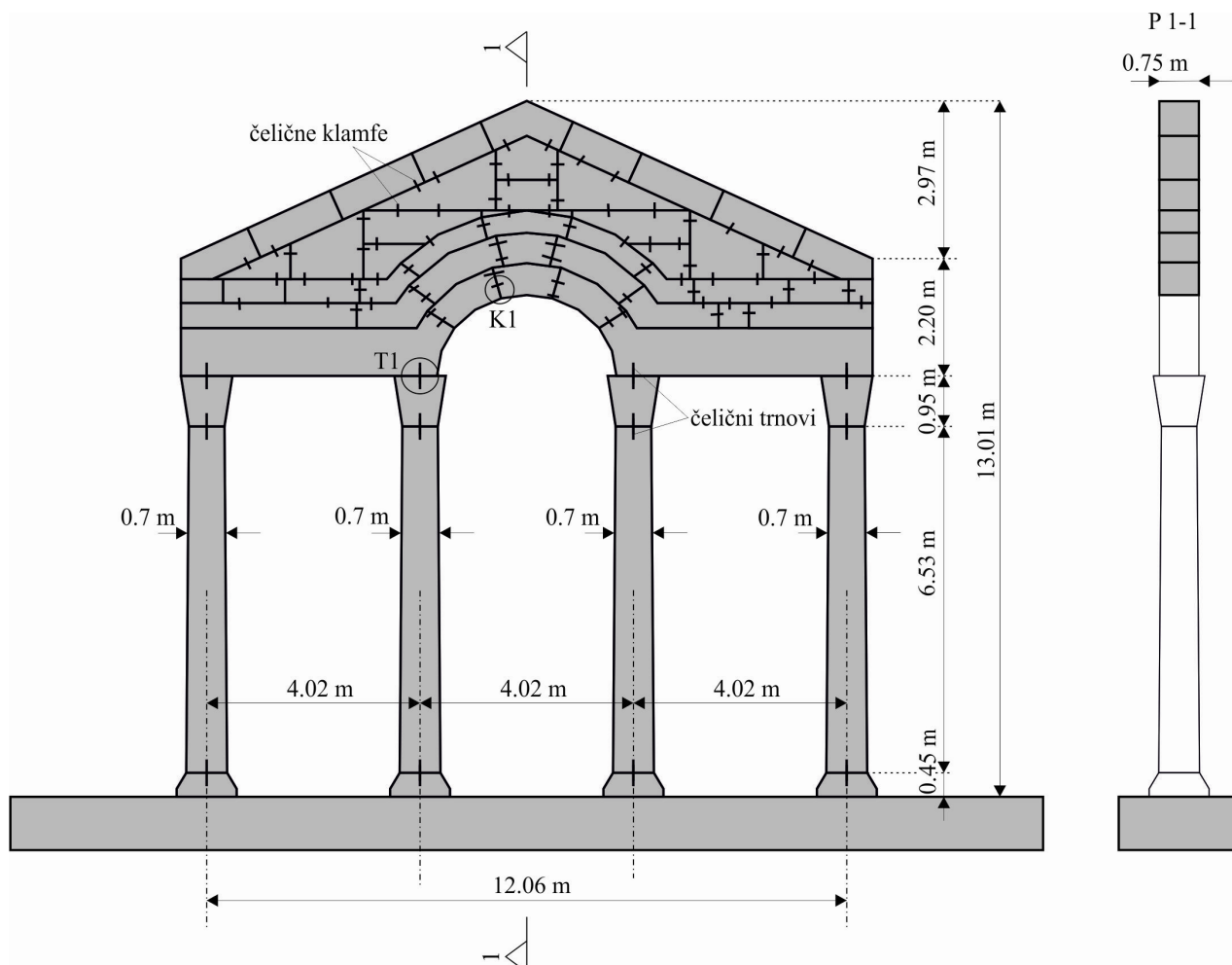


Crtež 5.22 Veza posmičnog naprezanja i posmičnih pomaka u trnu za slučaj cikličkog opterećenja

## 5.4 PRIMJENA NUMERIČKOG MODELA

### 5.4.1 Seizmička analiza konstrukcije Protirona s ugrađenim klamfama i trnovima

U sljedećem primjeru prikazana je primjena ugrađenog numeričkog modela klamfi i trnova u inkrementalnoj dinamičkoj analizi konstrukcije Protirona prikazane u poglavlju 4.3.1. Na crtežu 5.23 prikazana je geometrija konstrukcije s ugrađenim čeličnim klamfama i trnovima.



Crtež 5.23 Geometrija konstrukcije

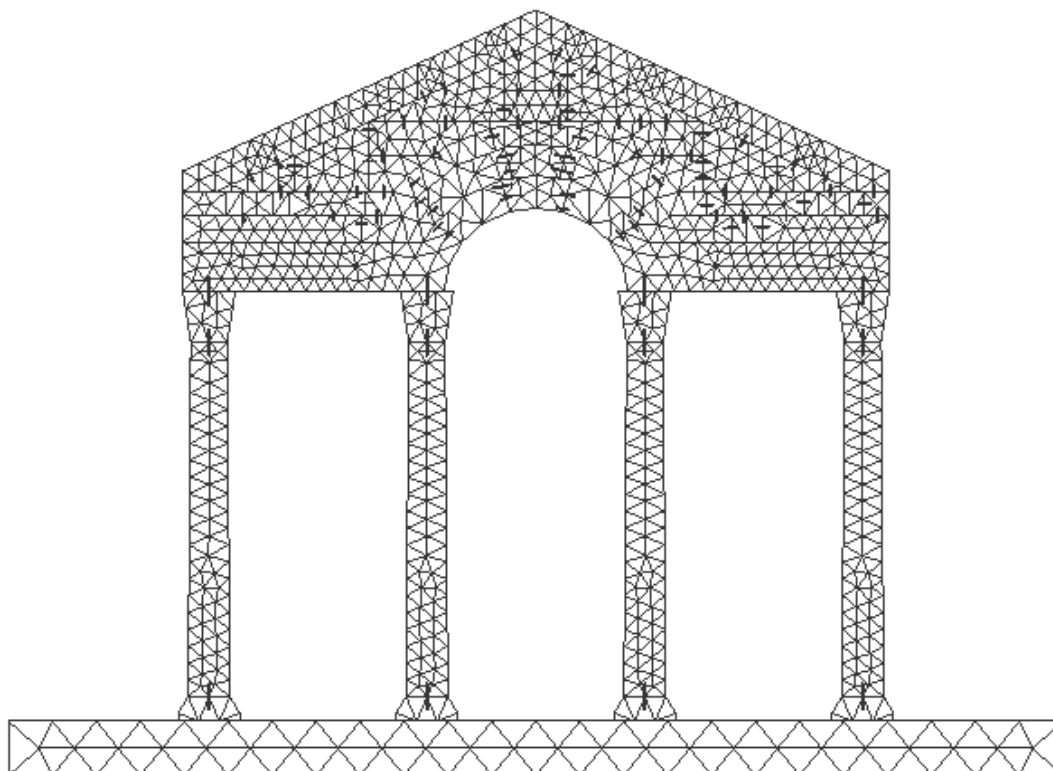
Karakteristike čeličnih klamfi i trnova prikazane su u tablici 5.2.

Tablica 5.2 Karakteristike materijala kao ulazni parametri [M7]

Uzorak	Modul elastičnosti	Vlačna čvrstoća	Posmična čvrstoća	Površina
	$E$ (MPa)	$f_{st}$ (MPa)	$f_{su}$ (MPa)	$A$ (cm <sup>2</sup> )
Trn	181000	-	239	12.57
Klamfa	65000	125	-	2.7

Diskretizacija konstrukcije Protirona s klamfama i trnovima prikazana je na crtežu 5.24.

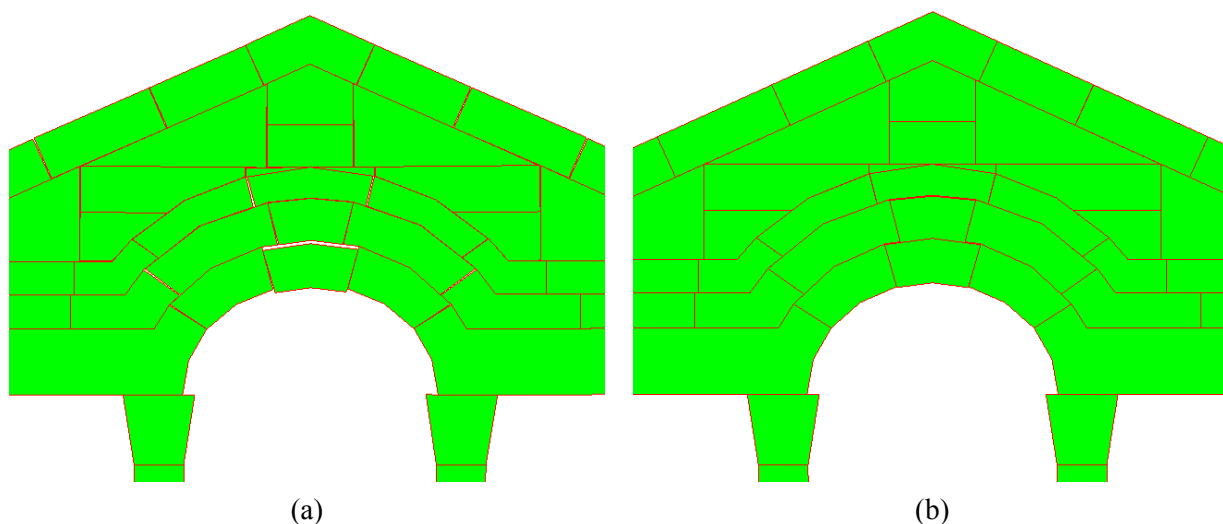




**Crtež 5.24** Diskretizacija konstrukcije Protirona s klamfama i trnovima

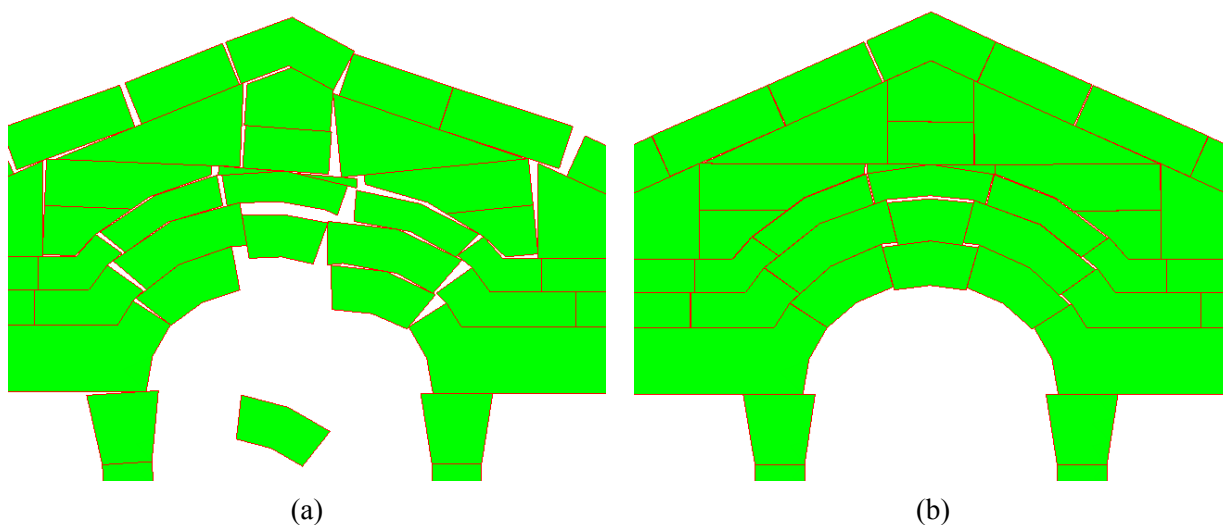
Uzimajući u obzir da je u poglavlju 4.3.1 izvršena dinamička analiza konstrukcije bez ugrađenih klamfi i trnova, u ovom je primjeru analiza provedena za dva slučaja: (a) konstrukcija s ugrađenim trnovima između kapitela i stupova te kapitela i naglavne grede, (b) konstrukcija s ugrađenim trnovima i klamfama koje su ugrađene nakon restauracije. U oba slučaja konstrukcija je izložena horizontalnom ubrzanju podloge (vidi crtež 4.20) koje je snimljeno 15.4.1979. godine u Dubrovniku kraj Pomorske škole na tlu kategorije A za vrijeme potresa čiji je epicentar bio u Crnoj Gori. Akcelelogram je prvo skaliran na vršno ubrzanje od 0.22 g koje je karakteristično za Split. Nakon toga vršno ubrzanje je postupno povećavano do sloma konstrukcije.

Dinamička analiza pokazuje da se za vršno ubrzanje od 0.22 g javljaju mali pomaci među kamenim blokovima kod slučaja konstrukcije s ugrađenim trnovima (5.25-a). Za isto vršno ubrzanje kod konstrukcije s ugrađenim klamfama i trnovima ne dolazi do relativnih pomaka među kamenim blokovima (5.25-b).



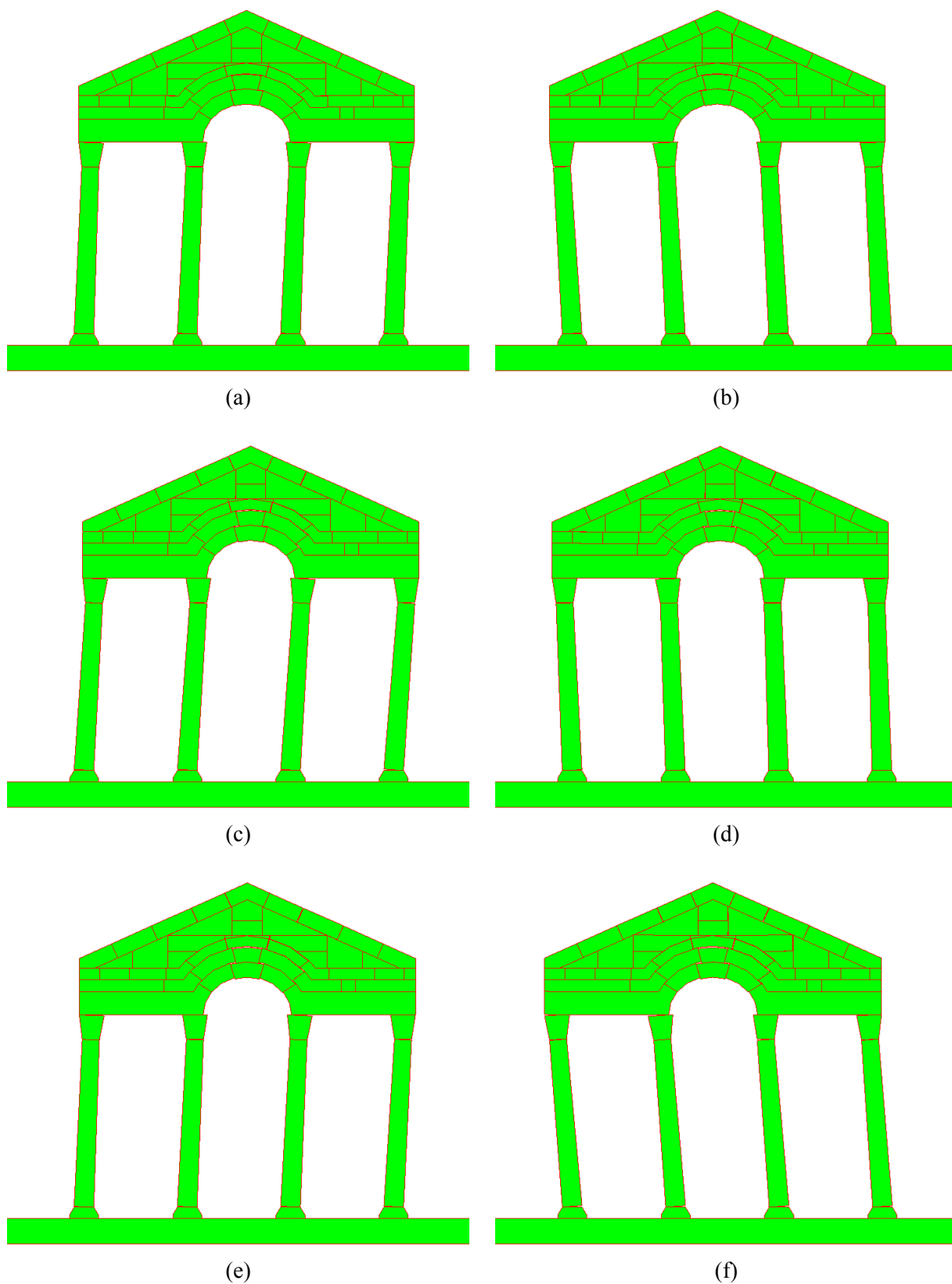
**Crtež 5.25** Središnji dio konstrukcije Protirona nakon potresa vršnog ubrzanja  $a_g=0.22$  g: (a) konstrukcija s ugrađenim trnovima; (b) konstrukcija s ugrađenim trnovima i klamfama

Pri vršnom ubrzanju od 0.60 g, pri kojem se javlja slom konstrukcije bez klamfi i trnova, kod konstrukcije s ugrađenim trnovima isto tako dolazi do sloma (crtež 5.26-a) dok se u slučaju konstrukcije s ugrađenim klamfama i trnovima javljaju vrlo mali relativni pomaci među blokovima (crtež 5.26-b).



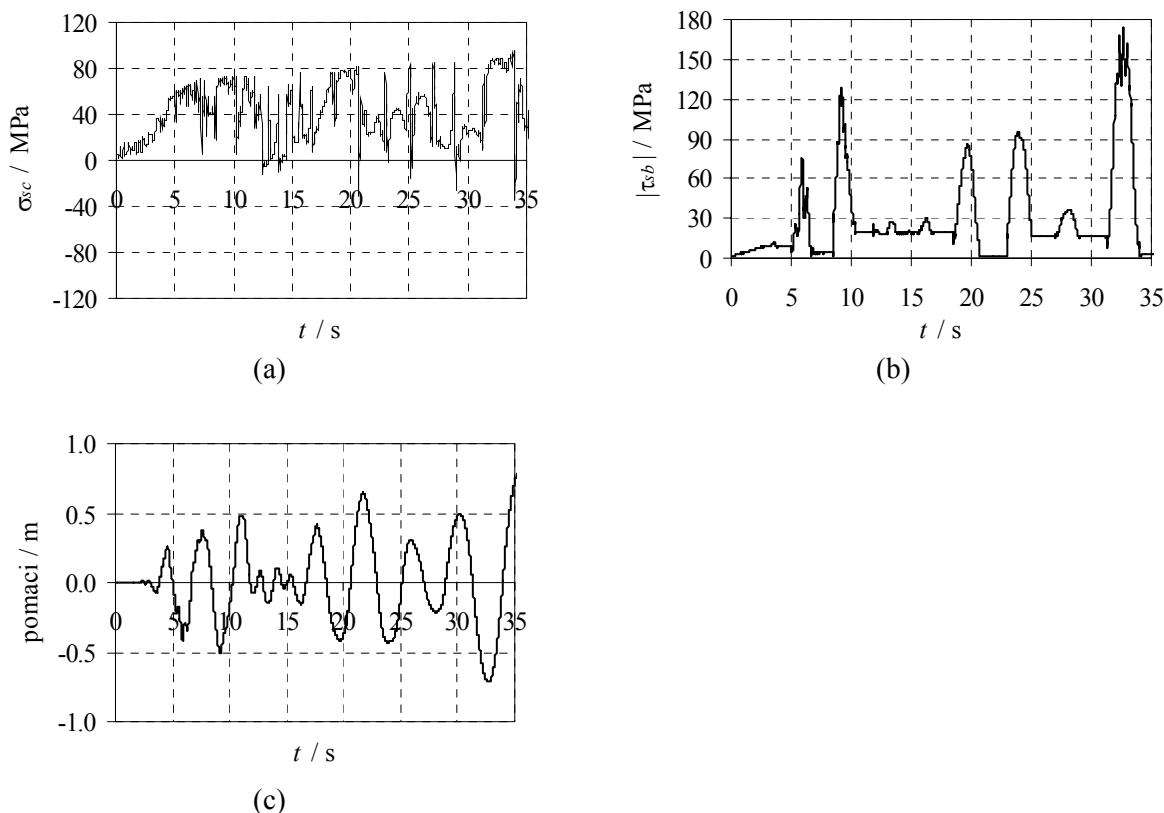
**Crtež 5.26** Središnji dio konstrukcije Protirona nakon potresa vršnog ubrzanja  $a_g=0.60$  g: (a) konstrukcija s ugrađenim trnovima; (b) konstrukcija s ugrađenim trnovima i klamfama

Ponašanje konstrukcije s ugrađenim klamfama i trnovima tijekom vremena za vršno ubrzanje  $a_g=2.0$  g prikazano je na crtežu 5.27. Sa crteža se može vidjeti da čelične klamfe ukružuju trokutni zabat koji se za vrijeme potresa ponaša kao jedno tijelo. Na crtežu 5.28 prikazana su normalna naprezanja u klamfi C1, posmična naprezanja u trnu B1 te pomak vrha konstrukcije tijekom vremena za isto vršno ubrzanje.



**Crtež 5.27** Konstrukcija Protirona s ugrađenim metalnim klamfama i trnovima pri djelovanju potresa vršnog ubrzanja  $a_g=2.00$  g u vremenskim trenucima: (a)  $t=7.9$  s; (b)  $t=9.3$  s; (c)  $t=22.0$  s; (d)  $t=24.5$  s; (e)  $t=30.5$  s; (f)  $t=32.9$  s.

Provedena analiza pokazuje da izvorna konstrukcija Protirona bez čeličnih klamfi nema veliku seizmičku otpornost budući da već pri vršnom ubrzanju  $a_g=0.22$  g dolazi do razmicanja kamenih blokova između dva centralna stupa. Iz analize se također može vidjeti da je utjecaj čeličnih klamfi na seizmičku otpornost konstrukcije velik budući da do sloma konstrukcije ne dolazi čak ni pri vršnom ubrzanju  $a_g=2.00$  g.



**Crtež 5.28** Odgovor konstrukcije Protirona u vremenu za  $a_g=2.00$  g: (a) normalno naprezanje u klamfi C1; (b) posmično naprezanje u trnu B1; (c) pomak vrha konstrukcije

Svrha provedene analize bila je pokazati mogućnost primjene prezentiranog modela čeličnih klamfi i trnova baziranog na kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata u seizmičkoj analizi starih kamenih konstrukcija. Relevantni zaključci o seizmičkoj otpornosti ove konstrukcije ne mogu se donijeti na temelju provedene analize, već je potrebno provesti analize sa barem sedam potresa snimljenih na istoj kategoriji tla [C6].

## 6. NOVI NUMERIČKI MODEL MATERIJALA ZA ZIDANE KONSTRUKCIJE

---

U ovom poglavlju prikazan je novi razvijeni numerički model materijala za analizu zidanih konstrukcija u sklopu kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata na pojednostavljenoj mikrorazini. Na samom početku poglavlja prikazane su materijalne karakteristike zidane konstrukcije i njenih sastavnih komponenti koje su bitne za razumijevanje numeričkog modela.

Nakon toga prikazan je novi numerički model materijala u konačnom elementu koji uzima u obzir ortotropno ponašanje, mogućnost sloma u tlaku, pojavu tlačnog omekšanja te glavne osobine materijala vezane za cikličko ponašanje u tlaku.

Također, prikazan je novi numerički model kontaktnog elementa mort-blok koji uzima u obzir pojavu omekšanja veze između bloka i morta u vlaku i posmiku, promjenu koeficijenta trenja u ovisnosti o posmičnoj deformaciji, promjenu energije loma u posmiku u ovisnosti o predtlačnom naprezanju te glavne osobine veze bloka i morta vezane za cikličko ponašanje u vlaku i posmiku.

Na kraju poglavlja prikazana je verifikacija i validacija razvijenog numeričkog modela te mogućnost primjene u analizi zidanih konstrukcija omeđenih armiranobetonskim serklažima gdje je novo razvijeni numerički model materijala za analizu nearmiranih zidanih konstrukcija kombiniran s prethodno razvijenim numeričkim modelom armature u okviru FEM/DEM metode.

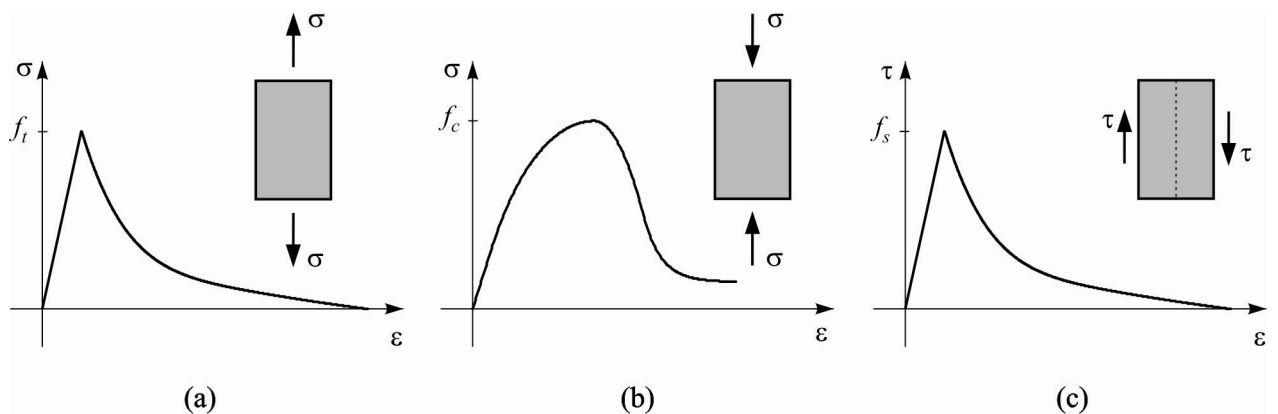
## 6.1 MEHANIČKA SVOJSTVA ZIDANIH KONSTRUKCIJA

Zidana konstrukcija je kompozitni materijal sastavljen od blokova povezanih mortom. Zbog različitih mehaničkih karakteristika morta i blokova, zidana konstrukcija pokazuje ortotropno te izrazito nelinearno ponašanje. Glavne materijalne osi zidane konstrukcije poklapaju se sa smjerovima sljubnica među blokovima što je u većini slučajeva horizontalna i vertikalna os.

Globalno ponašanje zidane konstrukcije ovisno je o mnogo faktora kao što su mehaničke karakteristike morta i blokova, geometrijske karakteristike blokova, debljine horizontalnih i vertikalnih sljubnica, postotak ispunjenosti sljubnica mortom, udio i razmještaj šupljina u blokovima, način slaganja blokova u konstrukciji, način izvedbe, itd. U ovom poglavlju prikazane su osnovne mehaničke karakteristike blokova, morta, veze blokova i morta te zidane konstrukcije kao kompozitnog materijala.

### 6.1.1 Mehaničke karakteristike blokova, morta te veze morta i bloka

Blokovi i mort, slično kao i ostali heterogeni materijali, pokazuju svojstvo omekšanja, tj. opadanja mehaničke otpornosti uslijed kontinuiranog prirasta deformacije. Takvo ponašanje posljedica je prisutnosti mikropukotina koje se uslijed kontinuiranog prirasta deformacije povezuju u jednu ili više makropukotina. Pojava omekšanja prisutna je kod tlačnog, vlačnog i posmičnog opterećenja. Tipično ponašanje blokova i morta u vlaku, tlaku i posmiku prikazano je na crtežu 6.1.



Crtež 6.1 Tipično ponašanje materijala blokova i morta u: (a) vlaku; (b) tlaku; (c) posmiku

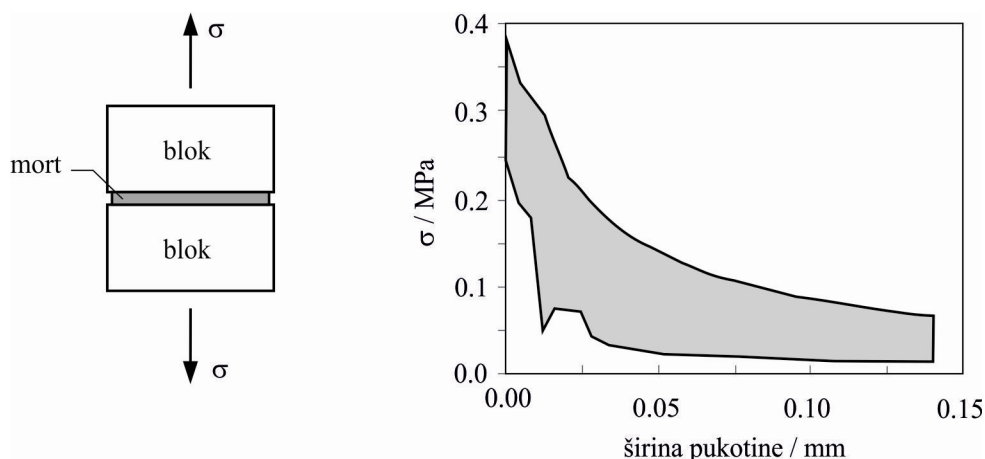
Podaci o mehaničkim karakteristikama blokova i morta u literaturi vrlo su oskudni. Mehanička svojstva morta moguće je dobiti standardnim testovima na temelju ispitivanja uzoraka,

međutim, zbog efekta upijanja vode, mehanička svojstva morta ugrađenog u zidanu konstrukciju često nisu jednaka onima dobivenim analizom ispitnih uzoraka.

Mehanička svojstva blokova također često nije moguće dobiti na temelju ispitivanja materijala od kojeg je blok napravljen. Uzrok tome je prisutnost šupljina u bloku čiji udio i razmještaj znatno utječe na mehaničke karakteristike bloka. Budući da se šupljine pružaju najčešće samo u vertikalnom ili horizontalnom smjeru, blok sam po sebi ima ortotropna svojstva. Kod blokova koji u sebi nemaju šupljine, zbog načina proizvodnje, čvrstoće i moduli elastičnosti također nisu jednaki u horizontalnom i vertikalnom smjeru.

Najslabija karika u zidanoj konstrukciji, čija svojstva u velikoj mjeri određuju ponašanje konstrukcije, je veza morta i bloka. U toj vezi mogu se pojaviti dva načina sloma. Jedan je povezan sa slomom u vlaknu (mod I) dok je drugi povezan sa slomom u posmiku (mod II). Jedno od najopsežnijih eksperimentalnih ispitivanja veze bloka i morta za oba oblika sloma proveo je Van der Pluijm [P11, P12] na glinenim i kalcijsko-silikatnim blokovima bez šupljina.

Ponašanje veze između morta i bloka u vlaknu [P11] prikazano je na crtežu 6.2. Iz rezultata eksperimenata može se vidjeti da s povećanjem širine pukotine vlačna čvrstoća između bloka i morta eksponencijalno opada. Površina ispod dijagrama naprezanje-širina pukotine predstavlja energiju loma  $G_f^I$ . Ta energija definirana je kao količina energije potrebne da se stvori pukotina jedinične površine.



Crtež 6.2 Ponašanje veze morta i bloka u vlaknu [P11]

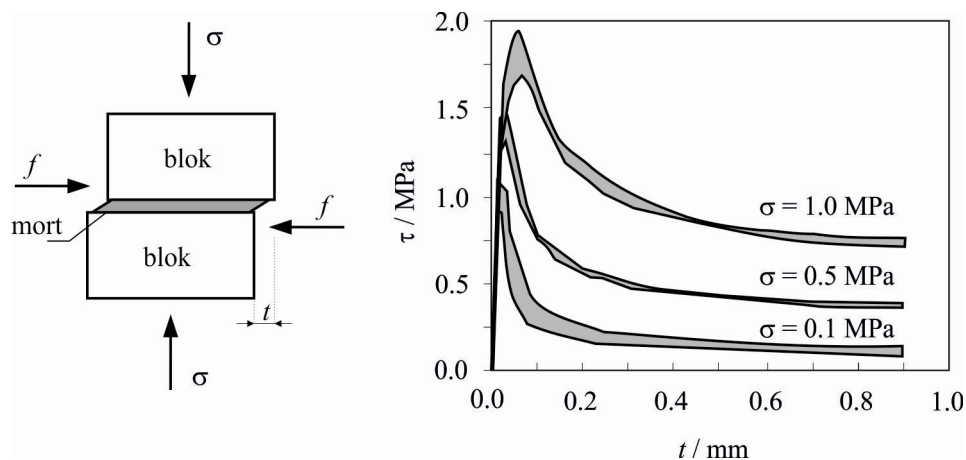
Ponašanje veze bloka i morta u posmiku za razne vrijednosti pretlačnih naprezanja  $\sigma$  dobiveno na temelju eksperimentalnih istraživanja Van der Plujima [P12] prikazano je na crtežu 6.3. Sa crteža se može vidjeti da nakon dostizanja posmične čvrstoće, posmična naprezanja  $\tau$  također eksponencijalno opadaju s povećanjem posmičnog pomaka  $t$  sve do postizanja posmičnog

naprezanja koje odgovara rezidualnom trenju između bloka i morta. Također se može vidjeti da veza između posmičnih naprezanja i posmičnih pomaka ovisi o vrijednosti predtlačnih naprezanja  $\sigma$ .

Posmična naprezanja prikazana na crtežu 6.3 rezultat su posmičnih naprezanja koja nastaju kao posljedica trenja te posmičnih naprezanja koja nastaju kao posljedica posmične čvrstoće u vezi između morta i bloka što se može pisati kao

$$\tau = \tau_m - \mu \sigma \quad (6.1)$$

gdje je  $\mu$  koeficijent trenja između bloka i morta. Iz eksperimentalnih istraživanja koje je proveo Van der Plujim [P12] moguće je odrediti početni koeficijent trenja  $\mu_0$  koji varira između 0.7 i 1.2 te rezidualni koeficijent trenja  $\mu_r$  koji djeluje nakon što dođe do sloma veze između bloka i morta a iznosi oko 0.75. Površina između posmičnih naprezanja i posmičnih pomaka umanjena za doprinos trenja predstavlja energiju loma  $G_f^H$ . Eksperimentalna istraživanja [P12] pokazuju da energija loma  $G_f^H$  raste s povećanjem predtlačnog naprezanja.



Crtež 6.3 Ponašanje veze bloka i morta u posmiku [P12]

Jedan od parametara koji opisuje vezu između dva bloka je i kut dilatacije  $\psi$  definiran kao

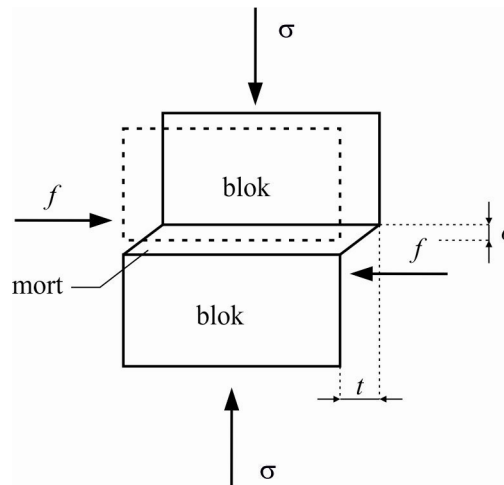
$$\tan \psi = \frac{o}{t} \quad (6.2)$$

gdje su  $o$  i  $t$  redom veličine normalnog i poprečnog pomaka između dva bloka (crtež 6.4).

Kut dilatacije ovisi o veličini predtlačnih naprezanja. Za mala predtlačna naprezanja on se kreće u vrijednostima između 0.2 i 0.7 [L11] dok se za predtlačna naprezanja veća od 1.0 MPa



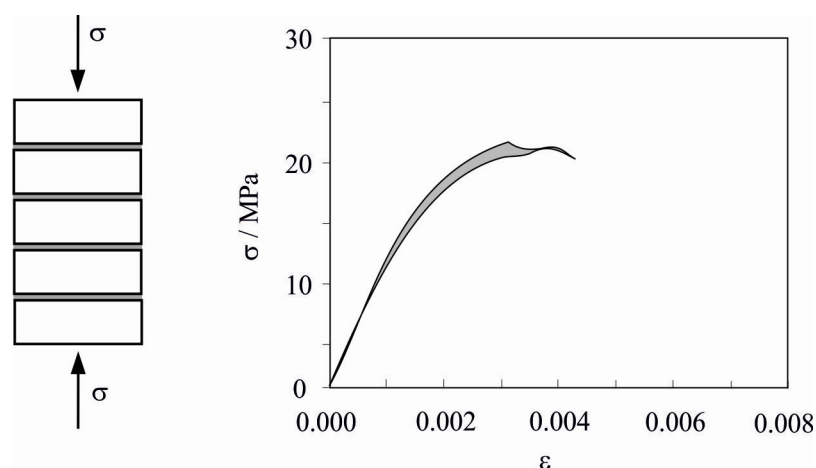
može smatrati da je kut dilatacije jednak nuli. Kut dilatacije također teži prema nuli s povećanjem poprečnog pomaka.



Crtež 6.4 Definiranje kuta dilatacije [P12]

### 6.1.2 Mehaničke karakteristike zidane konstrukcije kao kompozita

Jednoosna tlačna čvrstoća zidane konstrukcije u smjeru okomitom na horizontalne sljubnice tradicionalno se smatrala kao jedina mjerodavna mehanička karakteristika potrebna za dimenzioniranje. Ponašanje zidane konstrukcije uslijed djelovanja tlačnog naprezanja ovisi o mehaničkim karakteristikama morta i bloka. Na crtežu 6.5 prikazani su rezultati eksperimentalnih istraživanja [P13] koji prikazuju vezu između jednoosnog naprezanja i deformacije zidane prizme.



Crtež 6.5 Ponašanje zidane prizme u jednoosnom tlaku [P13]

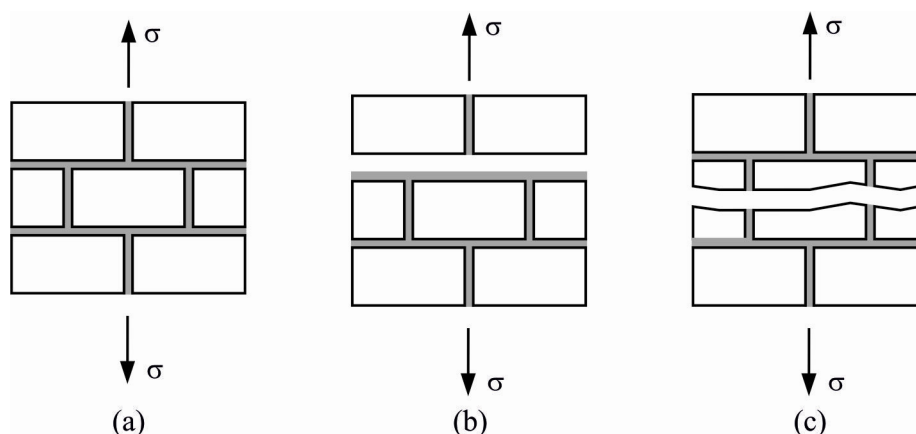
Do tlačnog sloma najčešće dolazi zbog razlike u elastičnim svojstvima bloka i morta. Jednoosno tlačno naprezanje zida dovodi do stanja troosnog tlaka u mortu, te dvoosnog

vlačnog/tlačnog stanja naprezanja u bloku. Početne vertikalne pukotine pojavljuju se najčešće u sredini bloka a zatim se nastavljaju kroz vertikalnu sljubnicu. Uslijed povećanja deformacija javljaju se dodatne pukotine što na posljetku dovodi do sloma uslijed cijepanja. Tlačna čvrstoća zidane konstrukcije prema Tomaževiću [T2] može se dobiti iz relacije

$$f_c = K f_b^{0.65} f_m^{0.25} \quad (6.3)$$

gdje je  $f_b$  tlačna čvrstoća bloka (MPa),  $f_m$  tlačna čvrstoća morta (MPa), dok je  $K$  konstanta koja ovisi o vrsti blokova. Uspoređujući tlačne čvrstoće zidane konstrukcije dobivene eksperimentom i izrazom (6.3) može se uspostaviti dobra korelacija.

Jednoosna tlačna čvrstoća u smjeru paralelnom s horizontalnim sljubnicama obično je manja zbog prisutnosti šupljina koje se pružaju u vertikalnom smjeru. Ako su šupljine nepovoljno razmještene u bloku, tlačna čvrstoća u smjeru paralelnom s horizontalnim sljubnicama može imati ključnu ulogu u kapacitetu nosivosti zida.

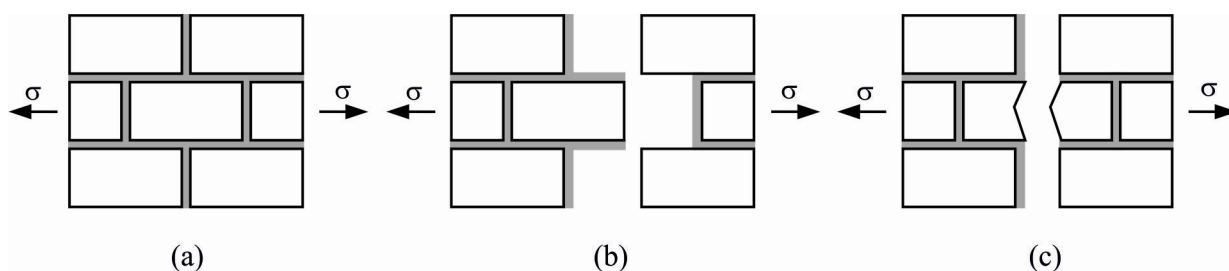


**Crtež 6.6** Vlačno naprezanje okomito na horizontalne sljubnice: (a) uzorak; (b) slom na spoju morta i bloka; (c) slom kroz blok

Slom zbog jednoosnog vlačnog naprezanja okomitog na horizontalne sljubnice (crtež 6.6-a) najčešće nastaje na mjestu veze morta i bloka (crtež 6.6-b). U slučaju korištenja morta visokih čvrstoća i blokova malih čvrstoća, slom se može pojaviti i kao rezultat prekoračenja vlačne čvrstoće bloka (crtež 6.6-c).

Jednoosno vlačno naprezanje paralelno s horizontalnim sljubnicama (crtež 6.7-a) također se može pojaviti na dva načina ovisno o relativnim čvrstoćama morta i bloka. Ako je vlačna čvrstoća bloka puno veća od posmične čvrstoće između morta i bloka pojavit će se slom preko veze morta i bloka prikazan na crtežu 6.7-b. U slučaju da je posmična čvrstoća između morta i bloka velika u

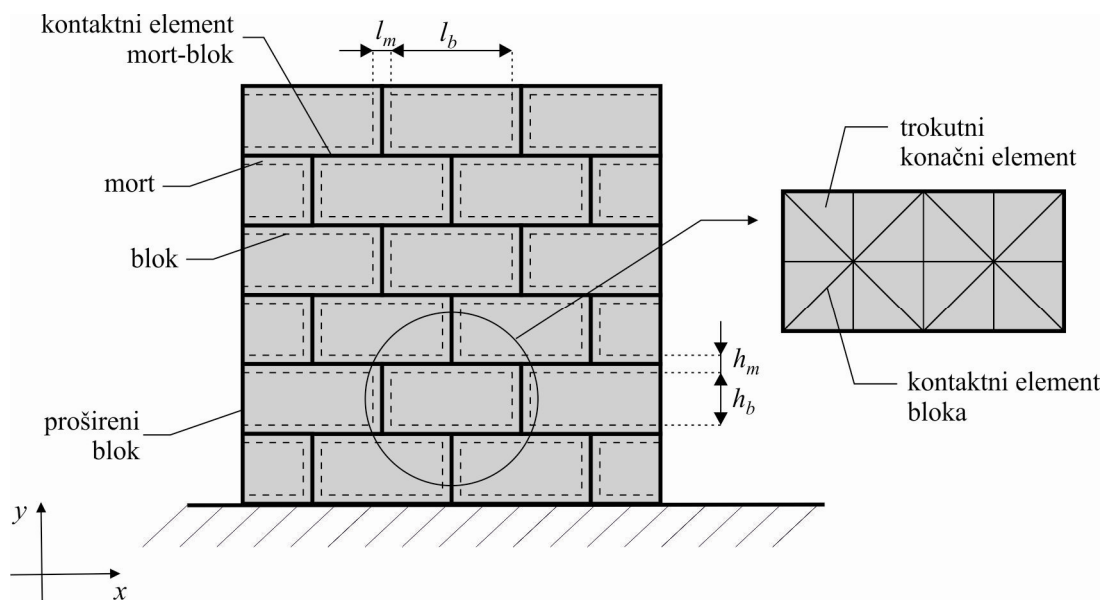
odnosnu na vlačnu čvrstoću bloka javit će se slom preko vertikalnih sljubnica i bloka kao što je prikazano na crtežu 6.7-c.



**Crtež 6.7** Vlačno naprezanje paralelno s horizontalnim sljubnicama: (a) uzorak; (b) slom na spoju morta i bloka; (c) slom kroz blok

## 6.2 DISKRETIZACIJA KONSTRUKCIJE

U ovom radu zidana konstrukcija analizirana je na pojednostavljenoj mikrorazini. Diskretizacija zidane konstrukcije prikazana je na crtežu 6.8. Dimenzije svakog bloka u numeričkom modelu proširene su do osi horizontalnih i vertikalnih sljubnica, a svaki blok diskretiziran je vlastitom mrežom konačnih i kontaktnih elemenata.



**Crtež 6.8** Diskretizacija zidane konstrukcije

U svakom konačnom elementu bloka usvojen je ortotropni konstitutivni zakon ponašanja materijala čije se glavne materijalne osi poklapaju s globalnim osima  $x$  i  $y$ . Veza između naprezanja i deformacija u konačnom elementu je linearno elastična u vlaku, dok je u tlaku uzeta u obzir mogućnost sloma kao i pojava tlačnog omekšanja nakon dostizanja tlačne čvrstoće. Budući

da se u analizi koristi prošireni blok, potrebno je koristiti ekvivalentne module elastičnosti u konačnom elementu koji za vertikalni i horizontalni smjer imaju oblike

$$E_y = \frac{(E_m E_{by})(h_b + h_m)}{E_{by} h_m + E_m h_b} \quad (6.4)$$

$$E_x = \frac{(E_m E_{bx})(l_b + l_m)}{E_{bx} l_m + E_m l_b} \quad (6.5)$$

gdje je  $E_m$  modul elastičnosti morta,  $E_{bx}$  modul elastičnosti bloka u smjeru  $x$ ,  $E_{by}$  modul elastičnosti bloka u smjeru  $y$ ,  $h_b$  visina bloka,  $h_m$  debljina horizontalne sljubnice,  $l_b$  duljina bloka,  $l_m$  širina vertikalne sljubnice.

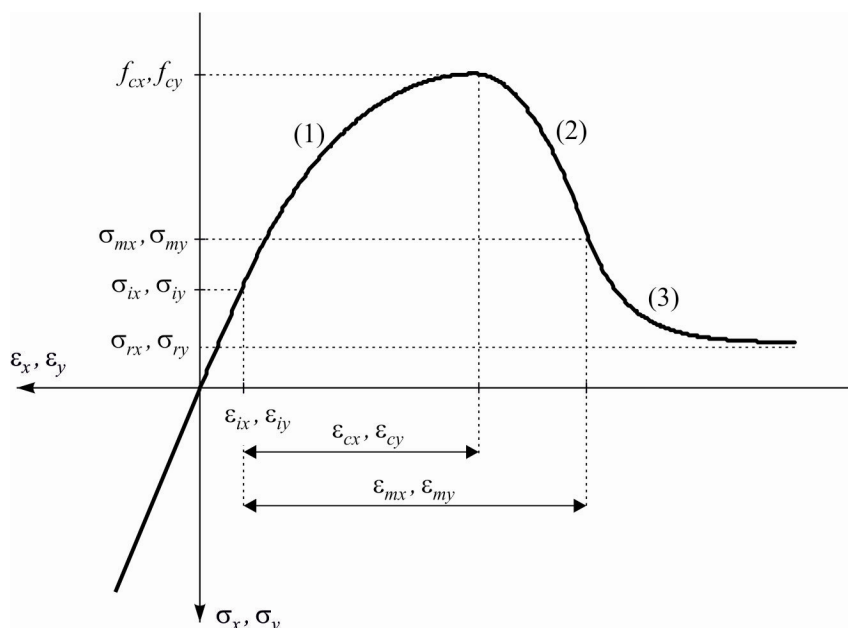
Pojava pukotina u vlaklu i posmiku unutar bloka te njegova fragmentacija ostvarena je pomoću kontaktnih elemenata koji su implementirani između mreže konačnih elemenata. Mreža konačnih elemenata korištena u numeričkoj analizi prikazana je na crtežu 6.8. Ovakvim načinom diskretizacije bloka pokriveni su najčešći načini pucanja bloka koji se javljaju u realnim zidanim konstrukcijama. Za potrebe diskretizacije konstrukcije korišten je računalni program Bmsh.

Model ponašanja kontaktnih elemenata koji su implementirani između mreže konačnih elemenata unutar bloka prikazan je u poglavlju 2.3.

Veza između bloka i morta modelirana je kontaktnim elementima mort-blok u kojima je uzeto u obzir cikličko ponašanje te početni i rezidualni koeficijent trenja. Taj novi model kontaktnog elementa kao i model materijala u konačnom elementu koji su razvijeni u sklopu ove radnje prikazani su u nastavku.

### 6.3 MODEL MATERIJALA U KONAČNOM ELEMENTU

U konačnom elementu bloka usvojen je ortotropni zakon ponašanja materijala s mogućnošću popuštanja u tlaku (crtež 6.9).



Crtež 6.9 Model materijala u konačnom elementu

U linearno elastičnom području za koje vrijedi  $\varepsilon_x > \varepsilon_{ix}$  i  $\varepsilon_y > \varepsilon_{iy}$ , veza između naprezanja i deformacija dana je izrazom

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{\nu_{xy}E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ \frac{\nu_{xy}E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & 2.0G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} + \bar{\mu} \begin{bmatrix} D[0][0] \\ D[1][1] \\ D[0][1] \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

U nelinearnom području za smjer y veza naprezanja i deformacija dana je izrazima:

(1) za  $\varepsilon_{cy} + \varepsilon_{iy} < \varepsilon_y < \varepsilon_{iy}$

$$\sigma_y = -D_y \sqrt{1.0 - \frac{(\varepsilon_y - \varepsilon_{iy} - \varepsilon_{cy})^2}{B_y^2}} + C_y + \bar{\mu} D[1][1] \quad (6.7)$$

gdje je

$$\begin{aligned}
D_y &= \frac{(\sigma_{iy} - f_{cy})(E_y^* \varepsilon_{cy} + \sigma_{iy} - f_{cy})}{E_y^* \varepsilon_{cy} + 2.0(\sigma_{iy} - f_{cy})} \\
C_y &= (f_{cy} - \sigma_{iy} + D_y) \\
B_y &= \sqrt{-\frac{D_y^2 \varepsilon_{cy}}{E_y^* C_y}} \\
E_y^* &= \frac{\sigma_{iy}}{\varepsilon_{iy}}
\end{aligned} \tag{6.8}$$

(2) za  $\varepsilon_{my} + \varepsilon_{iy} < \varepsilon_y < \varepsilon_{cy} + \varepsilon_{iy}$

$$\sigma_y = f_{cy} + (\sigma_{my} - f_{cy}) \left( \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_{iy} - \varepsilon_{cy}}{\varepsilon_{my} - \varepsilon_{cy}} \right)^2 + \bar{\mu} D[1][1] \tag{6.9}$$

(3) za  $\varepsilon_y < \varepsilon_{my} + \varepsilon_{iy}$

$$\sigma_y = \sigma_{ry} - (\sigma_{ry} - \sigma_{my}) e^{\left( m \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_{iy} - \varepsilon_{my}}{\sigma_{my} - \sigma_{ry}} \right)} + \bar{\mu} D[1][1] \tag{6.10}$$

gdje je

$$m = 2.0 \frac{\sigma_{my} - f_{cy}}{\varepsilon_{my} - \varepsilon_{cy}} \tag{6.11}$$

Na analogan način određena su naprezanja  $\sigma_x$  za smjer  $x$ .

Posmična naprezanja u nelinearnoj fazi određena su sukladno relaciji

$$\tau_{xy} = 2 G \varepsilon_{xy} \frac{\sqrt{\bar{E}_x^2 + \bar{E}_y^2}}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}} \tag{6.12}$$

gdje su

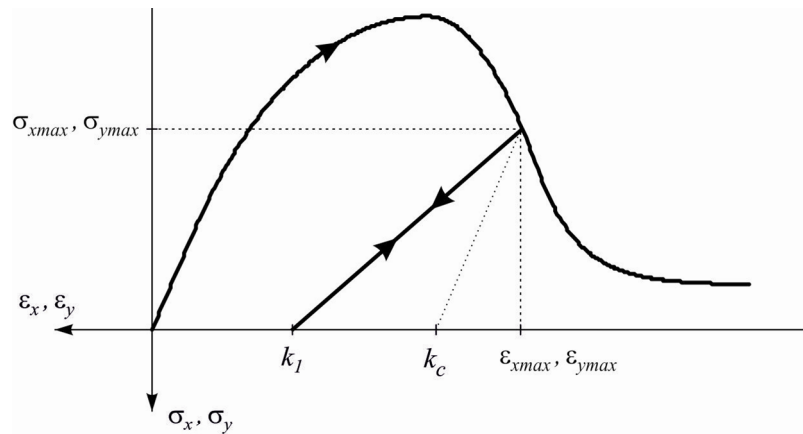
$$\bar{E}_x = \frac{\sigma_{x\max}}{\varepsilon_{x\max}} \quad \bar{E}_y = \frac{\sigma_{y\max}}{\varepsilon_{y\max}} \tag{6.13}$$

U prethodnom izrazu naprezanja  $\sigma_{x\max}$  i  $\sigma_{y\max}$  odgovaraju maksimalnim tlačnim deformacijama  $\varepsilon_{x\max}$  i  $\varepsilon_{y\max}$  u povijesti opterećenja (crtež 6.10).

Cikličko ponašanje materijala (crtež 6.10) za naprezanja  $\sigma_y$  uzeto je u obzir sukladno relaciji

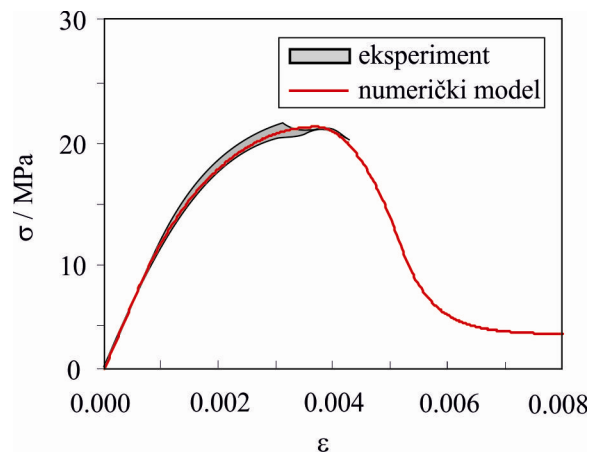
$$\sigma_y = \sigma_{y\max} \frac{\varepsilon_y - k_1}{\varepsilon_{y\max} - k_1} \quad (6.14)$$

pri čemu se vrijednost  $k_1/k_c$  može odabrati kao ulazni podatak. Početna vrijednost uzeta je u iznosu 0.935. Analogno vrijedi i za naprezanja  $\sigma_x$ .



Crtež 6.10 Cikličko ponašanje materijala u tlaku

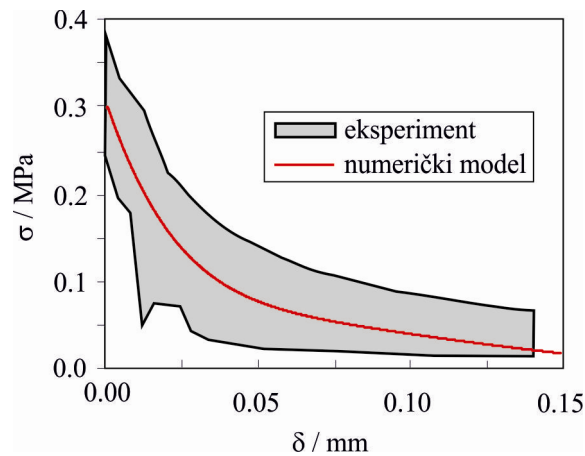
Na crtežu 6.11 prikazana je usporedba usvojenog numeričkog modela s rezultatima jednoosnih tlačnih eksperimenata na zidanim prizmama [P13].



Crtež 6.11 Usporedba numeričkog modela s rezultatima ponašanja zida u jednoosnom tlaku [P13] za  $f_{cy} = 20.8 \text{ MPa}$

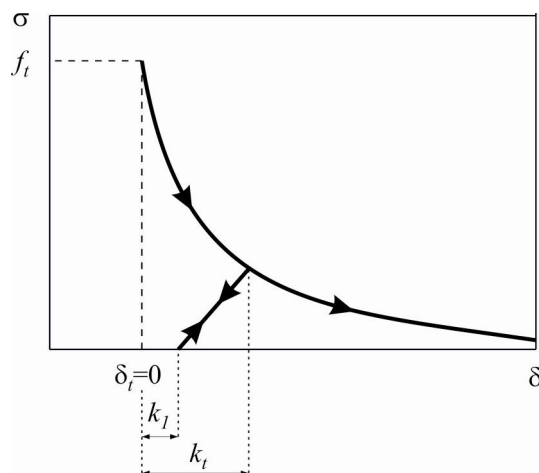
## 6.4 MODEL MATERIJALA U KONTAKTNOM ELEMENTU MORT-BLOK

U kontaktnom elementu mort-blok simulirana je veza između morta i bloka. Način ponašanja kontaktnih elemenata opisan je u drugom poglavlju. Za kontaktni element opterećen u vlak, pojava vlačnog omekšanja modelirana je eksponencijalnim zakonom koji je predložio Hordijk [H7]. Na crtežu 6.12 predloženi numerički model uspoređen je s eksperimentalnim rezultatima ponašanja veze bloka i morta u jednoosnom vlak [P11].



**Crtež 6.12** Eksperimentalni rezultati [P11] u usporedbi s numeričkim modelom ponašanja veze blok-mort u tlaku za  $f_t = 0.3$  MPa,  $G_f^I = 12.0$  N/m

Sa crteža se može uočiti da predloženi numerički model vrlo dobro opisuje rezultate eksperimenta.



**Crtež 6.13** Cikličko ponašanje u kontaktnom elementu blok-mort



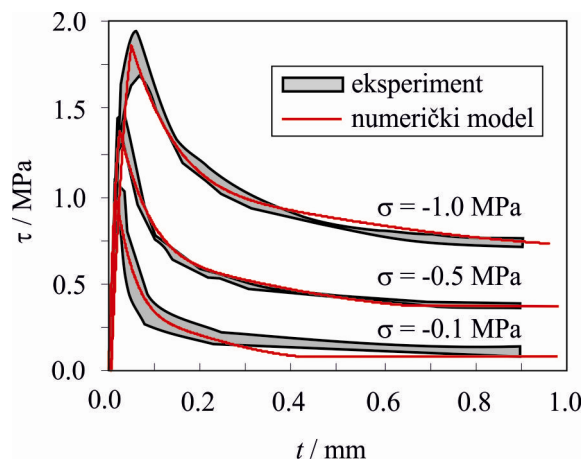
Za slučaj cikličkog ponašanja usvojen je model prikazan na crtežu 6.13 pri čemu je vrijednost  $k_1 / k_t$  uzeta u iznosu 0.73 preporučenu od Reinhardta [R4].

Kada je kontaktni element opterećen u posmiku dolazi do povećanja energije loma  $G_f^H$  uslijed povećanja normalnih naprezanja  $\sigma$ . Usporedbom numeričkih i eksperimentalnih rezultata došlo se do veze koja najbolje opisuje povećanje energije loma  $G_f^H$  uslijed povećanja normalnih naprezanja  $\sigma$ . Ta veza dana je izrazom

$$G_f^H = G_{f_0}^H - 106.31\sigma \quad (\text{N/m}) \quad (6.15)$$

gdje je  $G_{f_0}^H$  vrijednost energije loma u posmiku za slučaj da je normalno predtlačno naprezanje jednako nuli, dok je  $\sigma$  predtlačno naprezanje u MPa. Također je uzeta u obzir promjena koeficijenta trenja od početne vrijednosti  $\mu_0$  do konačne vrijednosti  $\mu_r$  koja odgovara koeficijentu trenja nakon što je došlo do sloma veze mort-blok. Radi jednostavnosti pretpostavljeno je da se smanjenje koeficijenta trenja ravna po istom eksponencijalnom zakonu koji je usvojen za vlačno omekšanje u vlaku.

Na crtežu 6.14 predloženi numerički model uspoređen je s eksperimentalnim rezultatima ponašanja veze bloka i morta u posmiku [P12] za različite vrijednosti predtlačnih naprezanja.



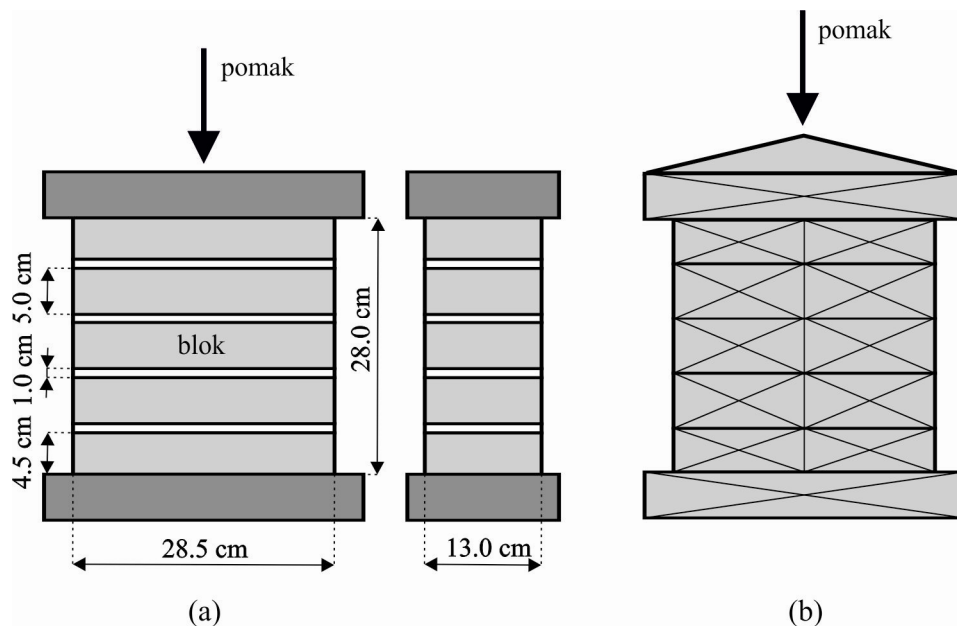
**Crtež 6.14** Eksperimentalni rezultati u usporedbi s numeričkim modelom ponašanja veze blok-mort u posmiku za  $f_s = 0.87$  MPa,  $\mu_0 = 1.01$ ,  $\mu_r = 0.73$

## 6.5 VALIDACIJA IMPLEMENTIRANOG MODELA

### 6.5.1 Validacija numeričkog modela za monotono rastuće tlačno opterećenje

U ovom primjeru provedena je validacija implementiranog numeričkog modela za monotono rastuće tlačno opterećenje. Validacija je provedena usporedbom numeričkih rezultata s rezultatima eksperimenta na četiri zidane prizme izložene jednoosnom tlačnom opterećenju koji je proveo Oliveira [O2]. Prizme su se sastojale od pet blokova srednjih dimenzija 28.5 x 13.0 x 5.0 cm<sup>3</sup> povezanih mortom debljine 1.0 cm. Krajnji blokovi su zbog brušenja skraćeni s 5.0 cm na visinu od 4.5 cm. Srednja tlačna čvrstoća blokova okomito na horizontalne sljubnice iznosila je 56.8 MPa, dok je srednja tlačna čvrstoća morta iznosila 5.5 MPa.

Geometrijske karakteristike prizme kao i mreža konačnih elemenata korištena u numeričkoj simulaciji prikazane su na crtežu 6.15.



Crtež 6.15 Zidana prizma: (a) geometrija; (b) diskretizacija sustava

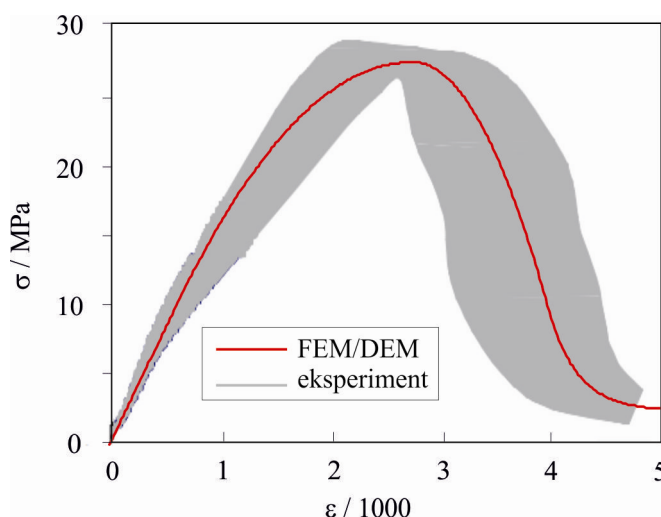
Mehaničke karakteristike materijala korištene u numeričkoj analizi prikazane su u tablici 6.1. Mehaničke karakteristike materijala odabrane su na temelju podataka iz literature na način da opisuju srednju vrijednost anvelope dobivene eksperimentom.

**Tablica 6.1** Karakteristike materijala kao ulazni parametri

Zidana prizma	
Modul elastičnosti, $E_x = E_y$ (MPa)	4100
Poissonov koeficijent, $\nu_{xy}$	0.2
Tlačna čvrstoća, $f_c = f_{cx} = f_{cy}$ (MPa)	27.5

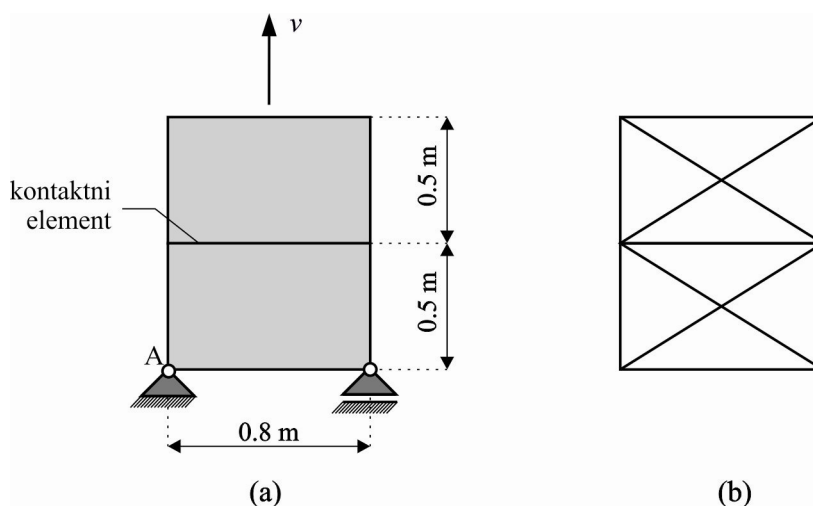
Neelastični parametri  $(\sigma_i, \varepsilon_i)$ ,  $(f_c, \varepsilon_c)$ ,  $(\sigma_m, \varepsilon_m)$ ,  $(\sigma_r, \varepsilon_r)$  potrebni za opisivanje nelinearnog ponašanja jednaki su za horizontalni i vertikalni smjer i iznosili su redom  $(f_c/1.8, \varepsilon_i)$ ,  $(f_c, -0.0065)$ ,  $(f_c/1.8, -0.044)$ ,  $(f_c/100.0, -\infty)$ .

Na crtežu 6.16 prikazana je usporedba eksperimentalnih rezultata prikazanih kao anvelopa rezultata sve četiri prizme i rezultata dobivenih FEM/DEM metodom. Sa crteža se može vidjeti da implementirani numerički model dobro opisuje anvelopu naprezanja i deformacija dobivenu eksperimentom.

**Crtež 6.16** Usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata uslijed monotono rastućeg tlačnog opterećenja

### 6.5.2 Validacija vlačnog ponašanja u kontaktnom elementu mort-blok

U ovom primjeru provedena je validacija cikličkog ponašanja kontaktnog elementa mort-blok u jednoosnom vlaklu. Budući da su eksperimentalni rezultati vezani uz cikličko ponašanje veze između bloka i morta u literaturi oskudni, u ovom primjeru napravljena je usporedba implementiranog modela s eksperimentalnim rezultatima koje su Gopalaratnam i Shah [G9] proveli na betonskim uzorcima.



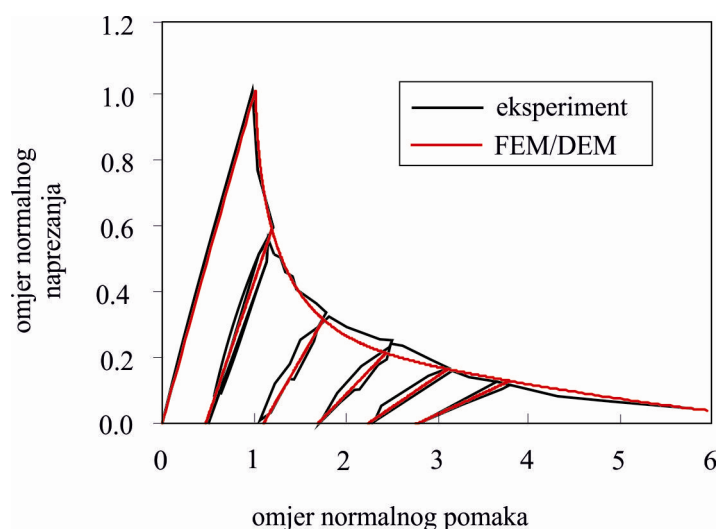
**Crtež 6.17** Shematski prikaz problema: (a) geometrija; (b) diskretizacija problema

Analizirana su dva bloka (crtež 6.17) povezana kontaktnim elementom mort-blok. Donji blok pričvršćen je za podlogu dok je u gornjem bloku zadano opterećenje na gornjem rubu u obliku kontroliranih normalnih pomaka. Mehaničke karakteristike materijala u konačnom i kontaktnom elementu prikazane su u tablici 6.2.

**Tablica 6.2** Karakteristike materijala kao ulazni parametri

Veličina	Konačni element	Kontaktni element
Modul elastičnosti, $E$ (MPa)	1000	-
Vlačna čvrstoća, $f_t$ (MPa)	-	1.0
Energija loma, $G_f^I$ (N/m)	-	50

Na crtežu 6.18 prikazana je usporedba eksperimentalnih rezultata i rezultata dobivenih FEM/DEM metodom.



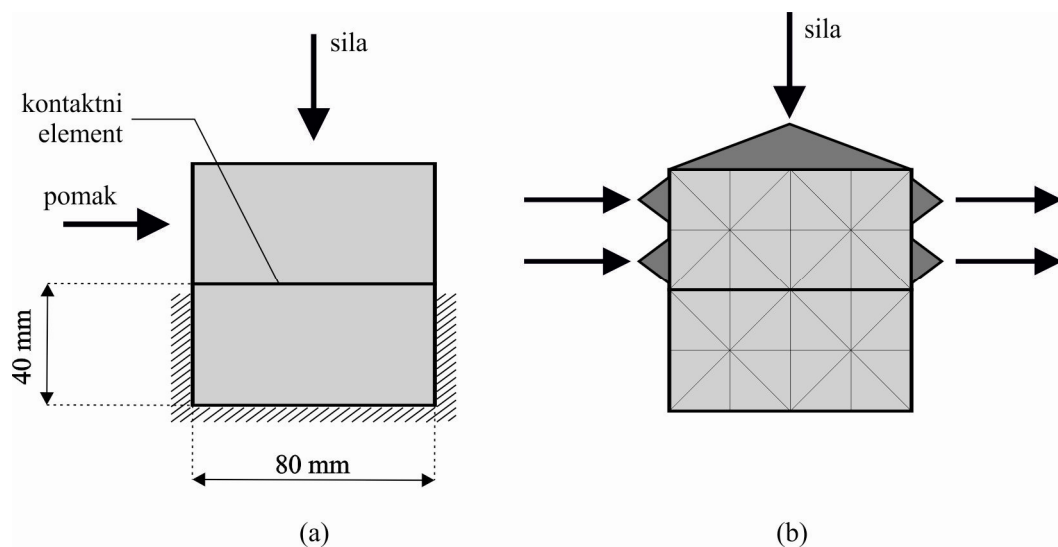
**Crtež 6.18** Usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata uslijed jednoosnog cikličkog opterećenja

Eksperimentalni i numerički rezultati skalirani su s vrijednostima u točki u kojoj normalno naprezanje ima maksimalnu vrijednost. Na crtežu se može vidjeti vrlo dobro poklapanje numeričkih i eksperimentalnih rezultata

### 6.5.3 Validacija posmičnog ponašanja u kontaktnom elementu mort-blok

U ovom primjeru provedena je validacija cikličkog ponašanja kontaktnog elementa mort-blok u posmiku. U tu svrhu eksperimentalni podaci koje je Atkinson [A5] dobio na temelju ispitivanja posmične veze morta i blokova uspoređeni su s numeričkim rezultatima dobivenim FEM/DEM metodom.

Analizirana su dva bloka (crtež 6.19) povezana kontaktnim elementom. Donji blok je nepomično povezan za podlogu dok je u gornjem bloku, nakon nanošenja predlačnog naprezanja od  $\sigma = 5.0$  MPa, zadano horizontalno opterećenje u obliku kontroliranog pomaka.



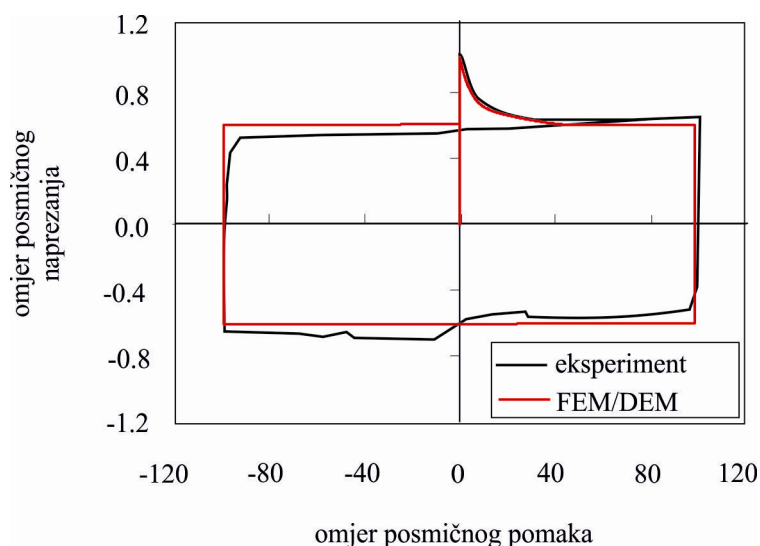
Crtež 6.19 Shematski prikaz problema: (a) geometrija; (b) diskretizacija sustava

U tablici 6.3 prikazane su materijalne karakteristike kontaktnog elementa.

Tablica 6.3 Karakteristike materijala kao ulazni parametri

Kontaktни element	
Posmična čvrstoća, $f_s$ (MPa)	0.1018
Energija loma, $G_f^H$ (N/m)	300.0
Početni koeficijent trenja, $\mu_0$	0.296
Rezidualni koeficijent trenja, $\mu_r$	0.296

Na crtežu 6.20 prikazana je usporedba eksperimentalnih i numeričkih rezultata. Posmična naprežanja skalirana su s vrijednosti maksimalnog posmičnog naprežanja, dok su posmični pomaci skalirani s jednom stotinom maksimalnog posmičnog pomaka. Sa crteža se može vidjeti da je ugrađeni numerički model u kontaktnom elementu mort-blok sposoban opisati cikličko ponašanje veze između bloka i morta.



**Crtež 6.20** Usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata uslijed posmičnog cikličkog opterećenja

#### 6.5.4 Zidani posmični zidovi izloženi monotono rastućem opterećenju

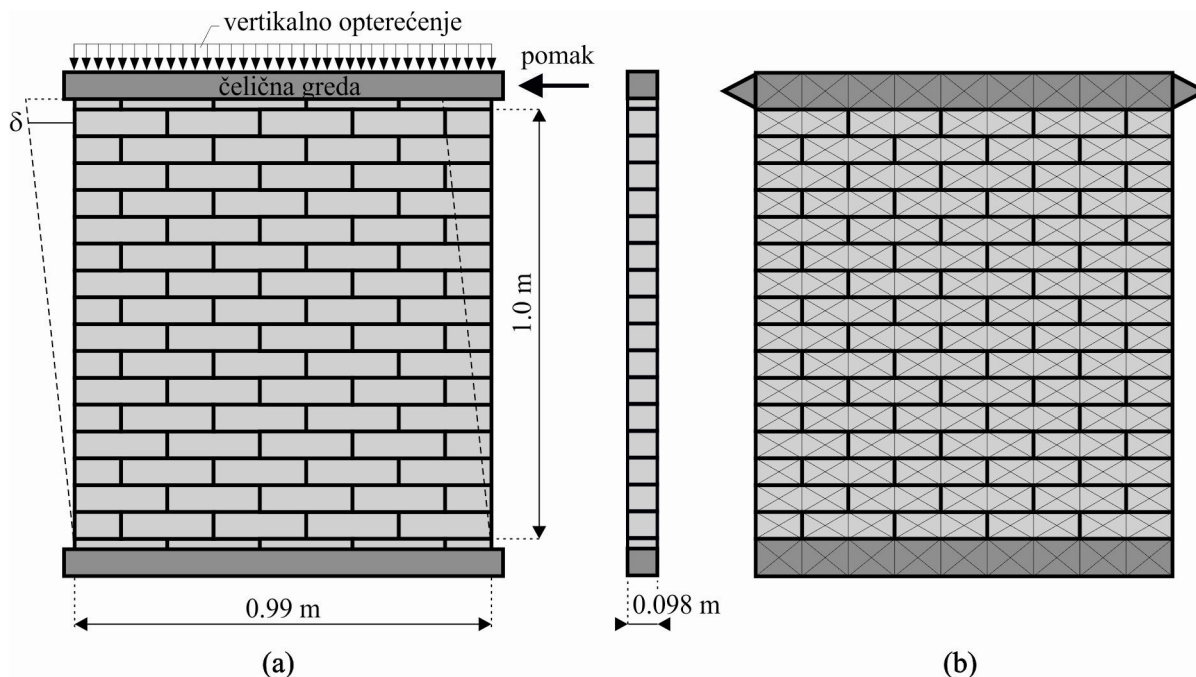
U ovom primjeru provedena je validacija razvijenog numeričkog modela u analizi zidanih zidova uslijed djelovanja monotono rastućeg opterećenja. Numerička analiza provedena je na nekim od posmičnih zidova koje su Raijmakers i Vermeltfoort [R3] analizirali u sklopu CUR projekta. Zidovi koji su analizirani u ovom primjeru odgovaraju testnim uzorcima J4D, J5D i J7D.

Geometrijske karakteristike zidova prikazane su na crtežu 6.21-a. Omjer dužine i visine sva tri zida bio je 990 mm / 1000 mm, a sastojali su se od 18 redova blokova od kojih je samo 16 bilo aktivno, dok su preostala dva krajnja reda bila uklještena u čeličnu gredu (vidi crtež 6.21-a). Blokovi od kojih je napravljen zid bili su dimenzija 210 x 98 x 50 mm<sup>3</sup> dok je debljina morta u horizontalnim i vertikalnim sljubnicama iznosila 12.5 mm.

Kod svih zidova najprije je zadano predtlačno vertikalno opterećenje i to u iznosu od 0.3 MPa kod zidova J4D i J5D, odnosno 2.12 MPa kod zida J7D. Nakon nanošenja vertikalnog opterećenja, zidovi su izloženi horizontalnom opterećenju koje je ostvareno preko kontroliranog

pomaka čelične grede na vrhu zida. Tijekom nanošenja horizontalnog pomaka vertikalni pomaci čelične grede bili su spriječeni.

Diskretizacija konstrukcije mrežom konačnih elemenata korištenom u numeričkoj analizi prikazana je na crtežu 6.21-b.



Crtež 6.21 Posmični zid: (a) geometrija; (b) mreža konačnih elemenata

Mehaničke karakteristike materijala korištene u numeričkoj analizi dobivene su na temelju podataka iz literature [R3] i prikazane u tablici 6.4 za zidove J4D i J5D odnosno tablici 6.5 za zid J7D.

Tablica 6.4 Karakteristike materijala kao ulazni parametri za zidove J4D i J5D

Blok		Mort	
Modul elastičnosti, $E_x$ (MPa)	8982	Vlačna čvrstoća, $f_t$ (MPa)	0.25
Modul elastičnosti, $E_y$ (MPa)	4114	Posmična čvrstoća, $f_s$ (MPa)	0.35
Poissonov koeficijent, $\nu_{xy}$	0.141	Energija loma, $G_f^I$ (N/m)	18
Tlačna čvrstoća, $f_{cx}=f_{cy}=f_c$ (MPa)	10.5	Energija loma, $G_f^{II}$ (N/m)	125
Vlačna čvrstoća, $f_t$ (MPa)	2.0	Koeficijent trenja $\mu_0 = \mu_r$	0.75
Posmična čvrstoća, $f_s$ (MPa)	2.8		
Energija loma, $G_f^I$ (N/m)	80		
Energija loma, $G_f^{II}$ (N/m)	500		
Koeficijent trenja $\mu_0 = \mu_r$	1.0		

**Tablica 6.5** Karakteristike materijala kao ulazni parametri za zidove J7D

Blok		Kontaktни element mort-blok	
Modul elastičnosti, $E_x$ (MPa)	8982	Vlačna čvrstoća, $f_t$ (MPa)	0.16
Modul elastičnosti, $E_y$ (MPa)	4114	Posmična čvrstoća, $f_s$ (MPa)	0.224
Poissonov koeficijent, $\nu_{xy}$	0.141	Energija loma, $G_f^I$ (N/m)	18
Tlačna čvrstoća, $f_{cx}=f_{cy}=f_c$ (MPa)	11.5	Energija loma, $G_f^{II}$ (N/m)	50
Vlačna čvrstoća, $f_t$ (MPa)	2.0	Koeficijent trenja $\mu_0 = \mu_r$	0.75
Posmična čvrstoća, $f_s$ (MPa)	2.8		
Energija loma, $G_f^I$ (N/m)	80		
Energija loma, $G_f^{II}$ (N/m)	500		
Koeficijent trenja $\mu_0 = \mu_r$	1.0		

Numerička analiza provedena je za slučaj linearno-elastičnog ponašanja materijala u konačnom elementu ne uzimajući u obzir mogućnost sloma u tlaku te za slučaj nelinearnog ponašanja materijala u konačnom elementu uzimajući u obzir mogućnost sloma u tlaku.

Neelastični parametri  $(\sigma_i, \varepsilon_i)$ ,  $(f_c, \varepsilon_c)$ ,  $(\sigma_m, \varepsilon_m)$ ,  $(\sigma_r, \varepsilon_r)$  potrebni za opisivanje nelinearnog ponašanja za sve zidove iznosili su redom  $(f_c / 3.0, \varepsilon_i)$ ,  $(f_c, -0.0041)$ ,  $(f_c / 2.0, -0.028)$ ,  $(f_c / 7.0, -\infty)$ .

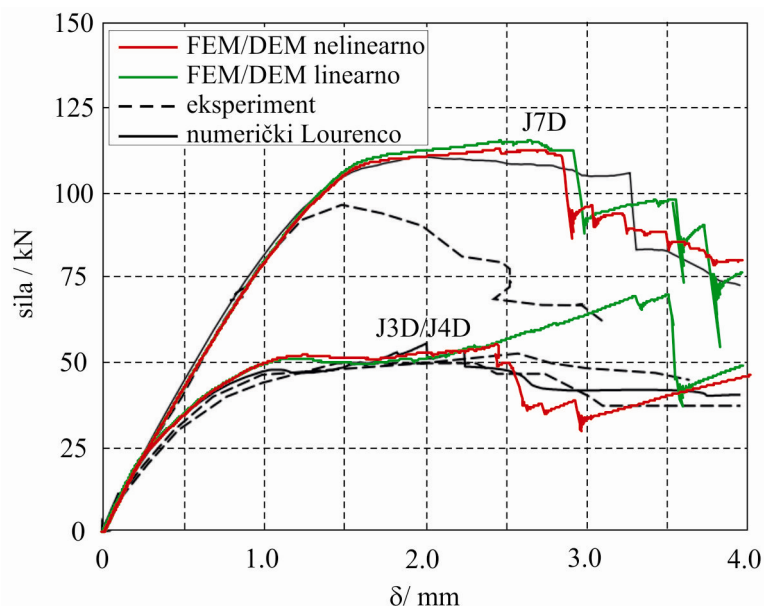
Na crtežu 6.22 prikazana je usporedba numeričkih rezultata horizontalnog pomaka vrha zida dobivenih FEM/DEM metodom s rezultatima eksperimenta te numeričkim rezultatima koje je dobio Lourenço [L11]. Numerički rezultati od Lourença [L11] dobiveni su numeričkim modelom baziranim na metodi konačnih elemenata u sklopu kojeg su svi nelinearni efekti opisani u kontaktnim elementima koji predstavljaju mjesta potencijalnih pukotina i čiji je konstitutivni zakon ponašanja opisan preko teorije plastičnosti.

Za slučaj nelinearnog ponašanja materijala u konačnom elementu FEM/DEM modela može se uočiti dobro slaganje dobivenih numeričkih rezultata zidova J3D i J4D s rezultatima eksperimenta i numeričkim rezultatima koje je dobio Lourenço [L11]. U slučaju da je ponašanje materijala u konačnom elementu FEM/DEM modela linearno-elastično, slomna sila kod zidova J3D i J4D je za oko 38 % veća od one dobivene eksperimentom.

Iz rezultata analize zida J7D ne vidi se značajna razlika rezultata dobivenih FEM/DEM metodom za slučaj linearnog i nelinearnog ponašanja konačnog elementa u odnosu na numeričke rezultate koje je dobio Lourenço [L11]. S druge pak strane, svi numerički rezultati daju za približno 15 % veću slomnu silu zida J7D u odnosu na onu dobivenu eksperimentom. Moguće da

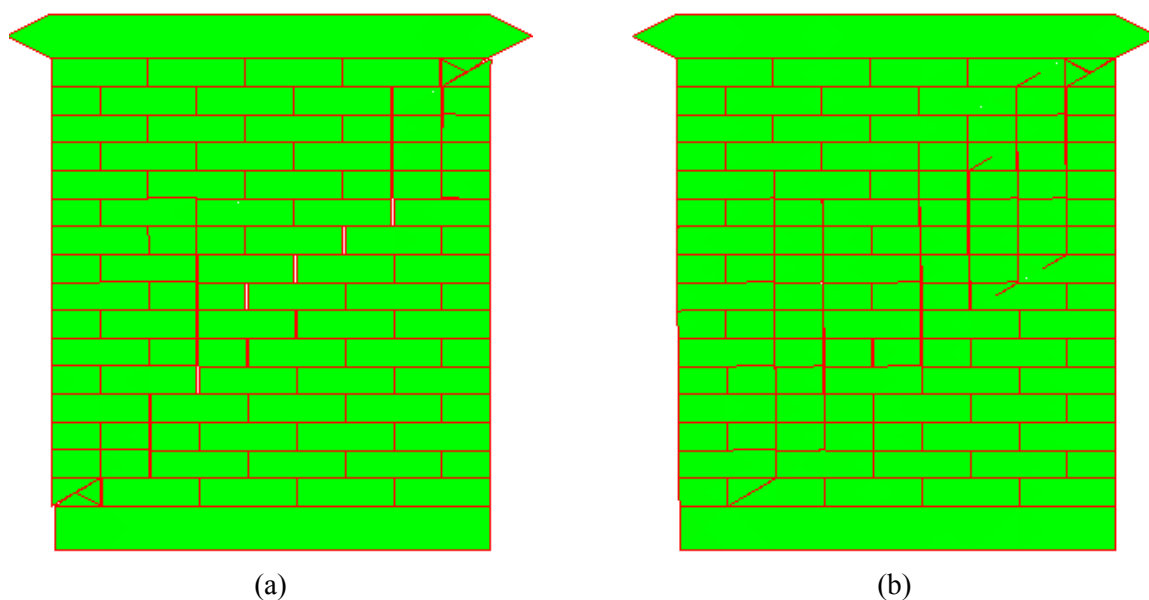


je uzrok tome nekakvo lokalno oslabljenje koje se pojavilo u eksperimentu a koje nije uzeto u obzir u sklopu mehaničkih karakteristika materijala prikazanih u tablici 6.5.



**Crtež 6.22** Usporedba eksperimentalnih i numeričkih pomaka vrha zida

Na crtežu 6.23 prikazano je stanje pukotina u zidovima J3D/J4D i J7D neposredno prije potpunog sloma.

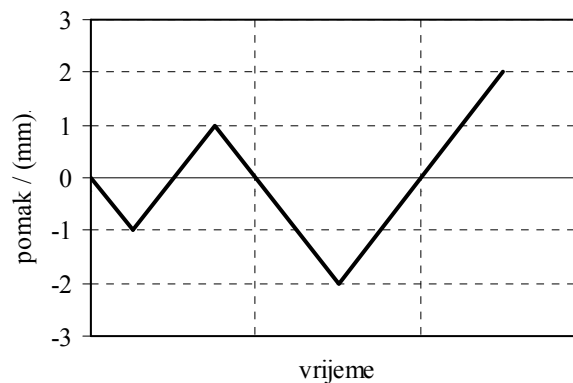


**Crtež 6.23** Stanje pukotina u zidovima: (a) J3D i J4D; (b) J7D

### 6.5.5 Zidani posmični zidovi izloženi cikličkom opterećenju

U ovom primjeru provedena je validacija razvijenog numeričkog modela u analizi zidanih zidova izloženih cikličkom opterećenju. Analiza je provedena na zidu istih geometrijskih karakteristika kao u prethodnom primjeru (vidi crtež 6.21) čiji su rezultati numeričkog eksperimenta dostupni u literaturi [O2].

Nakon nanošenja predtlačnog naprezanja u iznosu od 1.21MPa, zid je izložen horizontalnom opterećenju koje je ostvareno preko kontroliranog pomaka čelične grede na vrhu zida. Shematski prikaz horizontalnog pomaka tijekom vremena prikazan je na crtežu 6.24.



Crtež 6.24 Shematski prikaz horizontalnog pomaka vrha čelične grede

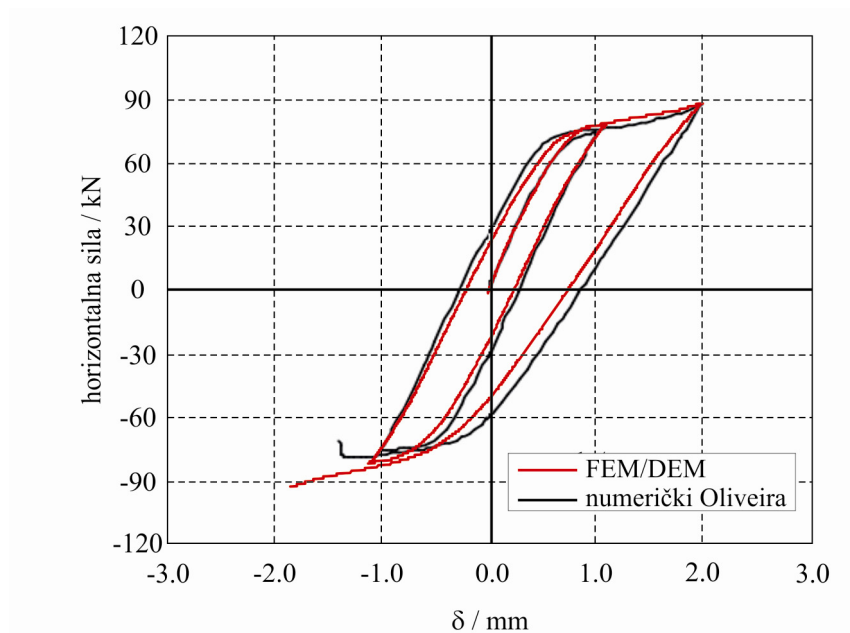
Analiza je provedena bez mogućnosti pucanja blokova. Mehaničke karakteristike materijala korištene u numeričkoj analizi dobivene su na temelju podataka iz literature [O2] i prikazane u tablici 6.6.

Tablica 6.6 Karakteristike materijala kao ulazni parametri

Blok		Kontaktни element mort-blok	
Modul elastičnosti, $E_x=E_y$ (MPa)	5080	Vlačna čvrstoća, $f_t$ (MPa)	0.16
Poissonov koeficijent, $\nu_{xy}$	0.112	Posmična čvrstoća, $f_s$ (MPa)	0.224
Tlačna čvrstoća, $f_{cx}=f_{cy}=f_c$ (MPa)	11.5	Energija loma, $G_f^I$ (N/m)	12
		Energija loma, $G_f^{II}$ (N/m)	50
		Koeficijent trenja $\mu_0=\mu_r$	0.75

Neelastični parametri  $(\sigma_i, \varepsilon_i)$ ,  $(f_c, \varepsilon_c)$ ,  $(\sigma_m, \varepsilon_m)$ ,  $(\sigma_r, \varepsilon_r)$  potrebni za opisivanje nelinearnog ponašanja za sve zidove iznosili su redom  $(f_c / 3.0, \varepsilon_i)$ ,  $(f_c, -0.0041)$ ,  $(f_c / 2.0, -0.028)$ ,  $(f_c / 7.0, -\infty)$ .

Na crtežu 6.25 prikazana je usporedba numeričkih rezultata dobivenih FEM/DEM metodom s numeričkim rezultatima Oliveire [O2]. Numerički rezultati koje je dobio Oliveira dobiveni su preko numeričkog modela baziranog na metodi konačnih elemenata koji je razvio Lourenço [L11], poboljšanim na način da može uzeti u obzir glavne osobine cikličkog ponašanja materijala [O2].



Crtež 6.25 Usporedba eksperimentalnih i numeričkih pomaka vrha zida

## 6.6 PRIMJENA RAZVIJENOG MODELA U ANALIZI ZIDANIH KONSTRUKCIJA OMEĐENIH AB SERKLAŽIMA

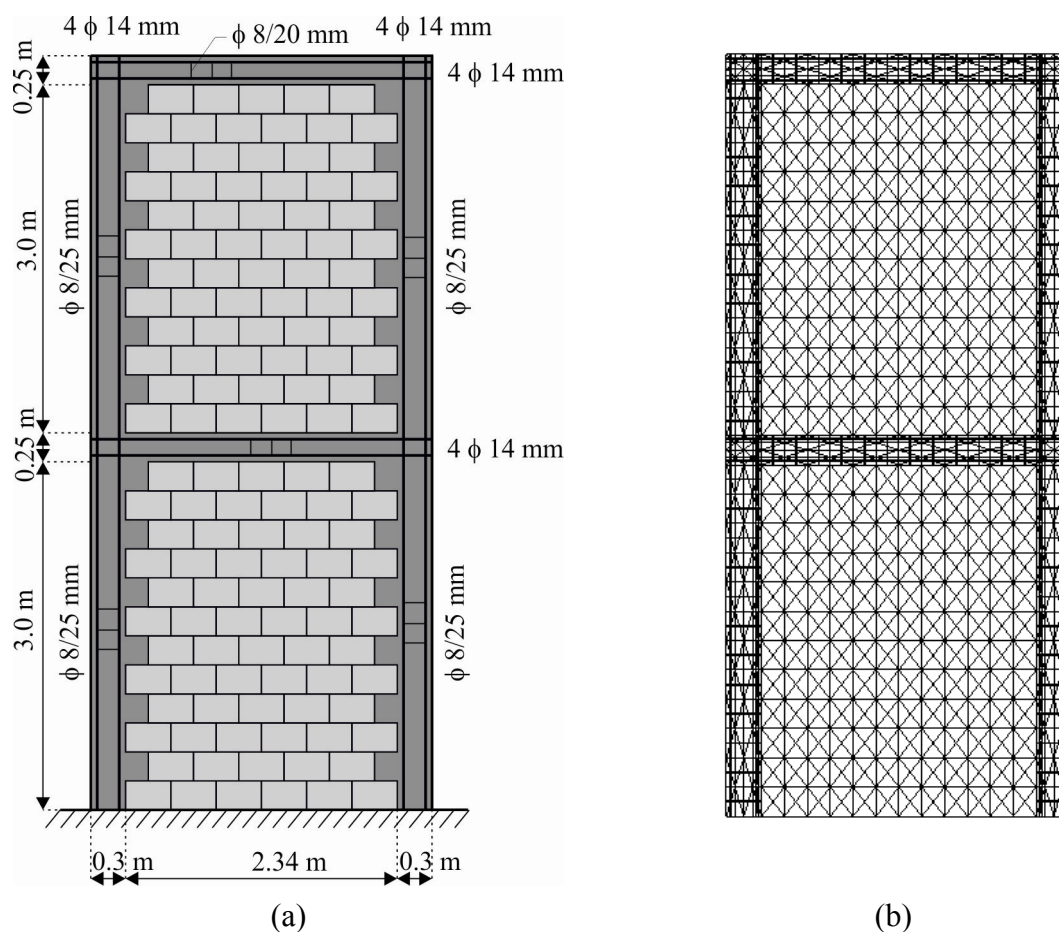
Novo razvijeni numerički model materijala za zidane konstrukcije u kombinaciji s prethodno razvijenim numeričkim modelom armature [Ž1, Ž2] omogućuje primjenu FEM/DEM metode u dinamičkoj analizi zidanih konstrukcija omeđenih armiranobetonskim serklažima te armiranobetonskim okvirima s ispunom.

U nastavku je prikazana primjena FEM/DEM metode u analizi zidanih zidova omeđenih armiranobetonskim serklažima. Analiza je provedena na zidu čije su geometrijske karakteristike prikazane na crtežu 6.26-a. Debljina zida jednaka je 0.25 m.

Mreža konačnih elemenata korištena u numeričkoj analizi prikazana je na crtežu 6.26-b. Svaki blok diskretiziran je s vlastitom mrežom konačnih elemenata između kojih su implementirani kontaktni elementi koji predstavljaju mjesta potencijalnih pukotina. U konačnim elementima bloka uzeta je u obzir mogućnost sloma u tlaku kao i pojava tlačnog omekšanja. Veza

između blokova ostvarena je također kontaktnim elementima kojima se opisuje veza bloka i morta.

Beton je opisan konačnim elementima unutar kojih je ponašanje linearno-elastično. Između konačnih elemenata betona također su implementirani kontaktni elementi koji predstavljaju mjesta potencijalnih pukotina. Armatura je opisana linijskim konačnim elementima implementiranim unutar konačnih elemenata betona. Ponašanje armature unutar kontaktnog elementa betona opisano je kontaktnim elementima armature.



**Crtež 6.26** Zidani zid omeđen armiranobetonskim serklažima: (a) geometrijske karakteristike i način armiranja; (b) mreža konačnih elemenata

U tablici 6.7 prikazane su mehaničke karakteristike armiranobetonskih serklaža, dok su u tablici 6.8 prikazane mehaničke karakteristike blokova te veze morta i bloka.

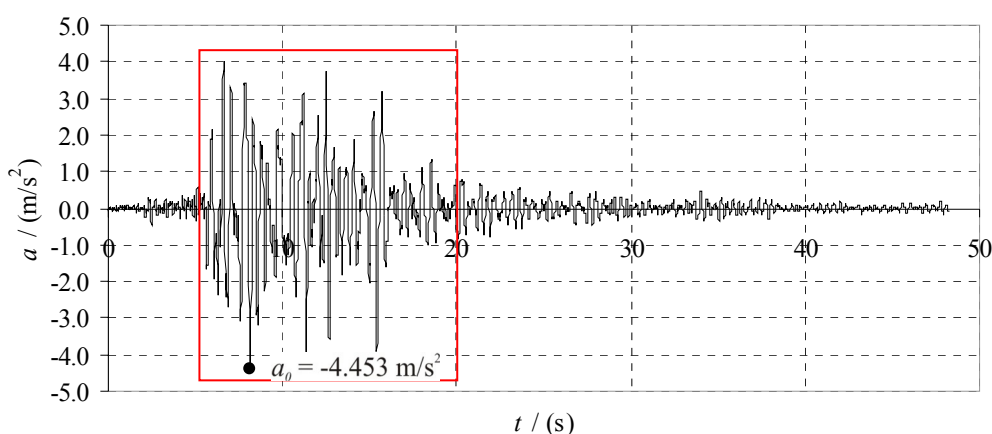
**Tablica 6.7** Mehaničke karakteristike armiranog betona

Beton		Čelik	
Modul elastičnosti, $E_c$ (MPa)	30 500	Modul elastičnosti, $E_s$ (MPa)	210 000
Poissonov koeficijent, $\nu$	0.2	Granica popuštanja, $f_y$ (MPa)	500
Vlačna čvrstoća, $f_t$ (MPa)	3.8	Granična čvrstoća, $f_u$ (MPa)	650
Tlačna čvrstoća, $f_c$ (MPa)	38.0	Deformacija na kraju tečenja, $\varepsilon_{sh}$	0.025
Energija loma, $G_f$ (N/m)	150	Granična deformacija, $\varepsilon_u$	0.1
		Deformacija u trenutku sloma, $\varepsilon_{br}$	0.16

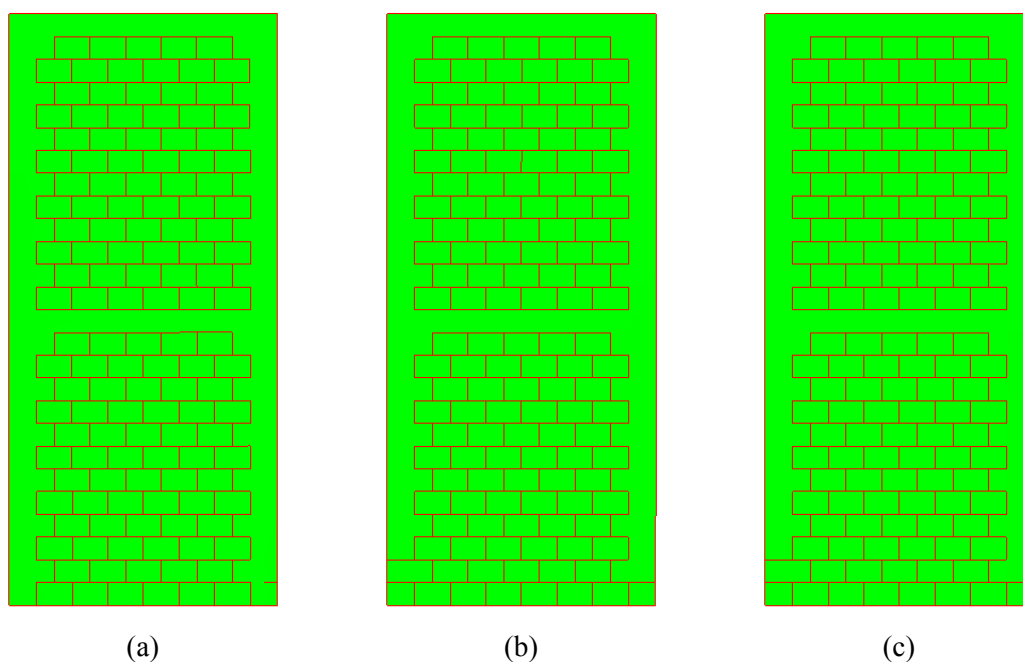
**Tablica 6.8** Karakteristike bloka te veze bloka i morta

Blok		Kontaktни element mort-blok	
Modul elastičnosti, $E_x=E_y$ (MPa)	1033	Vlačna čvrstoća, $f_t$ (MPa)	0.16
Poissonov koeficijent, $\nu_{xy}$	0.141	Posmična čvrstoća, $f_s$ (MPa)	0.224
Tlačna čvrstoća, $f_{cx}$ (MPa)	2.7	Energija loma, $G_f^I$ (N/m)	12
Tlačna čvrstoća, $f_{cy}$ (MPa)	10.33	Energija loma, $G_f^{II}$ (N/m)	50
		Koeficijent trenja $\mu_0 = \mu_r$	0.75

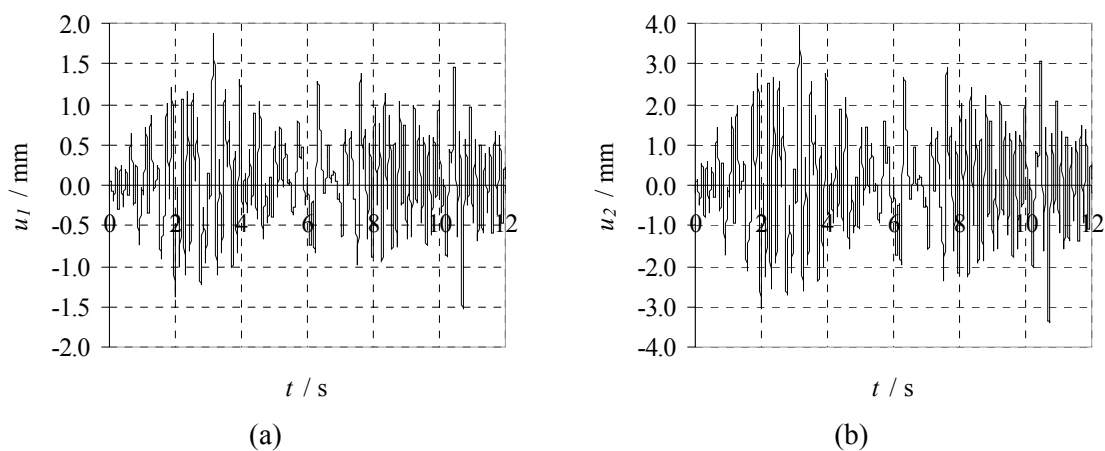
Vertikalno opterećenje na svakoj etaži zida usvojeno je u iznosu od 0.5 MPa što znači da je vertikalno naprežanje na dnu zida uslijed težine jednako 1.0 MPa. Provedena je inkrementalna dinamička analiza zida izloženog horizontalnom ubrzanju tla prikazanom na crtežu 6.27. Akcelelogram je prvo skaliran na vršno ubrzanje od 0.22 g koje je karakteristično za Split, a zatim je vršno ubrzanje postupno povećavano do potpunog sloma konstrukcije.

**Crtež 6.27** Potres iz baze podataka European Strong-motion Database, Petrovac (1979.)

Na crtežu 6.28 prikazan je nastanak i širenje pukotina za vršno ubrzanje od  $3.0 \text{ m/s}^2$  u različitim vremenskim trenucima, dok su na crtežu 6.29 prikazani pomaci prve i druge etaže za isto vršno ubrzanje u funkciji vremena.



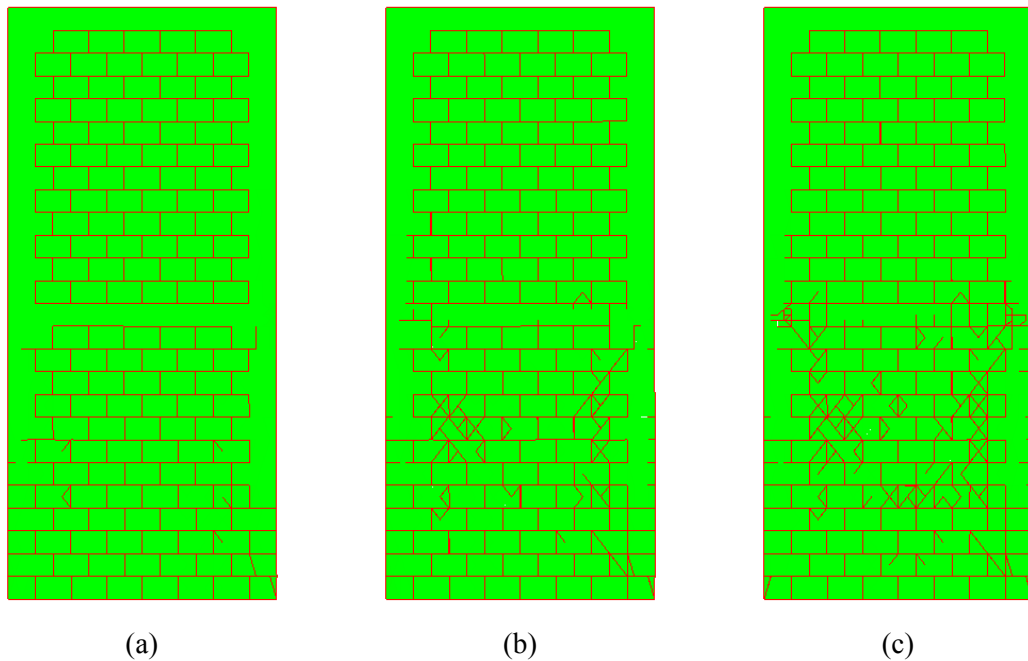
**Crtež 6.28** Nastanak i širenje pukotina za vršno ubrzanje  $a=3.0 \text{ m/s}^2$  u vremenu: (a)  $t=1.977 \text{ s}$ ; (b)  $t=7.125 \text{ s}$ ; (c)  $t=12.00 \text{ s}$



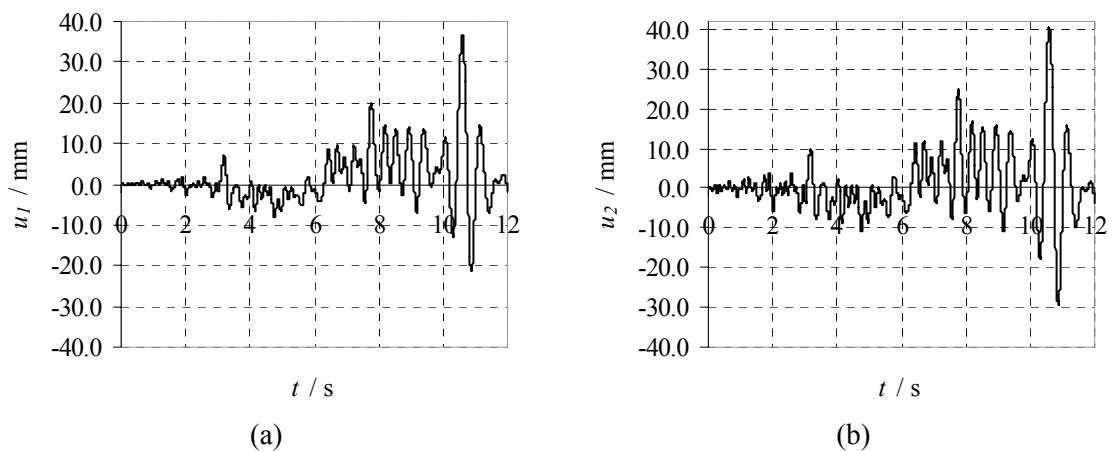
**Crtež 6.29** Pomaci za vršno ubrzanje  $a=3.0 \text{ m/s}^2$  u vremenu: (a) vrh prvog kata; (b) vrh drugog kata

Sa crteža se može uočiti da za vršno ubrzanje od  $3.0 \text{ m/s}^2$  nastaju male pukotine na dnu armiranobetonskih serklaža dok u blokovima pukotine još nisu nastale. Maksimalni ostvareni pomak vrha zida iznosi  $3.9 \text{ mm}$ , što je jednako  $H/1538$  gdje je  $H$  ukupna visina zida.

Na crtežu 6.30 prikazan je nastanak i širenje pukotina za vršno ubrzanje od  $4.0 \text{ m/s}^2$  u različitim vremenskim trenucima, dok su na crtežu 6.31 prikazani pomaci prve i druge etaže za isto vršno ubrzanje u funkciji vremena.



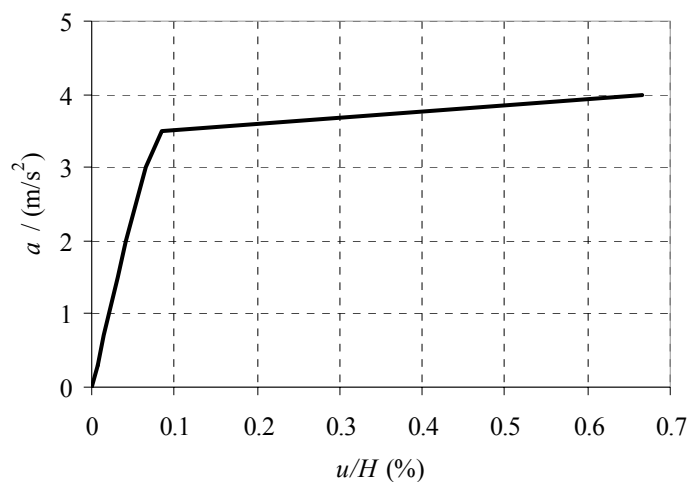
**Crtež 6.30** Nastanak i širenje pukotina za vršno ubrzanje  $a=4.0 \text{ m/s}^2$  u vremenu: (a)  $t=4.85 \text{ s}$ ; (b)  $t=8.75 \text{ s}$ ; (c)  $t=12.00 \text{ s}$



**Crtež 6.31** Pomaci za vršno ubrzanje  $a=4.0 \text{ m/s}^2$  u vremenu: (a) vrh prvog kata; (b) vrh drugog kata

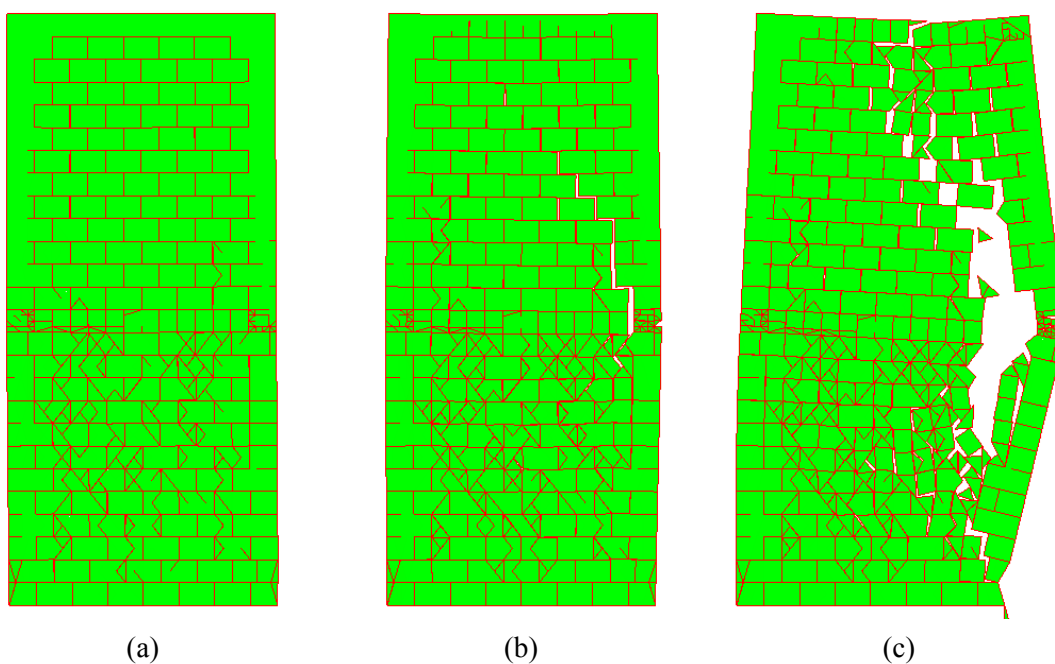
Sa crteža se može uočiti da za vršno ubrzanje od  $4.0 \text{ m/s}^2$  nastaju značajne pukotine u prvom etaži i u armiranobetonskim serklažima i u blokovima. Maksimalni ostvareni pomak vrha zida iznosi  $40.0 \text{ mm}$ , što je jednako  $H/150$  gdje je  $H$  ukupna visina zida.

Na crtežu 6.32 prikazana je krivulja dobivena inkrementalnom dinamičkom analizom zida koja prikazuje odnos normaliziranog maksimalnog pomaka vrha zida  $u/H$  i vršnog ubrzanja  $a$  potresa prikazanog na crtežu 6.27. Iz dijagrama se može uočiti da je slom zida ostvaren pri vršnom ubrzanju od  $4.0 \text{ m/s}^2$  i pomaku vrha zida  $u/H=0.67 \%$ .



**Crtež 6.32** Pomaci u vrhu samostalnog zida ovisno o ubrzanju

Na crtežu 6.33 prikazan je nastanak i širenje pukotina za vršno ubrzanje od  $5.0 \text{ m/s}^2$  u različitim vremenskim trenucima, gdje se prati ponašanje konstrukcije nakon potpunog sloma.



**Crtež 6.33** Nastanak i širenje pukotina za vršno ubrzanje  $a=5.0 \text{ m/s}^2$  u vremenu: (a)  $t=4.85 \text{ s}$ ; (b)  $t=8.75 \text{ s}$ ; (c)  $t=12.00 \text{ s}$



## **7. ZAKLJUČCI I PRAVCI DALJNJIH ISTRAŽIVANJA**

U prvom dijelu ovog poglavlja iznijet će se osnovni zaključci koji proizlaze iz istraživanja i analiza provedenih u ovom radu kao i prednosti i nedostaci izloženog modela. U drugom dijelu navest će se mogući pravci daljnjih istraživanja.

### **7.1 ZAKLJUČCI**

U ovom radu je u okviru kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata razvijen novi numerički model za 2D analizu zidanih konstrukcija izloženih statičkom, dinamičkom i seizmičkom opterećenju.

Kombinirana metoda konačno-diskretnih elemenata zasniva se na simulaciji ponašanja velikog broja diskretnih elemenata koji se mogu naći u međusobnoj interakciji. Svaki diskretni element diskretiziran je vlastitom mrežom konačnih elemenata čime je omogućena njegova deformabilnost. Materijalna nelinearnost, uključujući pojavu i razvoj pukotina te fragmentaciju diskretnih elemenata, omogućena je modelom kontaktnih elemenata koji su implementirani između konačnih elemenata.

Da bi se što realnije opisalo ponašanje zidanih konstrukcija, razvijen je novi numerički model materijala kojim je moguće opisati vezu između bloka i morta te pojavu tlačnog omekšanja

kao i mogućnost sloma u tlaku. Novo razvijeni numerički model implementiran je u postojeći računalni program Y-2D preko niza algoritama koji obuhvaćaju:

- novi numerički model materijala u 1D kontaktnom elementu za simuliranje veze bloka i morta koji uzima u obzir pojavu sloma u vlaklu i posmiku, povećanje energije loma u posmiku uslijed povećanja predtlačnog naprezanja, smanjenje koeficijenta trenja uslijed povećanja posmične deformacije te cikličko ponašanje veze morta i bloka;
- novi numeričkog model materijala u 2D konačnom elementu koji uzima u obzir ortotropno ponašanje zida, mogućnost sloma u tlaku, pojavu tlačnog omekšanja te cikličko ponašanje materijala.

Sintezom novo razvijenih modela materijala u konačnom i kontaktnom elementu kreiran je originalni numerički model za analizu nearmiranih zidanih konstrukcija na pojednostavljenoj mikrorazini. Usporedbom numeričkih rezultata dobivenih računalnim programom Y-2D s rezultatima eksperimenata dostupnih u literaturi te numeričkim rezultatima dobivenih pomoću računalnih programa za nelinearnu analizu zidanih konstrukcija baziranih na metodi konačnih elemenata pokazalo se da razvijeni numerički model vrlo dobro opisuje ponašanje nearmiranih zidanih konstrukcija izloženih monotono rastućem i cikličkom opterećenju.

Također, prezentiran je novi numerički model za analizu zidanih konstrukcija omeđenih armiranobetonskim serklažima te okvira s ispunom, koji se sastoji od sinteze novo razvijenog numeričkog modela materijala za analizu nearmiranih zidanih konstrukcija te prethodno razvijenog numeričkog modela armature za analizu armiranobetonskih konstrukcija. Prezentirani model daje realnu sliku razvoja pukotina u zidanim konstrukcijama izloženim seizmičkom opterećenju prije potpunog sloma, ali i ponašanje takvih konstrukcija nakon potpunog sloma.

U sklopu rada razvijen je i u računalni program Y-2D implementiran niz numeričkih algoritama koji za cilj imaju opisati ponašanje suho zidanih kamenih konstrukcija ojačanih čeličnim trnovima i klamfama. Ti algoritmi obuhvaćaju:

- ugrađen model čeličnih klamfi tipa I koje se umeću s bočne strane konstrukcije u prethodno napravljene rupe;
- ugrađen model čeličnih klamfi tipa II koje se umeću s gornje strane kamenih blokova u prethodno napravljene rupe;

- cikličko ponašanje, tečenje i lom čelika kod klamfi tipa I i II, kao i utjecaj izvlačenja klamfe tipa II iz kamenog bloka;
- ugrađen model čeličnih trnova koji se umeću s gornje strane kamenog bloka u prethodno napravljene rupe;
- cikličko ponašanje, omekšanje i lom trna kao i utjecaj izvlačenja trna iz kamenog bloka.

Provedena je verifikacija ugrađenog modela te je prikazana njegova primjena u inkrementalnoj dinamičkoj analizi realnih kamenih konstrukcija. U provedenim analizama pokazano je da se novo razvijeni numerički model može koristiti u predviđanju mehanizma sloma te analizi seizmičke otpornosti starih suho zidanih kamenih konstrukcija s ugrađenim i neugrađenim klamfama i trnovima što je vrlo važno za one građevine koje se svrstavaju u kategoriju kulturne baštine. Model također može pomoći prilikom donošenja odluka vezanih za poduzimanje određenih zahvata kojima bi se povećala seizmička otpornosti postojećih kamenih konstrukcija.

Osim do sada navedenih prednosti ovog modela, primjena numeričkog modela zasnovanog na kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata sa sobom povlači i određene nedostatke. Naime, korištenje eksplicitne numeričke integracije jednadžbi gibanja u vremenu i potreba za gustom diskretizacijom konstrukcije u svrhu što realnijeg opisivanja pojave i razvoja pukotina, može rezultirati vrlo malim vremenskim korakom, što bitno produljuje i poskupljuje vrijeme proračuna. Smatra se da će se daljnjim razvojem snage računala te razvojem paralelnog koda prikladnog za rad na klasteru ovaj problem znatno smanjiti.

## 7.2 MOGUĆI PRAVCI DALJNJIH ISTRAŽIVANJA

Razvijeni model moguće je primijeniti za istraživanja koja se navode u nastavku:

- analiza seizmičke otpornosti suho zidanih kamenih konstrukcija koje mogu, ali i ne moraju biti ojačane klamfama i trnovima;
- parametarska analiza zidanih konstrukcija izloženih seizmičkom opterećenju;
- predviđanje mehanizma sloma i ponašanje nakon sloma zidanih konstrukcija izloženih intenzivnom seizmičkom opterećenju, udarnom opterećenju ili eksploziji;

Također, moguće je govoriti o daljnjem razvoju numeričkog modela što otvara nove pravce i mogućnosti daljnjih istraživanja. U nastavku se navode neke od njih.

Mogući pravci daljnjih istraživanja mogu se odvijati u području eksperimentalnih istraživanja kojima bi se produbila saznanja vezana za ponašanje zidanih konstrukcija promatranih na mikrorazini te u području daljnjeg usavršavanja numeričkog modela. U nastavku se navode neka od njih:

- eksperimentalna istraživanja kojima bi se definirala krivulja i zakon popuštanja zidanih zidova od šupljih blokova kod dvoosnog stanja naprezanja;
- eksperimentalna istraživanja radi utvrđivanja energije loma u vlaku i posmiku kod blokova sa šupljinama;
- poboljšanje numeričkog modela materijala u tlaku uvođenjem stvarne krivulje popuštanja dobivene eksperimentalnim ispitivanjem šupljih blokova;
- razvoj paralelnog koda koji bi omogućio proračun na klasteru čime bi se znatno skratilo vrijeme proračuna;
- razvoj prostornog modela za seizmičku analizu zidanih konstrukcija zasnovan na kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata. U okviru tog modela zidana konstrukcija bi se diskretizirala trodimenzionalnim konačnim elementima, a klamfe i trnovi linijskim elementima u prostoru. U modelu bi trebalo razviti novi 3D kontaktni element morta i bloka i nelinearni trodimenzionalni model ponašanja ziđa u tlaku.

## 8. LITERATURA

- [A1] Acary V. and Jean M., *Numerical simulation of monuments by the contact dynamics method*, Monument 98, Workshop on Seismic Performance of Monuments, Lisbon, LNEC, pp. 69-78, 1998.
- [A2] Akhaveissy A.H. and Milani G., *Pushover analysis of large scale unreinforced masonry structures by means of a fully 2D non-linear model*, Construction and Building Materials, Vol. 41, pp. 276-295, 2013.
- [A3] Alexandris A., Protopapa E. and Psycharis I., *Collapse mechanisms of masonry buildings derived by distinct element method*, Proceedings of the 13th World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver, British Columbia, Canada, Paper No. 548, 2004.
- [A4] Almeida C., *Análise do comportamento da igreja do Mosteiro da Serra do Pilar sob a acção dos sismos*, MSc Thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2000.
- [A5] Atkinson R.H., Amadei B.P., Saeb S. and Sture S., *Response of masonry bed joints in direct shear*, Journal of Structural Engineering, Vol. 115 (9), pp. 2276-2296, 1989.

- [A6] Asteris P.G. and Tzamtzis A.D., *Non-Linear Analysis of Masonry Shear Walls*, Proceedings of the 6th International Masonry Conference, London, UK, pp. 1-6, 2002.
- [A7] Augusti G. and Sinopoli A., *Modeling the dynamics of large block structures*, Meccanica, Vol. 17, pp. 195-211, 1992.
- [A8] Azevedo J., Sincaian G. and Lemos J.V., *Seismic behaviour of blocky masonry structures*, Earthquake Spectra, Vol. 16, pp. 337-365, 2000.
- [B1] Baggio C. and Trovalusci P., *Limit analysis for no-tension and frictional three-dimensional discrete systems*, Mechanics of Structures and Machines, Vol. 26 (3), pp. 287-304, 1998.
- [B2] Barbosa B.E., *Discontinuous structural analysis*, Proceedings of the 11th World Conference on Earthquake Engineering, Acapulco, Mexico, Paper No. 830, 1996.
- [B3] Belmouden Y. and Lestuzzi P., *An equivalent frame model for seismic analysis of masonry and reinforced concrete buildings*, Construction and Building Materials, Vol. 23, pp. 40-53, 2009.
- [B4] Berto L., Sietta A., Scotta R. and Vitaliani R., *Orthotropic damage model for masonry structures*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 55(2), pp. 127-157, 2002.
- [B5] Bićanić N., Stirling C. and Pearce C.J., *Discontinuous modelling of masonry bridges*, Computational Mechanics, Vol. 31 (1-2), pp. 60-68, 2003.
- [B6] Block P., Ciblac T. and Ochsendorf J.A., *Real-time limit analysis of vaulted masonry buildings*, Computers and Structures, Vol. 84, pp. 1841–1852, 2006.
- [B7] Block P., *Equilibrium systems Studies in masonry structure*, MSc Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, 2005.
- [B8] Brencich A., Gambarotta L. and Lagomarsino S., *A macro-element approach to the three-dimensional seismic analysis of masonry buildings*, Proceeding of the 11th European Conference on Earthquake Engineering, Paris, France, p. 602, 1998.

- [B9] Brencich A, and Lagomarsino S., *A macro-element dynamic model for masonry shear walls*, Proceedings of the 4th International Symposium on Computer Methods in Structural Masonry, Philadelphia, Pennsylvania, 1997.
- [C1] Calderini C. and Lagomarsino S., *Continuum Model for In-Plane Anisotropic Inelastic Behavior of Masonry*, Journal of Structural Engineering, Vol. 134(2), pp. 209-220, 2008.
- [C2] Calì I., Marletta M. and Pantò B., *A new discrete element model for the evaluation of the seismic behaviour of unreinforced masonry buildings*, Engineering Structures, Vol. 40, pp. 327-338, 2012.
- [C3] Carocci C.F., *Guidelines for the safety and preservation of historical centres in seismic areas*, Proceedings of the 3rd International Seminar on Historical Constructions, Guimaraes, Portugal, pp. 145–165, 2001.
- [C4] Carol I., Prat P. and López C.M., *Normal/Shear Cracking Model: Application to Discrete Crack Analysis*, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 123 (8), pp. 765–773, 1997.
- [C5] Casolo S. and Peña F., *Rigid element model for in-plane dynamics of masonry walls considering hysteretic behaviour and damage*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 36, pp. 1029–1048, 2007.
- [C6] Comité Européen de Normalisation (CEN), *Eurocode 8: Design of Structures for Earthquake Resistance, EN 2004-1-1*, Brussels, 2004.
- [C7] Chen S.Y., Moon F.L., and Yi T., *A macroelement for the nonlinear analysis of in-plane unreinforced masonry piers*, Engineering Structures, Vol. 30, pp. 2242–2252, 2008.
- [C8] Clemente P., *Introduction to the dynamics of stone arches*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 27, pp. 513-522, 1998.
- [C9] Clemente R., Roca P. and Cervera M., *Damage model with crack localization - application to historical buildings*, Proceedings of the 5th International Conference on Structural Analysis of Historical Constructions, New Delhi, India, pp. 1125-1135, 2006.
- [C10] Coulomb C.A., *Essai sur une application des regles des maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*, Mémoires de mathématique et de physique

- présentés à l'académie royal des sciences per divers savants et lus dans ses assemblées, Paris, Vol. 1, pp. 343–382, 1773.
- [C11] Croci G., *The Colosseum: safety evaluation and preliminary criteria of intervention*, Structural Analysis of Historical Constructions, Barcelona 1995.
- [C12] Cundall P.A. and Hart R.D., *Numerical modelling of discontinua*, Engineering Computations, Vol. 9(2), pp. 101-113, 1994.
- [C13] Cundall P.A. and Strack O.D.L., *A discrete numerical model for granular assemblies*, Geotechnique, Vol. 29, pp. 47-65, 1979.
- [C14] Cundall P.A., *A computer model for simulating progressive large scale movements in blocky rock systems*, Proceedings of the International Symposium on Rock Fracture, Nancy, France, Paper No. 11-8, 1971.
- [C15] Cundall P.A., *Formulation of a three-dimensional distinct element model – Part I: A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol. 25(3), pp. 107-116, 1988.
- [D1] De Luca A., Giordano A. and Mele E., *A simplified procedure for assessing the seismic capacity of masonry arches*, Engineering Structures, Vol. 26, pp. 1915–1929, 2004.
- [D2] DeJong M.J., *Seismic Assessment Strategies for Masonry Structures*, PhD Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, USA, 2009.
- [D3] Demirel I.O., *A nonlinear equivalent frame model for displacement based analysis of unreinforced brick masonry buildings*, PhD Dissertation, School of natural and applied sciences of middle east technical university, 2010.
- [D4] Drei A. and Fontana A., *Response of multiple-leaf masonry arch-tympani to dynamic and static loads*, Proceedings of the 8th International Conference on Structural Studies, Repairs, and Maintance of Heritage Architecture, Halkidiki, Greece, pp. 267-276, 2003.
- [F1] Fajfar P., *A non-linear analysis method for performance-based seismic design*, Earthquake Spectra, Vol. 16(3), pp. 573–592, 2000.



- [F2] Fajfar P., *Capacity spectrum method based on inelastic demand spectra*, Earthquake Engineering & Structural Dynamics, Vol. 28, pp. 979–993, 1999.
- [G1] Galasco A., Lagomarsino S., Penna A. and Resemini S., *Non-linear seismic analysis of masonry structures*, Proceedings of the 13th World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver, Canada, 2004.
- [G2] Gambarotta L. and Lagomarsino S., *Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls, Part I: the mortar joint model and its applications*, Bulletin Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 26(4), pp. 423-439, 1997.
- [G3] Gambarotta L. and Lagomarsino S., *Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls, Part II: the continuum model and its application*, Bulletin Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 26(4), pp. 441-462, 1997.
- [G4] Gambarotta L. and Lagomarsino S., *Modelling unreinforced brick masonry walls*, Proceedings of the US-Italy Workshop on guidelines for seismic evaluation and rehabilitation of unreinforced masonry buildings, Pavia, pp. 4-29, 1994.
- [G5] Gilbert M. and Melbourne C., *Rigid-block analysis of masonry structures*, The Structural Engineer, Vol. 72, pp. 356-361, 1994.
- [G6] Gilbert M., Casapulla C. and Ahmed H.M., *Limit analysis of masonry block structures with non-associative frictional joints using linear programming*, Computers and Structures, Vol. 84, pp. 873–887, 2006.
- [G7] Giuffrè A., *Seismic safety and strengthening of historical buildings and urban fabrics*, Proceedings of the 10th World Conference on Earthquake Engineering, Madrid, Spain, Vol. 11, pp. 6583-6596, 1994.
- [G8] Giuffrè A., *Vulnerability of historical cities in seismic areas and conservation criteria*, In: Congress “Terremoti e civiltà abitativa”, Annali di Geofisica, Bologna, 1995.
- [G9] Gopalaratnam V.S. and Shah S.P., *Softening response of plain concrete in direct tension*, ACI Journal, Vol. 82, pp. 310-323, 1985.
- [G10] Gotovac B., *Mehanika deformabilnog tijela, Zapisi s predavanja*, 2012.

- [G11] Gotovac B., *Mehanika II, Zapisi s predavanja*, 2012.
- [G12] Gotovac B., *Stari most, Ceste i Mostovi*, Vol. 50 (7-9), pp. 23-33, 2004.
- [H1] Hart R.D., Cundall P.A. and Lemos J.V., *Formulation of a three-dimensional distinct element model—Part II: Mechanical calculations*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol. 25(3), 117-125, 1988.
- [H2] Harvey B. and Maunder E., *Thrust line analysis of complex masonry structures using spreadsheets*, Proceedings of the 3rd International Seminar on Historical Constructions, Guimaraes, Portugal, pp. 521–528, 2001.
- [H3] Heyman J., *Couplet's engineering memoirs 1726-33*, History and Technology, Vol. 1, pp. 21-44, 1976.
- [H4] Heyman J., *The safety of masonry arches*, International Journal of Mechanical Sciences Vol. 11, pp. 363–385, 1969.
- [H5] Heyman J., *The stone skeleton*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 2, 249-279, 1966.
- [H6] Hogan S.J., *The many steady state responses of rigid block under harmonic forcing*, Bulletin Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 19, pp. 1057-1071, 1990.
- [H7] Hordijk D.A., *Tensile and tensile fatigue behaviour of concrete – experiments, modelling and analyses*, Heron, Vol. 37 (1), pp. 3-79, 1992.
- [H8] Housner G.W., *The behaviour of inverted pendulum structures during earthquakes*, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 53 (2), pp. 403-417, 1963.
- [K1] Kooharian A., *Limit analysis of voussoir (segmental) and concrete arches*, Journal of the American Concrete Institute, Vol. 24 (4), pp. 317–328, 1952.
- [K2] Kožar I., *Metoda konačnih elemenata, Zapisi s predavanja*, 2012.
- [L1] Lagomarsino S., *On the vulnerability assessment of monumental buildings*, Bulletin of Earthquake Engineering, Vol. 4, pp. 445-463, 2006.

- [L2] Lemos J.V., *Assesment of the ultimate load of a masonry arch using discrete elements*, Proceedings of the 3rd International Symposium on Computer Methods in Structural Masonry, pp. 294-302, 1995.
- [L3] Lemos J.V., *Discrete element modelling of the seismic behaviour of stone masonry arches*, Proceedings of the 4th International Symposium on Computer Methods in Structural Masonry, Florence, Italy, pp. 220-227, 1997.
- [L4] Lemos J.V., *Modeling of historical masonry with discrete elements*, Proceedings of the 3th European Conference on Computational Mechanics, Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering, Lisabon, Portugal, pp. 375-392, 2006.
- [L5] Lenci S. and Rega G., *A dynamical systems approach to the overturning of rocking blocks*, Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 28, pp. 527-542, 2006.
- [L6] Lipscombe P.R. and Pellegrino S., *Free Rocking of Prismatic Blocks*, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 119, pp. 1387-1410, 1993.
- [L7] Livesley R.K., *Limit analysis of structures formed from rigid blocks*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 2, pp. 1853–1871, 1978.
- [L8] Lofti H.R. and Shing P.B., *Interface model applied to fracture of masonry structures*, Journal of Structural Engineering, Vol. 120 (1), pp. 63-80, 1994.
- [L9] Lourenço P.B. and Rots J.G., *A multi-surface interface model for the analysis of masonry structures*, Journal of the Engineering Mechanics, Vol. 123, pp. 660-668, 1997.
- [L10] Lourenço P.B., Borst R. and De Rots J.G., *A plane stress softening plasticity model for orthotropic materials*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 40, pp. 4033-4057, 1997.
- [L11] Lourenço P.B., *Computational strategies for masonry structures*, Ph.D. Dissertation, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 1996.
- [L12] Lourenço P.B., *Computations on historic masonry structures*, Progress in Structural Engineering and Materials, Vol. 4, pp. 301-319, 2002.

- [L13] Lourenço P.B., Rots J.G. and Blaauwendraad J., *Continuum model for masonry: Parameter estimation and validation*, Journal of Structural Engineering, Vol. 124, pp. 642-652, 1998.
- [M1] Macchi G., *Diagnosis of the façade of St. Peter's Basilica in Rome*, Proceedings of the 3rd International Seminar on Historical Constructions, Guimarães, Portugal, pp. 309-317, 2001.
- [M2] Macchi G., Ruggeri M., Eusebio M., and Moncecchi M., *Structural assessment of the leaning tower of Pisa*, Proceedings of the International Symposium on Structural Preservation of the Architectural Heritage, Rome, Italy, pp. 401-408, 1993.
- [M3] Macorini L. and Izzuddin B.A., *A non-linear interface element for 3D mesoscale analysis of brick-masonry structure*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 85 (12), pp. 1475-1608, 2011.
- [M4] Mallardo V., Malvezzi R., Milani E. and Milani G., *Seismic vulnerability of historical masonry buildings: a case study in Ferrara*, Engineering Structures, Vol. 30, pp. 2223-2241, 2008.
- [M5] Mamaghani I.H.P., Aydan O. and Kajikawa Y., *Analysis of masonry structures under static and dynamic loading by discrete finite element method*, Journal of Structural Mechanics and Earthquake Engineering, Vol. 16, pp. 75-86, 1999.
- [M6] Melbourne C. and Gilbert M., *The application of limit analysis techniques to masonry arch bridges*, Proceedings of the Centenary Year Bridge Conference, Cardiff, Wales, pp. 193-198, 1994.
- [M7] Meštrović M., Rak M., Duvnjak I. i Krolo J., *Izvjješće o mjerenju sila u bakrenim klampama na Protironu- Peristil Dioklecijanova palača u Splitu*, Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet, Broj: 180-12/2012, Zagreb, 2012.
- [M8] Mihanović A., *Dinamika konstrukcija*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 1995.

- [M9] Mola F. and Vitaliani R., *Analysis, diagnosis and preservation of ancient monuments: the St. Mark's Basilica in Venice*, Structural Analysis of Historical Constructions, CIMNE, pp. 166-188, 1997.
- [M10] Molins C. and Roca P., *Capacity of masonry arches and spatial frames*, Journal of Structural Engineering, Vol. 124, pp. 653-663, 1997.
- [M11] Munjiza A., Andrews K.R.F. and White J.K., *Combined single and smeared crack model in combined finite-discrete element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 44, pp. 41-57, 1999.
- [M12] Munjiza A., Andrews K.R.F. and White J.K., *NBS contact detection algorithm for bodies of similar size*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 43, pp. 131-149, 1998.
- [M13] Munjiza A., Andrews K.R.F. and White J.K., *Penalty function method for combined finite-discrete element system comprising large number of separate bodies*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 49, pp. 1377-1396, 2000.
- [M14] Munjiza A. and John N.W.M., *Mesh size sensitivity of the combined FEM/DEM fracture and fragmentation algorithms*, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 69 (2), pp. 281-295, 2001.
- [M15] Munjiza A., Knight E.E. and Rouiger E., *Computational mechanics of discontinua*, John Wiley & Sons, 2012.
- [M16] Munjiza A., Owen D.R.J. and Bicanic N., *A combined finite-discrete element method in transient dynamics of fracturing solids*, Engineering Computations, Vol. 12, pp. 145-174, 1995.
- [M17] Munjiza A., *The combined finite-discrete element method*, John Wiley & Sons, 2004.
- [O1] Ochsendorf J.A., *Collapse of masonry structures*, PhD thesis, Department of Engineering, University of Cambridge, Cambridge, UK, 2002.
- [O2] Oliveira D.V., *Experimental and numerical analysis of blocky masonry structures under cyclic loading*, Ph.D. Dissertation, University of Minho, Minho, Portugal, 2003.

- [O3] Oppenheim I.J., *The masonry arch as a four-link mechanism under base motion*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 21, pp. 1005-1017, 1992.
- [O4] Orduña A. and Lourenço P., *Cap model for limit analysis and strengthening of masonry structures*, Journal of Structural Engineering, Vol. 129 (10), pp. 1367-1375, 2003.
- [O5] Orduña A. and Lourenço P.B., *Three-dimensional limit analysis of rigid blocks assemblages, Part II: Load-path following solution procedure and validation*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 42 (18–19), pp. 5161–5180, 2005.
- [O6] Orduña A. and Lourenço P.B., *Three-dimensional limit analysis of rigid block assemblages. Part I: Torsion failure on frictional interfaces and limit analysis formulation*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 42(18–19), 5140–5160, 2005.
- [P1] Page A.W., *Finite element model for masonry*, Journal of the Structural Division, Vol. 104(8), pp. 1267-1285, 1978.
- [P2] Pagnoni T. and Vanzi I., *Experimental and numerical study of the seismic response of block structures*, Proceedings of the 3rd International Symposium on Computer Methods in Structural Masonry, Lisbon, Portugal, pp. 213–222, 1995.
- [P3] Pagnoni T., *Seismic analysis of masonry and block structures with the discrete element method*, In: Proc. 10th European conference on earthquake engineering, Vol. 3, pp. 1674-1694, 1994.
- [P4] Papantonopoulos C., Psycharis I.N., Papastamatiou D.Y., Lemos J.V. and Mouzakis H., *Numerical prediction of the earthquake response of classical columns using the distinct element method*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 31, pp. 1699-1717, 2002.
- [P5] Pearce CJ, Thavalingam A, Liao Z. and Bićanić N., *Computational aspects of the discontinuous deformation analysis framework for modelling concrete fracture*, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 65, pp. 283-298, 2000.
- [P6] Pegon P., Pinto A.V. and Gérardin M., *Numerical modelling of stone-block monumental structures*, Computers & Structures, Vol. 79 (22-25), pp. 2165-2181, 2001.

- [P7] Pela L., Aprile A. and Benedetti A., *Seismic assessment of masonry arch bridges*, Engineering Structures, Vol. 31, pp. 1777-1788, 2009.
- [P8] Pela L., Cervera M. and Roca P., *An orthotropic damage model for the analysis of masonry structures*, Construction and Building Materials, (in press), 2012.
- [P9] Pena F., Prieto F., Laurencu P.B., Campos Costa A. and Lemos J.V., *On the dynamics of rocking motions of single rigid-block structures*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 36, pp. 2383-2399, 2007.
- [P10] Petrinic N., *Aspects of discrete element modelling involving facet-to-facet contact detection and interaction*, Ph.D. Dissertation, University of Wales, U.K., 1996.
- [P11] Pluijm, R. van der, *Material properties of masonry and its components under tension and shear*, In Proc. 6th Canadian Masonry Symposium, eds. V.V. Neis, Saskatoon, Saskatchewan, Canada, pp. 675-686, 1992.
- [P12] Pluijm, R. van der, *Shear behavior of bed joints*, In Proc. 6th North American Masonry Conf., eds. A.A. Hamid and H.G. Harris, Drexel University, Philadelphia, Pennsylvania, USA, pp. 125-136, 1993.
- [P13] Pluijm, R. van der and Vermaltfoort, A.T., *Deformation controlled tension and compression tests in units, mortar and masonry* (in Dutch). Report B-91-0561, TNO-Bouw, Delft, the Netherlands, 1991.
- [P14] Poleni G., *Memorie storiche della gran cupola del tempio Vaticano*, Stamperia del seminario, Padova, 1743.
- [P15] Pompei A., Scalia A. and Sumbatyan M.A., *Dynamics of rigid blocks due to horizontal ground motion*, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 124, pp. 713-717, 1998.
- [P16] Prieto F., *On the dynamics of rigid-block structures applications to SDOF masonry collapse mechanisms*, PhD dissertation, Guimarães, Portugal, University of Minho, 2007.
- [P17] Psycharis I.N., Lemos J.V., Papastamatiou D.Y., Zambas C. and Papantonopoulos C., *Numerical study of the seismic behaviour of a part of the Parthenon Pronaos*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 32, pp. 2063-2084, 2003.

- [P18] Psycharis I.N., Papastamatiou D.Y. and Alexandris A.P., *Parametric investigation of the stability of classical columns under harmonic and earthquake excitations*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 29, pp. 1093-1109, 2000.
- [R1] Radnić J., Harapin A., Matešan D., Trogrlić B., Smilović M., Grgić N. and Baloević G., *Numerical model for static and dynamic analysis of masonry structure*, Građevinar, Vol. 63, pp. 529-546, 2011.
- [R2] Radnić J., Harapin A., Smilović M., Grgić N. and Glibić M., *Static and dynamic analysis of the old stone bridge in Mostar*, Građevinar, Vol. 64 (8), pp. 655-665, 2012.
- [R3] Raijmakers, T.M.J. and Vermeltoort, A.T., *Deformation controlled tests in masonry shear walls* (in Dutch). Report B-92-1156, TNO-Bouw, Delft, the Netherlands, 1992.
- [R4] Reinhardt, H.V., *Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete*, Heron, Vol. 29(2), pp. 3-41, 1984.
- [R5] Rivieccio P.G., *Homogenization Strategies and Computational Analyses for Masonry Structures via Micro-mechanical Approach*, Ph.D. Dissertation, University of Napoli Federico II Engineering Faculty, 2006.
- [R6] Roca P, López-Almansa F., Miquel J. and Hanganu A., *Limit analysis of reinforced masonry vaults*, Engineering Structures, Vol. 29, pp. 431–439, 2007.
- [R7] Roca P., Molins C. and Marí A.R., *Strength capacity of masonry wall structures by the equivalent frame method*, Journal of Structural Engineering, Vol. 131(10), pp. 1601–1610, 2005.
- [R8] Rubió J., *Lecture on the organic, mechanical and construction concepts of Mallorca Cathedral (in Catalan)*, Anuario de la asociación de arquitectos de Cataluña, Barcelona, 1912.
- [S1] Scalia A. and Sumbatyan M.A., *Slide rotation of rigid bodies subjected to a horizontal ground motion*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 25, pp. 1139-1149, 1996.
- [S2] Schlegel R. and Rautenstrauch K., *Failure analysis of masonry shear walls*, In Proc. 1st International UDEC/3DEC Symposium on Numerical Modelling of Discrete Materials in



- Geotechnical Engineering, Civil Engineering And Earth Science, Bochum, Germany, pp. 15–18, 2004.
- [S3] Senthivel R. and Lourenço P.B., *Finite element modelling of deformation characteristics of historical stone masonry shear walls*, Engineering Structures, Vol. 31, pp. 1930-1943, 2009.
- [S4] Shenton H.W. and Jones N.P., *Base excitation of rigid bodies, I: Formulation*, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 117, pp. 2286-2306, 1991.
- [S5] Shenton H.W. and Jones N.P., *Base excitation of rigid bodies, II: Periodic slide-rock response*, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 117, pp. 2307-2328, 1991.
- [S6] Shenton H.W., *Criteria for initiation of slide, rock, and slide-rock rigid-body modes*, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 122, pp. 690-693, 1996.
- [S7] Shi G.H. and Goodman R.E., *Discontinuous deformation analysis- A new method for computing stress, strain and sliding of block systems*, In key questions in rock mechanics, Balkema, pp. 381-393, 1988.
- [S8] Sima J.F., Roca P. and Molins C., *Nonlinear response of masonry wall structure subjected to cyclic and dynamic loading*, Engineering Structures, Vol. 33, pp. 1955-1965, 2011.
- [S9] Sincaian G.E., *Seismic behaviour of blocky masonry structures. A discrete element method approach*, PhD Dissertation, IST, Lisbon, Portugal, 2001.
- [S10] Sinopoli A. and Sepe V., *Coupled motion in the dynamic analysis of a three block structure*, Applied Mechanics Reviews, Vol. 46, pp. 185-197, 1993.
- [S11] Snell G., *On the stability of arches*, Minutes and Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Vol. 5, pp. 439-474, 1846.
- [S12] Spanos P.D. and Koh A., *Rocking of rigid blocks due to harmonic shaking*, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 110, pp. 1627-1642, 1984.
- [S13] Spanos P.D., Roussis P.C. and Politis N.P.A., *Dynamic analysis of stacked rigid blocks*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 21, pp. 559-578, 2001.
- [Š1] Šimić V., *Otpornost materijala I*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

- [T1] Tso W.K. and Wong C.M., *Steady state rocking response of rigid blocks, Part I: Analysis*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 18, pp. 89-106, 1989.
- [T2] Tomaževič M., *Earthquake-resistant design of masonry buildings*, Earthquake Imperial College Press, 1999.
- [V1] Vamvatsikos D. and Cornell C.A., *Incremental dynamic analysis*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 31, pp. 491-514, 2002.
- [V2] Vasconcelos G and Lourenço PB., *Experimental characterization of stone masonry in shear and compression*, Construction and Building Materials, Vol. 23, pp. 3337-3345, 2009.
- [V3] Vasconcelos G., *Experimental investigations on the mechanics of stone masonry: Characterization of granites and behaviour of ancient masonry shear walls*, PhD dissertation, Guimarães, Portugal, University of Minho, 2005.
- [V4] Vitruvius, *The ten books of architecture*, Dover Publications, New York, 1960.
- [W1] Winkler T., Meguro K. and Yamazaki F., *Response of rigid body assemblies to dynamic excitation*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 24, pp. 1389-1408, 1995.
- [X1] Xiang J., Munjiza A., Latham J.P. and Guises R., *On the validation of DEM and FEM/DEM models in 2D and 3D*, Engineering Computations, Vol. 26, pp. 673-687, 2009.
- [X2] Xu C., Xiangli C. and Bin L., *Modeling of influence of heterogeneity on mechanical performance of unreinforced masonry shear walls*, Construction and Building Materials, Vol. 26, pp. 90-95, 2012.
- [Y1] Yim C., Chopra A.K. and Penzien J., *Rocking response of rigid blocks to earthquakes*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 8, pp. 565-587, 1980.
- [Y2] Yim S.C.S. and Lin H., *Nonlinear impact and chaotic response of slender rocking objects*, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 117, pp. 2079-2100, 1991.

- [Ž1] Živaljić N., *Metoda konačno-diskretnih elemenata za seizmičku 2D analizu AB konstrukcija*, Disertacija, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Sveučilište u Splitu, 2012.
- [Ž2] Živaljić N., Smoljanović H. and Nikolić Ž., *A combined finite-discrete element model for RC structures under dynamic loading*, Engineering Computations, 2013 (accepted for publication).

## ***Životopis***

Hrvoje Smoljanović, dipl. ing. građ. rođen je 20. listopada 1982. godine u Splitu gdje je završio osnovnu školu i Opću gimnaziju. Akademske godine 2001./2002. upisao je Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu na kojem je diplomirao 22. prosinca 2005. godine kod prof. dr. sc. Ante Mihanovića te stekao stručni naziv diplomirani inženjer građevinarstva.

Od 12. prosinca 2006. do 30. rujna 2007. radi kao stručni suradnik na Katedri za teoriju konstrukcija Građevinsko-arhitektonskog fakultetu u Splitu. 1. listopada 2007. godine na istom fakultetu zasniva radni odnos u svojstvu znanstvenog novaka, pri Katedri za teoriju konstrukcija, te sudjeluje u nastavi održavajući vježbe iz predmeta Mehanika I, Građevna statika I te Građevna statika II na Preddiplomskom sveučilišnom studiju građevinarstva, Dinamički modeli potresnog inženjerstva na Diplomskom studiju građevinarstva te Projektiranje i proračun građevina pomoću računala i Zidane konstrukcije na Stručnom studiju građevinarstva

Akademske godine 2006./2007. upisao je Poslijediplomski znanstveni studij iz znanstvenog područja Tehničkih znanosti, znanstveno polje Građevinarstvo, smjer Konstrukcije.

U proteklom periodu objavio je u koautorstvu 14 znanstvenih članaka u časopisima i zbornicima znanstvenih skupova u zemlji i inozemstvu.